VŠB – TUO 27.11.2025

Diskrétní matematika
Projekt

číslo zadání: 3

Příklad	Poznámky
1	
2	

LAK0028 Petr Lakomý

Abstrakt

Projekt je rozdělen do dvou hlavních částí. První část se věnuje příkladu z kombinatoriky, druhá pak příkladu z teorie grafů.

V první části je řešen problém populace páru lišek, které byly vysazeny na ostrov v rámci záchranného programu. Tento problém je vyřešen pomocí rekurence.

Druhá část se zaměřuje na konstrukci dvou neizomorfních grafů z dané grafové posloupnosti, přičemž je využita Havel-Hakimiho věta.

1 Kombinatorika

1.1 Populace lišky ostrovní

Na odlehlý ostrov byly v rámci záchranného programu vysazeny **tři páry lišek ostrovních**. Ve druhém roce bylo napočítáno již **sedm párů**.

Od třetího roku se vývoj populace začal řídit přirozenými vlivy prostředí a přítomností predátorů. Biologové zjistili, že:

- přibližně $\frac{3}{4}$ všech párů přežívá do dalšího roku,
- z párů, které jsou na ostrově alespoň dva roky, vzejde každoročně v průměru dalších $\frac{5}{8}$ nových párů,
- predátoři (např. orli mořští) každoročně usmrtí přibližně 2 páry lišek.

Předpokládejme, že tyto vztahy platí beze změny v průběhu dalšich let.

Úkoly

a) Ze slovního popisu sestav **rekurentní rovnici** pro počet párů lišek a_n v n-tém roce.

b) Pomocí této rekurence vypočítej počty párů v letech 3 až 7 (zaokrouhli na **celá čísla**).

c) Najdi **vzorec pro n-tý člen posloupnosti**, která je řešením této rekurentní rovnice.

Poznámka

V příkladu nezohledňujeme omezené množství potravy ani prostorové možnosti ostrova. Nezávisle na těchto vlivech daný model rychle konverguje k jisté konstatní hodnotě na které se počet párů ustálí.

(6b)

Řešení

a) Sestavení rekurentní rovnice pro počet párů lišek a_n v n-tém roce.

Ze zadání víme, že v prvním roce byly vysazeny tří páry lišek a v druhém roce jich už bylo sedm.

$$a_1 = 3 \text{ a } a_2 = 7$$

Kdybychom chtěli vyjádřit počet páru ve třetím roce, víme, že přežily $\frac{3}{4}$ párů z předchozího roku (druhého). Navíc z párů, které jsou na ostrově alespoň dva roky (v tomto případě původní první pár), vzejde $\frac{5}{8}$ nových párů. Bohužel dojde i ke každoročnímu usmrcení vlivem predátorů, musíme tedy odečíst dva páry.

$$a_3 = \tfrac{3}{4} \cdot a_2 + \tfrac{5}{8} \cdot a_1 - 2$$

Pro počet párů lišek a_n v n-tém roce ($n \geq 3$) platí následující rekurentní rovnice.

$$a_n = \tfrac{3}{4} \cdot a_{n-1} + \tfrac{5}{8} \cdot a_{n-2} - 2$$

b) Výpočet počtu párů v letech tři až sedm.

Použijeme sestavenou rekurentní rovnici a dle zadání budeme zaokrouhlovat na celá čísla.

$$\begin{aligned}
a_3 &= \tfrac{3}{4} \cdot a_2 + \tfrac{5}{8} \cdot a_1 - 2 = \tfrac{3}{4} \cdot 7 + \tfrac{5}{8} \cdot 3 - 2 \approx 5 \\
a_4 &= \tfrac{3}{4} \cdot a_3 + \tfrac{5}{8} \cdot a_2 - 2 = \tfrac{3}{4} \cdot 5 + \tfrac{5}{8} \cdot 7 - 2 \approx 6 \\
a_5 &= \tfrac{3}{4} \cdot a_4 + \tfrac{5}{8} \cdot a_3 - 2 = \tfrac{3}{4} \cdot 6 + \tfrac{5}{8} \cdot 5 - 2 \approx 6 \\
a_6 &= \tfrac{3}{4} \cdot a_5 + \tfrac{5}{8} \cdot a_4 - 2 = \tfrac{3}{4} \cdot 6 + \tfrac{5}{8} \cdot 6 - 2 \approx 6 \\
a_7 &= \tfrac{3}{4} \cdot a_6 + \tfrac{5}{8} \cdot a_5 - 2 = \tfrac{3}{4} \cdot 6 + \tfrac{5}{8} \cdot 6 - 2 \approx 6
\end{aligned}$$

