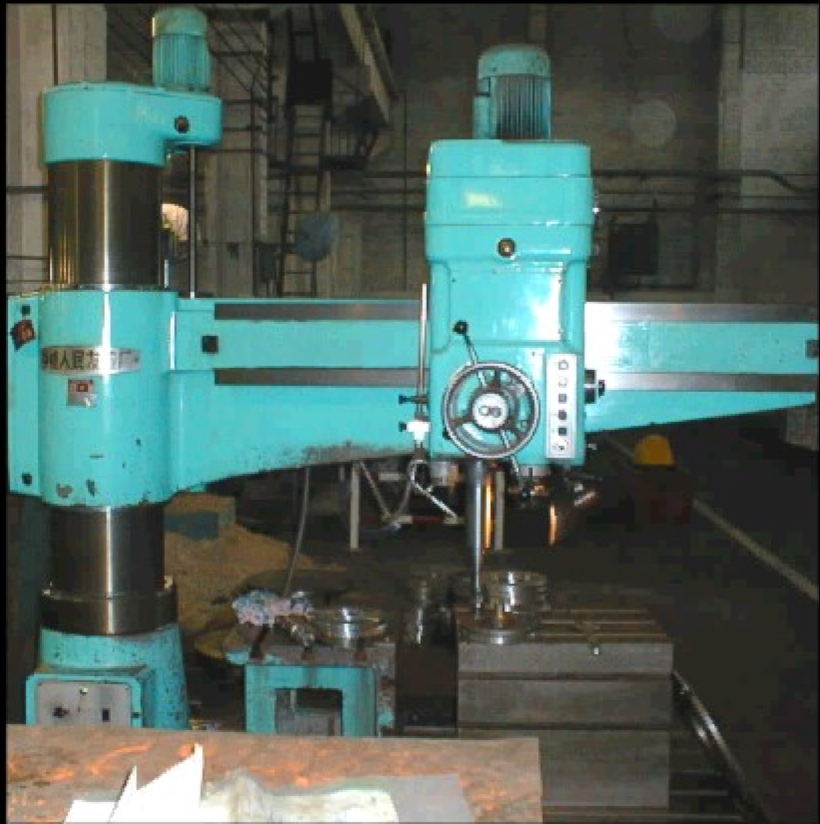
第 六 章

弯 曲 变 形

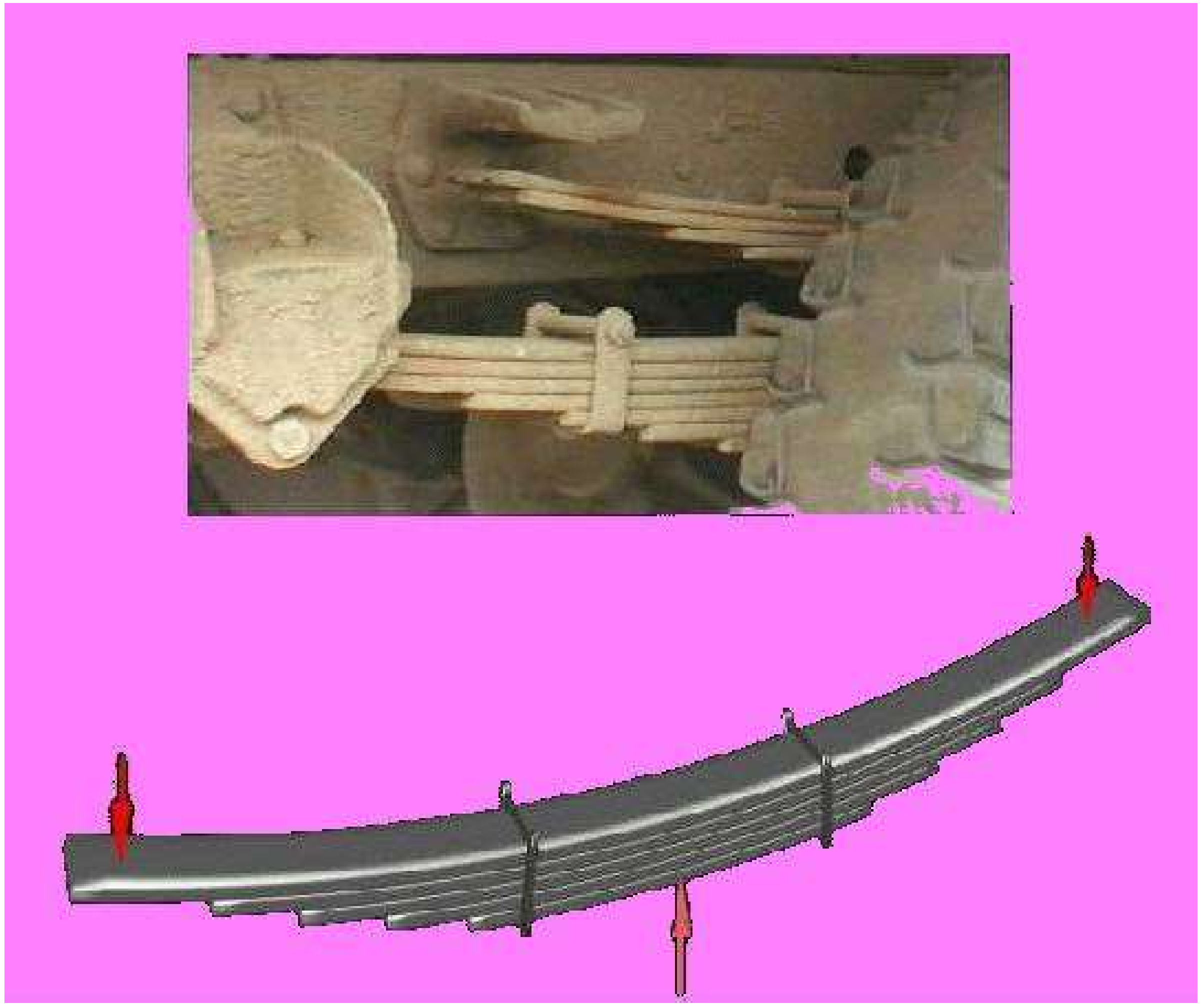
第六章　　弯曲变形

§6-1 工程中的弯曲变形问题

§6-1 工程中的弯曲变形问题

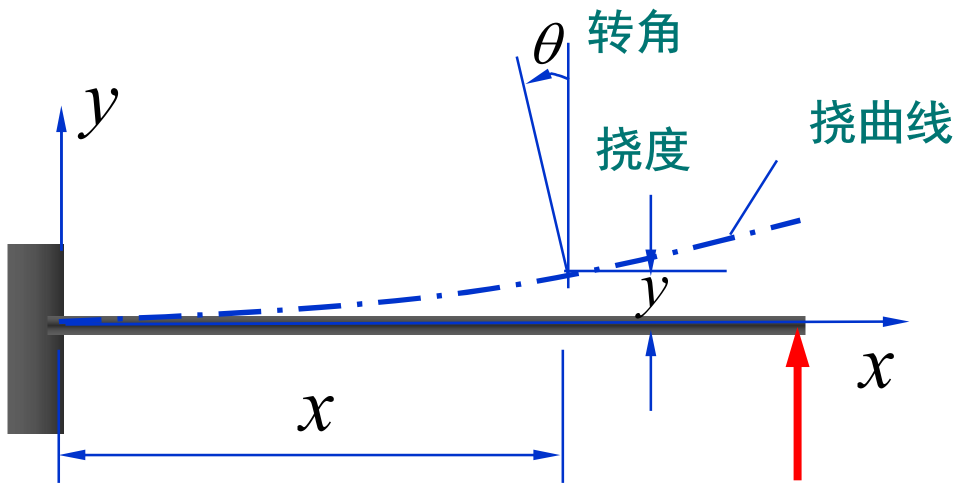


§6-1 工程中的弯曲变形问题



§6-2 挠曲线的微分方程

1. 基本概念



挠曲线方程：

$$y = y(x)$$

挠度y：截面形心在y方向的位移

y 向上为正

转角 θ：截面绕中性轴转过的角度。θ 逆时针为正

由于小变形，截面形心在x方向的位移忽略不计

挠度转角关系为：

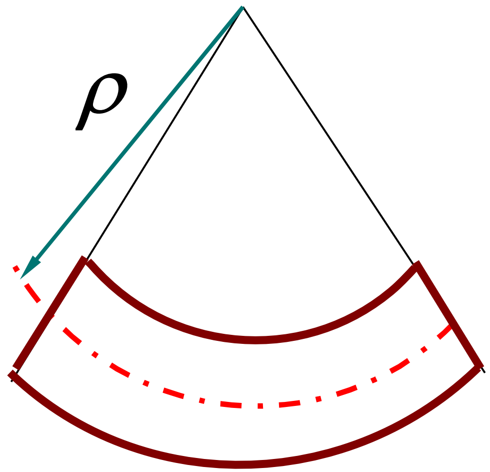
$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dy}{dx}$$

§6-2 挠曲线的微分方程

2. 挠曲线的近似微分方程

推导弯曲正应力时，得到：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI_z}$$



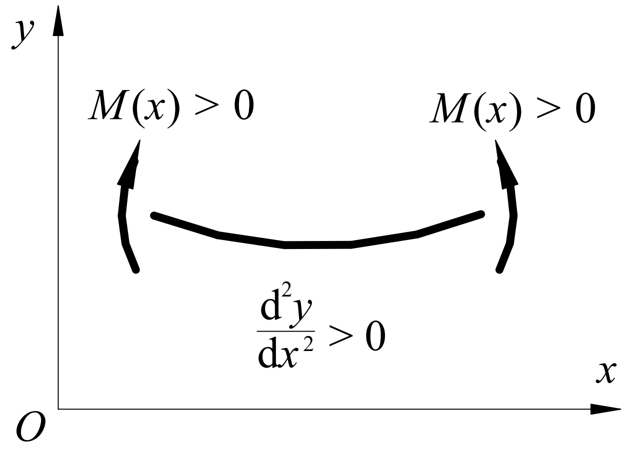
忽略剪力对变形的影响

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI_z}$$

§6-2 挠曲线的微分方程

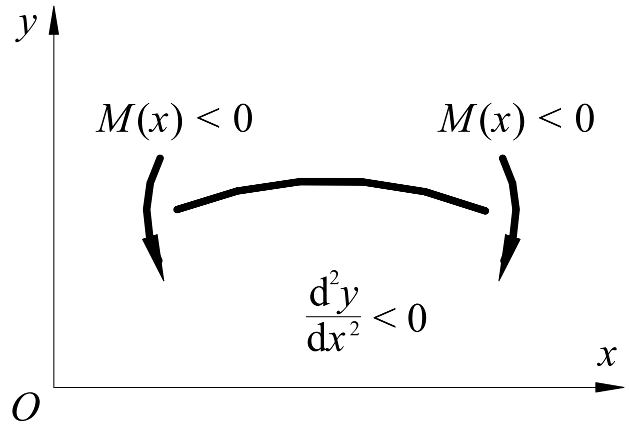
由数学知识可知：

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{[1+(\dfrac{dy}{dx})^2]^3}}$$



略去高阶小量，得

$$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{d^2y}{dx^2}$$



所以 $\pm\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{M(x)}{EI_z}$

§6-2 挠曲线的微分方程

由弯矩的正负号规定可得，弯矩的符号与挠曲线的二阶导数符号一致，所以挠曲线的近似微分方程为：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

由上式进行积分，就可以求出梁横截面的转角和挠度。

§6-3 用积分法求弯曲变形

挠曲线的近似微分方程为：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI_z} \quad \Rightarrow \quad EI_z\frac{d^2y}{dx^2}=M(x)$$

积分一次得转角方程为：

$$EI_z\frac{dy}{dx}=EI_z\theta=\int M(x)dx+C$$

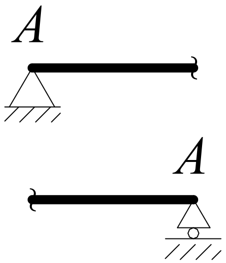
再积分一次得挠度方程为：

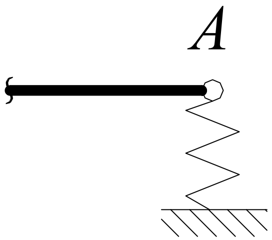
$$EI_zy=\iint M(x)dxdx+Cx+D$$

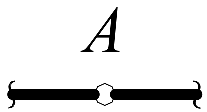
§ 6-3 用积分法求弯曲变形

积分常数C、D 由梁的位移边界条件和光滑连续条件确定。

位移边界条件　　　　　　**光滑连续条件**







$y_A = 0$

$y_A = 0$

$\theta_A = 0$

$y_A = \Delta$

Δ一弹簧变形

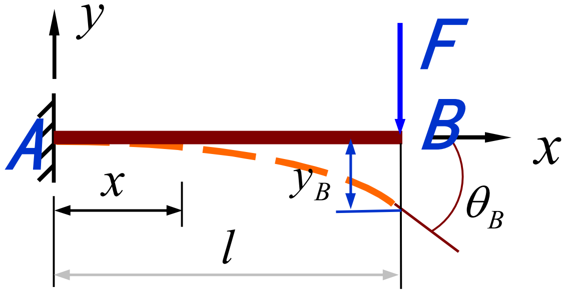
$y_{AL} = y_{AR}$

$\theta_{AL} = \theta_{AR}$

$y_{AL} = y_{AR}$

§6-3 用积分法求弯曲变形

例1　求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知。



解　1）由梁的整体平衡分析可得：

$$F_{Ax}=0,\ F_{Ay}=F(\uparrow),\ M_A=Fl(\circlearrowleft)$$

2）写出x截面的弯矩方程

$$M(x)=-F(l-x)=F(x-l)$$

3）列挠曲线近似微分方程并积分

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M(x)=F(x-l)$$

积分一次

$$EI\frac{dy}{dx}=EI\theta=\frac{1}{2}F(x-l)^2+C$$

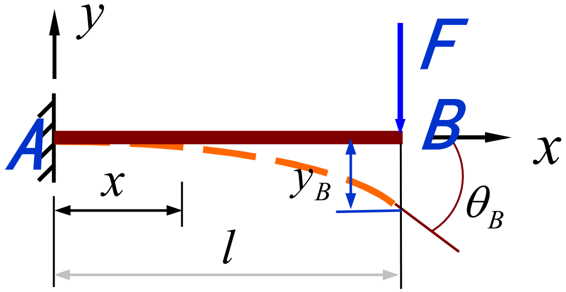
再积分一次

$$EIy=\frac{1}{6}F(x-l)^3+Cx+D$$

§6-3 用积分法求弯曲变形

4）由位移边界条件确定积分常数

$$\begin{cases} x=0, & \theta_A=0 \\ x=0, & y_A=0 \end{cases}$$



代入求解

$$C=-\frac{1}{2}Fl^2, \quad D=\frac{1}{6}Fl^3$$

5）确定转角方程和挠度方程

$$EI\theta=\frac{1}{2}F(x-l)^2-\frac{1}{2}Fl^2$$

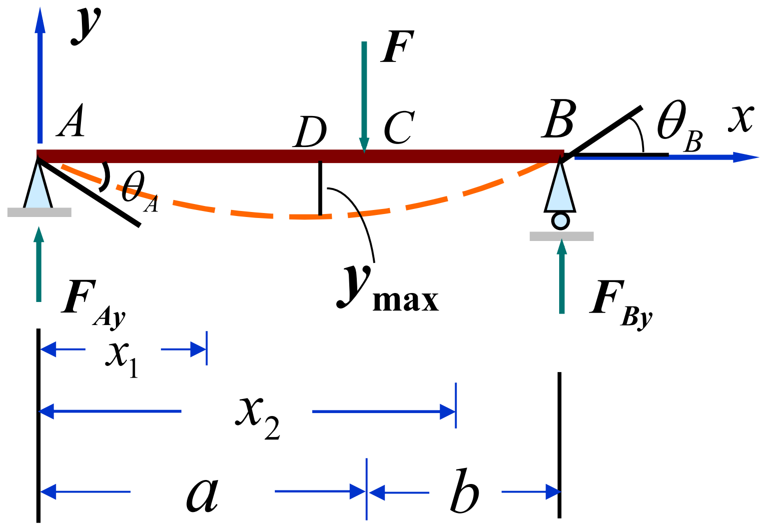
$$EIy=\frac{1}{6}F(x-l)^3-\frac{1}{2}Fl^2x+\frac{1}{6}Fl^3$$

