第十八章 光的衍射

§18－1 单缝衍射

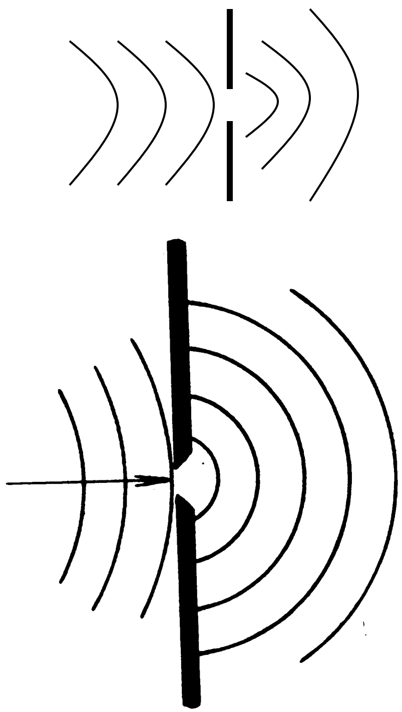
本章作业

3，5，9，

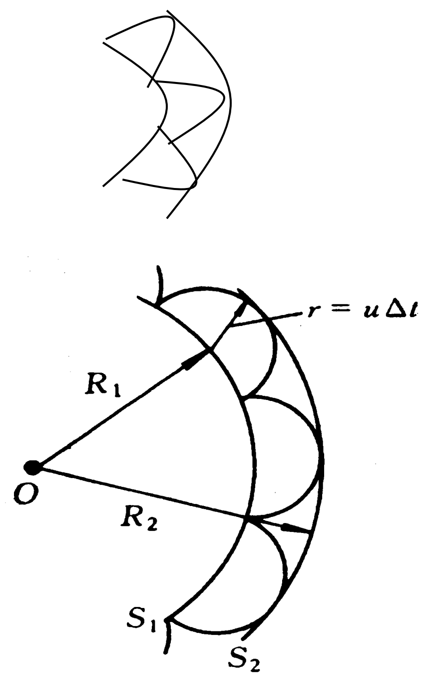
14，16，19

一　惠更斯—菲涅耳原理

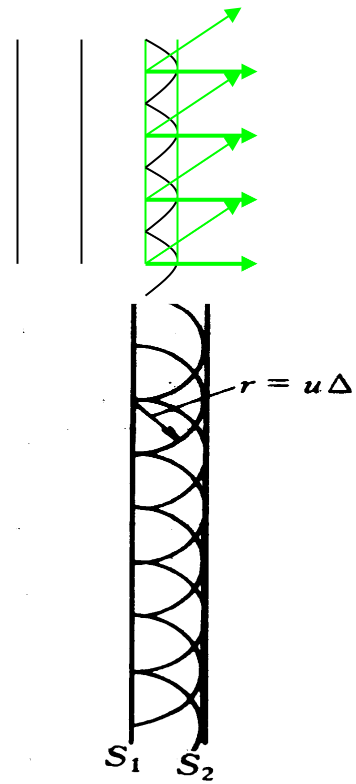
波在介质中传播到的各点都可以看作是发射子波的波源，而在此后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波前。



子波概念

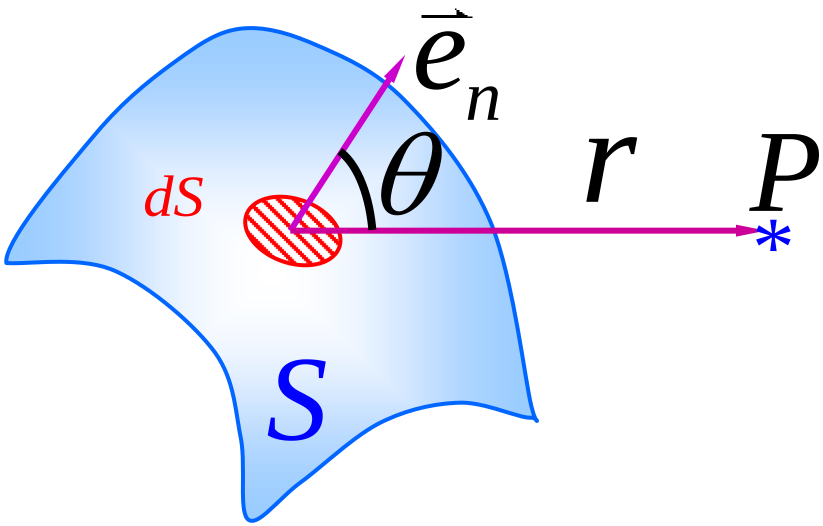


球面波



平面波

菲涅尔指出　衍射图中的强度分布是因为衍射时，波场中各点的强度由各子波在该点的相干叠加决定。P点振动是各子波在此产生的振动的叠加。



S：t 时刻波阵面

dS ：波阵面上面元

（子波波源）

$$dE = Ck(\theta)\frac{dS}{r}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$$E = \int \frac{Ck(\theta)}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda} \right) dS$$

子波在***P***点引起的振动振幅 $\propto \frac{dS}{r}$ 并与 θ 有关 .

$k(\theta)$ 随增大而减小：$0 \le k(\theta) \le 1$

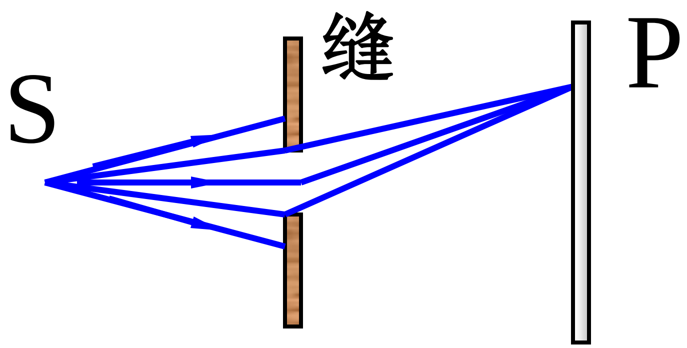
菲涅尔指出　衍射图中的强度分布是因为衍射时，波场中各点的强度由各子波在该点的相干叠加决定。***P***点振动是各子波在此产生的振动的叠加。

惠更斯原理的局限性：

- 子波波源发出的子波为什么不向后传播?
- 向前发出的子波在不同衍射方向振幅是否相同?
- 子波之间相遇会发生干涉吗?

