

# 热 学

热学研究热现象的宏观特征及其微观本质。

**热现象是物质中大量分子无规则运动的集体表现。**

**大量分子的无规则运动称为热运动。**

**从研究角度和研究方法上，分成两类：**

**从宏观上看**，热学研究物体的**宏观热现象**：与温度有关的物态的物理性质的变化。

由观察和实验来总结热现象的规律，通过逻辑推理，得出热现象的宏观理论——**热力学(Thermodynamics)**

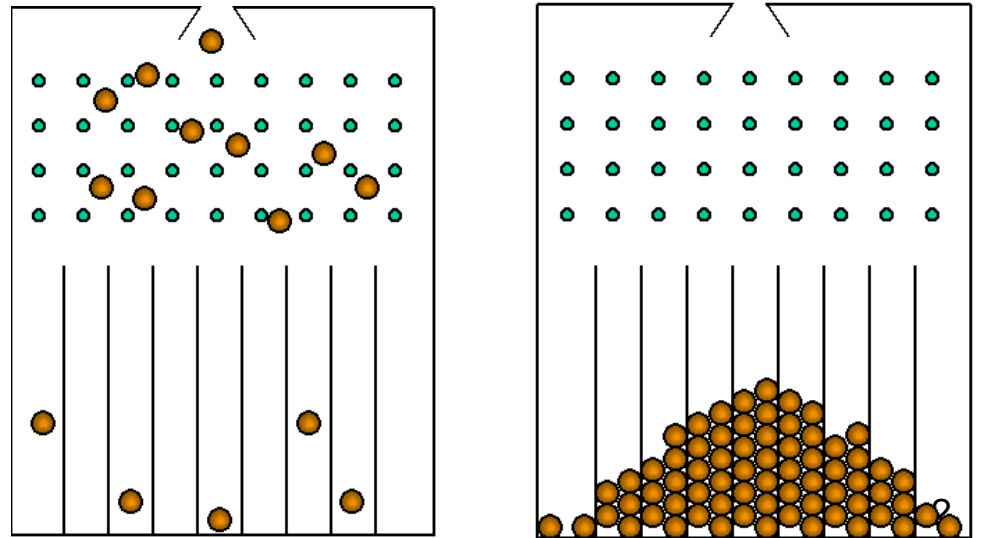
优点：可靠、普遍。      缺点：未揭示微观本质。

从微观上看，热学主要研究宏观热现象的本质，即宏观热现象的微观解释。

用统计的方法研究构成宏观物体的大量微观粒子的无规运动的宏观规律——统计物理学(Statistics)，也成为气体动理论。

气体动理论利用不可直接测量的、描述个别分子运动状态的微观量，如  $\vec{v}$  等，来研究热现象的规律。

单个分子的运动是无序的，具有偶然性，遵循力学规律。但整体（大量分子）服从统计规律。



**微观量：** 分子的质量、速度、动量、能量等。

在宏观上不能直接进行测量和观察。

**宏观量：** 温度、压强、体积等。

在宏观上能够直接进行测量和观察。

宏观量与微观量的内在联系表现在大量分子杂乱无章的热运动遵从一定的统计规律性上。在实验中，所测量到的宏观量只是大量分子热运动的统计平均值。



热力学（宏观研究方法）与气体动理论（微观研究方法）比较：

## 宏观研究方法

1) 具有可靠性； 2) 知其然而不知其所以然； 3) 应用宏观参量。

## 微观研究方法

1) 揭示宏观现象的本质； 2) 有局限性，与实际有偏差，不可任意推广。

### 两种方法的关系



# 第六章

§6-1 理想气体物态方程

§6-2 理想气体的压强和温度

§6-3 能量均分定理和理想气体的内能

§6-4 分子的速率分布和能量分布

§6-5 气体分子的碰撞

# 第六章作业

6, 16, 17,

19, 21, 22,

26, 27, 31

## § 6-1 理想气体物态方程

### 一、平衡态(equilibrium state)

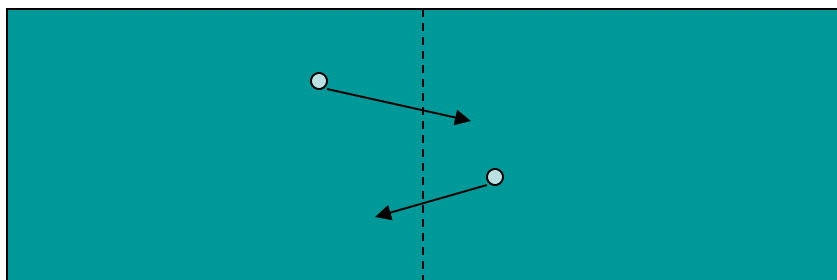
**热力学研究的对象----热力学系统.**

**包含大量的分子,原子.以  $N_A=6\times 10^{23}$  计  
与热力学系统相互作用的环境称为外界.**

**平衡态：**在没有外界影响的条件下，系统各个部分的宏观性质长时间内不发生变化的状态。（系统与外界没有做功或传热等方式的能量交换）

**平衡态是一个理想化的概念**，实际上不存在完全不受外界影响的系统，也就不存在宏观性质绝对不变化的系统。

**热动平衡**：热力学中的平衡是一种热动平衡，系统的分子作永不停息的热运动，而且因为碰撞，每个分子的速度经常在变，但是系统的宏观量不随时间改变。宏观上表现为平衡态。



箱子假想分成两相同体积的部分, 达到平衡时, 两侧粒子有的穿越界线, 但两侧粒子数相同。

处在平衡态的系统的宏观量, 如压强 $P$ , 不随时间改变, 但不能保证任何时刻大量分子撞击器壁的情况完全一样, 这称为**涨落现象**, 分子数越多, 涨落就越小。

上例中两侧粒子数不可能严格相同, 这里的偏差也就是**涨落**。 布朗运动是可观测的涨落现象之一。



## 二、状态参量

描述系统状态的宏观物理量叫**状态参量**。

**1 体积(Volume) $V$** : 气体所能达到的最大空间（**几何描述**）。 **单位**:  $1\text{m}^3 = 10^3\text{L} = 10^3\text{dm}^3$

**2 气体压强(Pressure) $p$** : 作用于容器壁上单位面积的正压力（**力学描述**）。 国际单位:  $1\text{Pa} = 1\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$

标准大气压:  $45^\circ$ 纬度海平面处,  $0^\circ\text{C}$  时的大气压.

$$1\text{atm} = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$$

**3 温度(Temperature) $T$** : 气体冷热程度的量度（**热学描述**）  
热力学温标(**temperature scale**)

单位:开尔文(**Kelvin**) $K$

$$T = 273.15 + t_9$$

### 三、理想气体(ideal gas)物态方程(equation of state)

理想气体宏观定义：遵守三个实验定律的气体。

玻意耳(Boyle)定律

$$T \text{ 不变时 } pV = c$$

查理(Charles)定律

$$V \text{ 不变时 } p/T = c$$

盖—吕萨克(Gay-Lussac)定律

$$p \text{ 不变时 } V/T = c$$

**物态方程**：描述物质存在的物理状态所需的参量之间的函数关系。如理想气体平衡态宏观参量间的函数关系

$$T = f(p, V)$$

对于理想气体

一定质量的  
同种气体

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

理想气体物  
态方程

$$pV = \frac{m}{M} RT = \mu RT$$

摩尔(**mole**)气体常量

$$R = 8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

在热工中  $R = 2 \text{ cal} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

有时用  $R = 0.082 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

1 mol 气体的分子数为 **Avogadro** 常数

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \quad (\text{个分子/mol})$$

标准状态:  $1\text{atm} = 1.013 \times 10^5 \text{Pa}$   $T = 273.15 \text{K}$   
( $0^\circ\text{C}$ )

1 mol气体的体积

$$V = 22.4\text{L} = 2.24 \times 10^{-2} \text{m}^3$$

$$pV = \mu RT \quad R \text{ 如何计算?}$$

$$\frac{pV}{T} = \mu \frac{pV_{\text{mol}}}{T} = \mu \frac{p_s V_{s-\text{mol}}}{T_s} = \mu R$$

$$R = \frac{p_s V_{s-\text{mol}}}{T_s} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 22.4 \times 10^{-3}}{273.15}$$
$$= 8.307 \approx 8.31 (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$$

## § 6-2 理想气体的压强和温度

### 一、统计规律的基本特征

#### 1、什么是统计规律性？

大量偶然事件从整体上反映出来的一种规律性。

#### 2、概率的定义：

某一事件  $i$  发生的概率为  $P_i$        $P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N}$

$N_i$  ---- 事件  $i$  发生的 次数

$N$  ---- 各种事件发生的总次数

例. 扔硬币

### 3、统计规律的特点：

- (1) 只对大量偶然的事件才有意义。
- (2) 它是不同于个体规律的整体规律，统计规律给出的是在一定条件下系统处于某种状态的概率，它所反映的总是与某种宏观量相关的微观量的统计平均值。
- (3) 总是伴随着涨落或起伏现象，事件总数 $N$ 越少，涨落越明显，因此，统计规律只适用 $N$ 很大的情形。
- (4) 统计规律总是研究宏观上充分小（以保证是某点的性质）而微观上充分大（涨落小）的系统。
- (5) 通过求统计平均值来确定宏观量与微观量之间的关系，从而解释与揭示宏观热现象的微观本质。

## 二、理想气体的微观模型和统计性假设

### 微观模型

1) 分子可视为质点；线度  $d \sim 10^{-10}$  m，  
间距  $r \sim 10^{-9}$  m,  $d \ll r$  ;

分子数密度 ( $n$ )：单位体积内的分子数目.