6）确定最大转角和最大挠度

$$x=l, \quad \theta_{\max}=|\theta_B|=\frac{Fl^2}{2EI}, \quad y_{\max}=|y_B|=\frac{Fl^3}{3EI}$$

§ 6-3 用积分法求弯曲变形

例2 求梁的转角方程和挠度方程，并求最大转角和最大挠度，梁的EI已知，$l=a+b$，$a>b$。



解 1）由梁整体平衡分析得：

$$F_{Ax}=0,F_{Ay}=\frac{Fb}{l},F_{By}=\frac{Fa}{l}$$

2）弯矩方程

AC 段：

$$M(x_1)=F_{Ay}x_1=\frac{Fb}{l}x_1,0\le x_1\le a$$

CB 段：

$$M(x_2)=F_{Ay}x_2-F(x_2-a)=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a),\quad a\le x_2\le l$$

§6-3 用积分法求弯曲变形

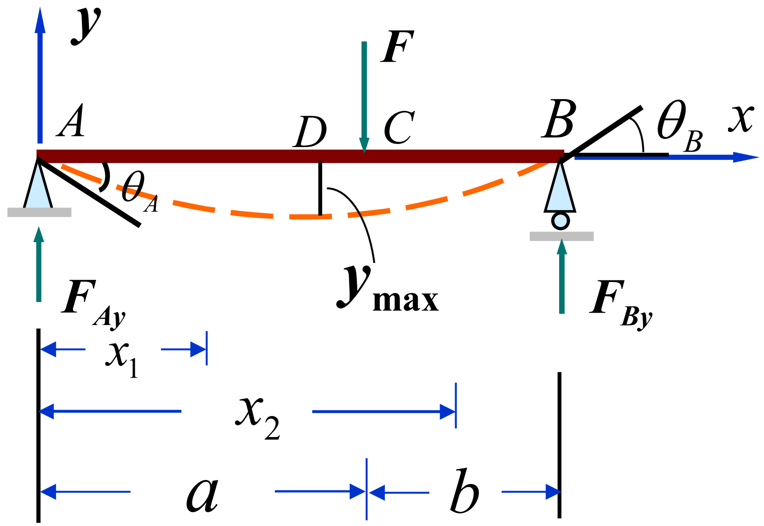
3）列挠曲线近似微分方程并积分

AC 段： $0 \le x_1 \le a$

$$EI\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = M(x_1) = \frac{Fb}{l}x_1$$

$$EI\frac{dy_1}{dx_1} = EI\theta(x_1) = \frac{Fb}{2l}x_1^2 + C_1$$

$$EIy_1 = \frac{Fb}{6l}x_1^3 + C_1x_1 + D_1$$



CB 段： $a \le x_2 \le l$

$$EI\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = M(x_2) = \frac{Fb}{l}x_2 - F(x_2 - a)$$

$$EI\frac{dy_2}{dx_2} = EI\theta(x_2) = \frac{Fb}{2l}x_2^2 - \frac{F}{2}(x_2 - a)^2 + C_2$$

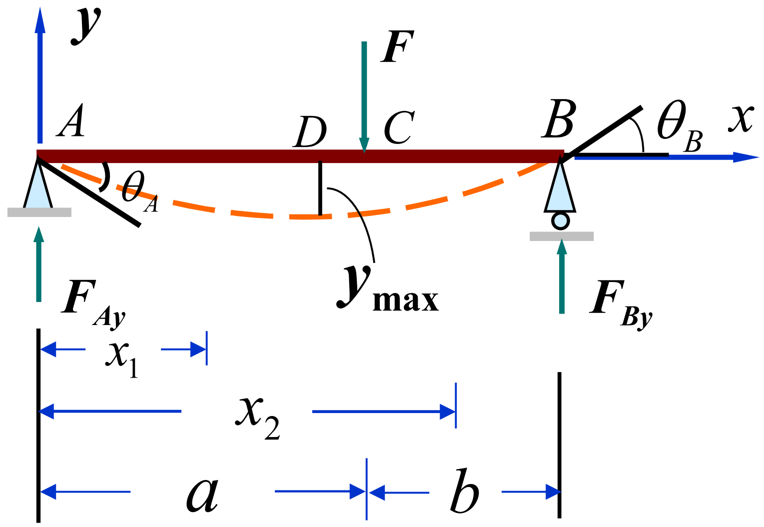
$$EIy_2 = \frac{Fb}{6l}x_2^3 - \frac{F}{6}(x_2 - a)^3 + C_2x_2 + D_2$$

§6-3 用积分法求弯曲变形

4）由边界条件确定积分常数

位移边界条件

$$\begin{cases} x_1 = 0, & y_1(0) = 0 \\ x_2 = l, & y_2(l) = 0 \end{cases}$$



光滑连续条件

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = a, & \theta_1(a) = \theta_2(a) \\ x_1 = x_2 = a, & y_1(a) = y_2(a) \end{cases}$$

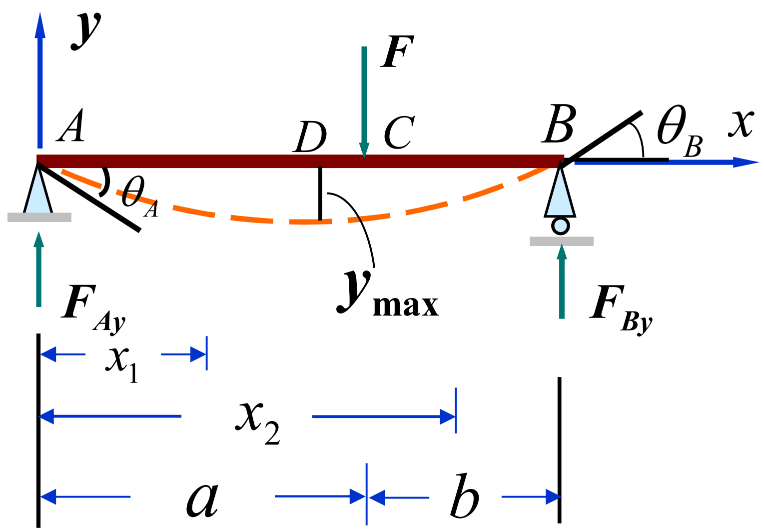
代入求解，得

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = -\dfrac{1}{6}Fbl + \dfrac{Fb^3}{6l} \\ D_1 = D_2 = 0 \end{cases}$$

§ 6-3 用积分法求弯曲变形

5）确定转角方程和挠度方程

AC 段： $0 \le x_1 \le a$



$$EI\theta_1 = \frac{Fb}{2l}x_1^2 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

$$EIy_1 = \frac{Fb}{6l}x_1^3 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)x_1$$

CB 段： $a \le x_2 \le l$

$$EI\theta_2 = \frac{Fb}{2l}x_2^2 - \frac{F}{2}(x_2 - a)^2 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)$$

$$EIy_2 = \frac{Fb}{6l}x_2^3 - \frac{F}{6}(x_2 - a)^3 - \frac{Fb}{6l}(l^2 - b^2)x_2$$

§6-3 用积分法求弯曲变形

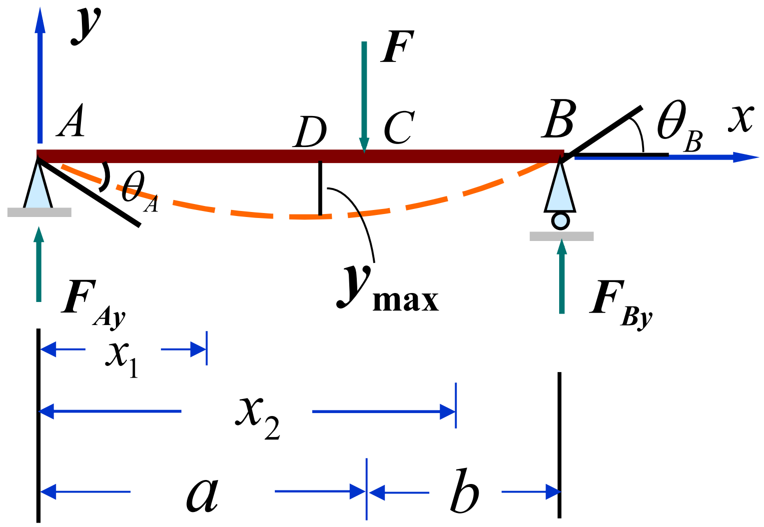
6）确定最大转角和最大挠度

令 $\dfrac{d\theta}{dx}=0$ 得，

$$x=l,\theta_{\max}=\theta_B=\frac{Fab}{6EIl}(l+a)$$

令 $\dfrac{dy}{dx}=0$ 得，

$$x=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}},\quad y_{\max}=-\frac{Fb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}(\Downarrow)$$



§6-3 用积分法求弯曲变形

讨　　论

积分法求变形有什么优缺点？

§6-4 用叠加法求弯曲变形

设梁上有n 个载荷同时作用，任意截面上的弯矩为$M(x)$，转角为 θ ，挠度为y，则有：

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=EIy''=M(x)$$

若梁上只有第 i个载荷单独作用，截面上弯矩为 $M_i(x)$ ，转角为 θ_i ，挠度为 y_i ，则有：

$$EIy''_i=M_i(x)$$

由弯矩的叠加原理知：$\sum_{i=1}^{n}M_i(x)=M(x)$

所以，$$EI\sum_{i=1}^{n}y''_i=EI(\sum_{i=1}^{n}y_i)''=M(x)$$

§6-4 用叠加法求弯曲变形

故 $$y''=(\sum_{i=1}^{n} y_i)''$$

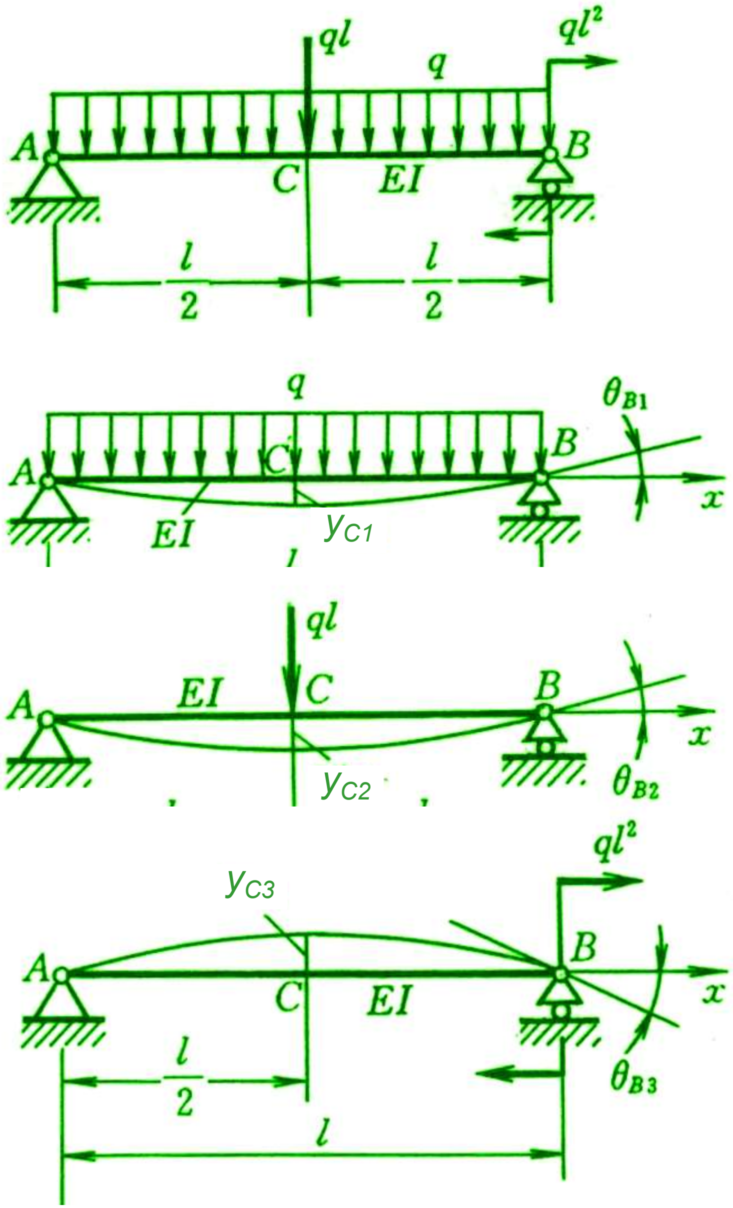
由于梁的边界条件不变，因此

$$y=\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \theta=\sum_{i=1}^{n} \theta_i ,$$

重要结论：

梁在若干个载荷共同作用时的挠度或转角，等于在各个载荷单独作用时的挠度或转角的代数和。这就是**计算弯曲变形的叠加原理**。

§6-4 用叠加法求弯曲变形



例3　已知简支梁受力如图示，q、l、EI 均为已知。求C 截面的挠度y_C；B截面的转角θ_B

解　　1）将梁上的载荷分解

$$y_C = y_{C1} + y_{C2} + y_{C3}$$

$$\theta_B = \theta_{B1} + \theta_{B2} + \theta_{B3}$$

2）查表得3种情形下C截面的挠度和B截面的转角。

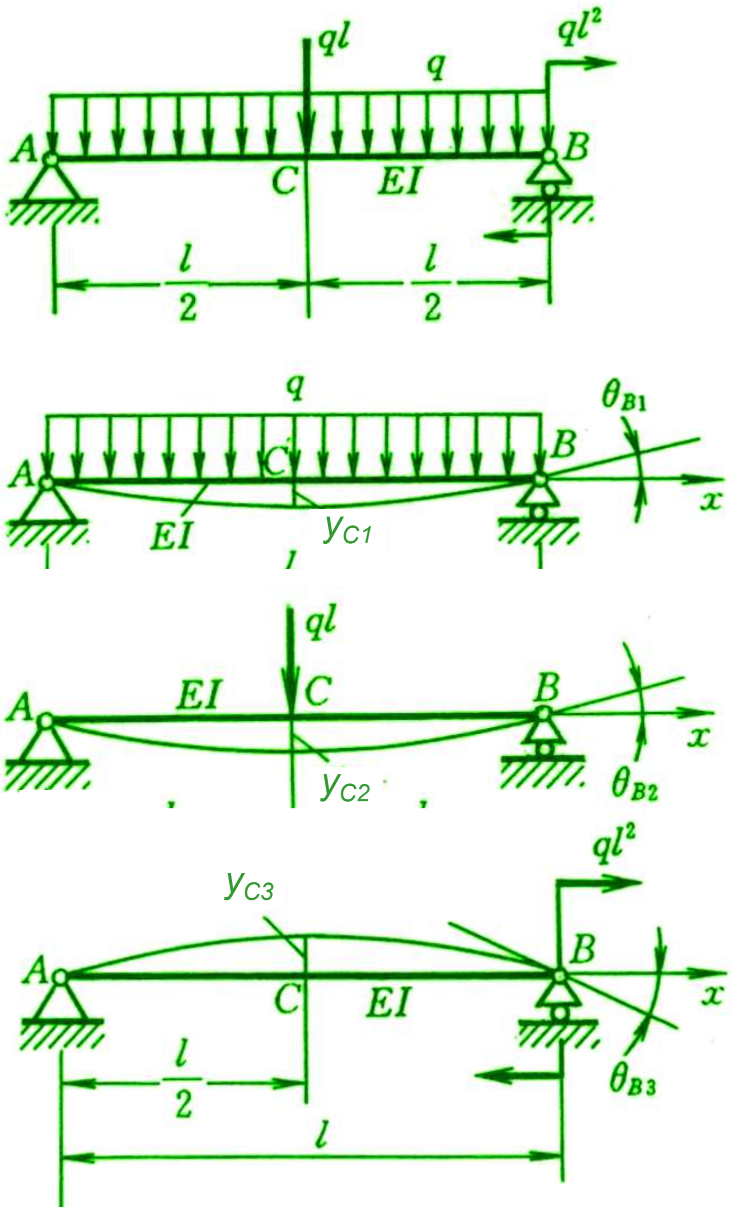
$$y_{C1} = -\frac{5ql^4}{384EI} \qquad \theta_{B1} = \frac{ql^3}{24EI}$$

$$y_{C2} = -\frac{ql^4}{48EI} \qquad \theta_{B1} = \frac{ql^3}{16EI}$$

$$y_{C3} = \frac{ql^4}{16EI} \qquad \theta_{B3} = -\frac{ql^3}{3EI}$$

目录

§ 6-4 用叠加法求弯曲变形



3） 应用叠加法，将简单载荷作用时的结果求和

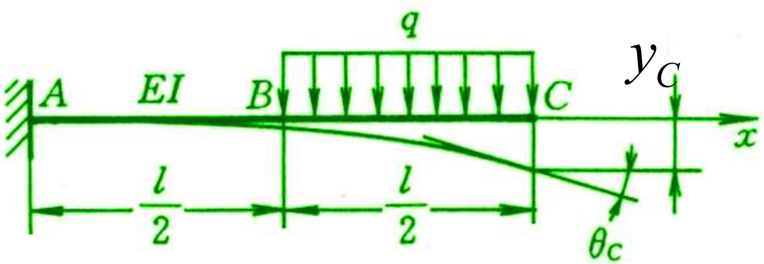
$$y_C=\sum_{i=1}^{3}y_{Ci}=-\frac{5ql^4}{384EI}-\frac{ql^4}{48EI}+\frac{ql^4}{16EI}$$

$$=\frac{11ql^4}{384EI}(\Uparrow)$$

$$\theta_B=\sum_{i=1}^{3}\theta_{Bi}=\frac{ql^3}{24EI}+\frac{ql^3}{16EI}-\frac{ql^3}{3EI}$$