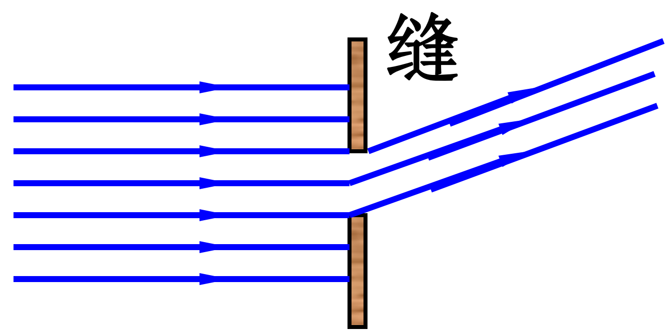
二　单缝夫琅禾费衍射

菲涅尔衍射



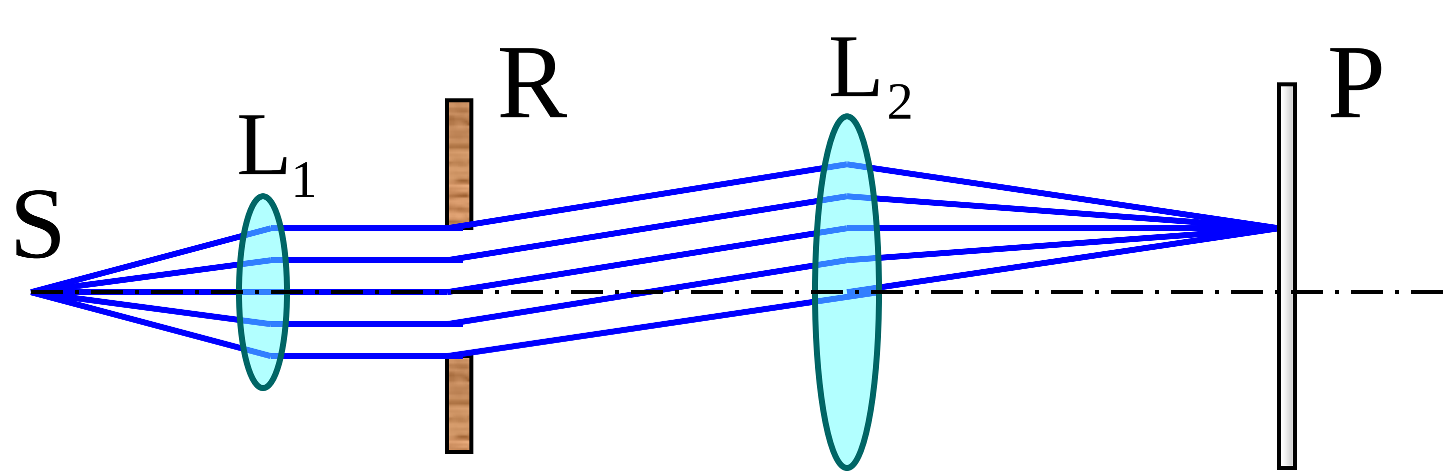
光源、屏与缝相距有限远

夫琅禾费衍射

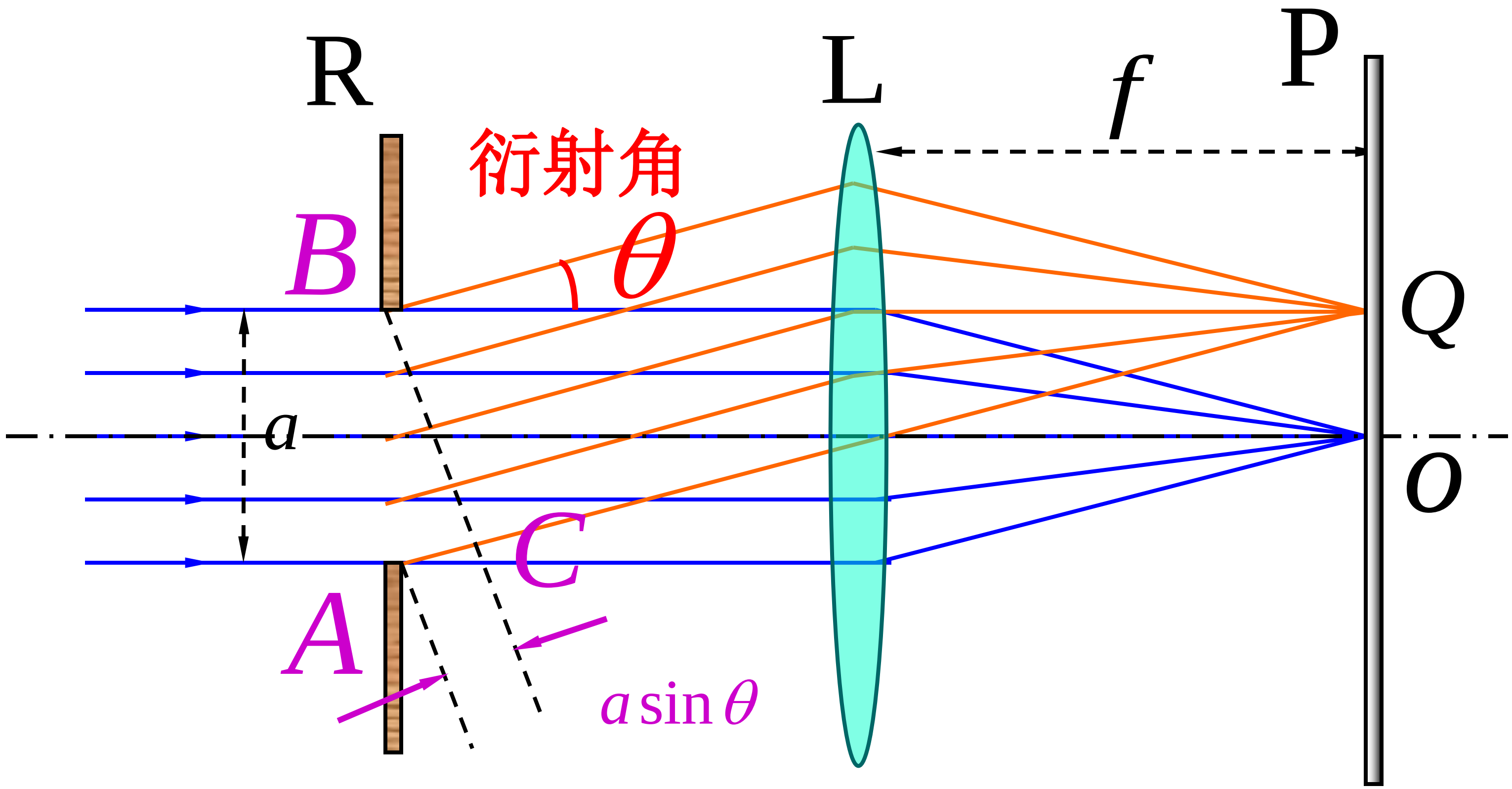


光源、屏与缝相距无限远

夫琅禾费衍射在实验中实现



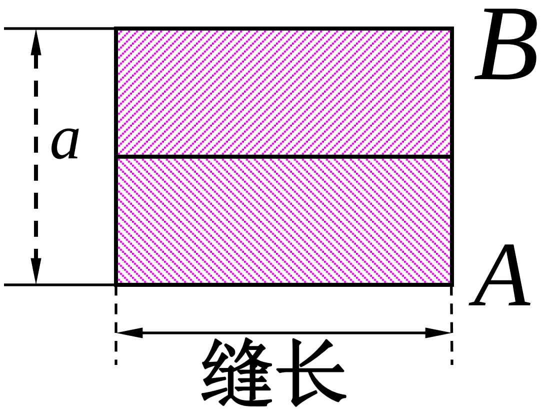
夫琅禾费单缝衍射



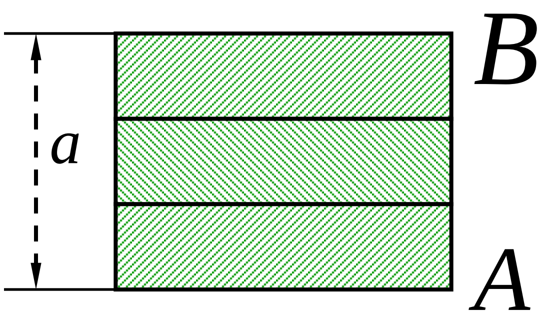
（衍射角 θ：向上为正，向下为负 .）

菲涅尔半波带法 $AC = a\sin\theta = \pm k\dfrac{\lambda}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$