例 常温常压下  $n_{\text{水}} \approx 3.30 \times 10^{22} / \text{cm}^3$

$n_{\text{氮}} \approx 2.47 \times 10^{19} / \text{cm}^3$

例 标准状态下氧分子

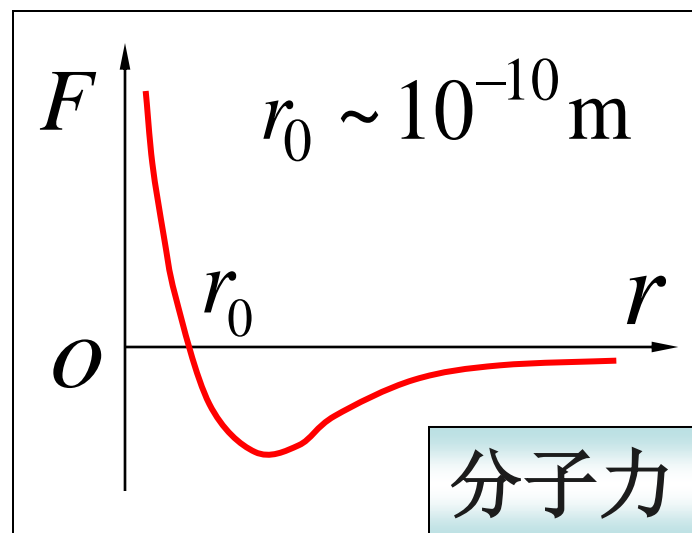
直径  $d \approx 4 \times 10^{-10}$  m

$\frac{\text{分子间距}}{\text{分子线度}} \approx 10$
--

2) 除碰撞瞬间，分子间无相互作用力；

当  $r < r_0$  时，分子力主要表现为斥力；当  $r > r_0$  时，分子力主要表现为引力。

$$r \rightarrow 10^{-9} \text{ m}, F \rightarrow 0$$



3) 弹性质点（碰撞均为完全弹性碰撞）；

4) 分子的运动遵从经典力学的规律。



## 理想气体的微观模型：

一群彼此间无相互作用（自由）的无规运动的弹性质点的集合。

## 热动平衡的统计规律（平衡态）

1) 分子按位置的分布是均匀的  $n = \frac{dN}{dV} = \frac{N}{V}$

2) 分子各方向运动概率均等

单个分子运动速度  $\vec{v}_i = v_{ix}\vec{i} + v_{iy}\vec{j} + v_{iz}\vec{k}$

从大量分子的统计来看，各个方向的运动是均衡的，即各方向运动概率均等，**没有一个方向具有特殊性**。由于气体整体运动速度为零，即

$$\Sigma \vec{v}_i = (\Sigma v_{ix}) \vec{i} + (\Sigma v_{iy}) \vec{j} + (\Sigma v_{iz}) \vec{k} = 0$$

有  $\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0$   $\bar{v}_x = \Sigma v_{ix} / N$

$x$  方向速度平方的平均值  $\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_i v_{ix}^2$

由于  $v_i^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2$

各方向运动概率均等  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$

### 三、理想气体压强公式推导

克劳修斯指出：“气体对容器壁的压强是大量分子对容器壁碰撞的平均效果。”

立方体容器：

设：体积：  $V$  ；分子总数：  $N$

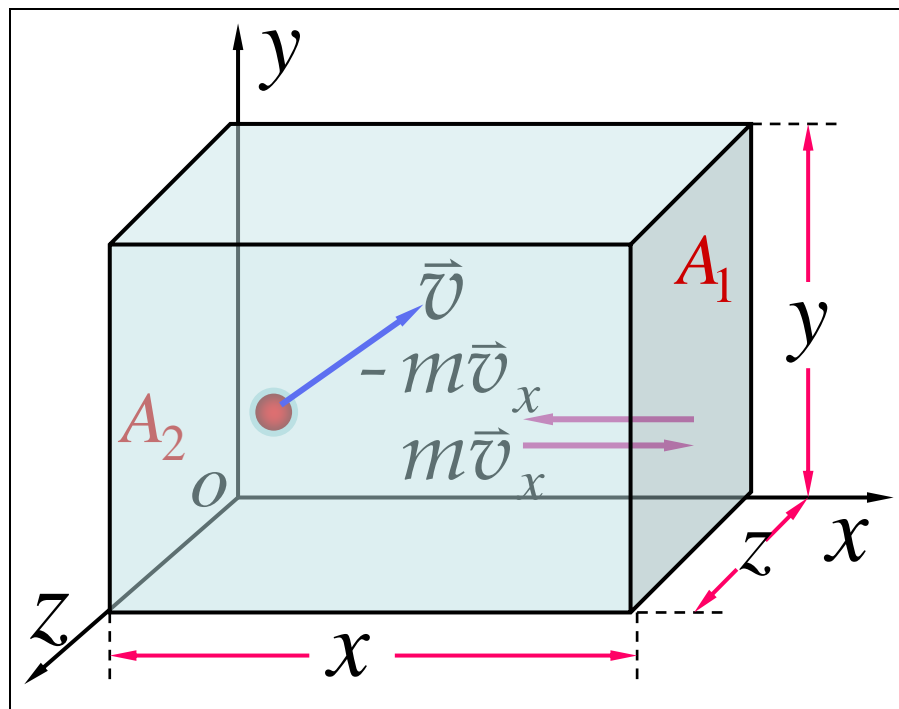
分子数密度：  $n$

分子质量：  $m_0$

假设序号为  $i$  的分子以速度  $(v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$  运动，  
并与  $A_1$  面碰撞后速度变为  $(-v_{ix}, v_{iy}, v_{iz})$



第*i*个分子:



*x*方向动量变化

$$\Delta p_{ix} = -2mv_{ix}$$

分子施于器壁的冲量

$$2mv_{ix}$$

两次碰撞间隔时间

$$2x/v_{ix}$$

单位时间碰撞次数  $v_{ix}/2x$

单个分子单位时间施于器壁的冲量

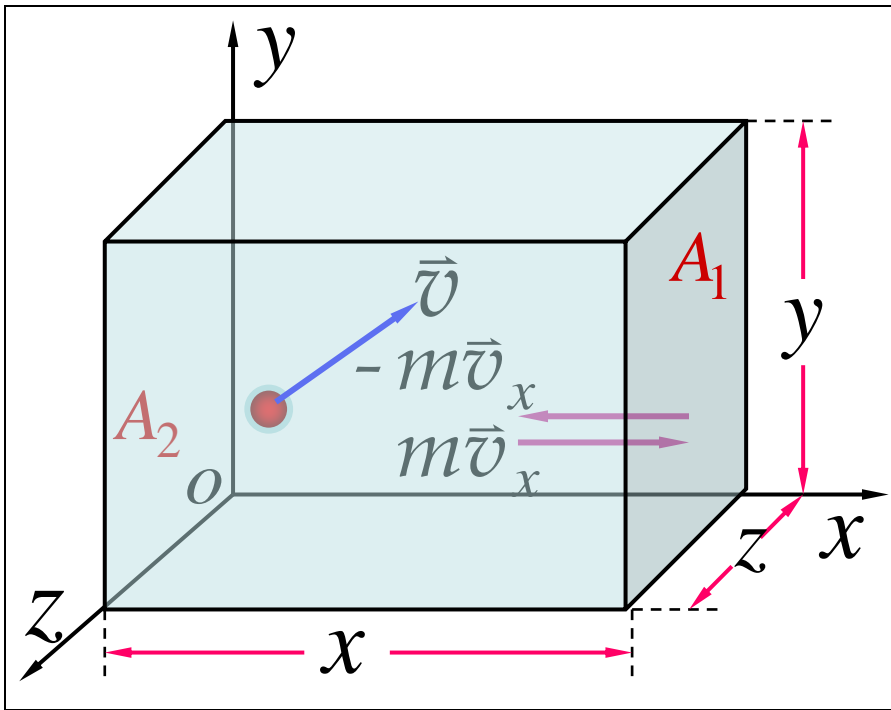
$$mv_{ix}^2/x$$

单个分子单位时间  
施于器壁的冲量

$$mv_{ix}^2 / x$$

系统的总效应

单位时间  $N$  个粒子对器  
壁总冲量



$$\sum_i \frac{mv_{ix}^2}{x} = \frac{m}{x} \sum_i v_{ix}^2 = \frac{Nm}{x} \sum_i \frac{v_{ix}^2}{N} = \frac{Nm}{x} \overline{v_x^2}$$

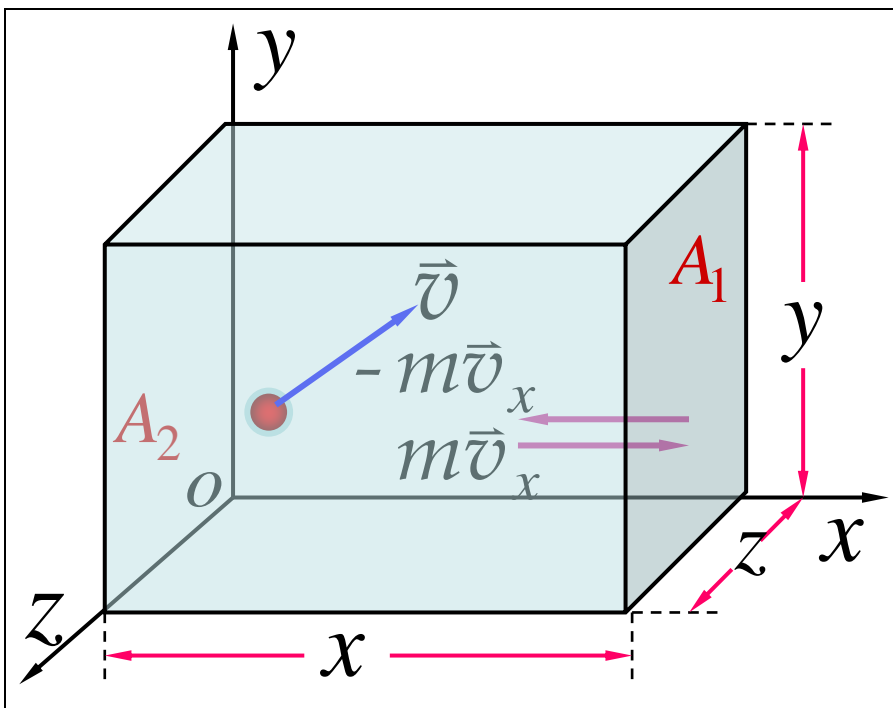
器壁  $A_1$  所受平均冲力  $\overline{F} = \overline{v_x^2} Nm / x$

器壁  $A_1$  所受平均冲力

$$\bar{F} = \overline{v_x^2} Nm/x$$

气体压强

$$p = \frac{\bar{F}}{yz} = \frac{Nm}{xyz} \overline{v_x^2}$$



统计规律

$$n = \frac{N}{xyz}$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

分子平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_t$$

## 压强的物理意义

统计关系式

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_t$$

宏观可测量量

微观量的统计平均值

分子平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$$

◆ 压强是大量分子对时间、对面积的统计平均结果。

问 为何在推导气体压强公式时不考虑分子间的碰撞？

考虑  $x$  方向，全同分子弹性碰撞，交换动能，等价于没有发生碰撞。

## 四、理想气体的温度

理想气体压强公式  $p = \frac{2}{3} n \bar{\varepsilon}_k$   $m' = Nm$

理想气体状态方程  $pV = \frac{m'}{M} RT$   $M = N_A m$

$$n = N/V$$

$$pV = \frac{N}{N_A} RT$$

$$p = nkT$$

玻尔兹曼常数

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

分子平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

微观量的统计平均值

宏观可测量量



## 温度 $T$ 的物理意义

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

- 1) 温度是分子平均平动动能的量度  $\bar{\varepsilon}_k \propto T$  (反映热运动的剧烈程度) .
- 2) 温度是大量分子的集体表现, 个别分子无意义.
- 3) 在同一温度下, 各种气体分子平均平动动能均相等.