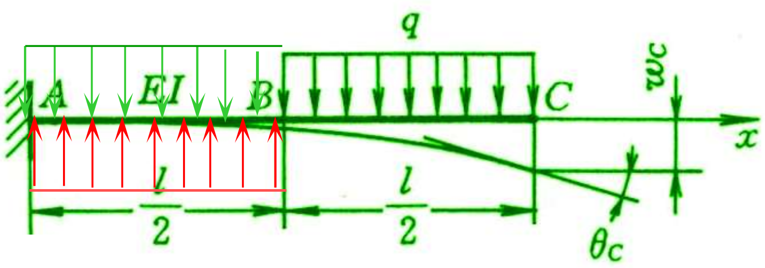
$$=-\frac{11ql^3}{48EI}(\;)$$

§6-4 用叠加法求弯曲变形



例4　已知：悬臂梁受力如图示，q、l、EI均为已知。求C截面的挠度y_C和转角θ_C

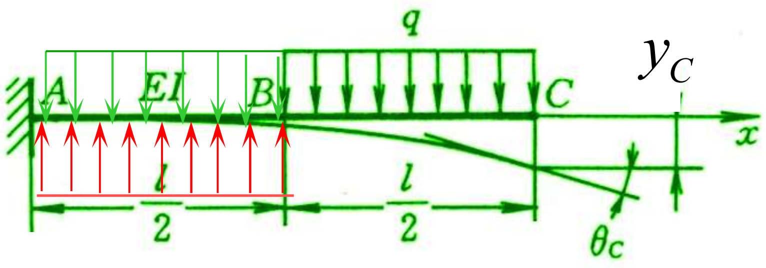
解　1）首先，将梁上的载荷变成有表可查的情形



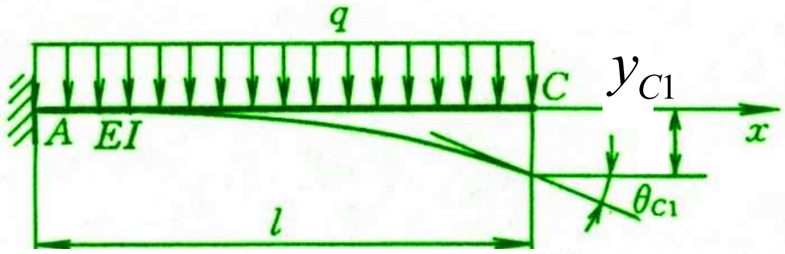
为了利用梁全长承受均布载荷的已知结果，先将均布载荷延长至梁的全长，为了不改变原来载荷作用的效果，在AB 段还需再加上集度相同、方向相反的均布载荷。

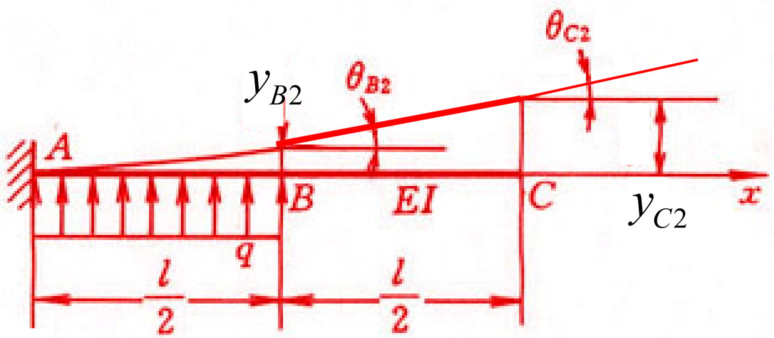
目录

§6-4 用叠加法求弯曲变形



2）再将处理后的梁分解为简单载荷作用的情形，计算各自C截面的挠度和转角。





$$y_{C1} = -\frac{ql^4}{8EI}, \quad \theta_{C1} = -\frac{ql^3}{6EI}$$

$$y_{C2} = y_{B2} + \theta_{B2} \times \frac{l}{2} \qquad \theta_{C2} = \frac{ql^3}{48EI}$$

$$= \frac{ql^4}{128EI} + \frac{ql^3}{48EI} \times \frac{l}{2},$$

3）将结果叠加

$$y_C = \sum_{i=1}^{2} y_{Ci} = -\frac{41ql^4}{384EI}$$

$$\theta_C = \sum_{i=1}^{2} \theta_{Ci} = -\frac{7ql^3}{48EI}$$

§6-4 用叠加法求弯曲变形

讨　　论

叠加法求变形有什么优缺点？

§6-5 简单超静定梁

1. 基本概念：

超静定梁： 支反力数目大于有效平衡方程数目的梁

多余约束： 从维持平衡角度而言，多余的约束

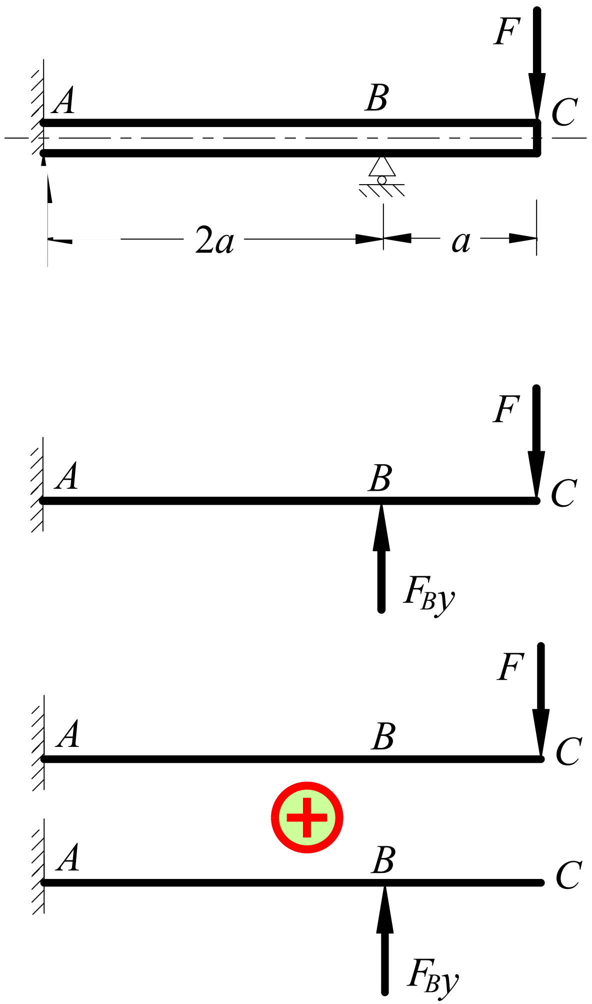
超静定次数： 多余约束或多余支反力的数目。

相当系统： 用多余约束力代替多余约束的静定系统

2. 求解方法：

解除多余约束，建立相当系统——比较变形，列变形协调条件——由物理关系建立补充方程——利用静力平衡条件求其他约束反力。

§ 6-5 简单超静定梁



例6 求梁的支反力，梁的抗弯刚度为EI。

解

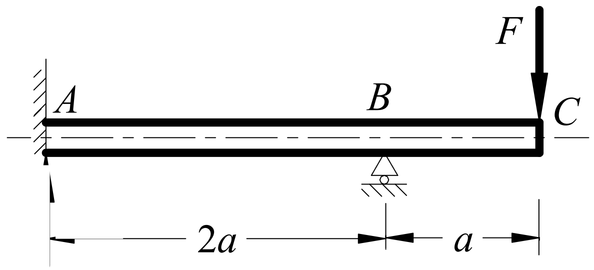
1）判定超静定次数

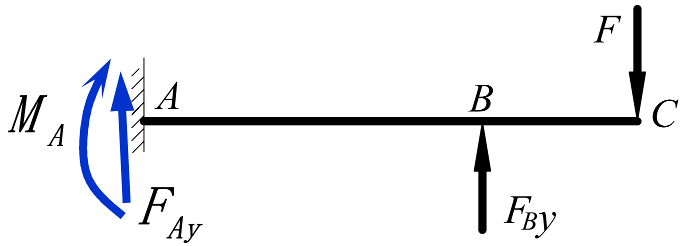
2）解除多余约束，建立相当系统

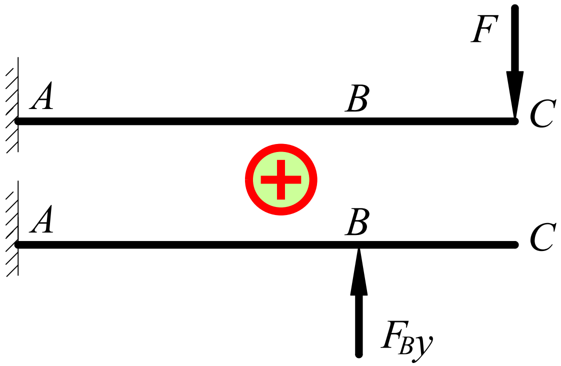
3）进行变形比较，列出变形协调条件

$$y_B = (y_B)_F + (y_B)_{F_{By}} = 0$$

§ 6-5 简单超静定梁







4）由物理关系，列出补充方程

$$(y_B)_F = -\frac{F(2a)^2}{6EI}(9a-2a) = -\frac{14Fa^3}{3EI}$$

$$(y_B)_{F_{By}} = \frac{8F_{By}a^3}{3EI}$$

所以 $$-\frac{14Fa^3}{3EI} + \frac{8F_{By}a^3}{3EI} = 0$$

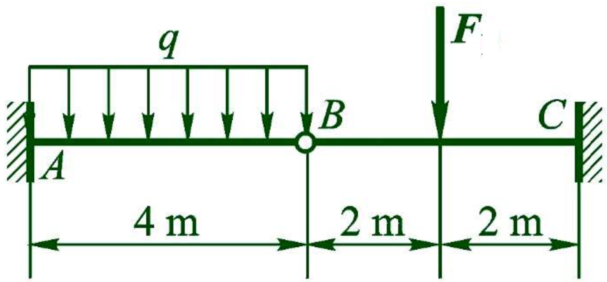
$$F_{By} = \frac{7}{4}F$$

5）由整体平衡条件求其他约束反力

$$M_A = \frac{Fa}{2}(\circlearrowright), \quad F_{Ay} = -\frac{3}{4}F(\Downarrow)$$

§6-5 简单超静定梁

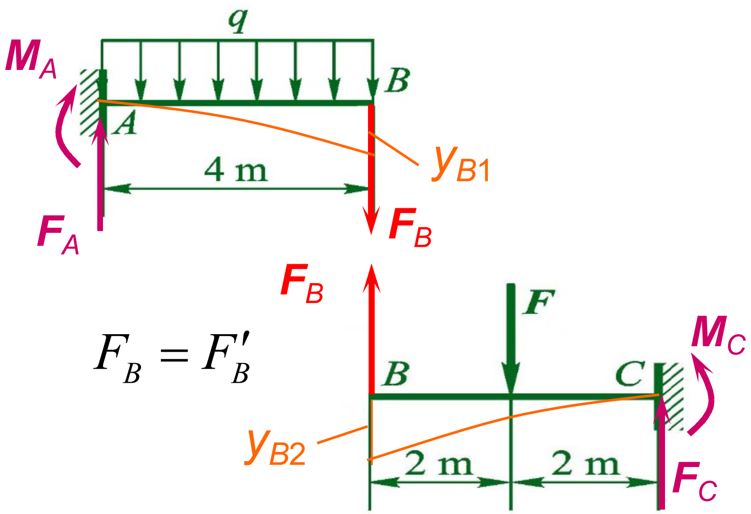
例7　梁AB 和BC 在B 处铰接，A、C 两端固定，梁的抗弯刚度均为EI，F = 40kN，q = 20kN/m。画梁的剪力图和弯矩图。



解　从B 处拆开，使超静定结构变成两个悬臂梁。

变形协调方程为：　$y_{B1} = y_{B2}$

物理关系

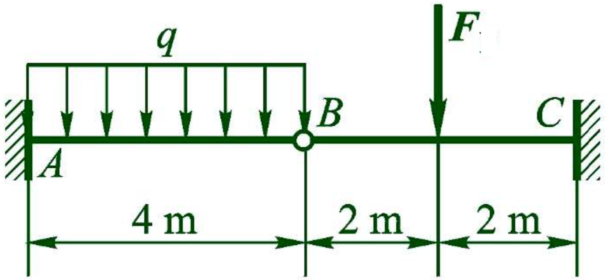


$$F_B = F_B'$$

$$y_{B1} = \frac{q \times 4^4}{8EI} + \frac{F_B \times 4^3}{3EI}$$

$$y_{B2} = \frac{F \times 2^2}{6EI}(3 \times 4 - 2) - \frac{F_B \times 4^3}{3EI}$$

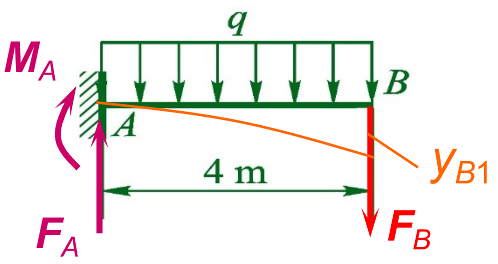
§ 6-5 简单超静定梁



代入得补充方程：

$$\frac{q\times 4^4}{8EI}+\frac{F_B\times 4^3}{3EI}=\frac{F\times 2^2}{6EI}(3\times 4-2)-\frac{F_B\times 4^3}{3EI}$$

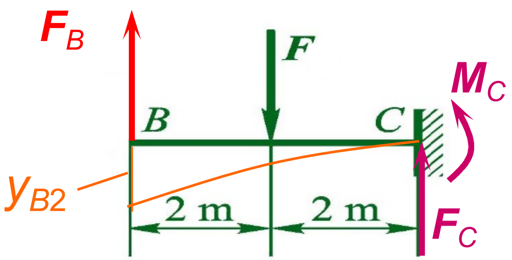
$$F_B=\frac{3}{2}\left(\frac{40\times 10}{6\times 4^2}-\frac{20\times 4^4}{8\times 4^3}\right)=-8.75\ \text{kN}$$