Je zřejmé, že při dosazování již zaokrouhlených počtů párů zůstane i v následujících letech počet párů konstantní, a to 6. Populace lišek se tak ustálí.

c) Nalezení vzorce pro n-tý člen posloupnosti.

Máme lineární nehomogenní rekurentní rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty.

$$a_n = \tfrac{3}{4} \cdot a_{n-1} + \tfrac{5}{8} \cdot a_{n-2} - 2$$

Řešit budeme nejdříve homogenní část.

$$a_n^H = \tfrac{3}{4} \cdot a_{n-1} + \tfrac{5}{8} \cdot a_{n-2}$$

Což převedeme na charakteristickou rovnici.

$$r^2 - \tfrac{3}{4} \cdot r - \tfrac{5}{8} = 0$$

Charakteristické kořeny jsou:

$$r_1 = \tfrac{5}{4} \text{ a } r_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Potom dostáváme tvar obecného řešeni.

$$a_n^H = \alpha_1 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n$$

Předpokládaný tvar partikulárního řešení je:

$$a_n^P = C \cdot 1^n$$

Tento předpokládaný tvar partikulárního řešení následně dosadíme do rekurentní rovnice.

$$\begin{gathered}
C \cdot 1^n = \tfrac{3}{4} \cdot C \cdot 1^{n-1} + \tfrac{5}{8} \cdot C \cdot 1^{n-2} - 2 \cdot 1^n \quad / \tfrac{1}{1^{n-2}} \\
C \cdot 1^n \cdot 1^{-n+2} = \tfrac{3}{4} \cdot C \cdot 1^{n-1} \cdot 1^{-n+2} + \tfrac{5}{8} \cdot C \cdot 1^{n-2} \cdot 1^{-n+2} - 2 \cdot 1^n \cdot 1^{-n+2} \\
C \cdot 1^2 = \tfrac{3}{4} \cdot C \cdot 1^1 + \tfrac{5}{8} \cdot C \cdot 1^0 - 2 \cdot 1^2 \\
C = \tfrac{3}{4} \cdot C + \tfrac{5}{8} \cdot C - 2 \\
C = \tfrac{11}{8} \cdot C - 2 \\
C - \tfrac{11}{8} \cdot C = -2 \\
-\tfrac{3}{8} \cdot C = -2 \quad / - \tfrac{8}{3} \\
C = \tfrac{16}{3}
\end{gathered}$$

Řešení je pak ve tvaru součtu řešení homogenní části a partikulárního řešení.

$$\begin{gathered}
a_n = a_n^H + a_n^P \\
a_n = \alpha_1 \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{16}{3} \cdot 1^n
\end{gathered}$$

α_1 a α_2 zjistíme ze zadaných a_1 a a_2.

$$\begin{array}{c}
a_1 = \alpha_1 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^1 + \alpha_2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^1 + \dfrac{16}{3} \cdot 1^1 = 3 \\
\underline{a_2 = \alpha_1 \cdot \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 + \alpha_2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{16}{3} \cdot 1^2 = 7} \\
\alpha_1 \cdot \dfrac{5}{4} - \alpha_2 \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{7}{3} \\
\underline{\alpha_1 \cdot \dfrac{25}{16} + \alpha_2 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{3}}
\end{array}$$

Druhou rovnici vynásobíme dvěma a sečteme s první.

$$\begin{gathered}
\alpha_1 \cdot \tfrac{5}{4} + \alpha_1 \cdot \tfrac{50}{16} = -\tfrac{7}{3} + \tfrac{10}{3} \\
\alpha_1 \cdot \tfrac{35}{8} = 1 \\
\alpha_1 = \tfrac{8}{35} \\
\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \tfrac{10}{4} + \tfrac{14}{3} = \tfrac{8}{35} \cdot \tfrac{10}{4} + \tfrac{14}{3} = \tfrac{110}{21}
\end{gathered}$$