**热运动与宏观运动**的区别: 温度所反映的是分子的无规则运动, 它和物体的整体运动无关, 物体的整体运动是其中所有分子的一种有规则运动的表现.

 注意

通常所说的气体分子运动速度是对何参考系而言的?

$$\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0 \quad (\text{如质心系等})$$

## 讨论

一瓶氦气和一瓶氮气密度相同，分子平均平动动能相同，而且它们都处于平衡状态，则它们

★(A) 温度相同、压强相同。

(B) 温度、压强都不同。

★(C) 温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强。

(D) 温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强。

【解】 
$$p = nkT = \frac{N}{V} kT = \rho \frac{k}{m} T$$

$$\because m(\text{N}_2) > m(\text{He}) \quad \therefore p(\text{N}_2) < p(\text{He})$$

若把“密度”改为“分子数密度”，结果如何？

**【例】** 理想气体体积为  $V$ ，压强为  $p$ ，温度为  $T$ ，一个分子的质量为  $m$ ， $k$  为玻尔兹曼常量， $R$  为摩尔气体常量，则该理想气体的分子数为：

(A)  $pV/m$       ★ (B)  $pV/(kT)$

(C)  $pV/(RT)$       (D)  $pV/(mT)$

**【解】**  $p = nkT$        $N = nV = \frac{pV}{kT}$

## § 6-3 能量均分定理和理想气体的内能

### 一、自由度(degree of freedom)

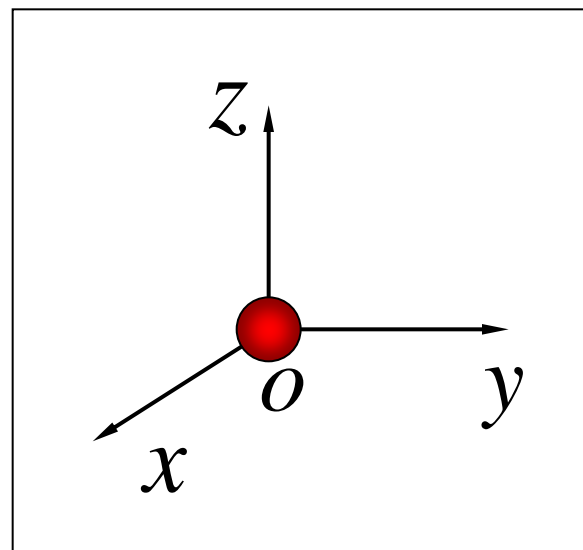
确定一个物体的空间位置所必需的独立坐标数目。

分子平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kt}} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

$$\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} kT$$



➤ 单原子分子平均能量

$$\bar{\varepsilon} = 3 \times \frac{1}{2} kT$$

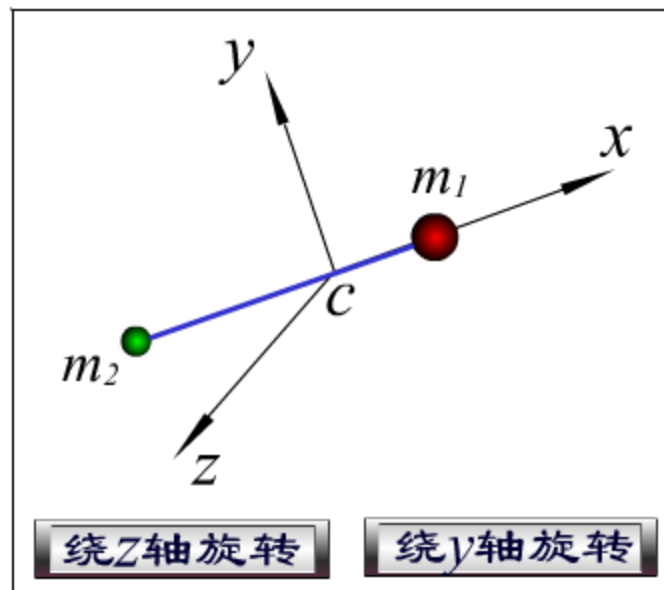
➤ 刚性双原子分子

分子平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kt}} = \frac{1}{2} m \overline{v_{Cx}^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_{Cy}^2} + \frac{1}{2} m \overline{v_{Cz}^2}$$

分子平均转动动能

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kr}} = \frac{1}{2} J \overline{\omega_y^2} + \frac{1}{2} J \overline{\omega_z^2}$$



## 分子平均能量

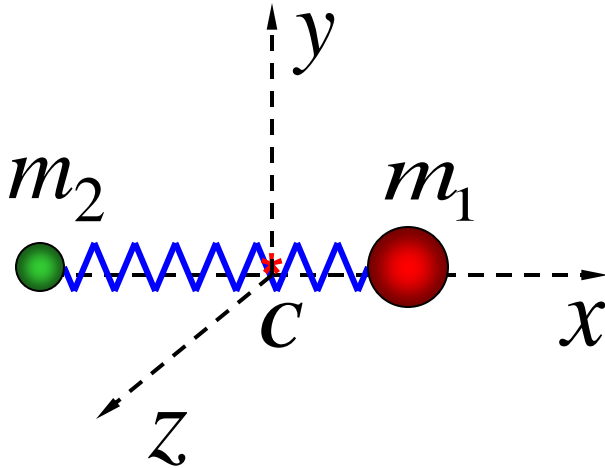
$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{kt}} + \bar{\varepsilon}_{\text{kr}}$$

### 分子平均振动能量

$$\bar{\varepsilon}_v = \frac{1}{2} \mu \overline{v_r^2} + \frac{1}{2} k \overline{x^2}$$

$v_r$ : 两原子相对运动速度

### 非刚性双原子分子



### 非刚性分子平均能量

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\text{kt}} + \bar{\varepsilon}_{\text{kr}} + \bar{\varepsilon}_v$$

◆ **自由度** 分子能量中**独立的速度和坐标的二次方项数目**叫做分子**能量自由度**的**数目**，简称自由度，用符号  $i$  表示。

◆ 自由度数目

Translation

Rotation

Vibration

$$i = t + r + v$$

平动

转动

振动

刚性分子能量自由度

分子 \ 自由度	$t$ 平动	$r$ 转动	$i$ 总
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

## 二、能量均分定理(Principle of equipartition of energy )

单原子分子:

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v_x^2} + \frac{1}{2} m_0 \overline{v_y^2} + \frac{1}{2} m_0 \overline{v_z^2} = \frac{3}{2} kT$$

$$\therefore \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

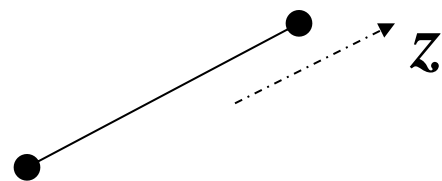
$$\therefore \frac{1}{2} m_0 \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v_y^2} = \frac{1}{2} m_0 \overline{v_z^2} = \frac{1}{2} kT$$

每个平动自由度分配平均能  $\frac{1}{2} kT$



刚性双原子分子除平动能，还有转动能：

$$E_{\text{转动}} = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2$$



每个转动自由度分配平均能  $\frac{1}{2}kT$

玻尔兹曼假设：

气体处于平衡态时，分子任何一个自由度的平均能量都相等，均为  $kT/2$ ，这就是能量按自由度均分定理。

分子的平均能量

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{单原子} & \bar{\varepsilon}_k = \frac{3}{2} kT \\ \text{双原子} & \bar{\varepsilon}_k = \frac{5}{2} kT \\ \text{多原子} & \bar{\varepsilon}_k = 3kT \end{array} \right.$$

大量分子频繁碰撞，能量在各分子之间以及各自由度之间相互交换和转换。在达到平衡态时，能量就被平均地分配到每个自由度了。

能量按自由度均分定理不仅适用于气体，对于液体和固体同样适用。

设平动(Translation)自由度  $t$ ，转动(Rotation)自由度  $r$ ，振动(Oscillation)自由度  $s$ ，平均总动能：

$$\overline{\epsilon_k} = (t + r + 2s) \frac{1}{2} kT$$

### 三、理想气体的内能(Internal Energy of Ideal Gas )

与系统内所有分子热运动相关的能量

理想气体不考虑 相互作用势能  
不涉及化学反应、核反应

- 动能
- 相互作用势能
- 化学能、核能

理想气体的内能：动能

$$\begin{matrix} T & K \\ \mu & mol \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} E &= \overline{\varepsilon_k} \cdot N_A \cdot \mu \\ \overline{\varepsilon_k} &= \frac{i}{2} kT \\ kN_A &= R \end{aligned}$$

$$E = \mu \frac{i}{2} RT$$

1mol 理想气体的内能

$$E_0 = \frac{i}{2} RT$$

理想气体的内能是温度的单值函数!

## 讨论

- 1、前面的结果是对应温度不太高，只考虑分子的平动、转动，并且除了碰撞分子间没有其他作用力。
- 2、高温时，视作弹性体的分子，还要考虑振动的动能和弹性势能所对应的能量。
- 3、能量均分定理是按经典的统计规律得出的结果，所以：
  - (1) 对于个别分子，某一瞬间的总能量可能与  $\overline{\epsilon_{\text{总}}}$  差别很大。
  - (2) 当考虑分子转动、振动的量子效应时，能量均分的概念不再成立。

$\mu \text{ mol}$  理想气体的内能  $E = \mu \frac{i}{2} RT$

由  $pV = \mu RT$  可得:  $E = \mu \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} pV$

理想气体内能变化

$$\Delta E = \mu \frac{i}{2} R \Delta T$$

$$\text{或者 } \Delta E = \frac{i}{2} \Delta(pV)$$

只与始末状态有关，与状态变化的具体过程无关。

**【例】** 理想气体系统由氧气组成，压强 $P = 1\text{atm}$ ，温度 $T = 27^\circ\text{C}$ 。求（1）单位体积内的分子数；（2）分子的平均平动动能和平均转动动能；（3）单位体积中的内能。

**【解】** （1）根据  $p = nkT$

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 2.45 \times 10^{25} \left( m^{-3} \right)$$

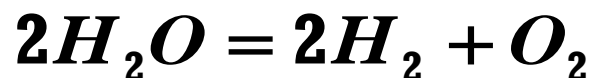
$$(2) \quad \overline{\varepsilon_{\text{平}}} = \frac{3}{2} kT = 6.21 \times 10^{-21} (J)$$

$$\overline{\varepsilon_{\text{转}}} = kT = 4.14 \times 10^{-21} (J)$$

$$(3) \quad E = n \left( \overline{\varepsilon_{\text{平}}} + \overline{\varepsilon_{\text{转}}} \right) = 2.54 \times 10^5 (J)$$

**【例】** 将水蒸汽分解成相同温度的氢气和氧气，求内能增加的百分比

**【解】**



$$2 \text{ mol 水} \longrightarrow E_{H_2O} = 6RT$$

$$2 \text{ mol 氢气} \longrightarrow E_{H_2} = 5RT$$

$$1 \text{ mol 氧气} \longrightarrow E_{O_2} = \frac{5}{2}RT$$

$$\frac{(E_{H_2} + E_{O_2}) - E_{H_2O}}{E_{H_2O}} = \frac{7.5 - 6}{6} = 25\%$$

**【例】** 容积为20.0L的瓶子以速率  $u = 200\text{m/s}$  匀速运动, 瓶中充有质量为100g的氦气. 设瓶子突然停止, 且气体分子全部定向运动的动能都变为热运动动能. 瓶子与外界没有热量交换, 求热平衡后氦气的温度、压强、内能及氦气分子的平均动能各增加多少?