1、半波带法

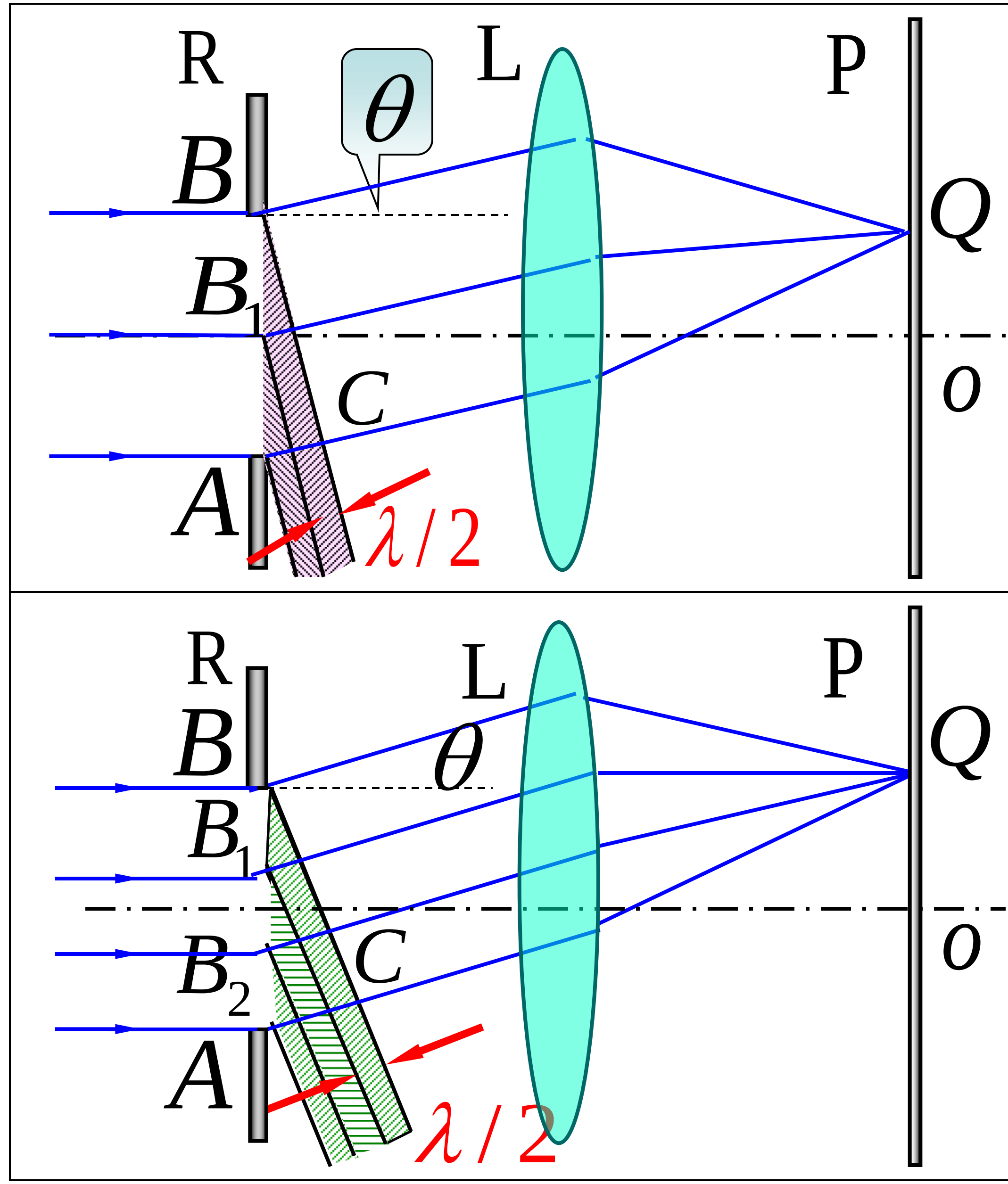


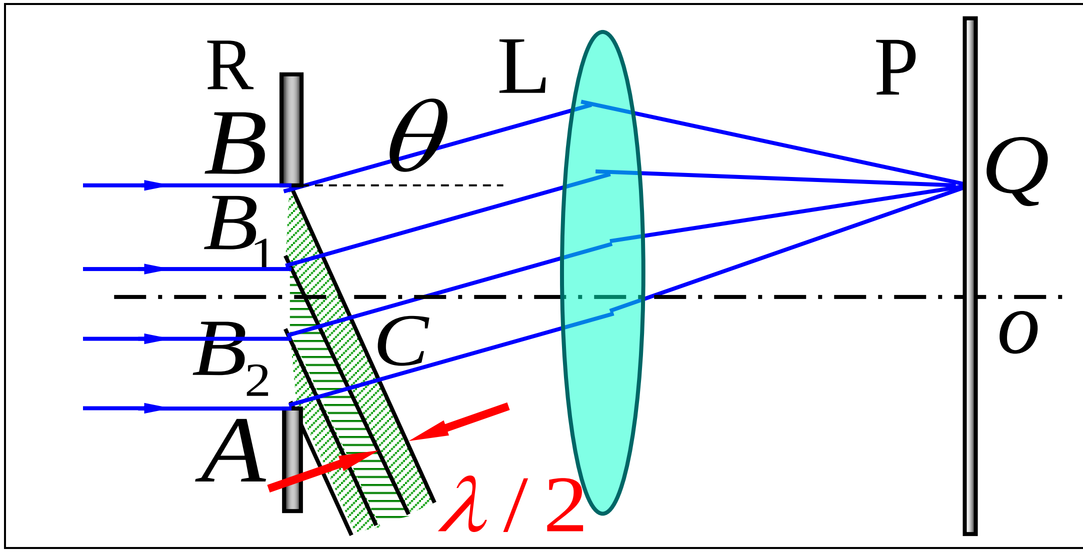
$$a\sin\theta=\pm 2k\,\lambda/2$$



$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\,\lambda/2$$

$$k=1,2,3,\cdots$$





$$AC = a\sin\theta = \pm N\frac{\lambda}{2}$$

（N 个半波带）

$$a\sin\theta = 0$$ 中央明纹中心

$$a\sin\theta = \pm 2k\frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda$$ 干涉相消（暗纹） $2k$个半波带

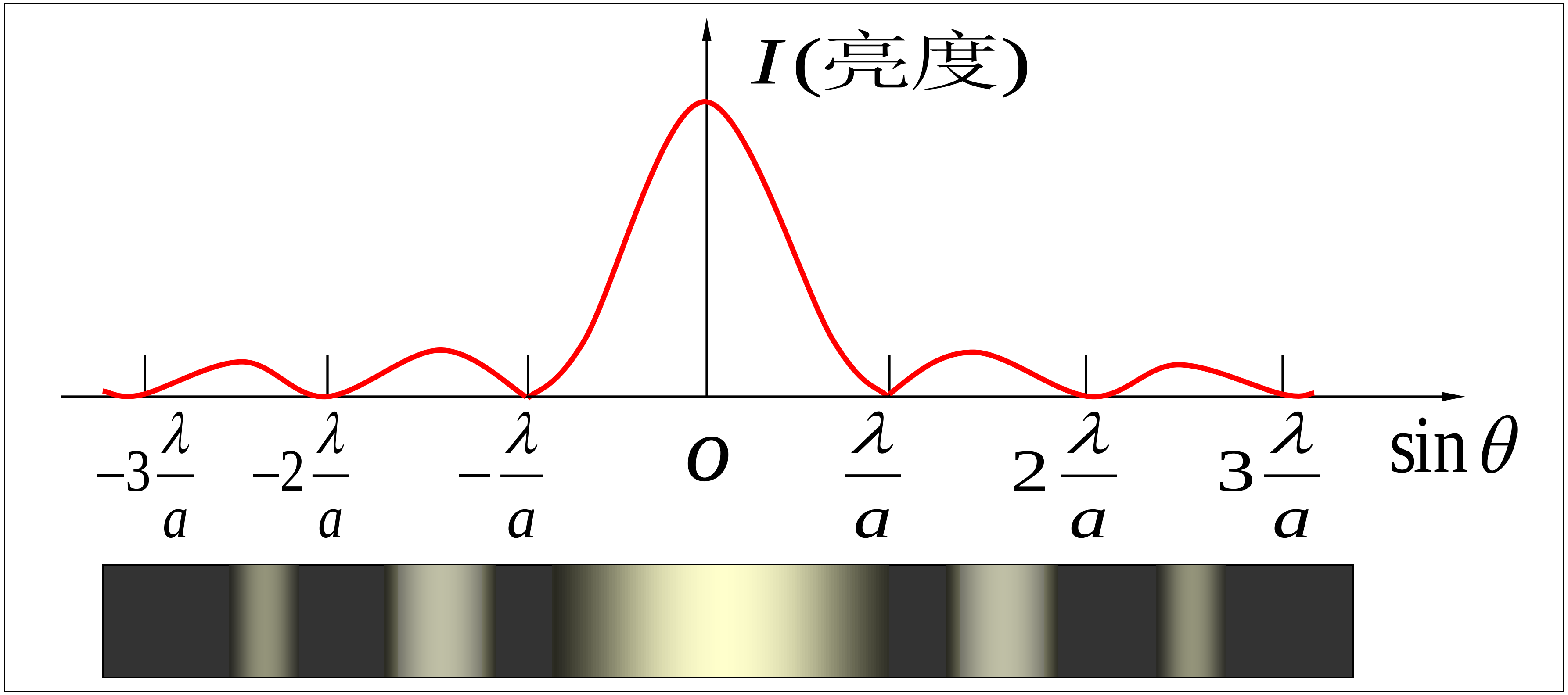
$$a\sin\theta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$ 干涉加强（明纹） $2k+1$ 个半波带

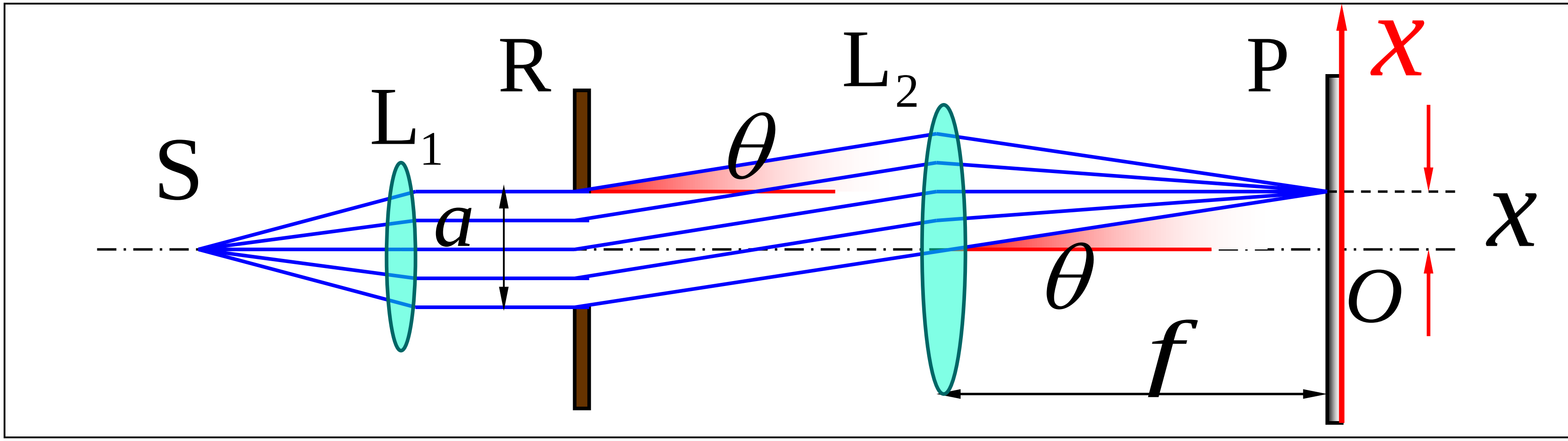
$$a\sin\theta \neq k\frac{\lambda}{2}$$ （介于明暗之间）

