Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sous une probabilité risque-neutre Q et considérons le modèle de Ho-Lee dans lequel le taux court vérifie

$$dr_t = adt + \sigma dB_t \tag{1}$$

avec $\sigma > 0$, $a > 0$ et $r_0 \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que $(r_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien. Calculer $Er_t, Var(r_t), Cov(r_s, r_t)$ pour tous $s, t \geq 0$.
2. Calculer $E|r_t - r_s|^p$ pour tout $t \geq 0, p \geq 1$. Le processus r est-il hölderien? de quel ordre?
3. Montrer que pour tout $0 < t < T$ on a
$$\int_t^T B_s ds = (T-t)B_t + \int_t^T (T-s)dB_s.$$
4. Calculer l'espérance et la variance de la variable gaussienne
$$\int_t^T r_s ds.$$
5. Calculer $E\left(\int_t^T r_s ds|\mathcal{F}_t\right)$ et $Var\left(\int_t^T r_s ds|\mathcal{F}_t\right)$ et en déduire le prix $B(t,T)$ du zéro-coupon dans le modèle Ho-Lee ($0 \leq t \leq T$)
6. Ecrire l'EDP des taux associée au modèle (1).

   Soit, dans la suite, $(W_t)_{t\geq 0}$ un autre mouvement brownien (par rapport à la même filtration que B) tel que $\langle B, W\rangle_t = \rho t$ pour tout $t \geq 0$ avec $\rho \in (0,1)$.

   Soit $(x_t)_{t\geq 0}$ la solution de l' équation différentielle stochastique
$$dx_t = k(\theta - x_t)dt + \eta dW_t \tag{2}$$
   avec $x_0 \in \mathbb{R}, \eta > 0, k \in \mathbb{R}$.
7. Donner l'espérance et la covariance du processus $(r_t + x_t)_{t\geq 0}$.
8. Calculer $\lim_{t\to\infty} E(r_t + x_t)$ et $\lim_{t\to\infty} Var(r_t + x_t)$ et discuter le retour à la moyenne.
9. Calculer le prix du zéro-coupon dans le modèle deux facteurs avec les facteurs r et x, i.e. le taux court du modèle est $R(t) = r_t + x_t$ pour tout $t \geq 0$, où r et x sont donnés part (1) et (2).