**【解】** 定向运动动能  $N \cdot \frac{1}{2}mu^2$

气体内能增量  $N \cdot \frac{i}{2}k\Delta T$  ( $i=3$ )

由能量守恒  $N \cdot \frac{1}{2}mu^2 = N \cdot \frac{i}{2}k\Delta T = N \cdot \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} \Delta T$

$$(1) \quad \Delta T = \frac{N_A mu^2}{iR} = \frac{M_{mol}u^2}{iR} = 6.42\text{K}$$



$$(2) \quad \Delta p = \frac{M}{M_{mol}} \frac{R\Delta T}{V} = 6.67 \times 10^4 \text{ Pa} \quad \left( pV = \frac{M}{M_{mol}} RT \right)$$

$$(3) \quad \Delta E = \frac{M}{M_{mol}} \cdot \frac{i}{2} R\Delta T = 2000 \text{ J}$$

$$(4) \quad \Delta \bar{\varepsilon}_k = \frac{i}{2} k\Delta T = 1.33 \times 10^{-22} \text{ J}$$

**【例】** 一氧气瓶的容积为 $V$ , 充入氧气后压强为 $p_1$ , 用了一段时间后压强降为 $p_2$ , 则瓶中所剩氧气的内能与用前氧气的内能比为多少.

**【解】** 设用前有 $\mu_1 \text{ mol}$ 氧气, 用后有 $\mu_2 \text{ mol}$ 氧气

$$E_1 = \frac{i}{2} \mu_1 RT_1 = \frac{i}{2} p_1 V \quad E_2 = \frac{i}{2} \mu_2 RT_2 = \frac{i}{2} p_2 V \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{p_1}{p_2}^{41}$$

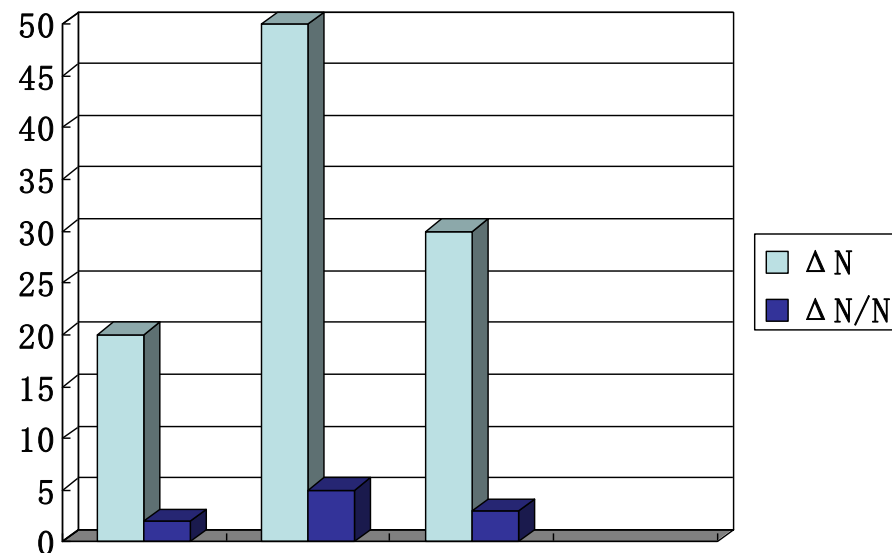
## § 6-4 分子的速率分布和能量分布

### 一、分子的速率分布(Molecular Velocity Distribution)

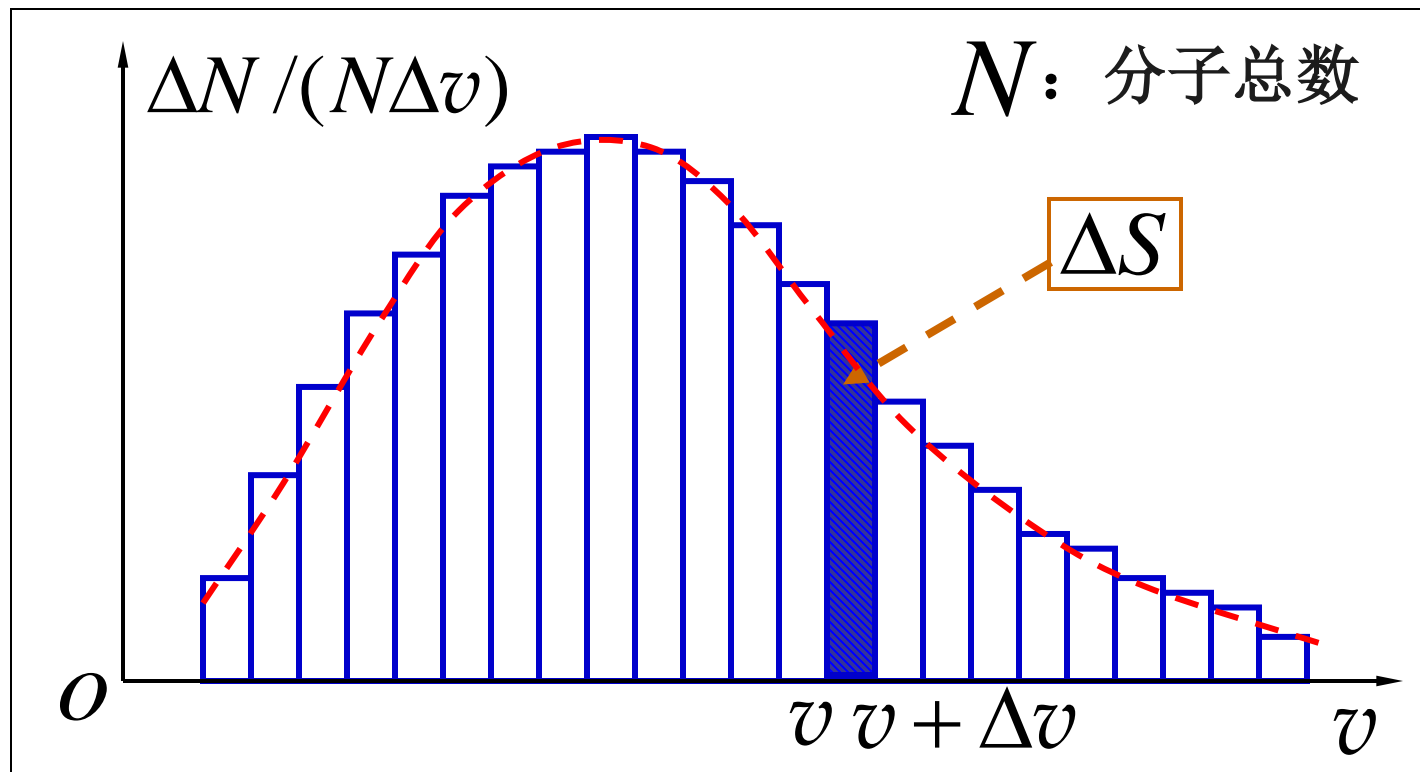
#### 1, 离散值的方式:

设有  $N = 100$  个粒子, 速率范围:  $0 \sim 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$\Delta v$	$\Delta N$	$\frac{\Delta N}{N}$
$0 \sim 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	20	0.2
$100 \sim 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	50	0.5
$200 \sim 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	30	0.3



# 分子速率分布图

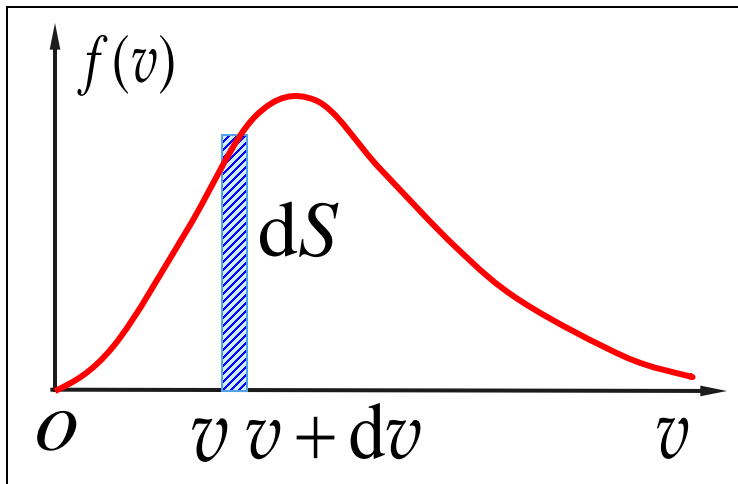


$\Delta N$  为速率在  $v \rightarrow v + \Delta v$  区间的分子数.

$\Delta S = \frac{\Delta N}{N}$  表示速率在  $v \rightarrow v + \Delta v$  区间的分子数占总数的百分比.