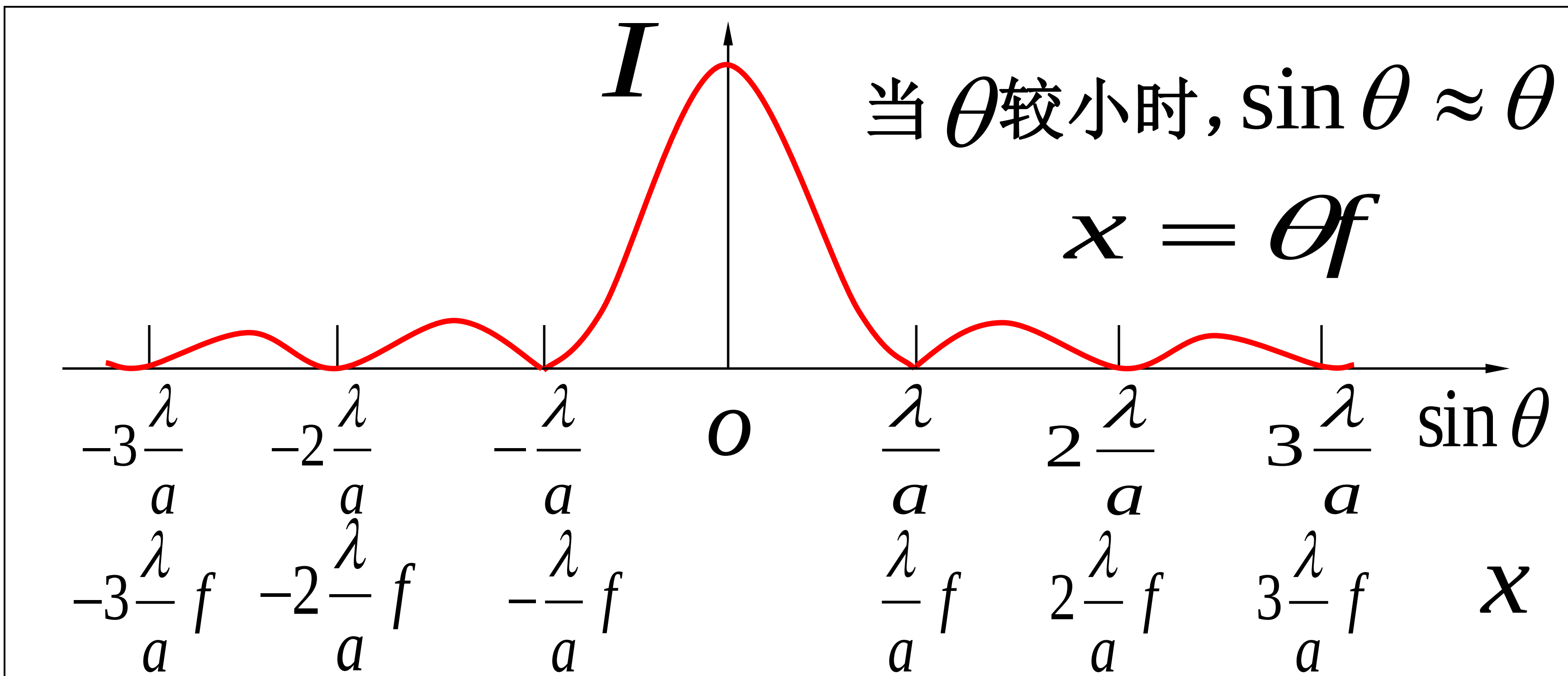
$$(k = 1, 2, 3, \cdots)$$

2、光强分布

$$\begin{cases} a\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消（暗纹）} \\ a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉加强（明纹）} \end{cases}$$




S
L1
R
a
θ
L2
θ
f
P
x
x
O


I
当θ较小时, sinθ≈θ
x = θf
−3λ/a
−2λ/a
−λ/a
O
λ/a
2λ/a
3λ/a
sinθ
−3λf/a
−2λf/a
−λf/a
λf/a
2λf/a
3λf/a
x

讨 论

$$\begin{cases} a\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消（暗纹）} \\ a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉加强（明纹）} \end{cases}$$

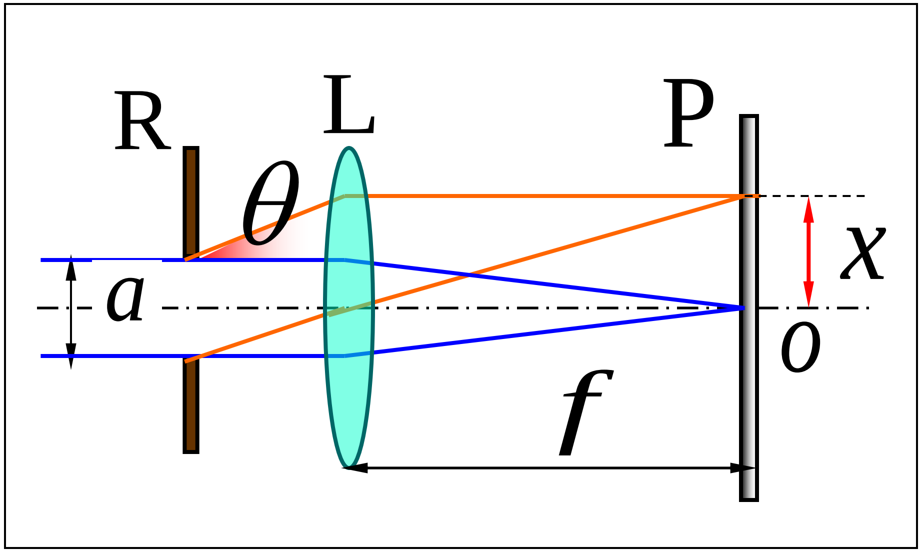
$$\sin\theta \approx \theta, \quad x = \theta f, \quad a\sin\theta \approx a\frac{x}{f}$$

（1）第一暗纹距中心的距离

$$\boxed{x_1 = \theta f = \frac{\lambda}{a} f}$$

第一暗纹的衍射角

$$\boxed{\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{a}}$$



第一暗纹的衍射角 $\theta_1 = \arcsin\dfrac{\lambda}{a}$

- λ一定 $\begin{cases} a\text{增大}, \theta_1\text{减小} & \dfrac{\lambda}{a} \Rightarrow 0,\ \theta_1 \Rightarrow 0 \\ a\text{减小}, \theta_1\text{增大} & a \Rightarrow \lambda,\ \theta_1 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

光直线传播

衍射最大

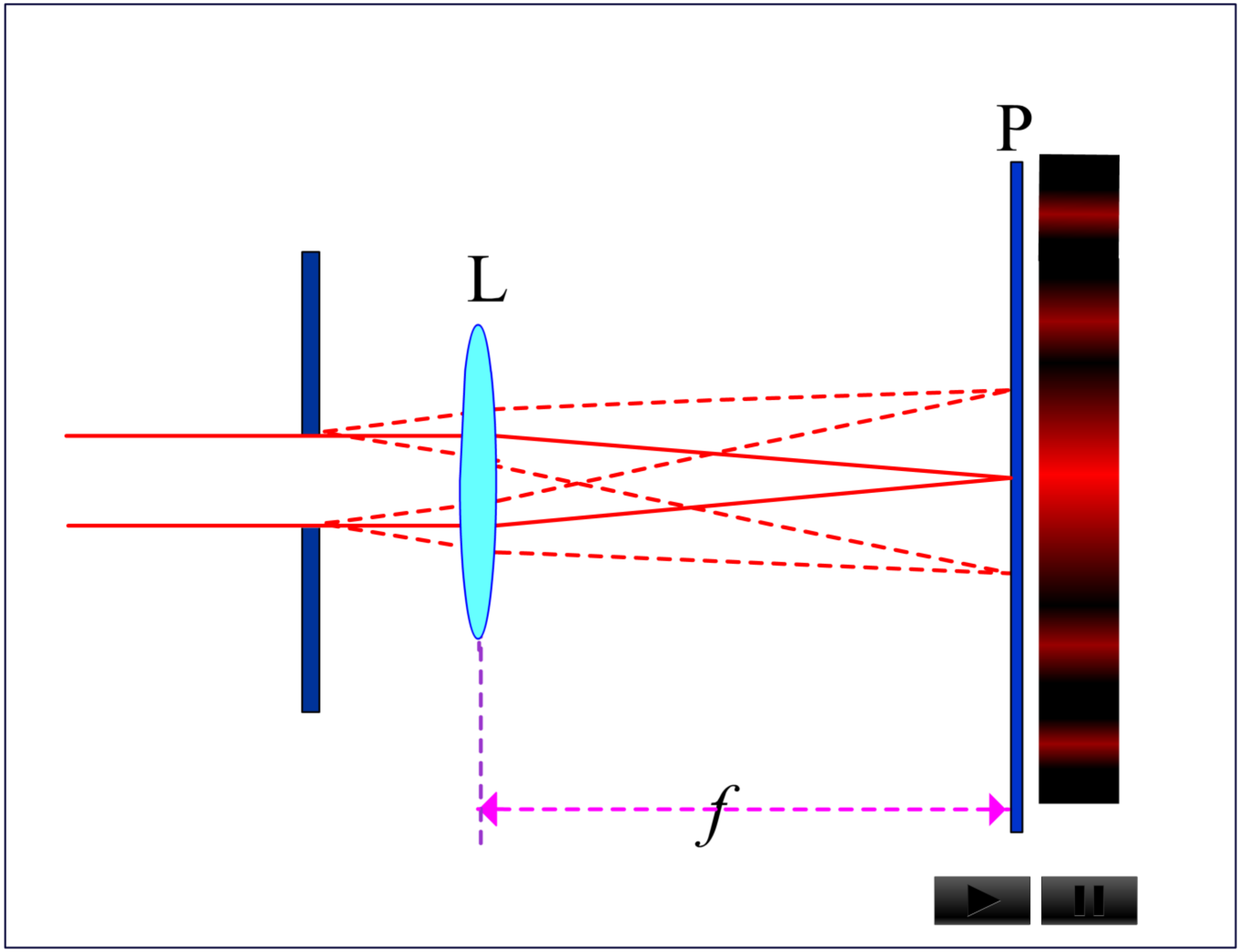
- a一定，λ越大，θ_1越大，衍射效应越明显.