确定*A* 端约束力

$$\sum F_y=0,\quad F_A-F_B-4q=0$$

$$F_A=4q+F_B=4\times 20-8.75=71.25\ \text{kN}$$

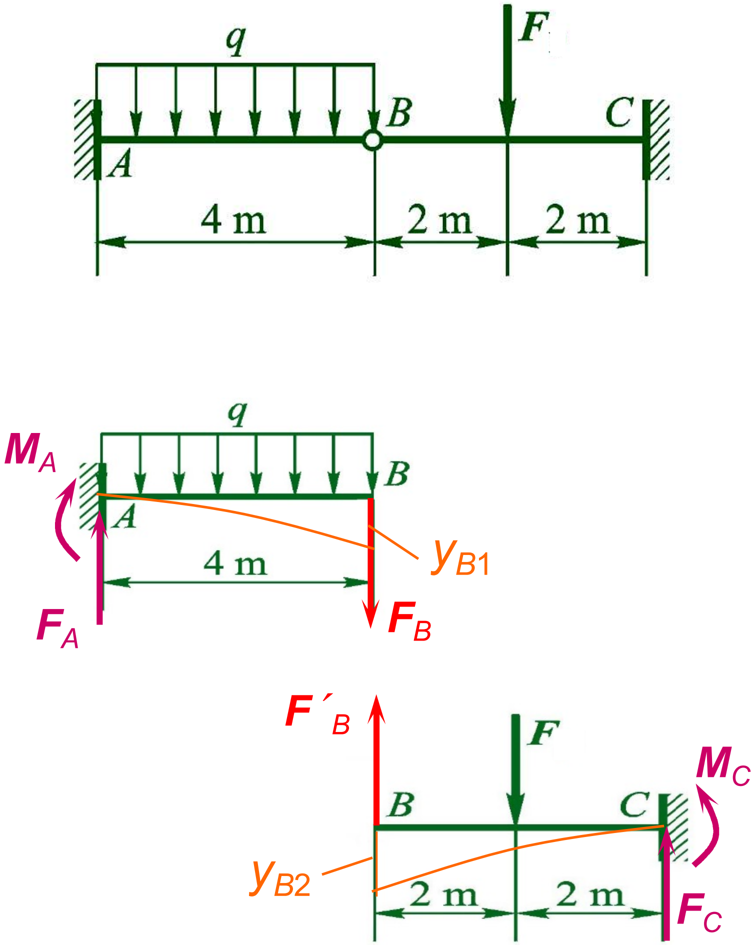


$$\sum M_A=0,\quad M_A+4q\times 2+4F_B=0$$

$$M_A=-4q\times 2-4F_B$$

$$=-4\times 20\times 2-4\times(-8.75)=-125\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