## 分布函数

$$f(v) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N \Delta v} = \frac{1}{N} \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta v} = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$$



### 物理意义

表示在温度为  $T$  的平衡状态下，速率在  $v$  附近单位速率区间的分子数占总数的百分比：**概率密度**。

表示速率在  $v \rightarrow v + dv$  区间的分子数占总分子数的百分比。

$$\int_0^{\infty} \frac{dN}{N} = \int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

◆ **归一化条件**

概率  $\Delta N_i / \Delta N$  与  $\begin{cases} v \text{ 有关, 不同 } v \text{ 附近概率不同。} \\ \Delta v \text{ 有关, 速率间隔大, 概率大。} \end{cases}$

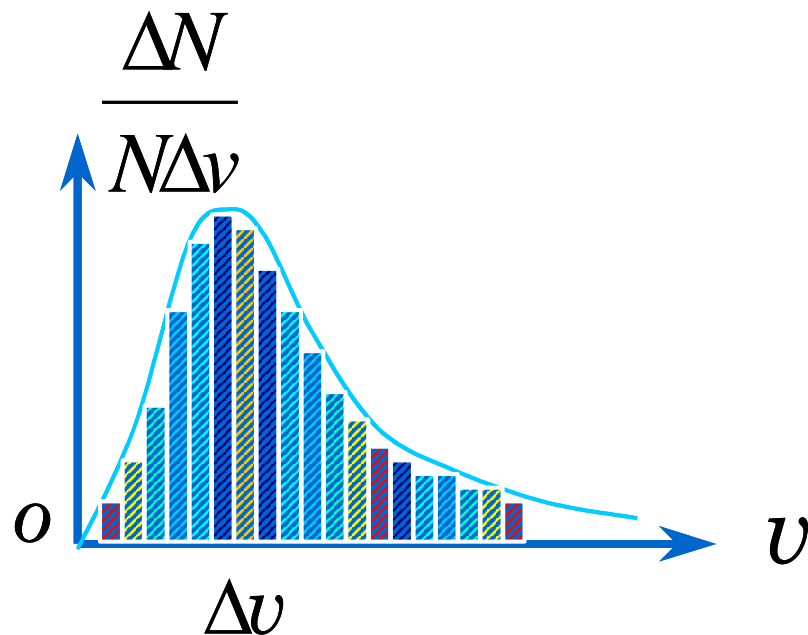
$\Delta v \rightarrow dv$  速率间隔很小, 该区间内分子数为  $dN$ ,

在该速率区间内分子的概率

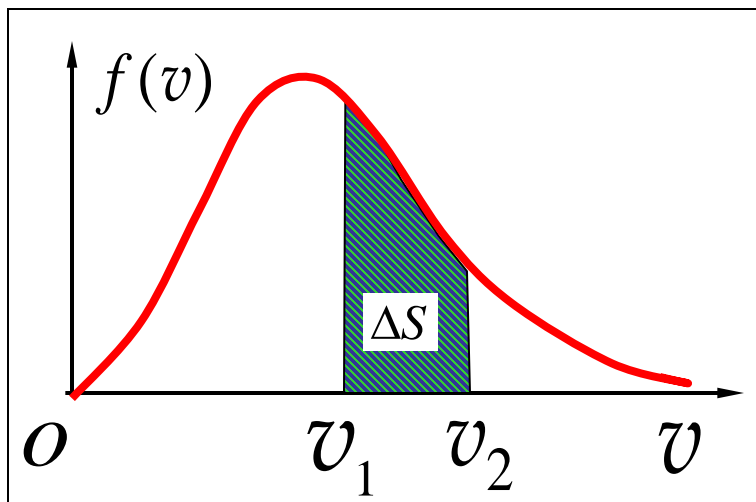
$$\frac{dN}{N} \propto dv$$

写成等式  $\frac{dN}{N} = f(v)dv$

表示分布在  $v \rightarrow v + dv$  区间内的分子数占总分子数的比率 (或百分比)



$$f(v) = \frac{dN}{Ndv}$$



$$\frac{dN}{N} = f(v)dv = dS$$

速率位于  $v \rightarrow v + dv$  内分子数

$$dN = Nf(v)dv$$

速率位于  $v_1 \rightarrow v_2$  区间的分子数  $\Delta N = \int_{v_1}^{v_2} Nf(v)dv$

速率位于  $v_1 \rightarrow v_2$  区间的分子数占总数的百分比

$$\Delta S = \frac{\Delta N(v_1 \rightarrow v_2)}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$$

取  $v_1=0$ ,  $v_2 \rightarrow \infty$ , 则有:

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{\infty} \frac{dN}{N} = 1$$

归一化条件

## 二、统计平均速率

### (1) 平均速率(Average speed):

设：速率为 $v_1$ 的分子数为 $\Delta N_1$ 个；

速率为 $v_2$ 的分子数为 $\Delta N_2$ 个；

.....

总分子数：  $N = \Delta N_1 + \Delta N_2 + \dots + \Delta N_n$

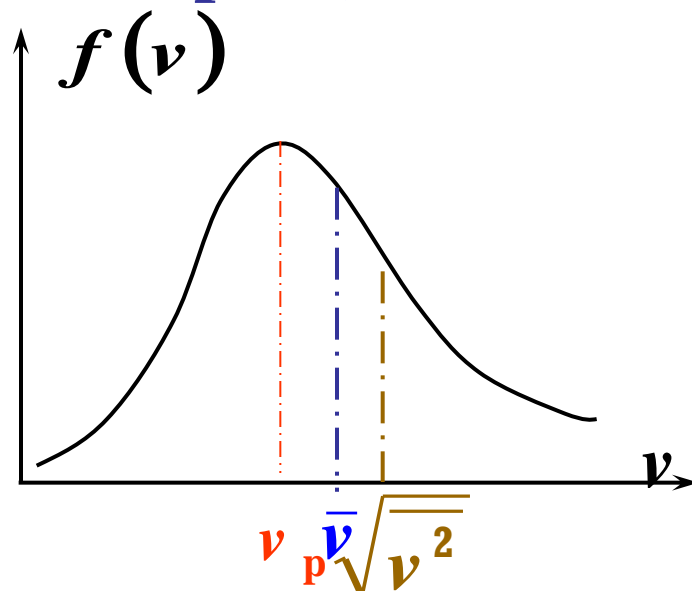
平均速率：  $\bar{v} = \frac{\Delta N_1 v_1 + \Delta N_2 v_2 + \dots + \Delta N_N v_N}{N} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta N_i v_i}{N}$

$$\bar{v} = \int_1^N \frac{v dN}{N} \quad \because \frac{dN}{N} = f(v) dv \quad \therefore \bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv$$

## (2) 方均根速率(root-mean-square speed)

一段速率区间 $v_1 \sim v_2$ 的方均速率

$$\overline{v_{12}^2} = \frac{\int_{v_1}^{v_2} v^2 dN}{\int_{v_1}^{v_2} dN} = \frac{\cancel{N} \int_{v_1}^{v_2} v^2 f(v) dv}{\cancel{N} \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv}$$



$0 \sim \infty$  整个速率区间的方均速率

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^{\infty} v^2 f(v) dv}{\int_0^{\infty} f(v) dv} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$$

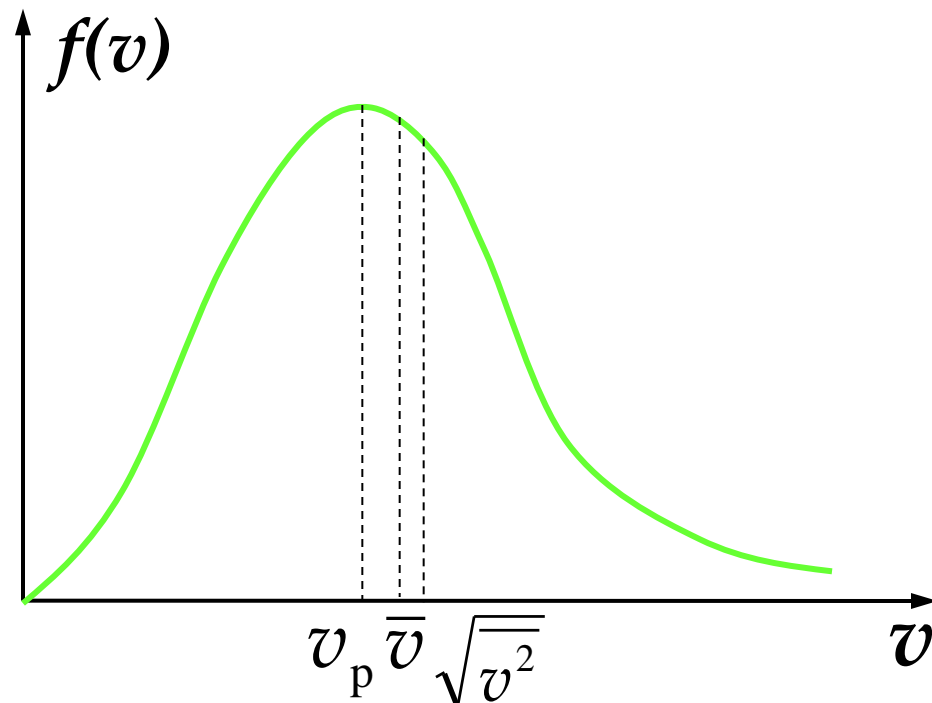
方均根速率  $\sqrt{\overline{v^2}}$



### (3) 最概然速率(most probable speed)

$$\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v=v_p} = 0$$

物理意义



在平衡态条件下，一定温度的理想气体分子速率分布在 $v_p$ 附近的单位速率区间内的分子数占气体总分子数的百分比最大。

【例】有 $N$ 个粒子，其速率分布函数为：

(1) 作速率分布曲线。

(2) 由 $N$ 和 $v_0$ 求常量 $C$ 。  $f(v) = \begin{cases} C & (v_0 > v > 0) \\ 0 & (v > v_0) \end{cases}$

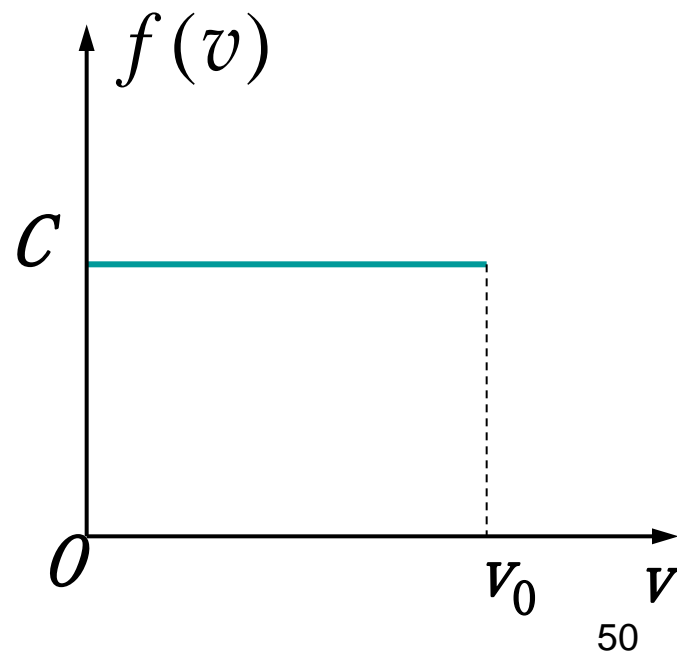
(3) 求粒子的平均速率。

(4) 求粒子的方均根速率。

【解】

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(v) dv \\ = \int_0^{v_0} C dv = C v_0 = 1 \end{aligned}$$

$$C = \frac{1}{v_0}$$



$$\overline{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \int_0^{v_0} C v dv = C \cdot \frac{v_0^2}{2}$$

$$\overline{v} = \frac{1}{v_0} \frac{v_0^2}{2} = \frac{v_0}{2}$$

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \int_0^{v_0} C v^2 dv = \frac{1}{3} v_0^2$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_0$$