（2）中央明纹 （$k=1$的两暗纹间）

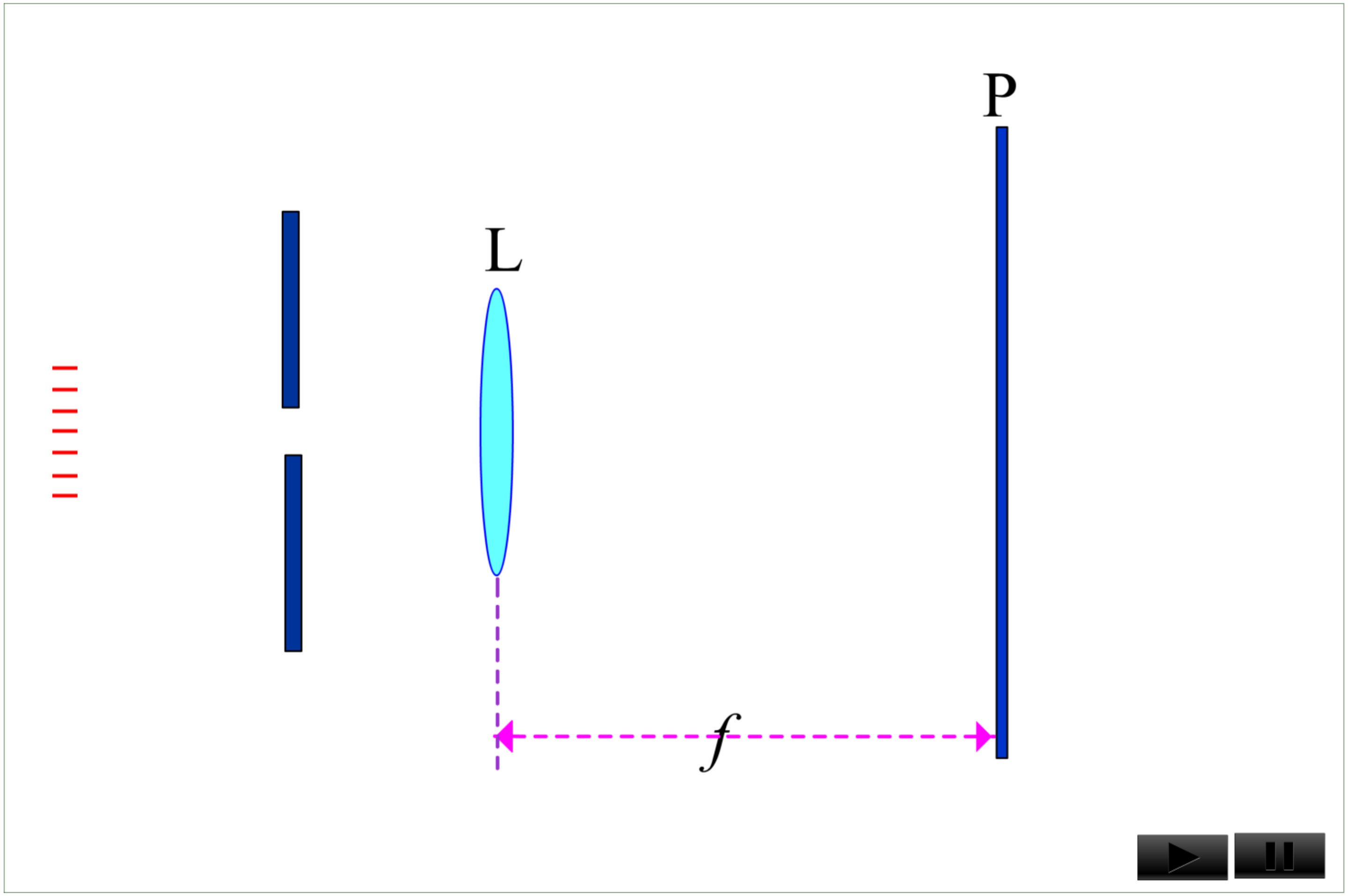
角范围 $-\dfrac{\lambda}{a} < \sin\theta < \dfrac{\lambda}{a}$ 线范围 $-\dfrac{\lambda}{a}f < x < \dfrac{\lambda}{a}f$

中央明纹的宽度 $l_0 = 2x_1 \approx 2\dfrac{\lambda}{a}f$

- 单缝宽度变化，中央明纹宽度如何变化？



◆ 入射波长变化，衍射效应如何变化 ？



λ越大，θ_1越大，衍射效应越明显.

（3）条纹宽度（相邻条纹间距）

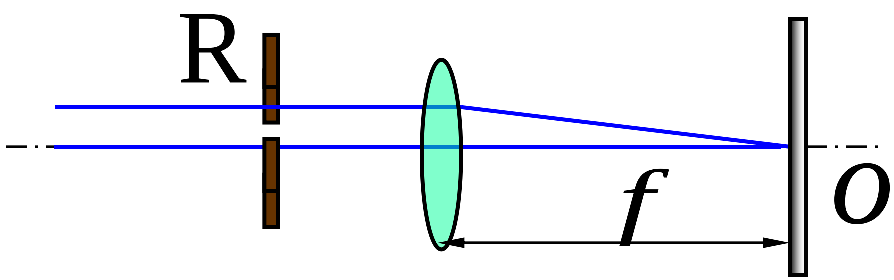
$$\begin{cases} a\sin\theta = \pm 2k\dfrac{\lambda}{2} = \pm k\lambda & \text{干涉相消（暗纹）} \\ a\sin\theta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{干涉加强（明纹）} \end{cases}$$

$$l = \theta_{k+1} f - \theta_k f = \frac{\lambda f}{a}$$

除了中央明纹外的其它明纹、暗纹的宽度

（4）单缝衍射的动态变化

- 单缝上下移动，根据透镜成像原理衍射图不变 .



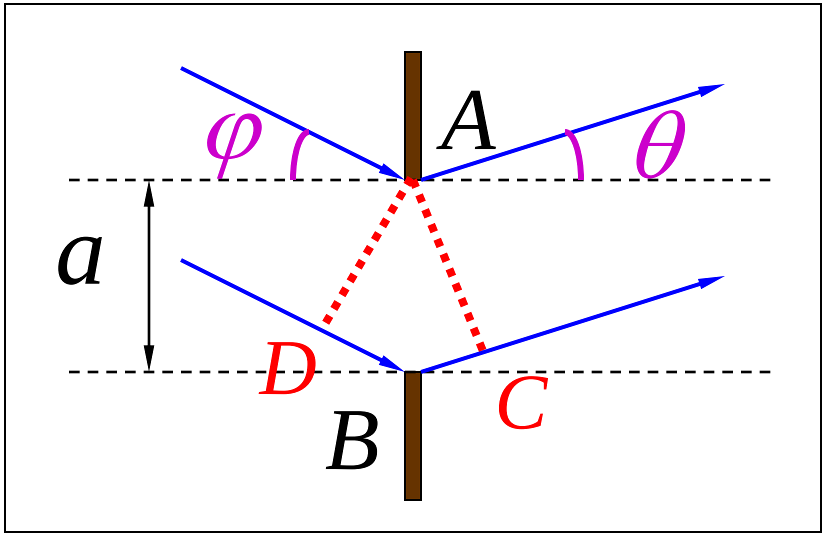
单缝上移，零级明纹仍在透镜光轴上.