§ 6-5 简单超静定梁



确定C 端约束力

$$\sum F_y = 0,\quad F_{B'} + F_C - F = 0$$

$$F_C = F - F_{B'} = 40 - (-8.75)$$

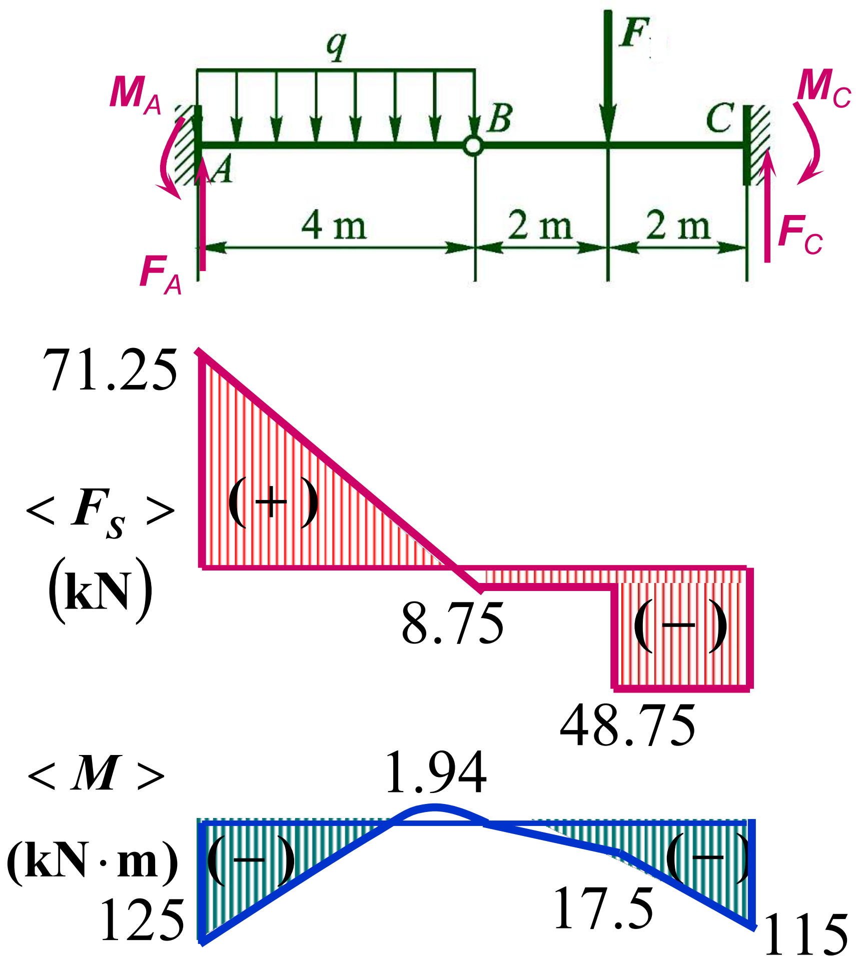
$$= 48.75\ \text{kN}$$

$$\sum M_C = 0,\quad M_C + 2F - 4F_{B'} = 0$$

$$M_C = 4F_{B'} - 2F$$

$$= 4\times(-8.75) - 2\times 40 = -115\ \text{kN.m}$$

§ 6-5 简单超静定梁



A、C 端约束力已求出

$$F_A = 71.25\ \text{kN}(\Uparrow)$$

$$M_A = 125\ \text{kN}\cdot\text{m}(\circlearrowleft)$$

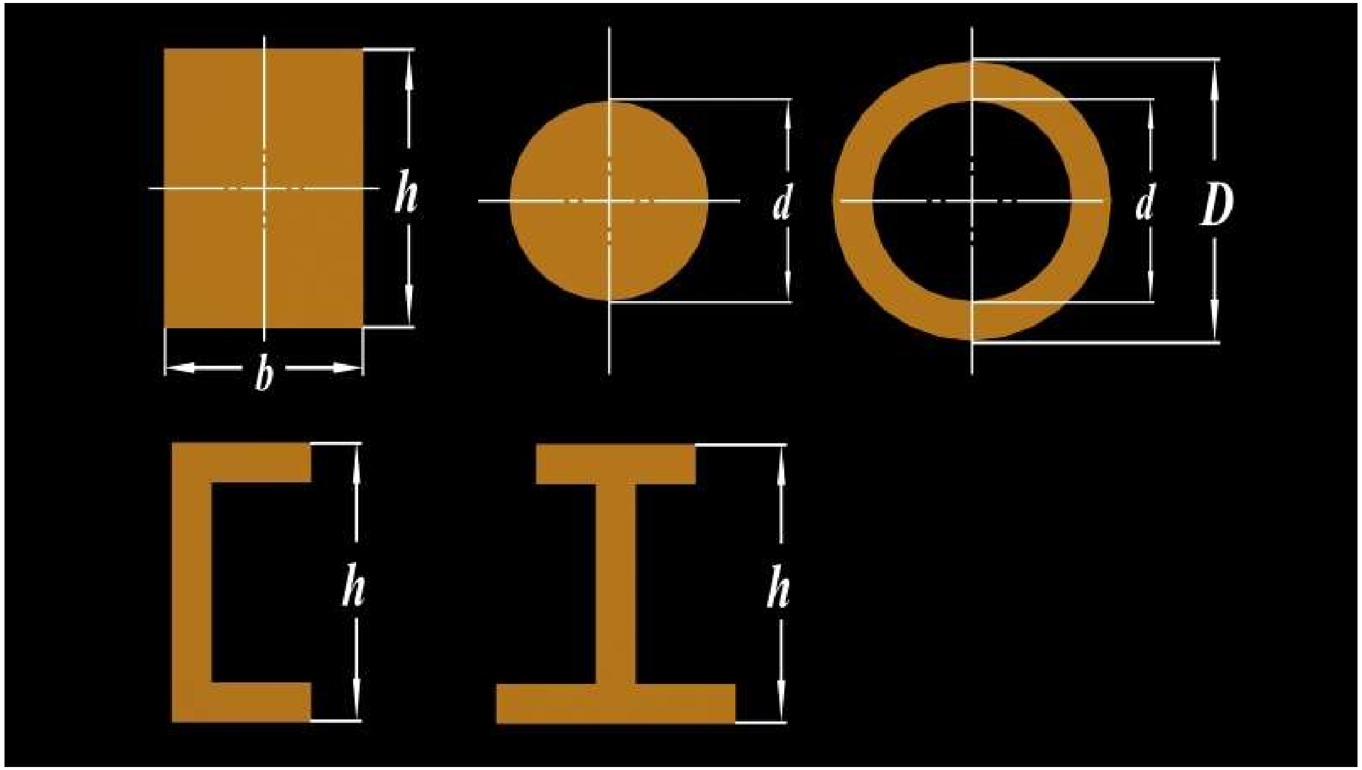
$$F_C = 48.75\ \text{kN}(\Uparrow)$$

$$M_C = 115\ \text{kN}\cdot\text{m}(\circlearrowright)$$

最后作梁的剪力图和弯矩图

§6-6 提高弯曲刚度的一些措施

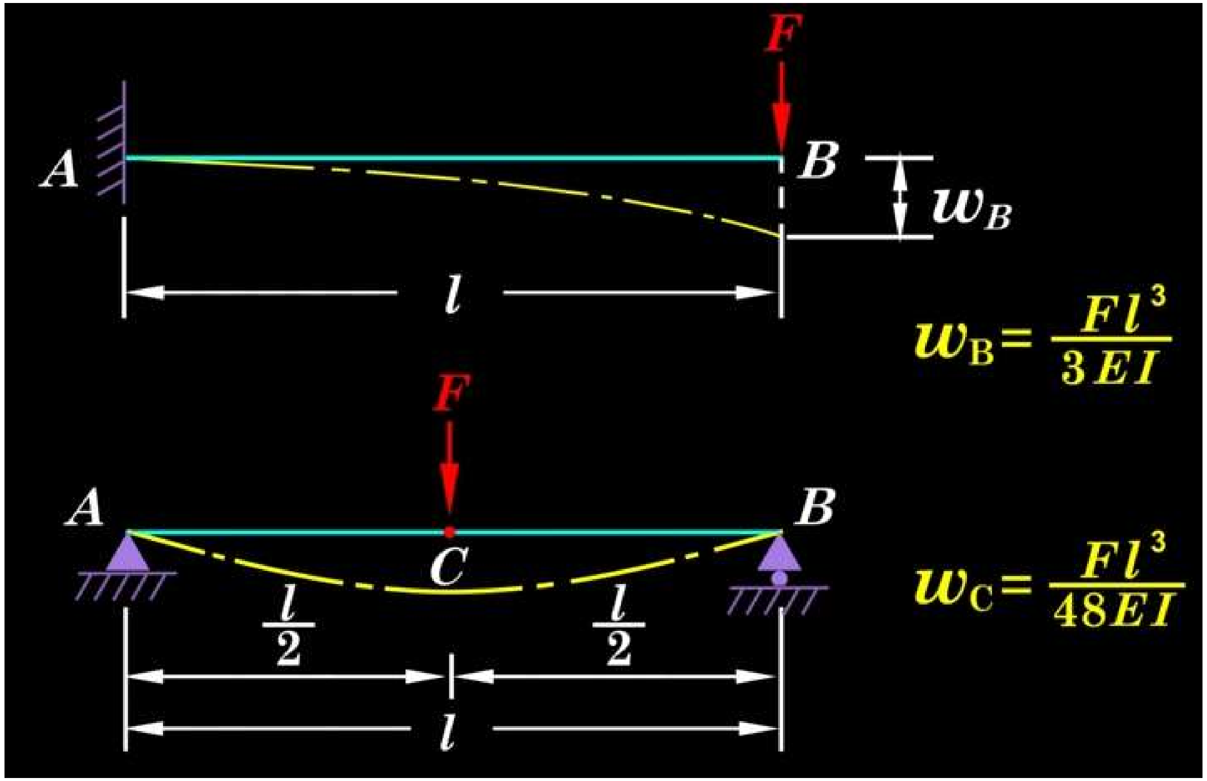
1）选择合理的截面形状



§6-6 提高弯曲刚度的一些措施

2）改善结构形式，减少弯矩数值

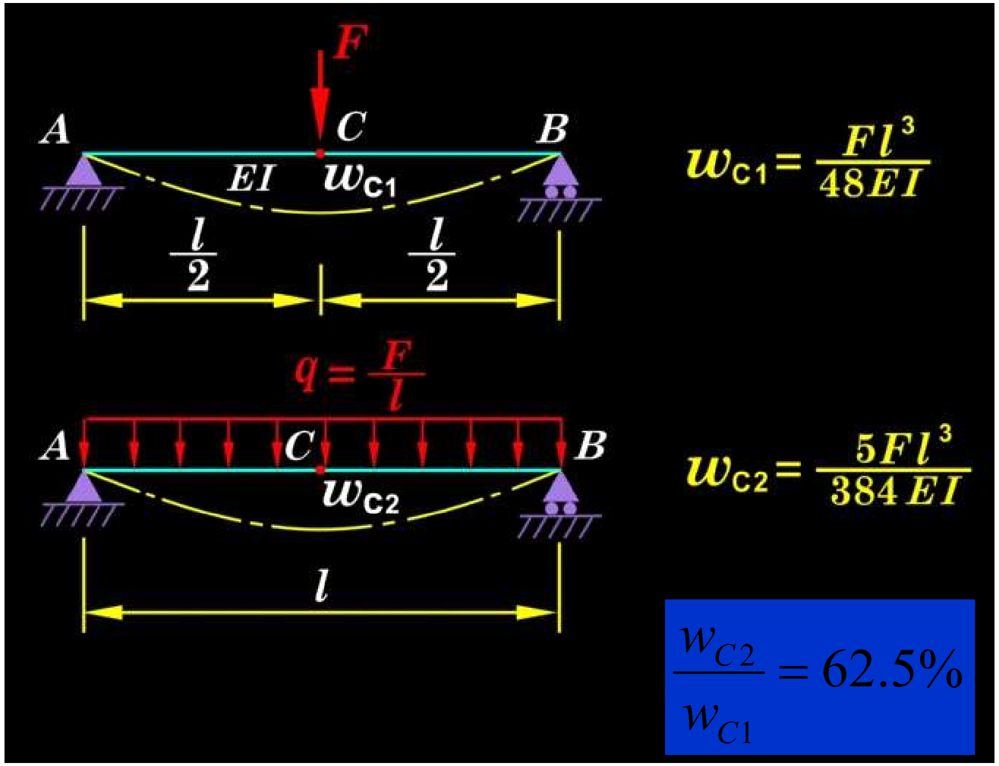
改
变
支
座
形
式



§6-6 提高弯曲刚度的一些措施

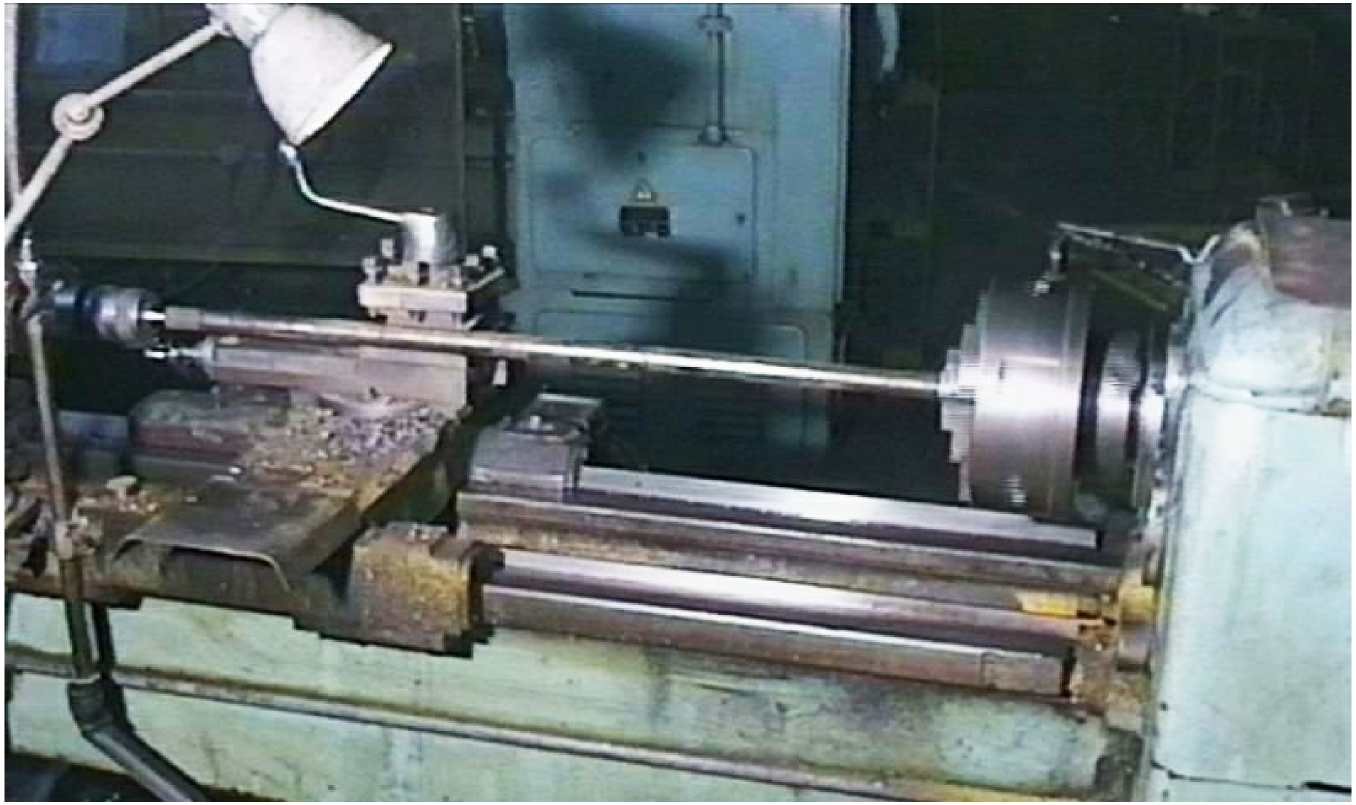
2）改善结构形式，减少弯矩数值

改
变
载
荷
类
型



§6-6 提高弯曲刚度的一些措施

3）采用超静定结构



§6-6 提高弯曲刚度的一些措施

小结

1、明确挠曲线、挠度和转角的概念

2、掌握计算梁变形的积分法和叠加法

3、学会用变形比较法解简单超静定问题

第七章

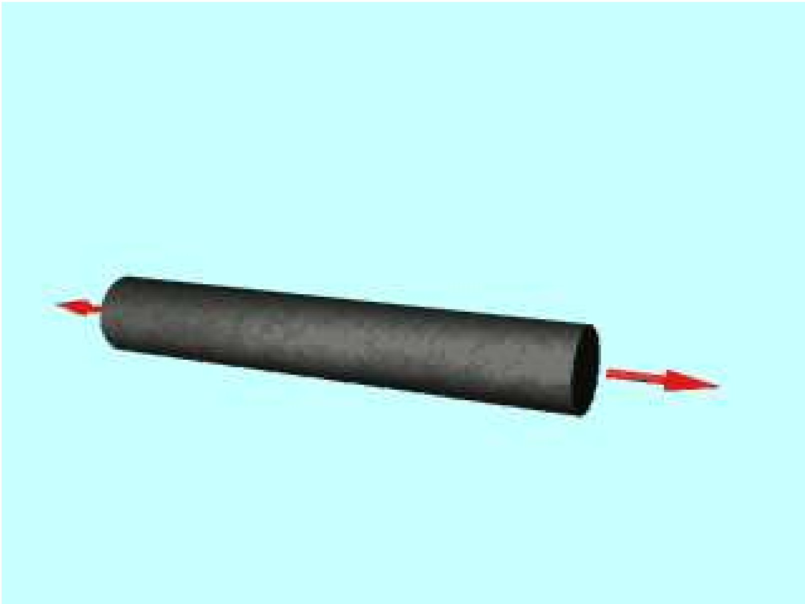
应力和应变分析
强度理论

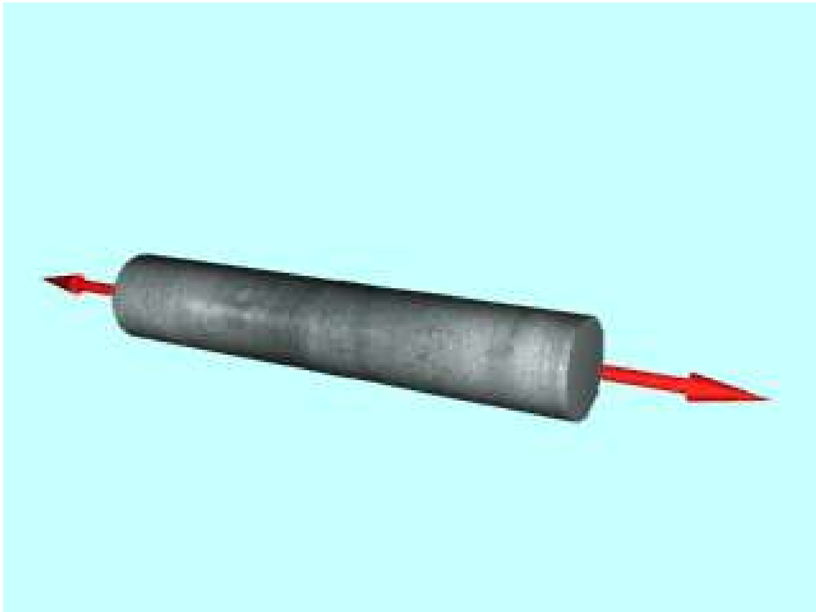
第七章　应力和应变分析
强度理论

7—1 应力状态的概念

问题的提出

铸　　铁　　　　　　　　低碳钢





塑性材料拉伸时为什么会出现滑移线？

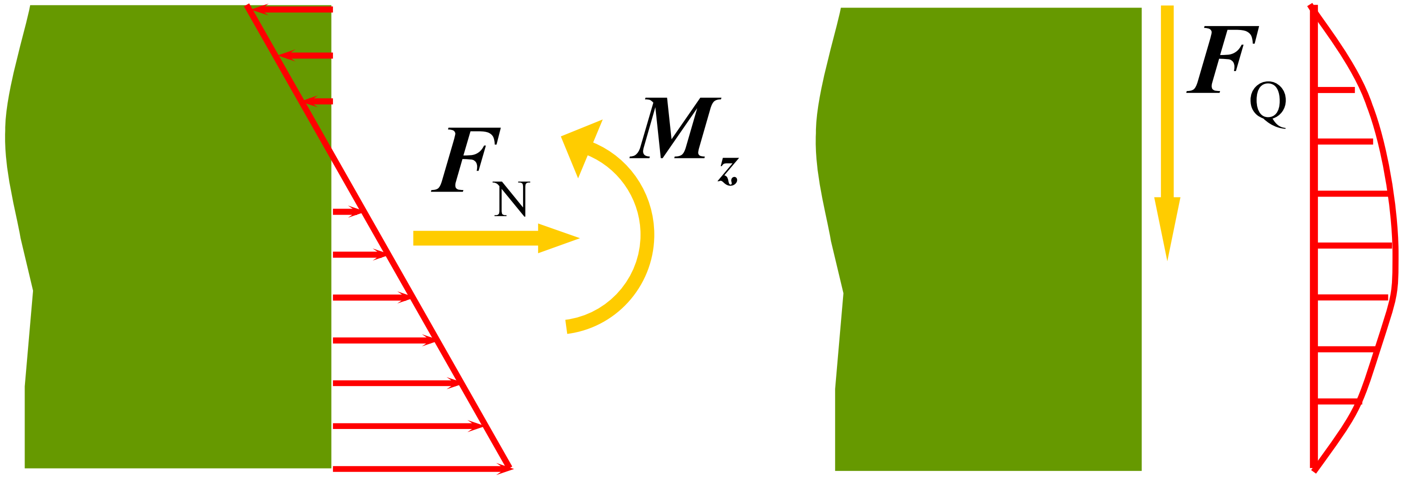
7—1 应力状态的概念

低碳钢　　　　　　　　铸　　铁

脆性材料扭转时为什么沿45º螺旋面断开？

7—1 应力状态的概念

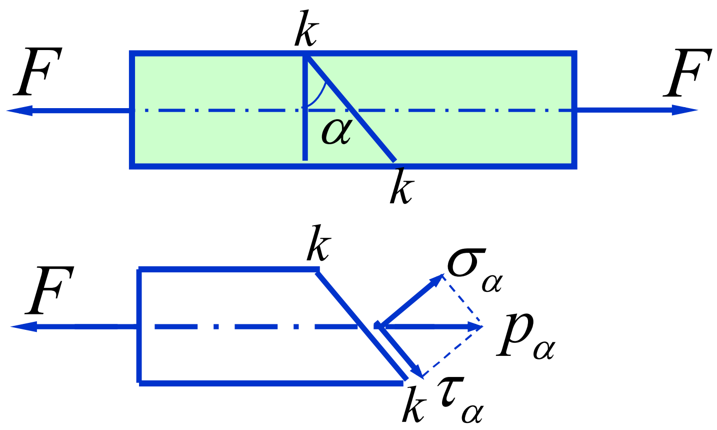
横力弯曲



横截面上正应力分析和切应力分析的结果表明：同一面上不同点的应力各不相同，此即应力的点的概念。

7—1 应力状态的概念

直杆拉伸

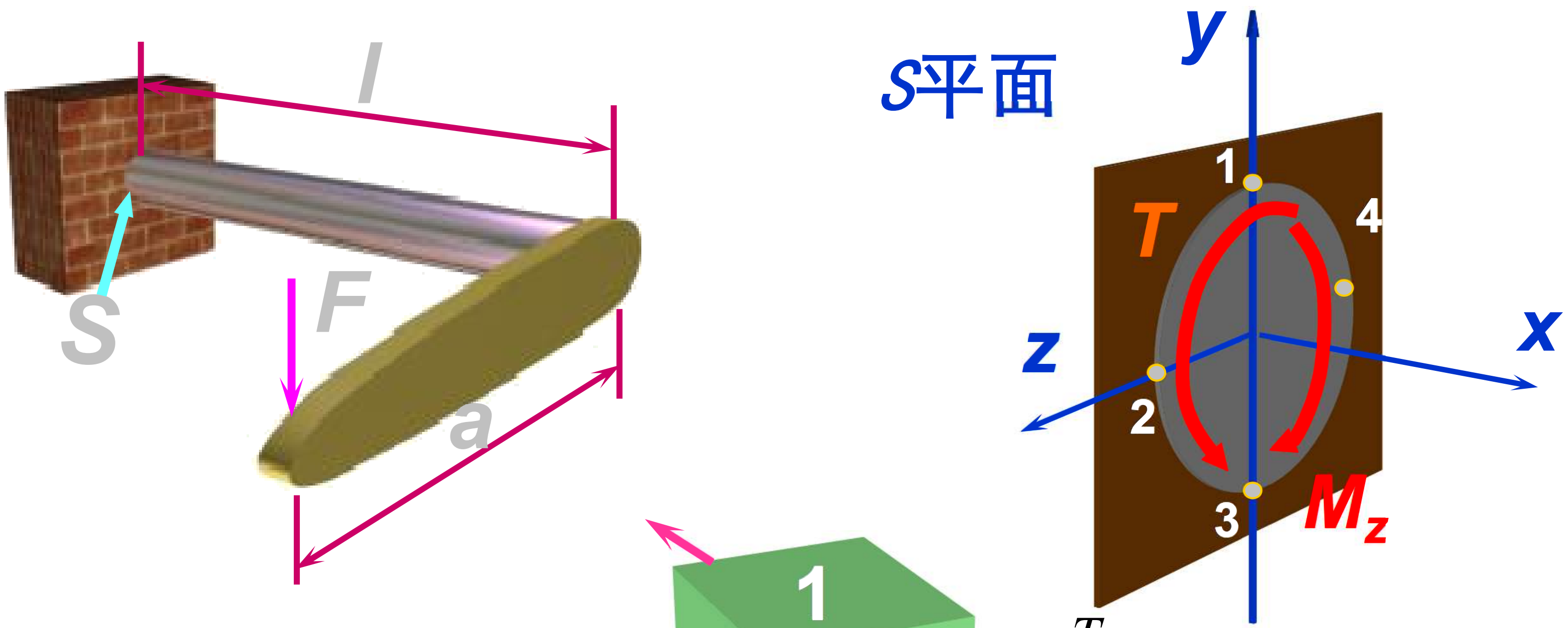


$$\begin{cases} \sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha \\ \tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \end{cases}$$

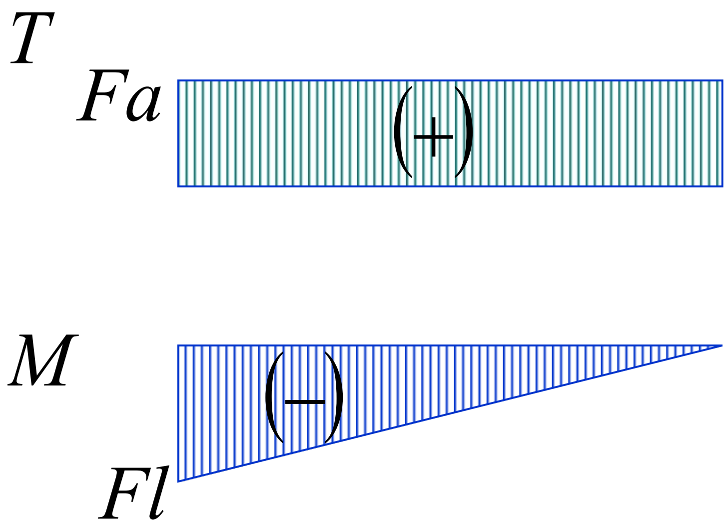
$$\sigma\cos\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha$$