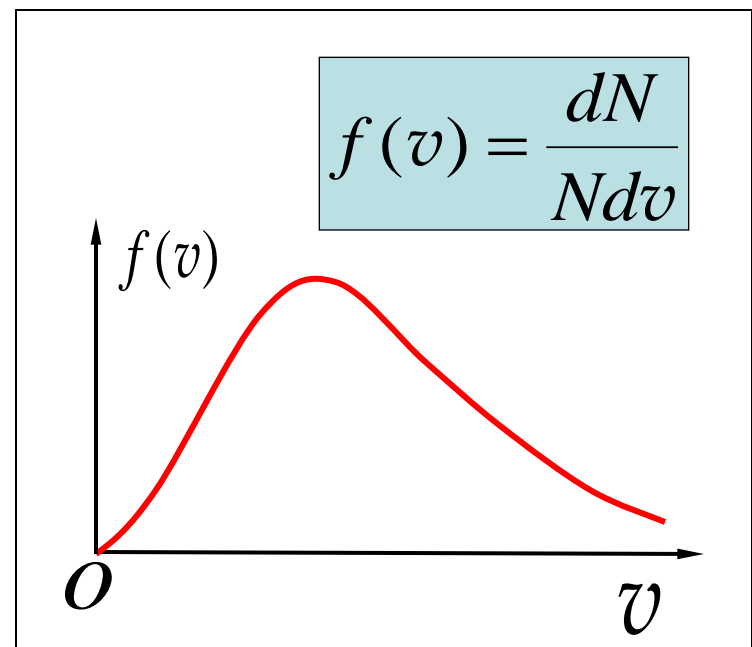
### 三、麦克斯韦速率分布定律

麦氏分布函数  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$

$$\left( k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \right)$$

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv$$

反映理想气体在平衡态下，  
各速率区间分子数占总分子  
数的百分比的规律。



## 分子速率的三个统计平均值

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$\left( v_p = \sqrt{\frac{2pV}{m'}} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \right)$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \approx 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

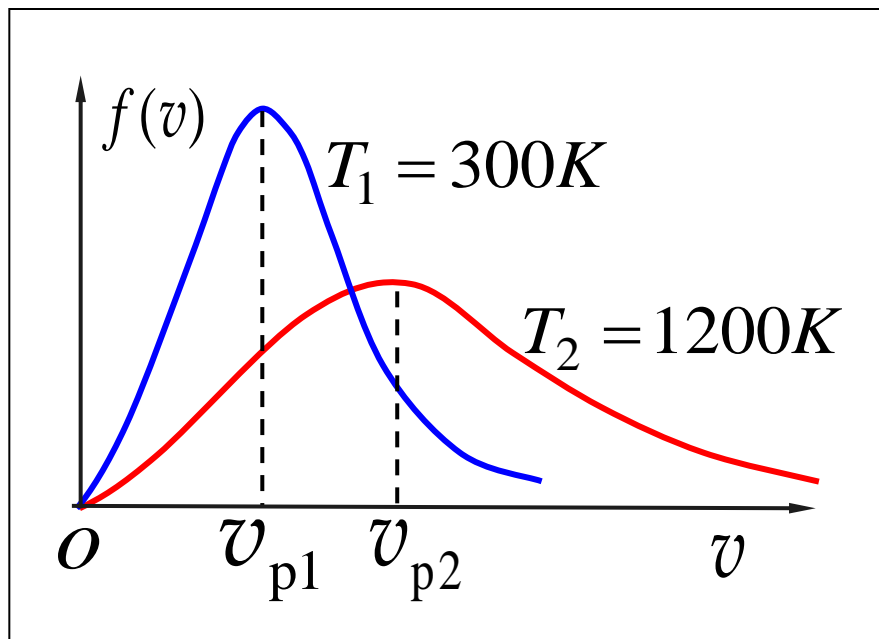
$$\left( \bar{v} = \sqrt{\frac{8pV}{\pi m'}} = \sqrt{\frac{8p}{\pi \rho}} \right)$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

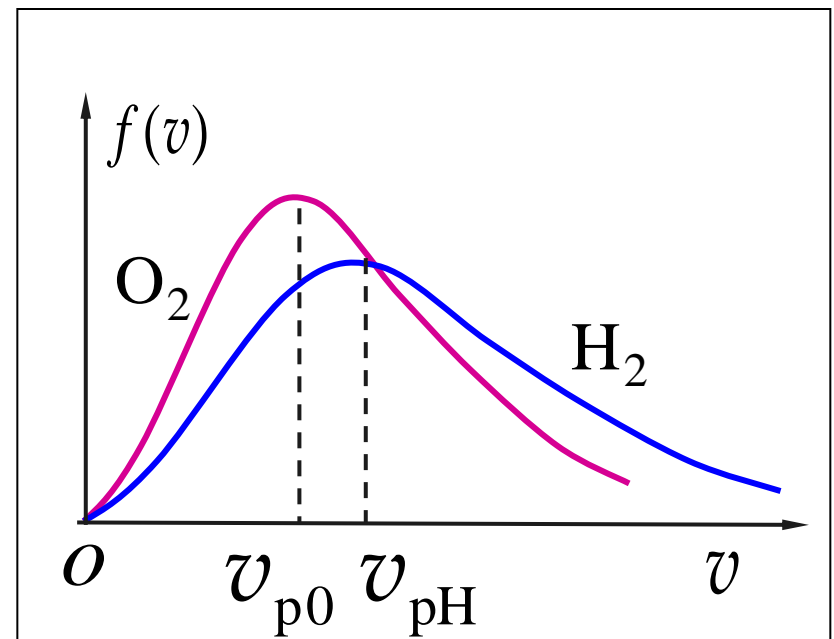
$$\left( \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3pV}{m'}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} \right)$$

由理想气体物态方程  $pV = \frac{m'}{M} RT = \mu RT$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

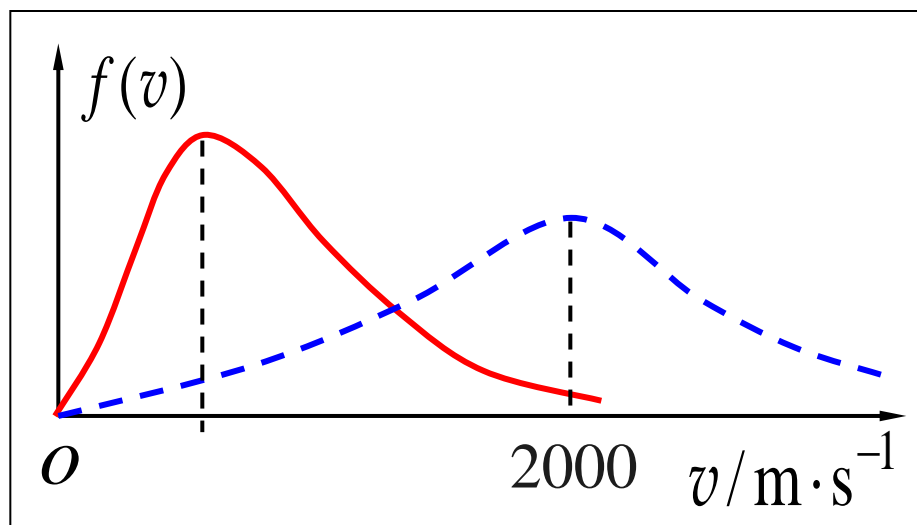


$N_2$  分子在不同温度下的  
速率分布



同一温度下不同气体的  
速率分布

**【例】** 如图示两条  $f(v) \sim v$  曲线分别表示氢气和氧气在同一温度下的麦克斯韦速率分布曲线，从图上数据求出氢气和氧气的最概然速率。



$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

$$\because m(\text{H}_2) < m(\text{O}_2)$$

$$\therefore v_p(\text{H}_2) > v_p(\text{O}_2)$$

$$\therefore v_p(\text{H}_2) = 2000 \text{ m/s}$$

$$\therefore v_p(\text{O}_2) = 500 \text{ m/s}$$

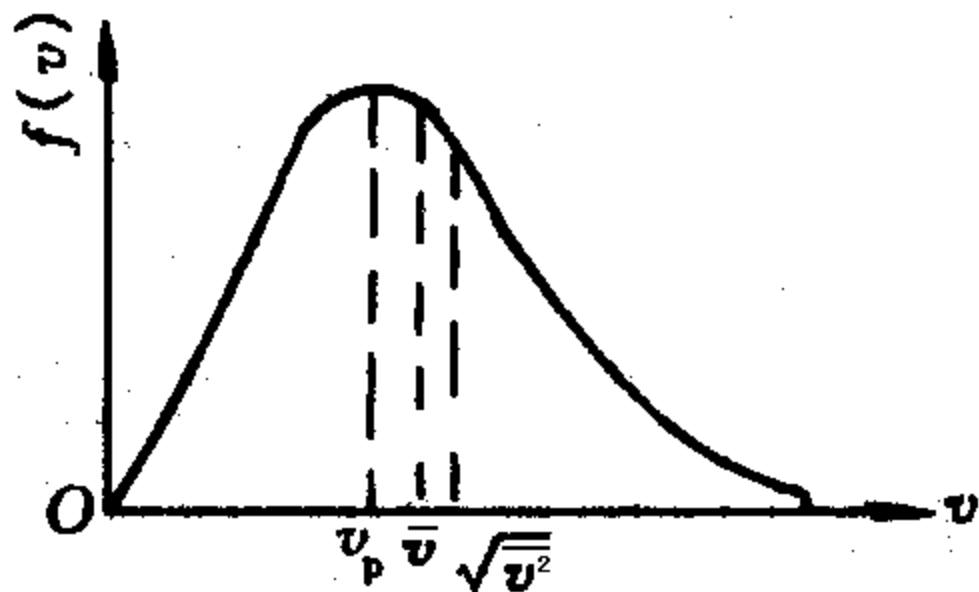
$$\frac{v_p(\text{H}_2)}{v_p(\text{O}_2)} = \sqrt{\frac{m(\text{O}_2)}{m(\text{H}_2)}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$$

三种速率，就不同的问题有着各自的应用。

在讨论速率分布时，就要用到大量分子的最概然速率；

在计算分子运动的平均距离时，要用到平均速率；

在计算分子平均平动动能时要用方均根速率。



$$v_p < \bar{v} < \sqrt{v^2}$$



**【例】** 许多星球的温度达到 $10^8 K$ . 在此温度下原子已经不存在了, 而氢核(质子)是存在的. 若把氢核视为理想气体. 求:

(1) 氢核的方均根速率是多少?

(2) 氢核的平均平动动能是多少电子伏特?