（5）入射光非垂直入射时光程差的计算

$$\varDelta = DB + BC$$

$$= a(\sin\theta + \sin\varphi)$$

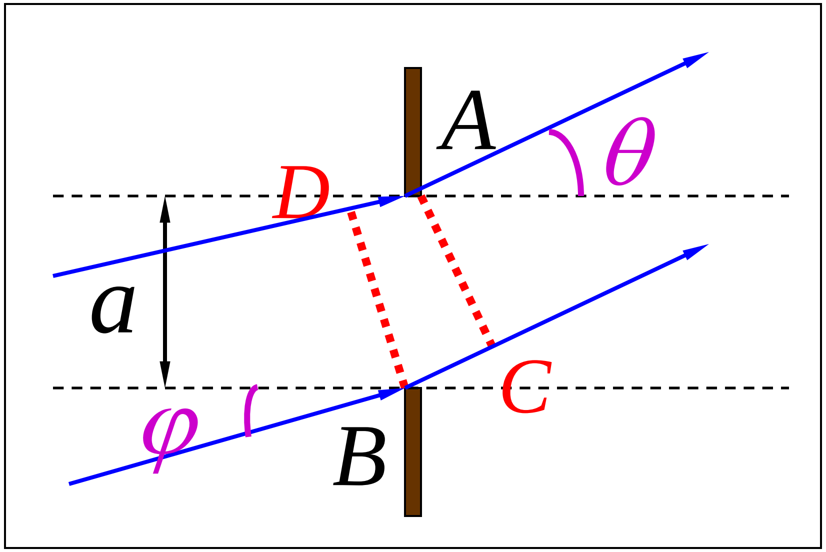
（中央明纹向下移动）



$$\varDelta = BC - DA$$

$$= a(\sin\theta - \sin\varphi)$$

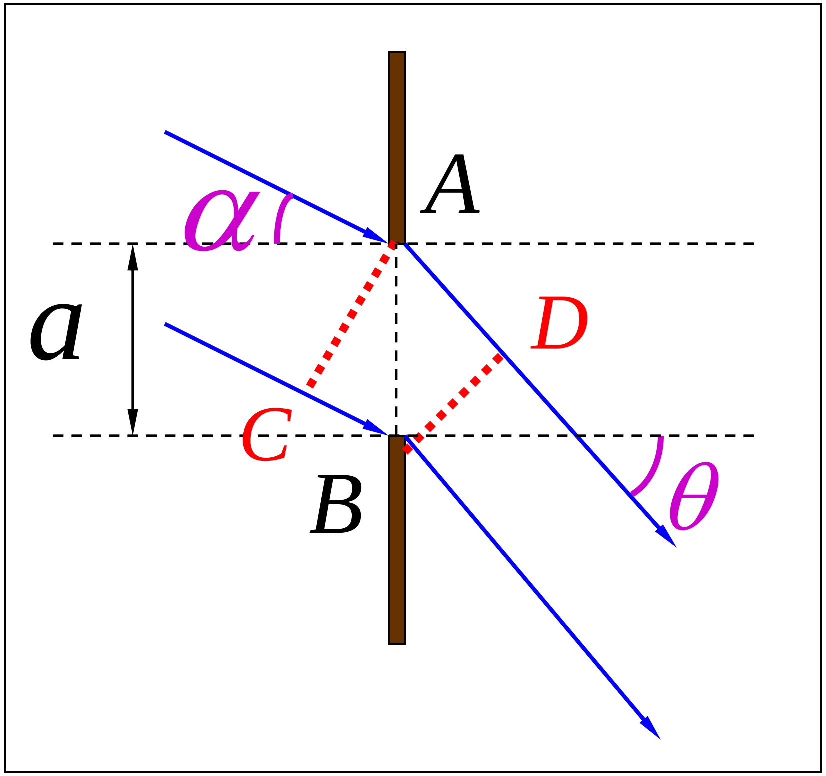
（中央明纹向上移动）



例1 设有一单色平面波斜射到宽度为 a 的单缝上（如图），求各级暗纹的衍射角 θ .

解 $\Delta = AD - BC$

$$= a(\sin\theta - \sin\alpha)$$



由暗纹条件

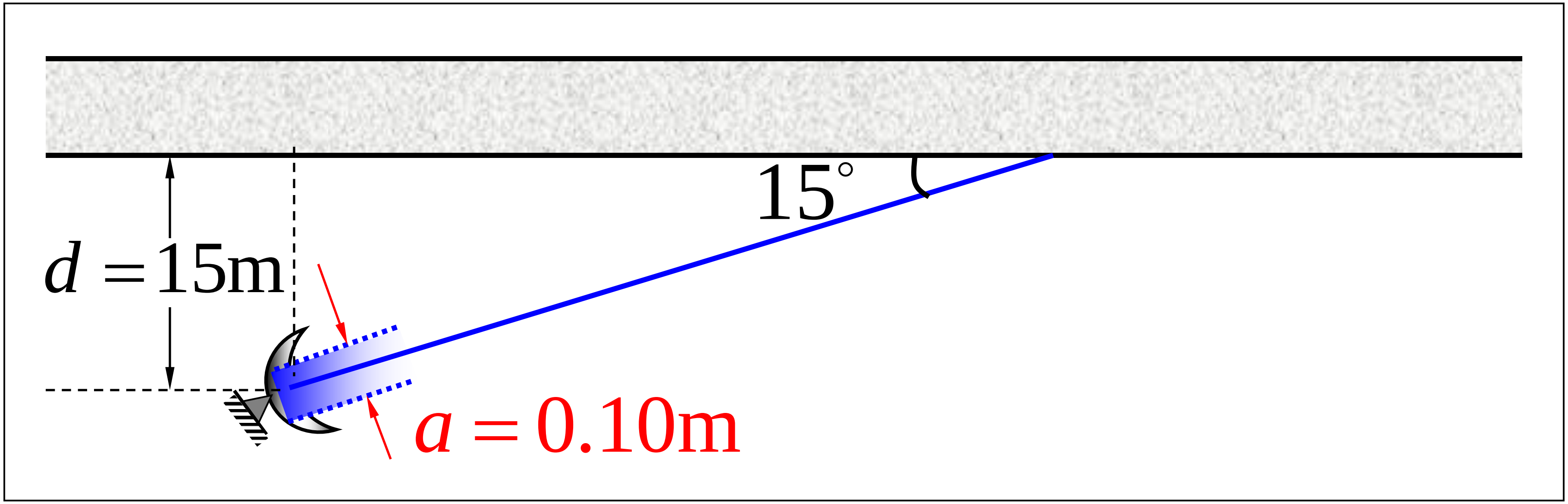
$$a(\sin\theta - \sin\alpha) = \pm k\lambda$$

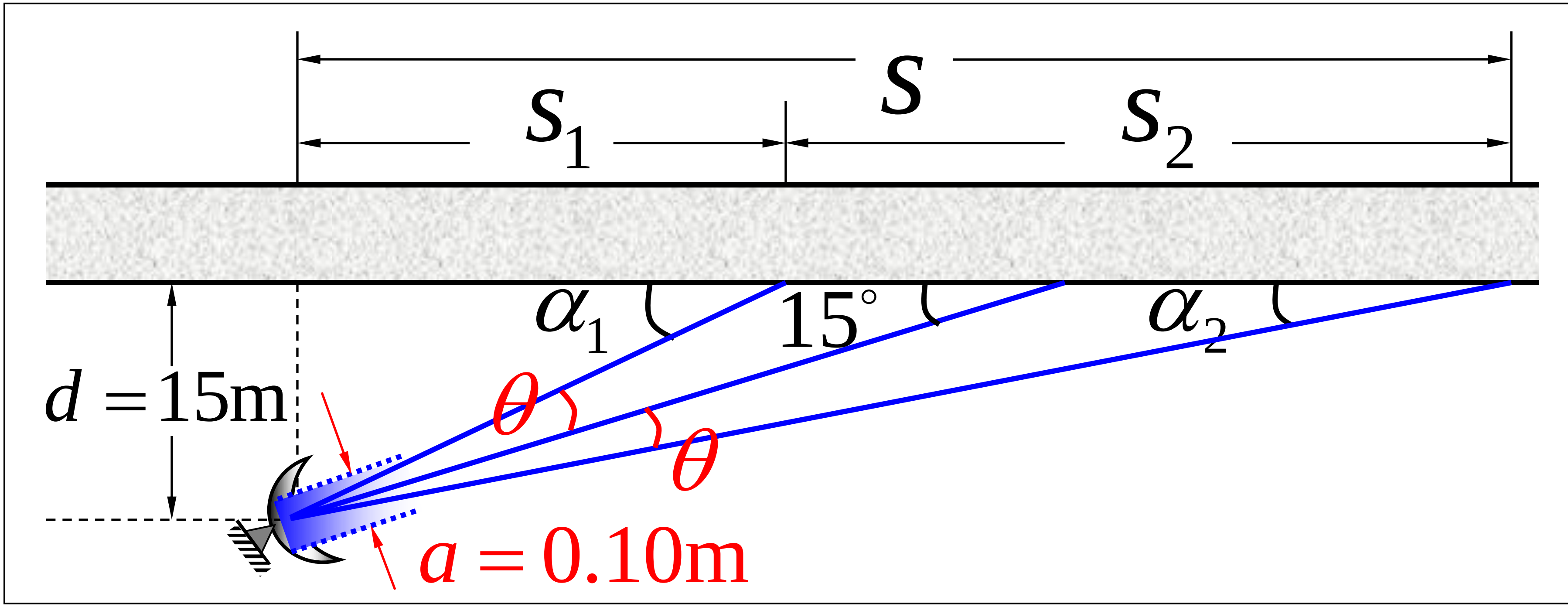
$$(k = 1,2,3,\cdots)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\pm k\lambda}{a} + \sin\alpha\right)$$

例2 如图，一雷达位于路边 15m 处，它的射束与公路成15°角. 假如发射天线的输出口宽度 $a=0.10\text{m}$，发射的微波波长是18mm ，则在它监视范围内的公路长度大约是多少？

解 将雷达天线输出口看成是发出衍射波的单缝，衍射波能量主要集中在中央明纹范围内.