直杆拉伸应力分析结果表明：即使同一点不同方向面上的应力也是各不相同的，此即<u>应力的面的概念</u>。

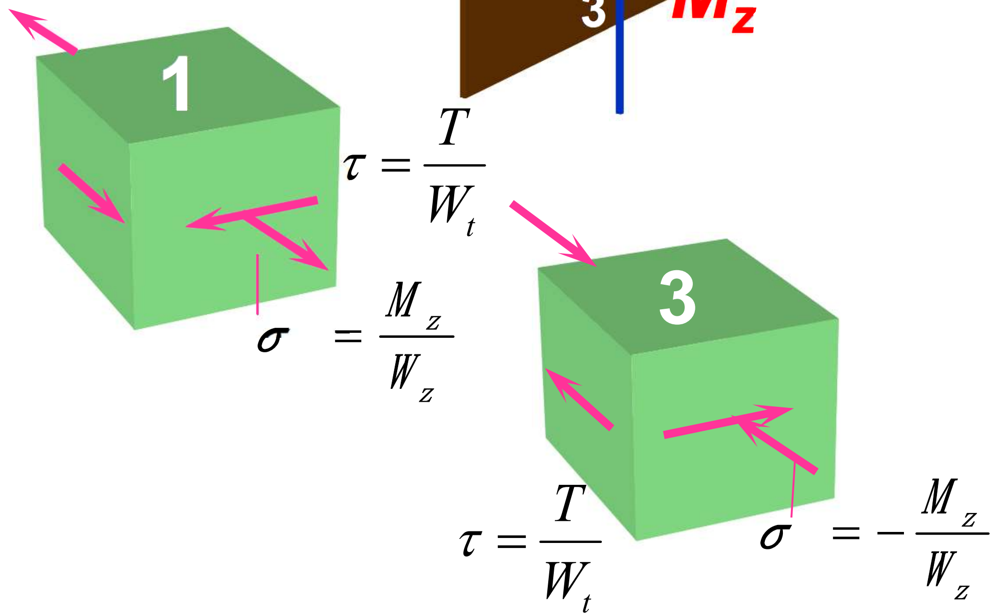
7—1 应力状态的概念



l
S
F
a
S平面
y
x
z
1
2
3
4
T
M_z

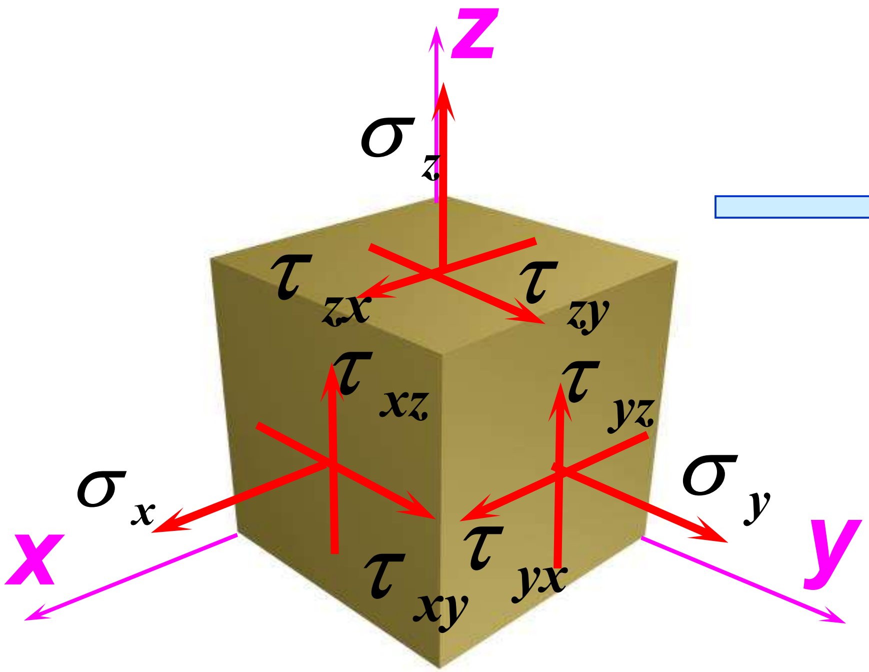


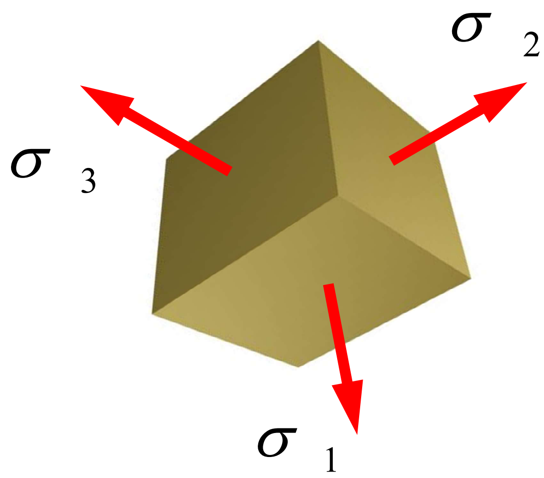
T
Fa
(+)
M
(−)
Fl



1
$\tau = \frac{T}{W_t}$
$\sigma = \frac{M_z}{W_z}$
3
$\tau = \frac{T}{W_t}$
$\sigma = -\frac{M_z}{W_z}$

7—1 应力状态的概念





单元体上没有切应力的面称为主平面；主平面上的正应力称为主应力，分别用 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表示，并且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 该单元体称为主应力单元体。

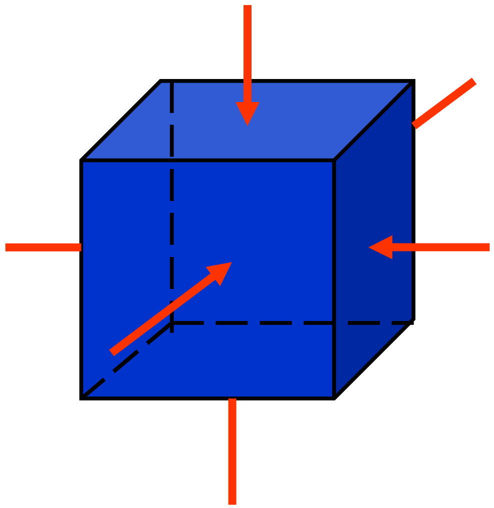
7—1 应力状态的概念

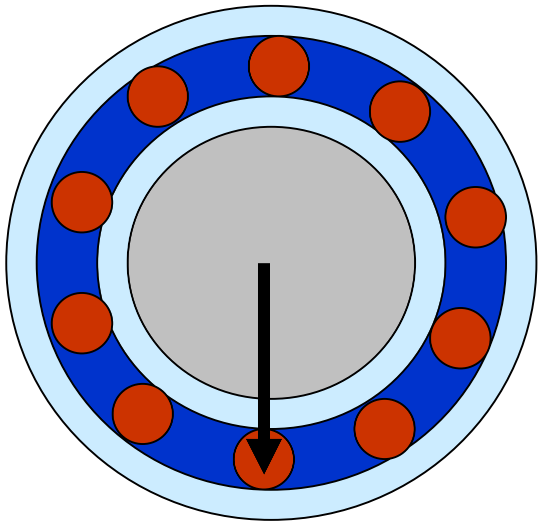
（1）单向应力状态：三个主应力中只有一个不为零

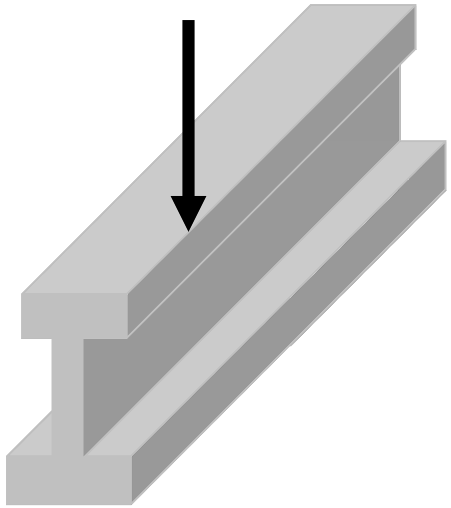
（2）平面应力状态：三个主应力中有两个不为零

（3）空间应力状态：三个主应力都不等于零

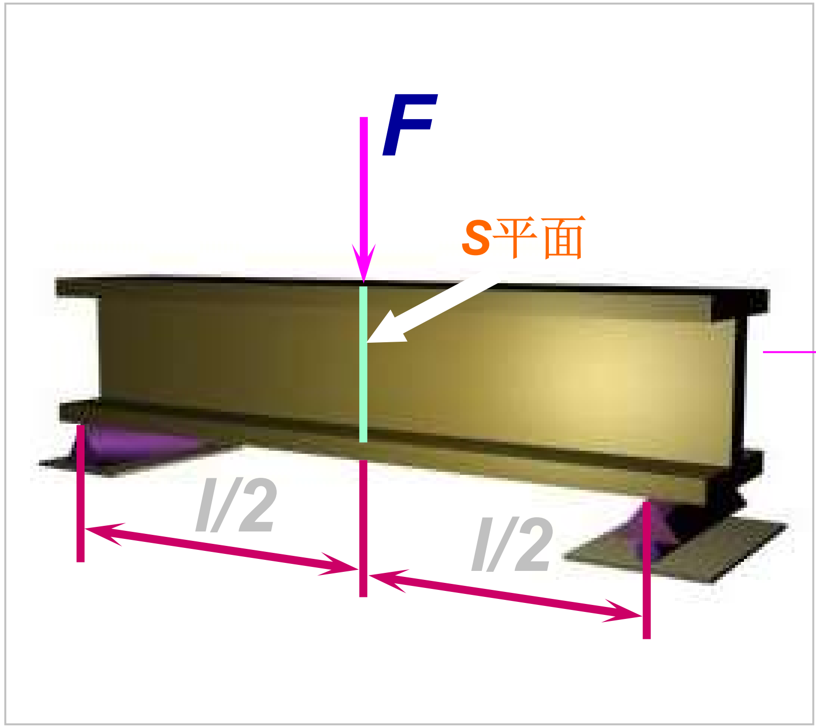
平面应力状态和空间应力状态统称为复杂应力状态



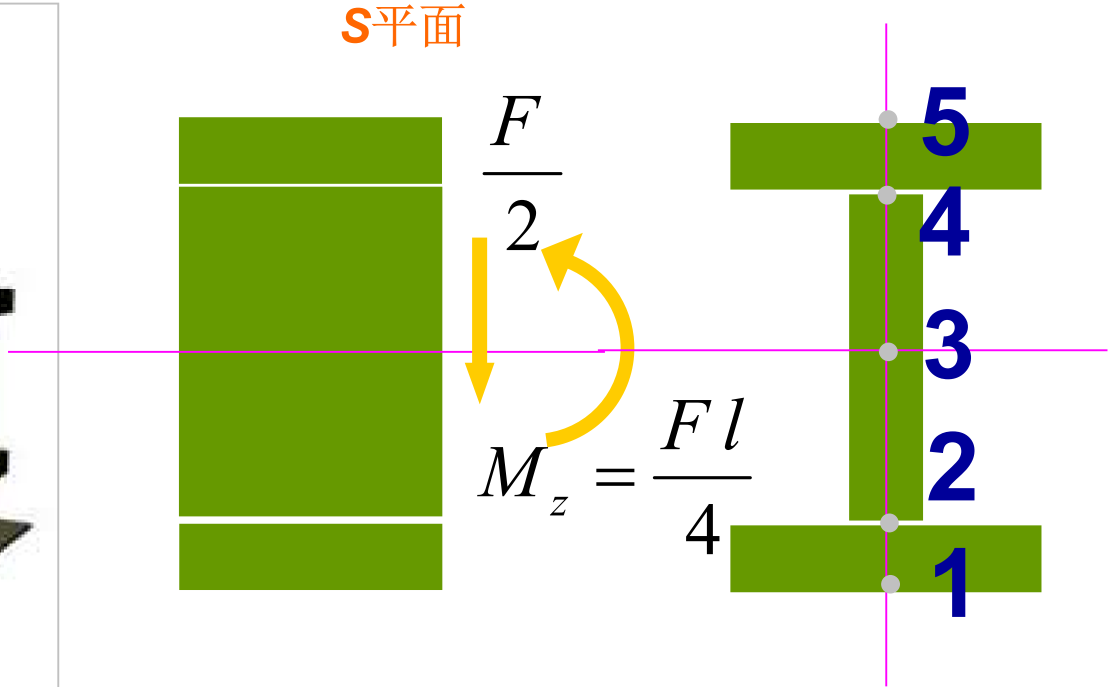




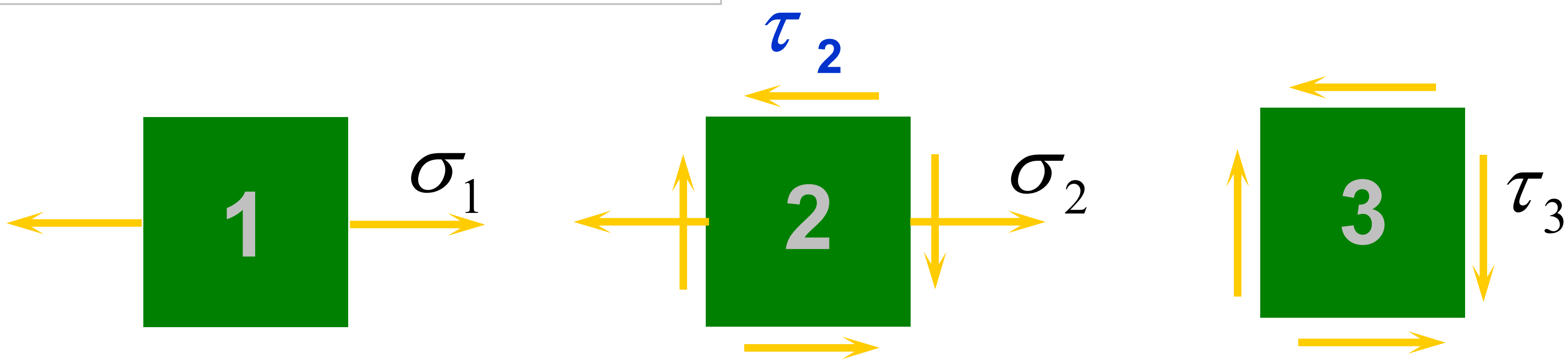
7—1 应力状态的概念



F
S平面
l/2
l/2



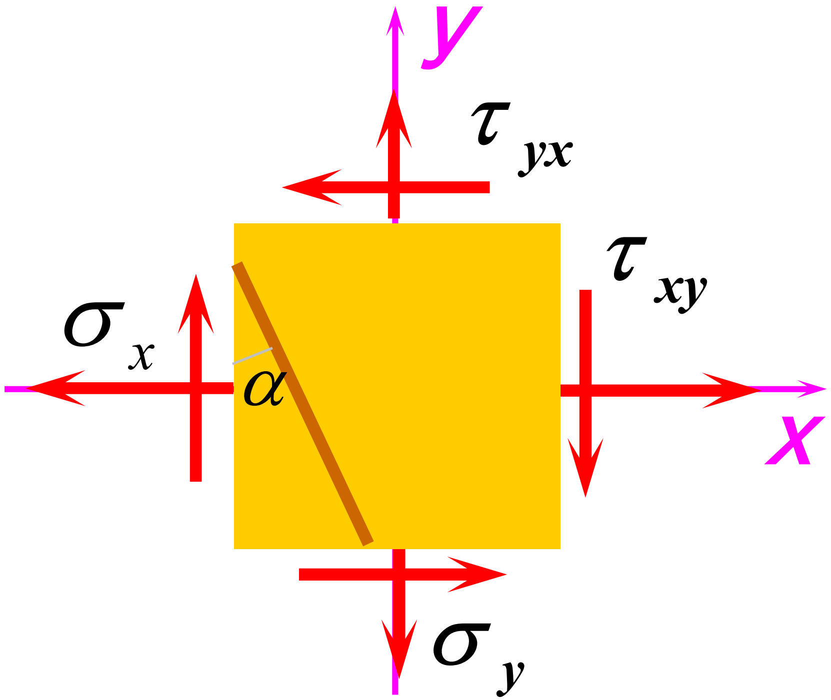
S平面
$\frac{F}{2}$
$M_z = \frac{Fl}{4}$
5
4
3
2
1