**【解】** (1) 
$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{mol}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 10^8}{1 \times 10^{-3}}} = 1.58 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(2) 
$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_k &= \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 10^8 = 2.07 \times 10^{-15} \text{ J} \\ &= \frac{2.07 \times 10^{-15}}{1.6 \times 10^{-19}} = 1.29 \times 10^4 \text{ eV} \end{aligned}$$

**【例】** 求：27°C 时氢分子、氧分子的最概然速率、平均速率和方均根速率。

**【解】** 系统的温度  $T = 300.15 \text{ K}$

氢分子的摩尔质量  $M = 2.02 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$

$$v_{p1} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1.41 \sqrt{\frac{8.31 \times 300.15}{2.02 \times 10^{-3}}} = 1567 \text{ m/s}$$

$$\bar{v}_1 = 1.6 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1778 \text{ m/s} \quad \sqrt{\overline{v_1^2}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 1922 \text{ m/s}$$

氧分子的摩尔质量  $M = 32 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$

$$v_{p2} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}} = 394 \text{ m/s} \quad \bar{v}_2 = 447 \text{ m/s} \quad \sqrt{\overline{v_2^2}} = 483 \text{ m/s}$$

**【例】** 求在标准状态下， $1.0 \text{ m}^3$  氮气中速率处于  $500 \sim 501 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  之间的分子数目。

**【解】** 已知  $T = 273.15 \text{ K}$      $p = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$

$$M = 28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{28 \times 10^{-3}}{6.022 \times 10^{23}} \text{ kg} = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273.15} \text{ m}^{-3} = 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\Delta N}{N} = \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \Delta v$$

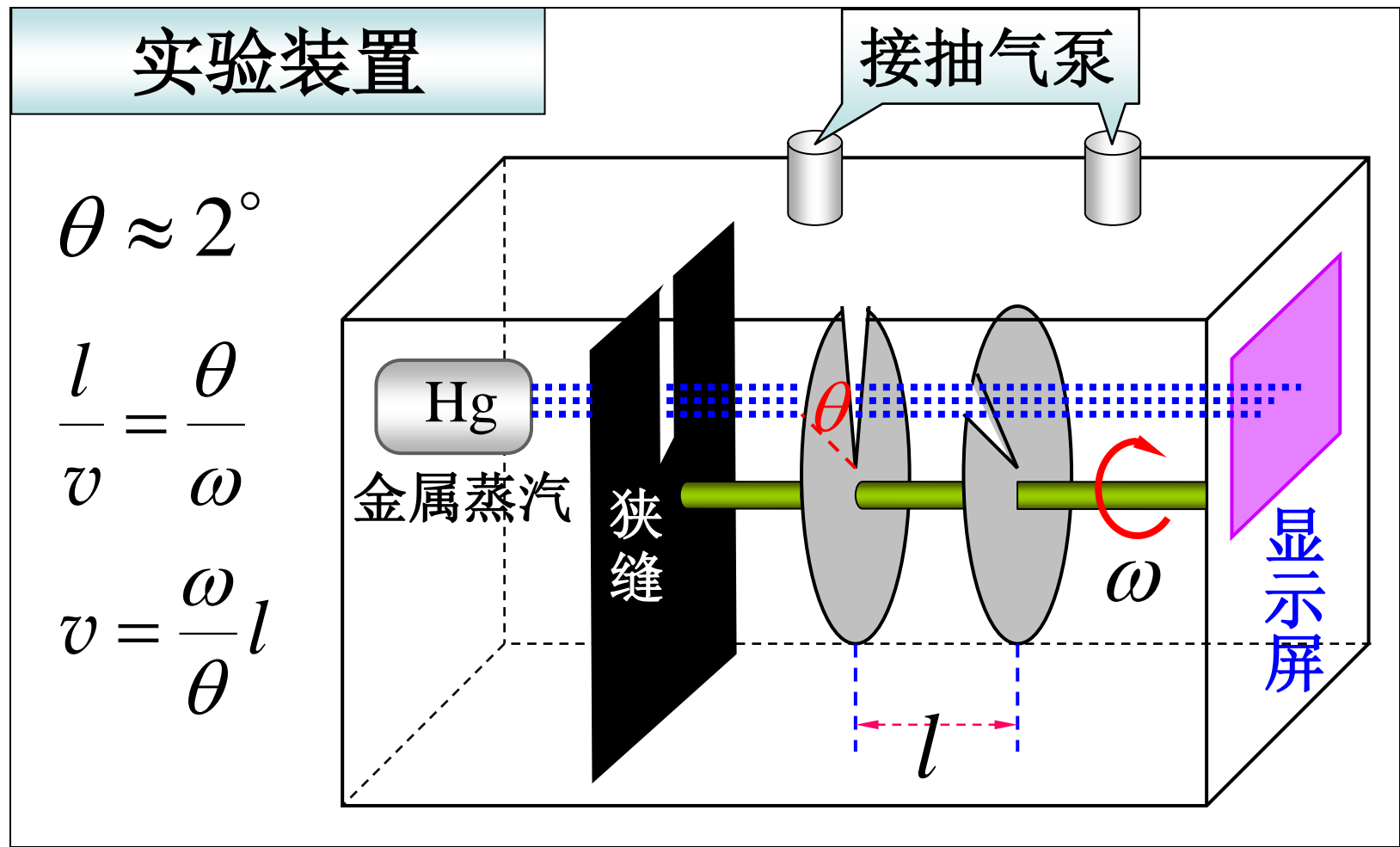
$$v = 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \Delta v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = 1.85 \times 10^{-3}$$

$$\Delta n = 1.85 \times 10^{-3} \times 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3} = 5.0 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

1934年我国物理学家葛正权用实验测定了分子的速率分布。

## 1956年，密勒-库什实验



## 四、玻尔兹曼能量分布律

麦氏分布函数  $f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$

$\longrightarrow dN = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_k}{kT}} 4\pi v^2 dv$

麦克斯韦速度分布率中，有一因子  $e^{-mv^2/2kT}$  即  $e^{-E_k/kT}$

**适用于：**理想气体，即不计分子间相互作用力和外场对分子的作用力，即分子只有动能没有势能。

假如气体分子有势能  $E_p = E_p(x, y, z)$ ，  
则  $E = E_p + E_k$

空间区域:  $x \rightarrow x + dx$ ,  $y \rightarrow y + dy$ ,  $z \rightarrow z + dz$

速度区间:  $v_x \rightarrow v_x + dv_x$ ,  $v_y \rightarrow v_y + dv_y$ ,  $v_z \rightarrow v_z + dv_z$

玻耳兹曼能量分布律:

$$dN = n_0 \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_k + E_p}{kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$$

$n_0$  为  $E_p=0$  处分子的数密度 (包含各种速度) ,

这表明, 就统计的意义而言, 气体分子将占据  
能量较低的状态。

## 重力场中气体分子按高度分布

重力场中考虑一竖直空气柱,

设 $E_p=0$  处分子数密度为 $n_0$ ,

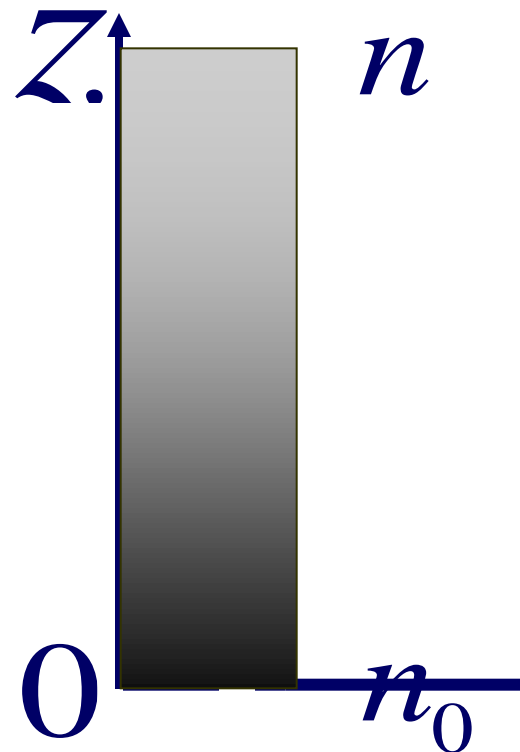
根据归一化条件

$$\iiint_{\infty} \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-E_k/kT} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = 1$$

体元中含有各种速度的分子数为

$$dN' = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}} dx dy dz$$

在  $h$  处分子数密度为  $n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$





当大气温度均匀时，分子数密度随高度增加按指数规律减小。

在同一高度

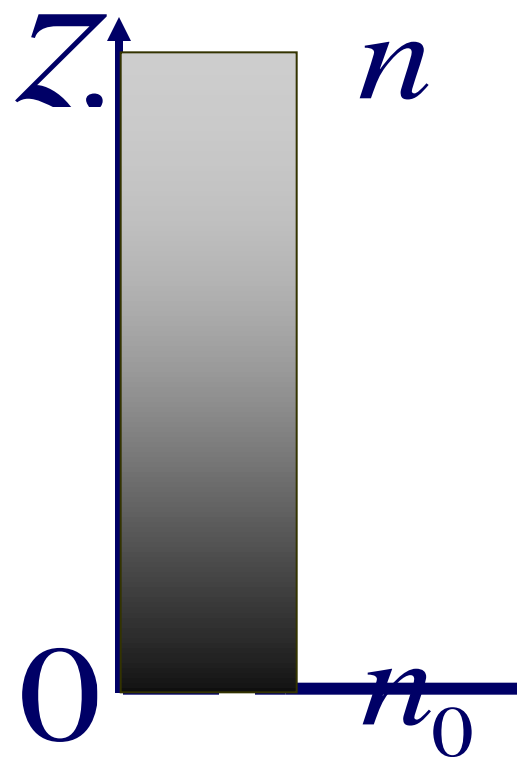
$m \uparrow \Rightarrow n$  减小更快

$T \uparrow \Rightarrow n$  减小更慢

又据  $p = nkT$

得: 
$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

$p_0$  为  $Z=0$  处分子数密度



## 恒温气压公式（高度计）

设温度不随高度变化

根据压强变化测高度，实际温度也随高度变化，测大气温度有一定的范围，是近似测量。

由上式可得高度  $h$  为：

$$h = \ln( p_0 / p ) RT / Mg$$

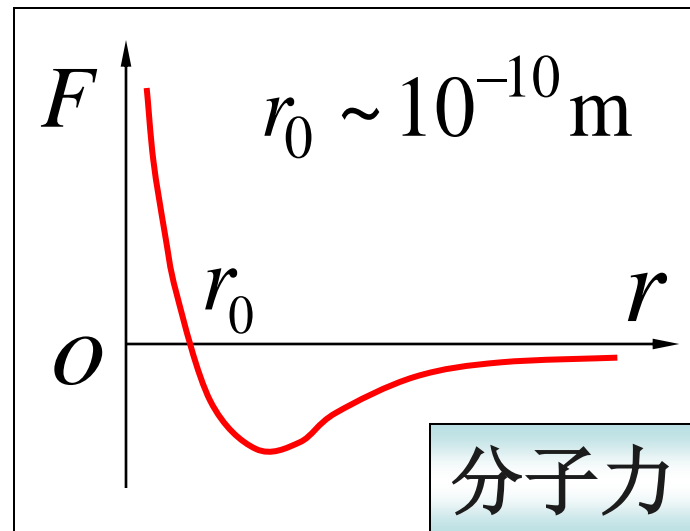
高度每升高 10 米，大气压强约降 133Pa  
(  $\sim 1\text{mmHg}$  ) 。