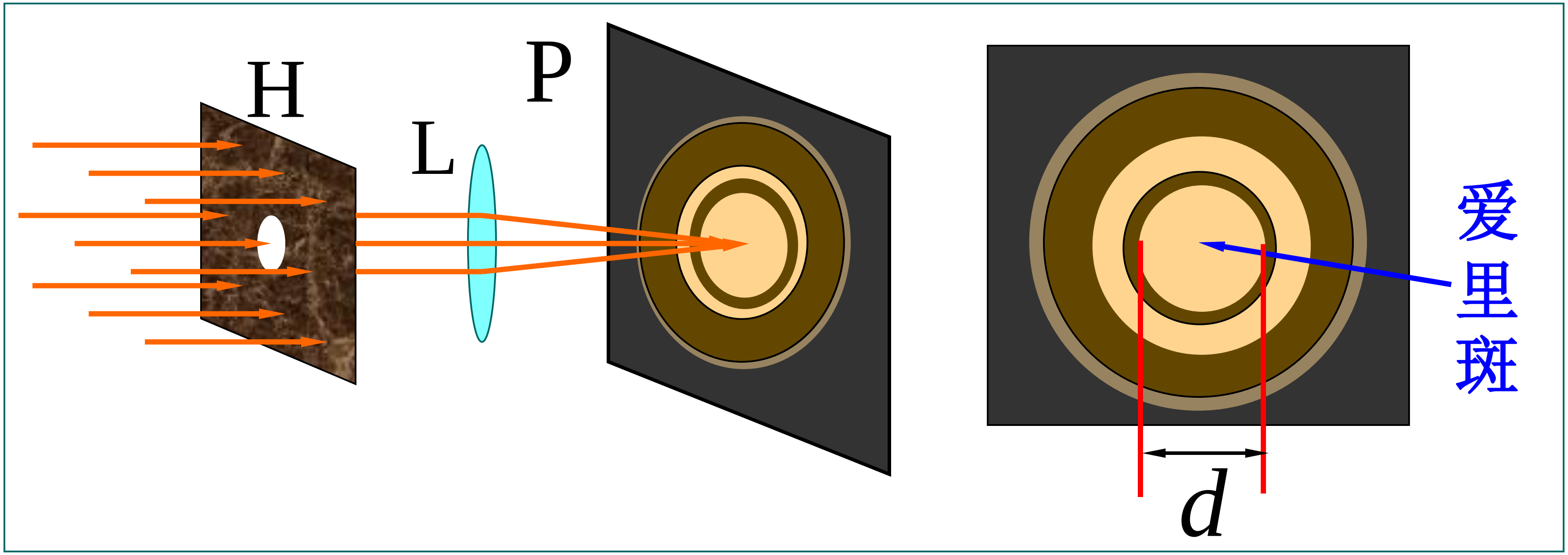
根据暗纹条件 $a\sin\theta = \lambda$, $\theta = \arcsin\dfrac{\lambda}{a} = 10.37^{\circ}$

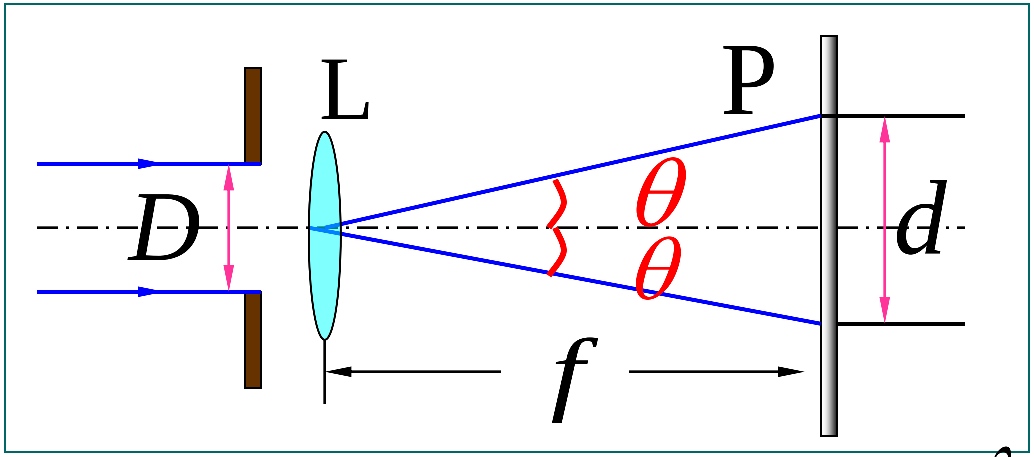
$$s_2 = s - s_1 = d(\cot\alpha_2 - \cot\alpha_1)$$

$$= d[\cot(15^{\circ} - \theta) - \cot(15^{\circ} + \theta)] = 153\text{m}$$

§18－2 圆孔衍射 光学仪器的分辨率

一　圆孔衍射





第一级暗环的衍射角

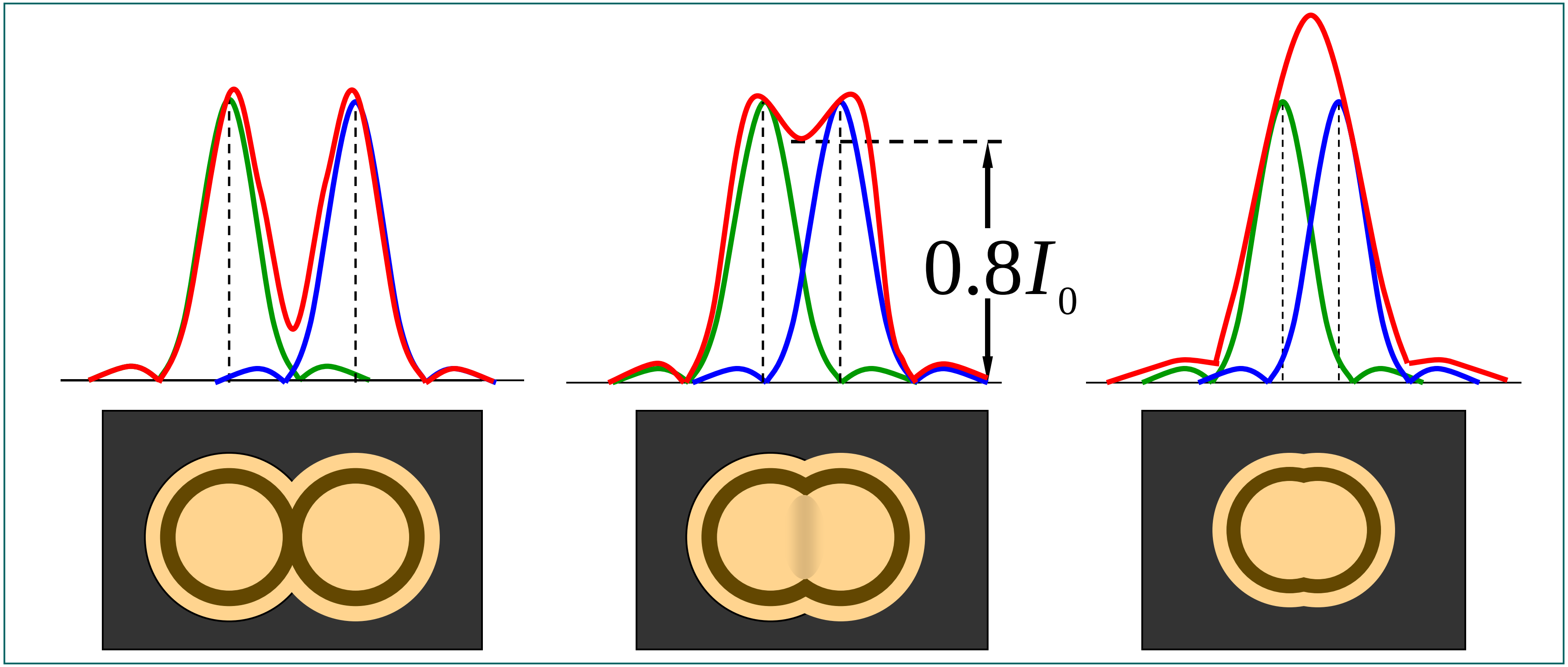
$$\sin\theta_1 = \frac{d/2}{f} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