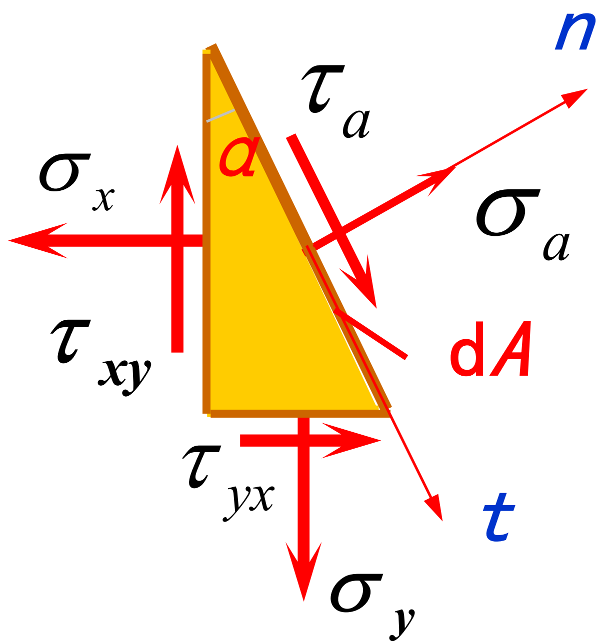


1
σ_1
τ_2
2
σ_2
3
τ_3

7-3 二向应力状态分析-解析法

1. 斜截面上的应力

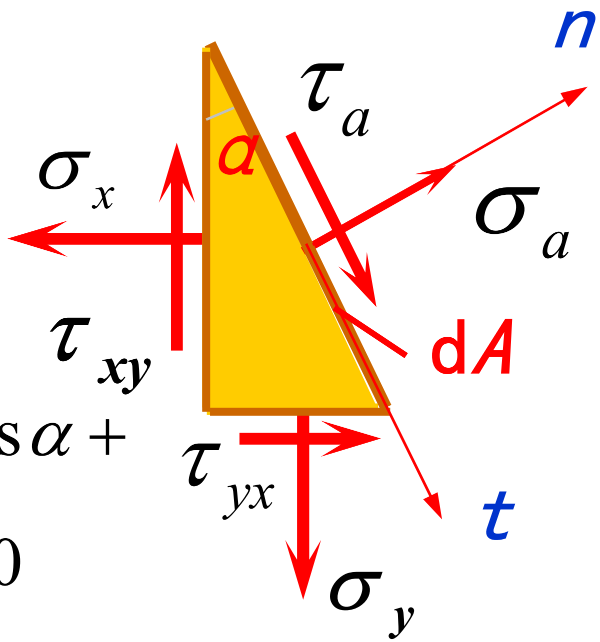




$$\sum F_n = 0 \qquad \sum F_t = 0$$

7-3 二向应力状态分析-解析法

列平衡方程



$$\sum F_n = 0$$

$$\sigma_\alpha dA + \tau_{xy}(dA\cos\alpha)\sin\alpha - \sigma_x(dA\cos\alpha)\cos\alpha +$$
$$\tau_{yx}(dA\sin\alpha)\cos\alpha - \sigma_y(dA\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_t = 0$$

$$\tau_\alpha dA - \tau_{xy}(dA\cos\alpha)\cos\alpha - \sigma_x(dA\cos\alpha)\sin\alpha +$$
$$\tau_{yx}(dA\sin\alpha)\sin\alpha + \sigma_y(dA\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

7-3 二向应力状态分析-解析法

利用三角函数公式

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \\ \sin^2\alpha = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \\ 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \end{cases}$$

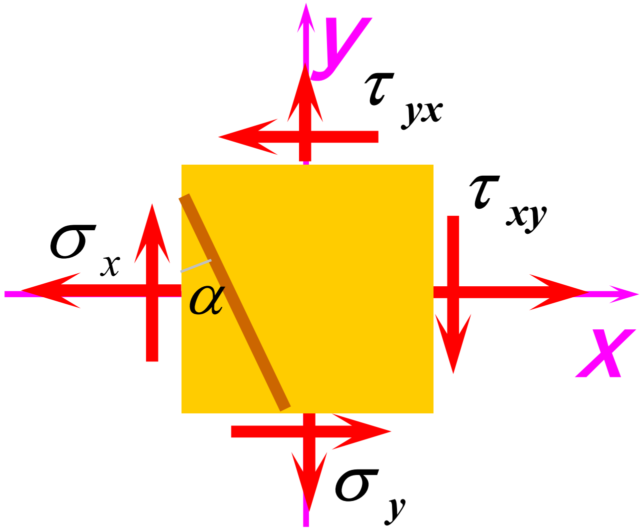
并注意到 $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ 化简得

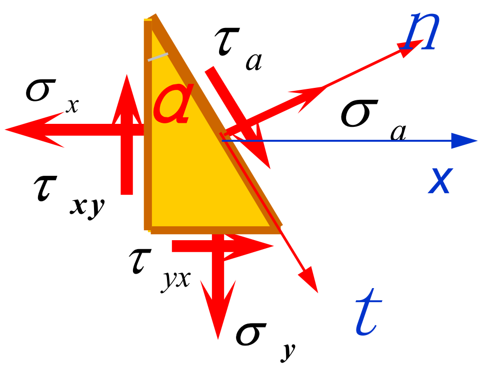
$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

7-3 二向应力状态分析-解析法

2. 正负号规则





正应力：拉为正；压为负

切应力：使微元顺时针方向转动为正；反之为负。

α角：由x 轴正向逆时针转到斜截面外法线时为正；反之为负。

7-3 二向应力状态分析-解析法

3. 正应力极值和方向

确定正应力极值

$$\sigma_{\alpha}=\frac{1}{2}(\sigma_{x}+\sigma_{y})+\frac{1}{2}(\sigma_{x}-\sigma_{y})\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha}=-(\sigma_{x}-\sigma_{y})\sin 2\alpha-2\tau_{xy}\cos 2\alpha$$

设 $\alpha=\alpha_0$ 时，上式值为零，即

$$-(\sigma_{x}-\sigma_{y})\sin 2\alpha_0-2\tau_{xy}\cos 2\alpha_0=0$$

$$-2\left[\frac{(\sigma_{x}-\sigma_{y})}{2}\sin 2\alpha_0+\tau_{xy}\cos 2\alpha_0\right]=-2\tau_{\alpha_0}=0$$

即 $\alpha=\alpha_0$ 时，切应力为零

7-3 二向应力状态分析-解析法

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

由上式可以确定出两个相互垂直的平面，分别为最大正应力和最小正应力（主应力）所在平面。

所以，最大和最小正应力分别为：

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

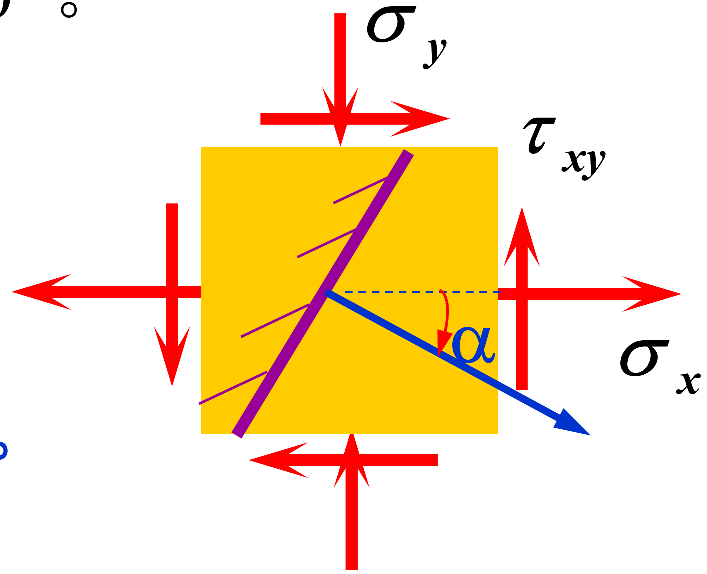
主应力按代数值排序： $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

7-3 二向应力状态分析-解析法

例题1：一点处的平面应力状态如图所示。

已知 $\sigma_x = 60\text{MPa}$， $\tau_{xy} = -30\text{MPa}$,

$\sigma_y = -40\text{MPa}$, $\alpha = -30^\circ$。



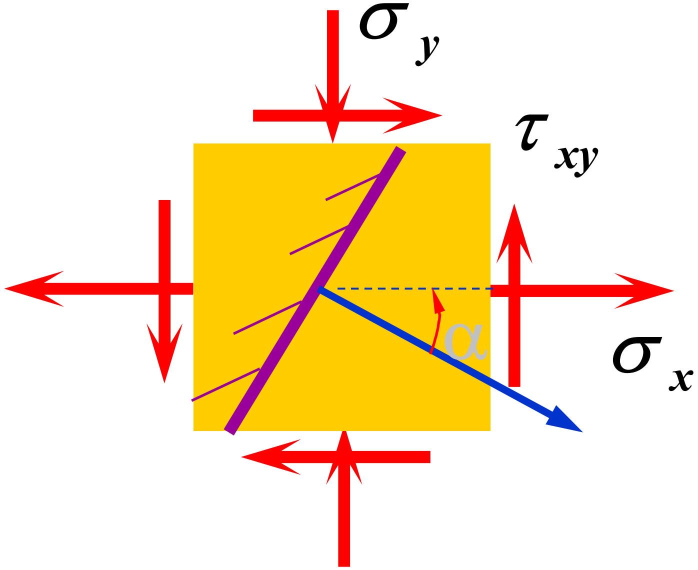
试求（1）α 斜面上的应力；

（2）主应力、主平面；

（3）绘出主应力单元体。

7-3 二向应力状态分析-解析法

解：（1）α 斜面上的应力



$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{60-40}{2} + \frac{60+40}{2}\cos(-60^\circ) + 30\sin(-60^\circ)$$

$$= 9.02\text{MPa}$$

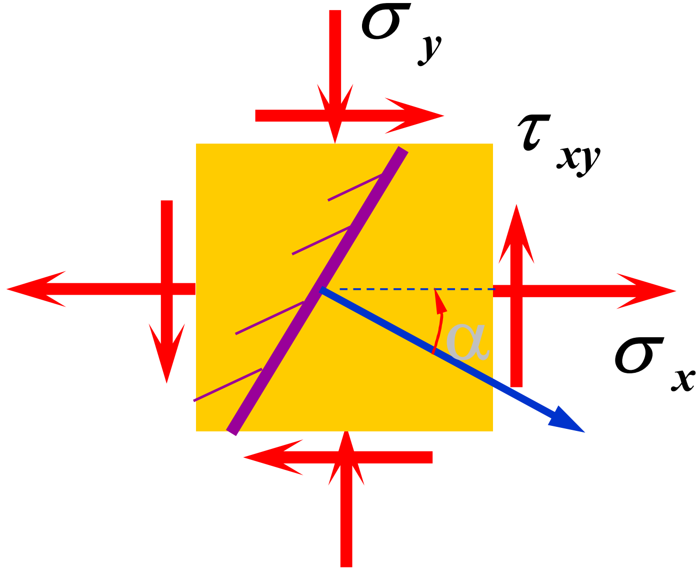
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$= \frac{60+40}{2}\sin(-60^\circ) - 30\cos(-60^\circ)$$

$$= -58.3\text{MPa}$$

7-3 二向应力状态分析-解析法

（2）主应力、主平面



$$\sigma_{\max}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

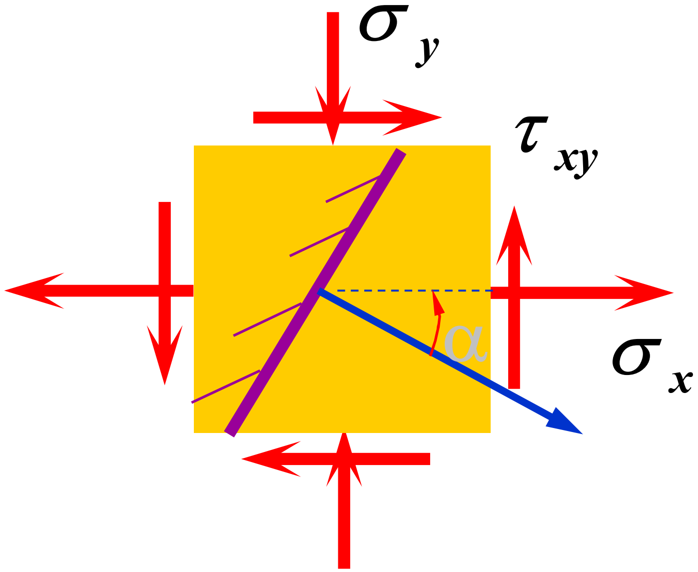
$$=68.3\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

$$=-48.3\text{MPa}$$

$$\sigma_1=68.3\text{MPa},\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=-48.3\text{MPa}$$

7-3 二向应力状态分析-解析法



主平面的方位：

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$= -\frac{-60}{60+40} = 0.6$$

$$\alpha_0 = 15.5^\circ,$$

$$\alpha_0 = 15.5^\circ + 90^\circ = 105.5^\circ$$

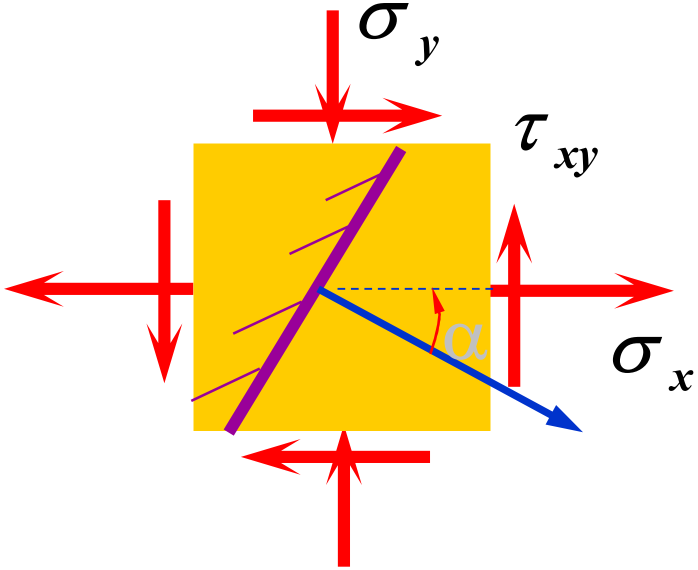
代入 σ_α 表达式可知

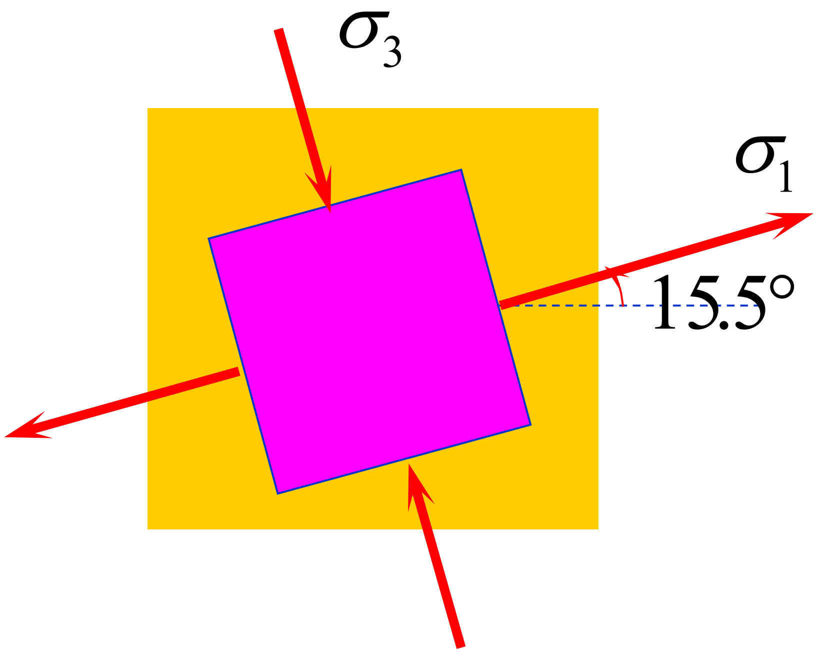
主应力 σ_1 方向：$\alpha_0 = 15.5^\circ$

主应力 σ_3 方向：$\alpha_0 = 105.5^\circ$

7-3 二向应力状态分析-解析法

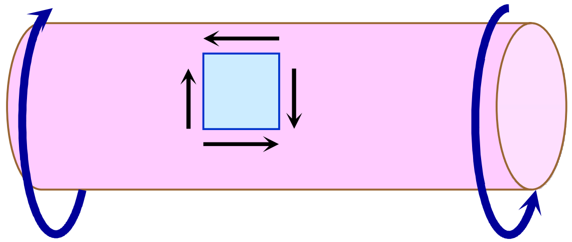
（3）主应力单元体：





7-3 二向应力状态分析-解析法

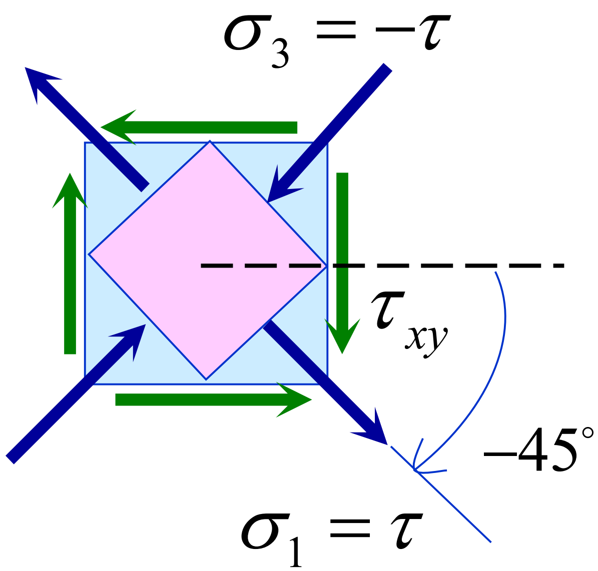
纯剪切应力状态



$$tg2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow -\infty$$

$$\alpha_0 = -45^\circ \quad \text{或} \quad -135^\circ$$

$$\left\{\begin{matrix} \sigma_{max} \\ \sigma_{min} \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$