## § 6-5 气体分子的碰撞

### 一、分子碰撞的意义和基本模型

当  $r < r_0$  时，分子力主要表现为斥力；当  $r > r_0$  时，分子力主要表现为引力。

$$r \rightarrow 10^{-9} \text{ m}, \quad F \rightarrow 0$$



- 1) 分子可视为**刚性球体**；有效直径  $d \sim 10^{-10} \text{ m}$ ，
- 2) 除碰撞瞬间，分子间无相互作用力；
- 3) 弹性质点（碰撞均为完全弹性碰撞）；
- 4) 分子的运动遵从经典力学的规律。

## 二、平均碰撞频率和平均自由程

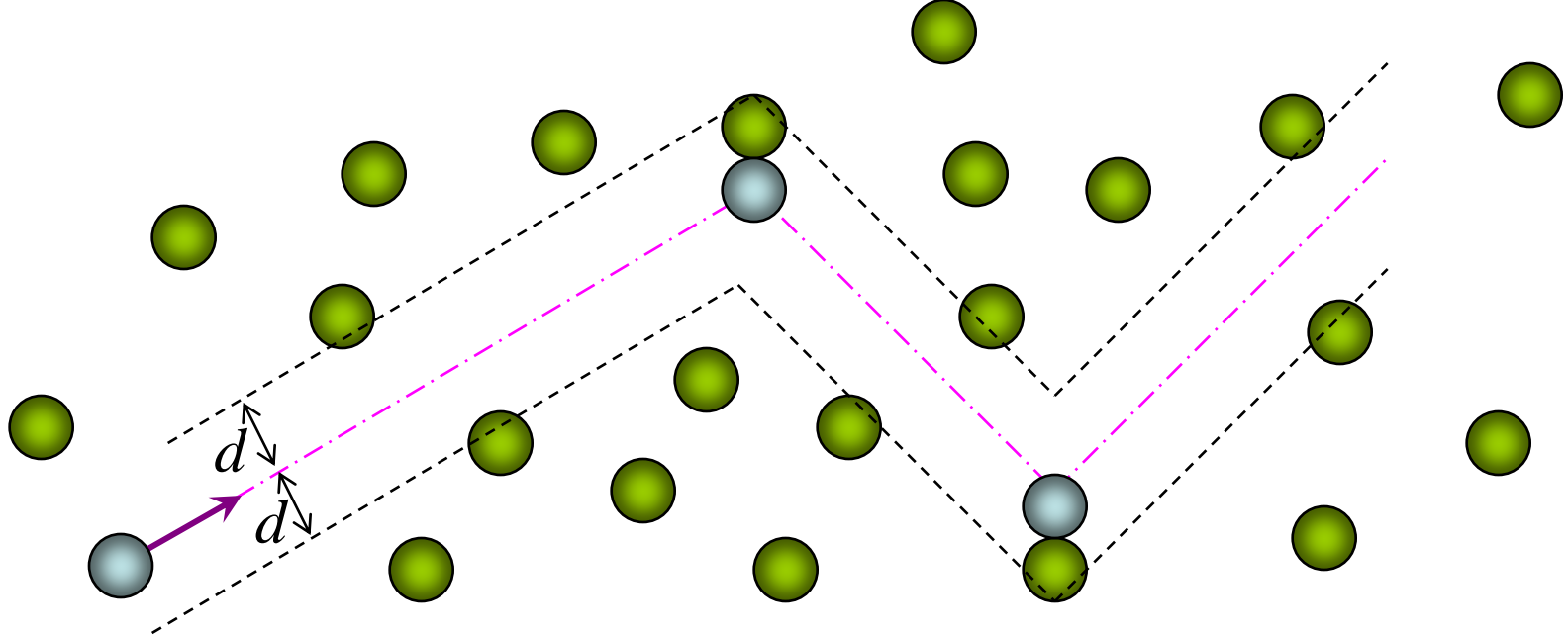
**平均碰撞频率 ( $\bar{Z}$ )**：单位时间内，分子与其他分子发生碰撞的平均次数。

**平均自由程 ( $\bar{\lambda}$ )**：分子在连续两次和其他分子发生碰撞之间所通过的自由路程的平均值。

分子的数密度为  $n$

设分子 A 以相对平均速率  $\bar{u}$  运动，其它分子可设为静止；运动方向上，以  $d$  为半径的圆柱体内的分子都将与分子 A 碰撞。

该圆柱体的面积  $S$  就叫 **碰撞截面**  $S = \pi d^2$



在 $\Delta t$ 时间内，能够与A分子发生碰撞的分子的中心，分布在长度为 $l$ ，横截面为 $S$ 的圆柱体内，体积为

$$V = Sl = \pi d^2 \bar{u} \Delta t$$

发生碰撞的分子总数为：  $nV = n\pi d^2 \bar{u} \Delta t$

平均碰撞频率为：

$$\bar{Z} = \frac{nV}{\Delta t} = n\pi d^2 \bar{u}$$

根据麦克斯韦速率分布可以导出：

$$\bar{u} = \sqrt{2}\bar{v}$$

平均碰撞频率为：

$$\bar{Z} = \sqrt{2}n\pi d^2\bar{v}$$

**平均自由程 ( $\bar{\lambda}$ )**：分子在连续两次和其他分子发生碰撞之间所通过的自由路程的平均值。

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{Z}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

$$\because p = nkT$$

$$\therefore \bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

## 讨论

- 平均自由程只与分子的直径和密度有关，而与平均速率无关。
- 当温度一定时，平均自由程与压强成反比，压强越小，平均自由程越长。

对空气分子  $d \sim 3.5 \times 10^{-10} \text{ m}$

标准状态下  $\bar{Z} \sim 6.5 \times 10^9 \text{ s}$ ,  $\bar{\lambda} \sim 6.9 \times 10^{-8} \text{ m}$

气体容器线度小于平均自由程计算值时，实际平均自由程就是容器线度的大小。

**【例】** 求氢在标准状态下一秒内分子的平均碰撞次数。  
(已知分子直径  $d = 2 \times 10^{-10} \text{m}$ )

**【解】**

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{M\pi}} = \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 273}{2 \times 10^{-3} \pi}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1.70 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.013 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 273} \text{ m}^{-3} = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = 2.14 \times 10^{-7} \text{ m}$$

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = 7.95 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \quad (\text{约80亿次})$$



# 一、基本概念

- 1、**压强**的微观意义：压强是大量分子碰撞器壁的平均作用力（单位面积上）的统计平均值。
- 2、**温度**的微观意义：温度标志着物体内部分子无规则运动的剧烈程度，是气体分子的平均平动动能的量度。
- 3、**自由度**：决定物体空间位置所需要的独立坐标的数目。

4、分子的平均平动动能  $\bar{\varepsilon}_t = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} kT$

5、分子的总平均动能  $\bar{\varepsilon}_k = \frac{i}{2} kT$

6、**气体的内能**：内能是气体内所有分子的动能、分子内的势能与分子间的相互作用势能的总和。

7、**理想气体的内能**：是其所有分子的平均动能之和。

$$E = \frac{m'}{M} \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} \mu RT$$

理想气体内能只是温度的函数，且和热力学温度  $T$  成正比。

8、速率分布函数：某速率 $v$  附近单位速率间隔内的分子数占总分子数的比率。

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv}$$

*(需要理解与之相关的各种表达式的物理意义)*

9、涨落：对统计规律的偏离的现象称涨落。

a.  $f(v)dv$  表示速率在  $v \rightarrow v+dv$  间隔内的分子数占总分子数的比率。

b.  $Nf(v)dv$  表示速率在  $v \rightarrow v+dv$  间隔内的分子数。

c.  $\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$  表示速率在  $v_1 \rightarrow v_2$  间隔内的分子数占总分子数的比率。

d.  $N \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv$  表示速率在  $v_1 \rightarrow v_2$  间隔内的分子数。

e.  $\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv$  表示速率在  $v_1 \rightarrow v_2$  间隔内的分子的速率总和与总分子数之比（或者表示速率在  $v_1 \rightarrow v_2$  间隔内的分子对分子平均速率的贡献）

f.  $\int_{v_1}^{v_2} Nvf(v)dv$  表示速率在 $v_1 \rightarrow v_2$ 间隔内的分子速率总和。

g. 
$$\frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv} = \frac{N \int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{N \int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$$

上式右边的分母表示速率在 $v_1 \rightarrow v_2$ 间隔内的分子总数，分子表示同一速率间隔内所有分子的速率之和，所以上式表示速率在 $v_1 \rightarrow v_2$ 间隔内的分子速率的平均值。

10、碰撞频率：一个分子单位时间内所受到的平均碰撞次数。

$$\bar{Z} = \sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} n$$

11、平均自由程：气体分子在相邻两次碰撞间飞行的平均路程。

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$$

对理想气体

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

## 二、基本规律

1、理想气体压强公式 
$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

2、平均平动动能和温度的关系 
$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$$

3、能量均分定理：在温度为  $T$  的平衡态下，气体分子每个自由度所对应的平均动能都等于

$$\frac{1}{2}kT$$

#### 4、麦克斯韦速率分布函数

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2$$

5、玻尔兹曼分布律：在温度为  $T$  的平衡态下，任何系统的微观粒子按状态的分布，即在某一状态区间的粒子数与该状态区间的一个粒子的能量  $E$  有关，与  $\exp^{-E/kT}$  成正比



## 6、麦克斯韦速率分布下的三种速率

(1) 最概然速率 ( 最可几速率 )

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{mol}}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}$$

(2) 平均速率  $v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M_{mol}}} \approx 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}$

(3) 方均根速率  $\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{mol}}} \approx 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M_{mol}}}$  81

## 7、分子数密度随高度的变化

$$n = n_0 \exp\left(\frac{-mgz}{kT}\right)$$

## 8、恒温气压公式

$$\begin{aligned} p &= p_0 \exp\left(\frac{-mgz}{kT}\right) \\ &= p_0 \exp\left(\frac{-M_{mol}gz}{RT}\right) \end{aligned}$$