Dostáváme tedy řešení dané rekurentní rovnice pro ($n \geq 1$). Tato posloupnost bohužel nekonverguje tak, jak bylo ukázáno při postupném výpočtu počtu párů lišek, neboť nedochází k postupnému zaokrouhlování na celá čísla. Dokonce $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

$$a_n = \tfrac{8}{35} \cdot \left(\tfrac{5}{4}\right)^n + \tfrac{110}{21} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^n + \tfrac{16}{3}$$

2 Teorie grafů

2.1 Číselné posloupnosti

Mějme zadané číselné posloupnosti (5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2) a (5, 5, 4, 4, 2, 1, 1).

Úkoly

a) Ověřte s využitím věty Havla Hakimiho zda jsou zadané posloupnosti grafové. Je-li posloupnost grafová, pak zpětným postupem dle věty Havla Hakimiho zkonstruujte alespoň dva grafy s danou stupňovou posloupností, které nejsou izomorfní. (Zakreslete všechny jednotlivé malé (menší) grafy odpovídající konstrukci dle věty Havla Hakimiho.

b) Pro vámi zkonstruované grafy nalezněte a zapište platné argumenty dokazující, že grafy nejsou izomorfní.

(4b)

Řešení

a) Jsou posloupnosti grafové? Případné zrekonstruování dvou neizomorfních grafů.

$$(5,4,4,3,3,3,2,2) \overset{HH}{\sim} (3,3,2,2,2,2,2) \overset{HH}{\sim} (2,1,1,2,2,2) \overset{HH}{\sim} \overset{\text{přeuspořádání}}{(2,2,2,2,1,1)}$$

$$\overset{HH}{\sim} (1,1,2,1,1) \overset{HH}{\sim} \overset{\text{přeuspořádání}}{(2,1,1,1,1)} \overset{HH}{\sim} (0,0,1,1) \overset{HH}{\sim} \overset{\text{přeuspořádání}}{(1,1,0,0)} \overset{HH}{\sim} (0,0,0)$$

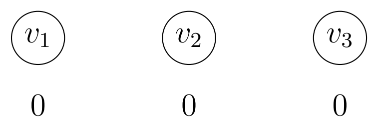
Ano, posloupnost (5,4,4,3,3,3,2,2) je grafová.

$$(5,5,4,4,2,1,1) \overset{HH}{\sim} (4,3,3,1,0,1) \overset{HH}{\sim} \overset{\text{přeuspořádání}}{(4,3,3,1,1,0)} \overset{HH}{\sim} (2,2,0,0,0)$$

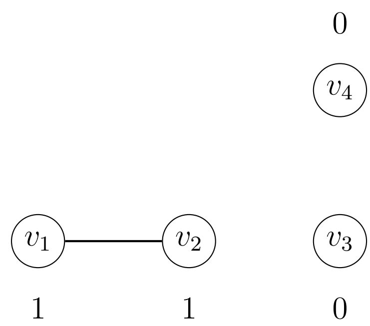
$$\overset{HH}{\sim} (1,-1,0,0)$$

Ne, posloupnost (5,5,4,4,2,1,1) není grafová. Pouze tedy pro první posloupnost budou zkonstruovány dva neizomorfní grafy.

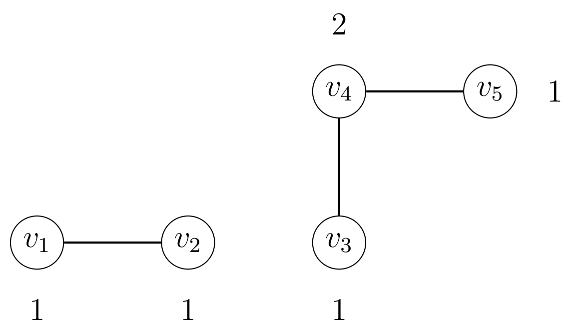
(0,0,0)