$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \tau_{xy}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_3 = -\tau_{xy}$$

此现象称为纯剪切

7-4 二向应力状态分析-图解法

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

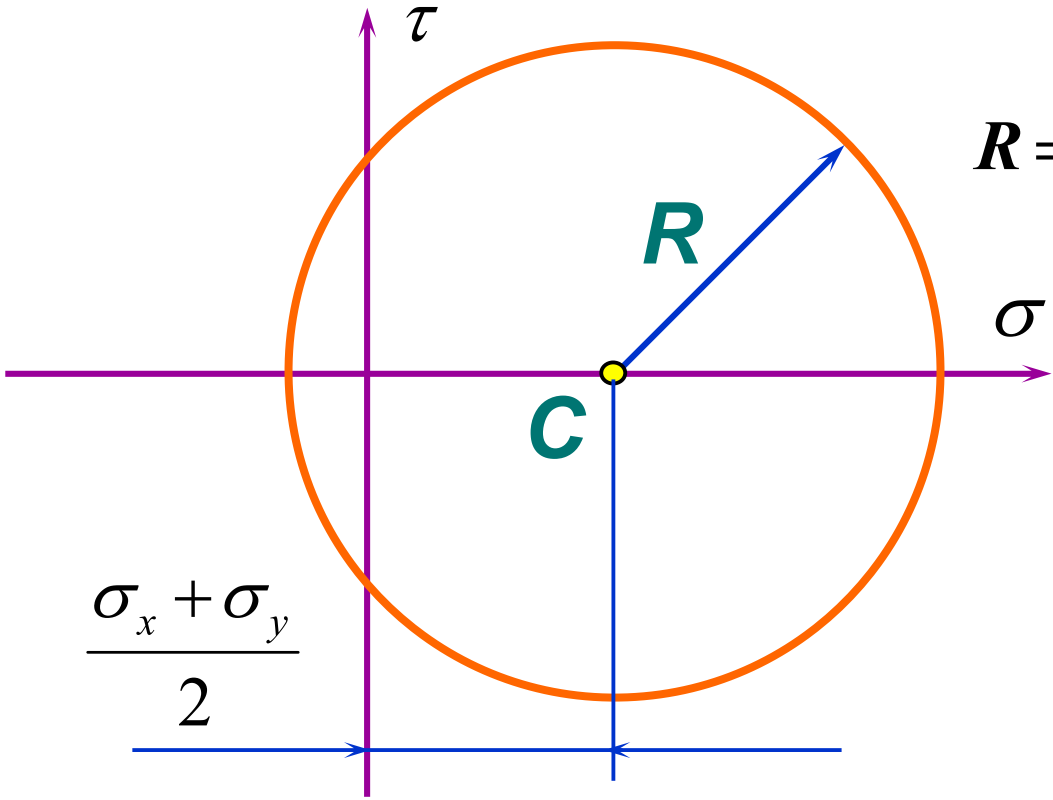
$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_\alpha = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2{}_{xy}$$

这个方程恰好表示一个圆，这个圆称为应力圆

7-4 二向应力状态分析–图解法

1. 应力圆：

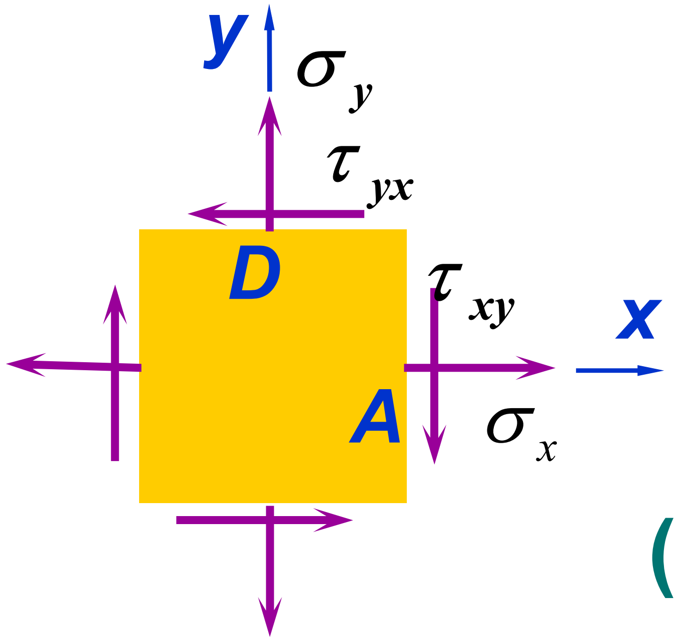
$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2_\alpha=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2_{xy}$$

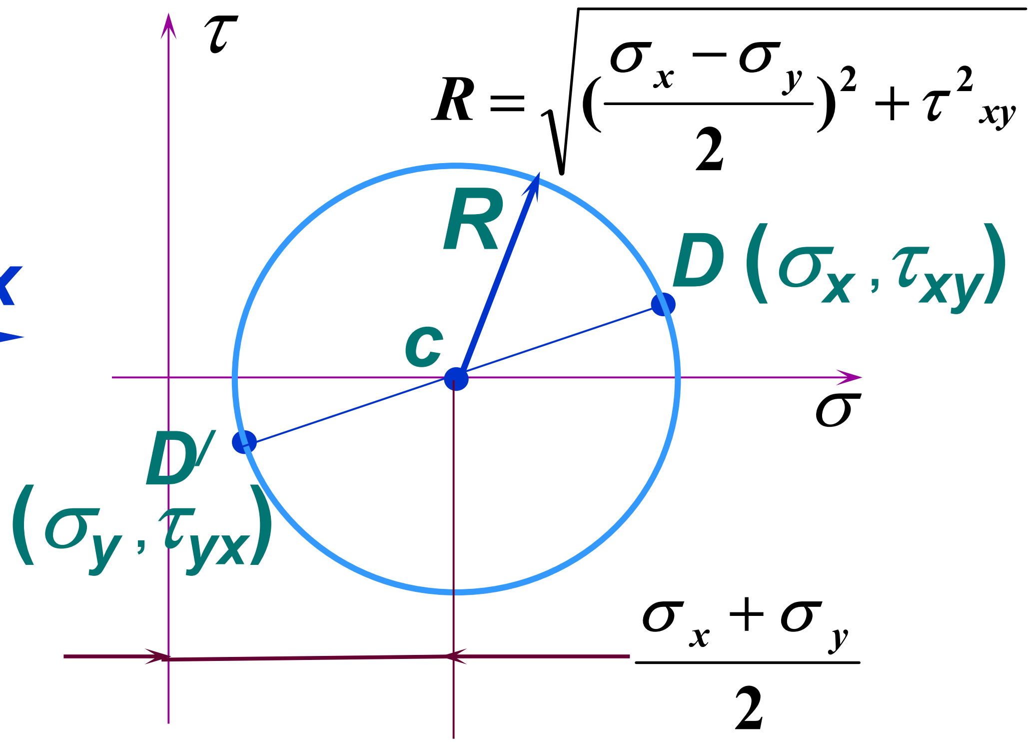


$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2_{xy}}$$

7-4 二向应力状态分析-图解法

2. 应力圆的画法

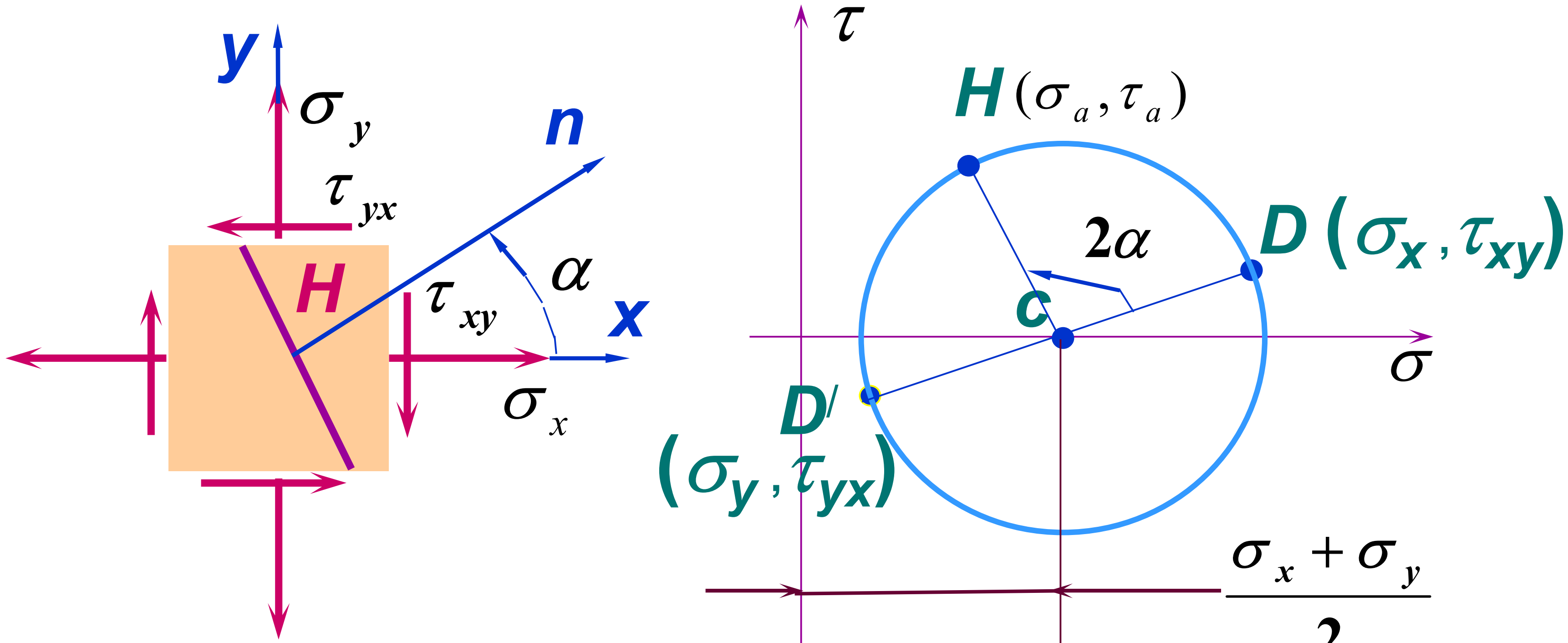




7-4 二向应力状态分析-图解法

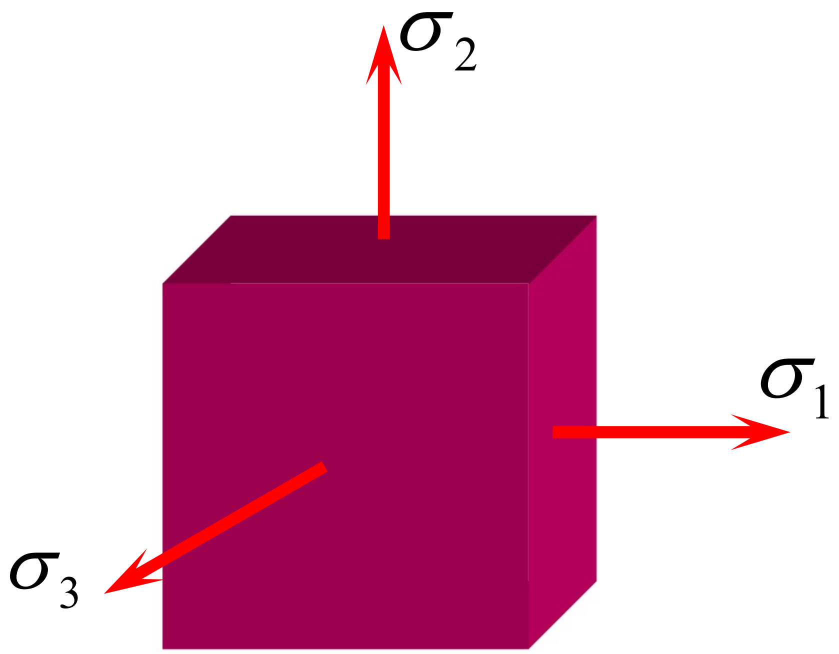
3、几种对应关系

点面对应—应力圆上某一点的坐标值对应着微元某一截面上的正应力和切应力



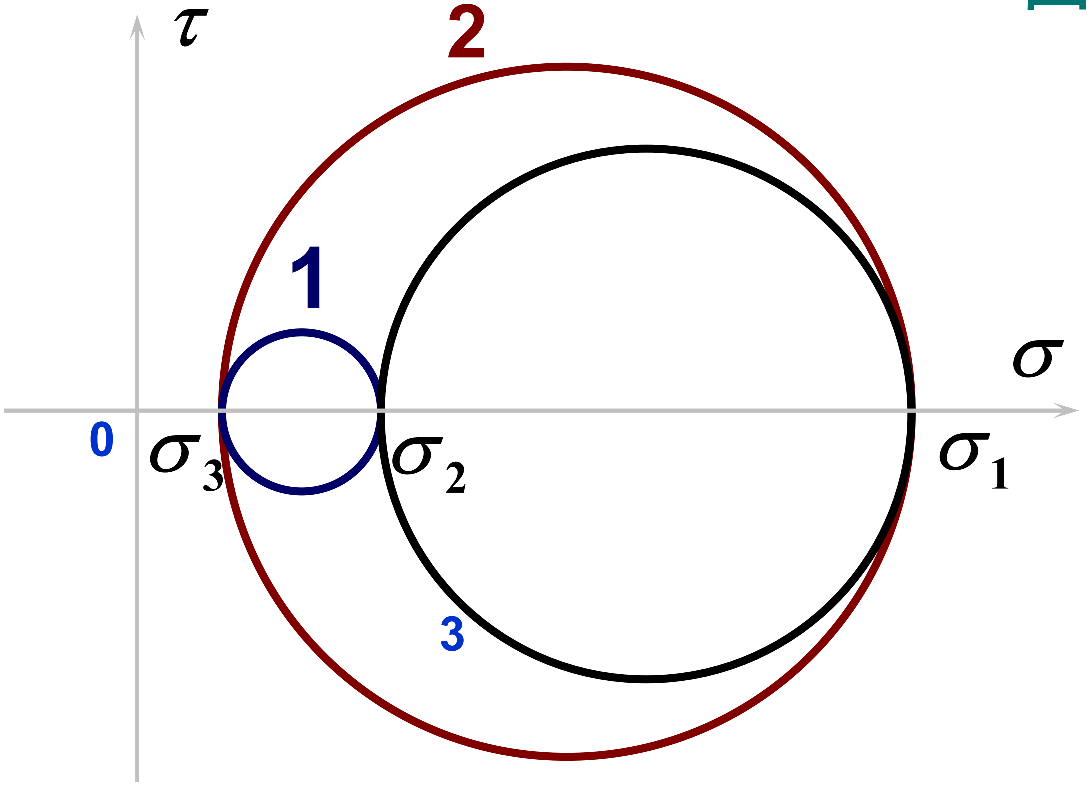
7-5 三向应力状态

定义



三个主应力都不为零的应力状态

7-5 三向应力状态



由三向应力圆可以看出：

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

结论：

代表单元体任意斜截面上应力的点，必定在三个应力圆圆周上或圆内。