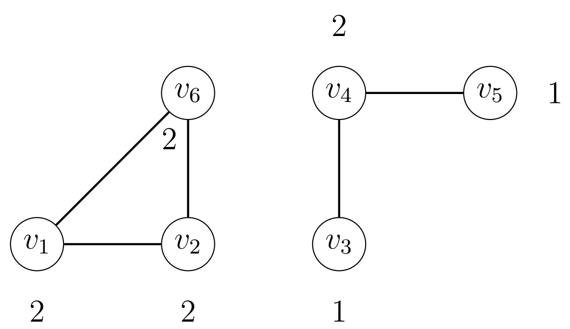
(1,1,0,0)



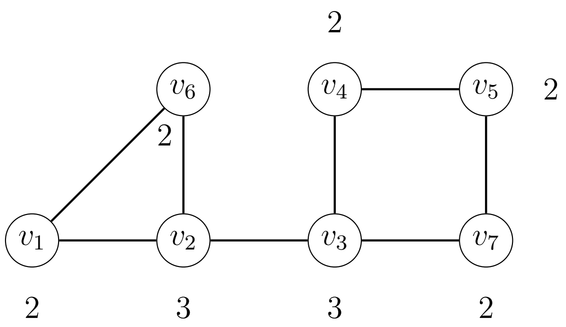
(2,1,1,1,1)



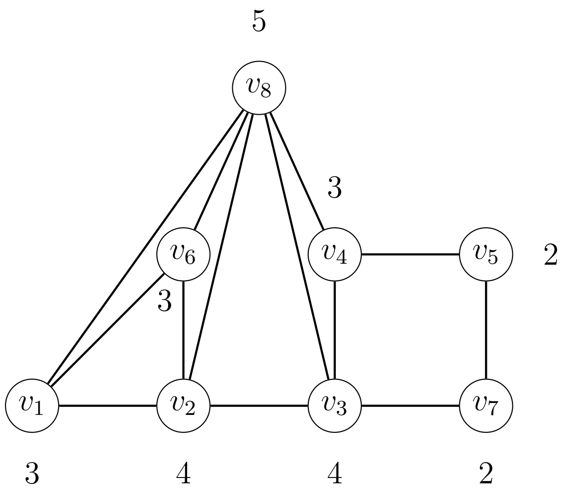
(2,2,2,2,1,1)



(3,3,2,2,2,2,2)

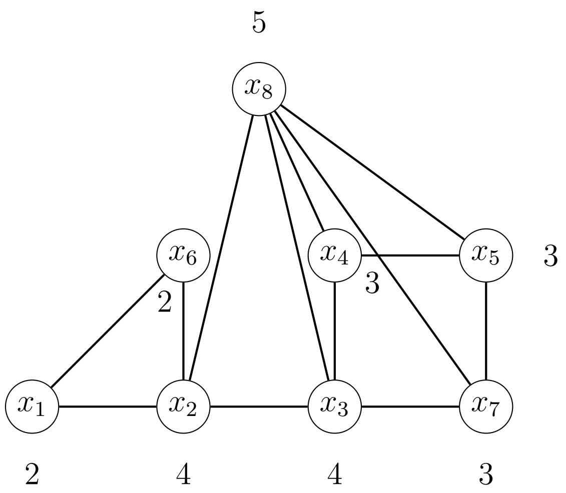


(5,4,4,3,3,3,2,2)



Tímto jsme dostali graf k zadané grafové posloupnosti. Zbývá ještě vytvořit další neizomorfní graf se stejnou stupňovou posloupností. Tím může být například:

(5,4,4,3,3,3,2,2)



b) Důkaz, že tyto grafy nejsou izomorfní.

Pokud se zaměříme na vrcholy stupně čtyři, zjistíme, že:

$$f(v_2) = f(x_3)$$

neboť mají sousední vrcholy se stejným vrcholovým stupněm.

Pokud se ale pokusíme přiřadit i druhý vrchol s vrcholovým stupněm čtyři, zjistíme, že není zachována sousednost.

$$N(v_3) = \{v_2, v_8, v_4, v_7\}$$
$$deg(v_2) = 4$$
$$deg(v_8) = 5$$
$$deg(v_4) = 3$$
$$deg(v_7) = 2$$

$$N(x_2) = \{x_1, x_6, x_8, x_3\}$$
$$deg(x_1) = 2$$
$$deg(x_6) = 2$$
$$deg(x_8) = 5$$
$$deg(x_3) = 4$$

Tyto dva grafy tedy nejsou izomorfní.