中央爱里斑半径

$$r = f\tan\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D}f$$

爱里斑的角半径 $\theta_1 \approx \sin\theta_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

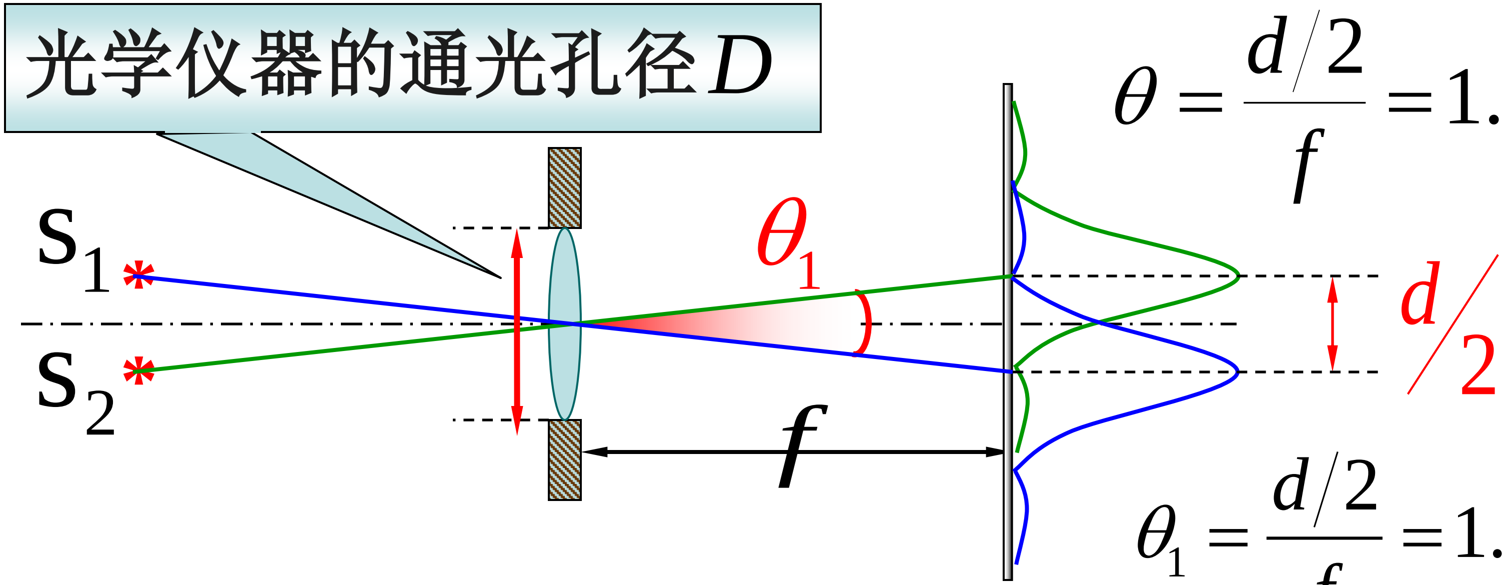
二　光学仪器的分辨率



如果一个斑光强最大的地方正好是另一个斑光强最小的地方，也即一个班的中心正好是另一个斑的边缘，此时两个斑之间的最小光强约为中央最大光强的80%，恰好能辨别出是两个光点。

——瑞利准则

（两光点刚好能分辨）



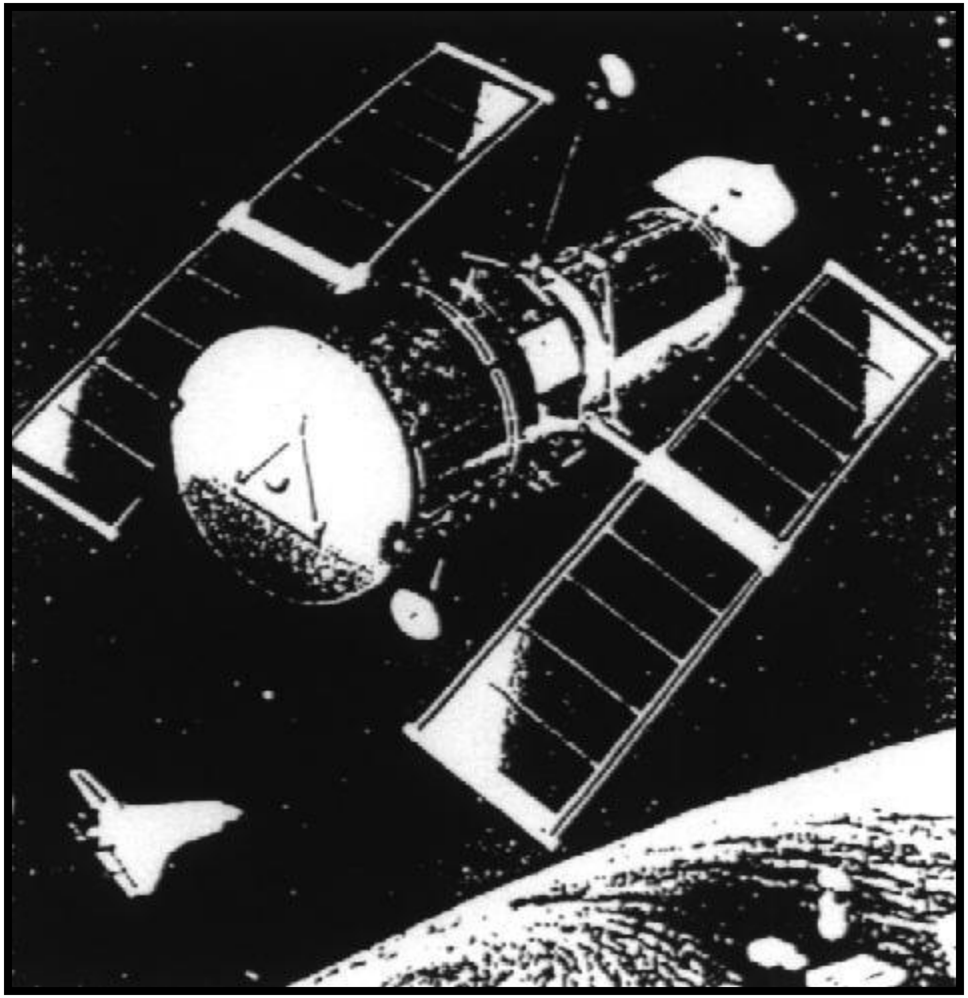
$$\theta = \frac{d/2}{f} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$$\theta_1 = \frac{d/2}{f} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

最小分辨角 $\theta_1 = 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

光学仪器分辨率 $R = \dfrac{1}{\theta_1} = \dfrac{D}{1.22\lambda} \propto D, \dfrac{1}{\lambda}$

1990 年发射的哈勃太空望远镜的凹面物镜的直径为2.4m，最小分辨角 $\theta_0 = 0.1''$，在大气层外 615km 高空绕地运行，可观察130亿光年远的太空深处, 发现了500 亿个星系 .



例1 设人眼在正常照度下的瞳孔直径约为3mm，而在可见光中，人眼最敏感的波长为550nm，**问**

（1） 人眼的最小分辨角有多大？

（2） 若物体放在距人眼25cm（明视距离）处，则两物点间距为多大时才能被分辨？

解（1）

$$\theta_1 = 1.22\frac{\lambda}{D} = \frac{1.22 \times 5.5 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}}{3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$= 2.2 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad} \approx 1'$$

（2）

$$d = l\theta_1 = 25\mathrm{cm} \times 2.2 \times 10^{-4}$$

$$= 0.0055\mathrm{cm} = 0.055\mathrm{mm}$$

例2 毫米波雷达发出的波束比常用的雷达波束窄，这使得毫米波雷达不易受到反雷达导弹的袭击.

（1）有一毫米波雷达，其圆形天线直径为55cm，发射频率为220GHz的毫米波，计算其波束的角宽度；

（2）将此结果与普通船用雷达发射的波束的角宽度进行比较，设船用雷达波长为1.57cm，圆形天线直径为2.33m .

解（1）

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{220\times 10^{9}\,\mathrm{Hz}} = 1.36\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$\Delta\theta_1 = 2.44\frac{\lambda_1}{D_1} = 2.44\times\frac{1.36\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{55\times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 0.00603\,\mathrm{rad}$$

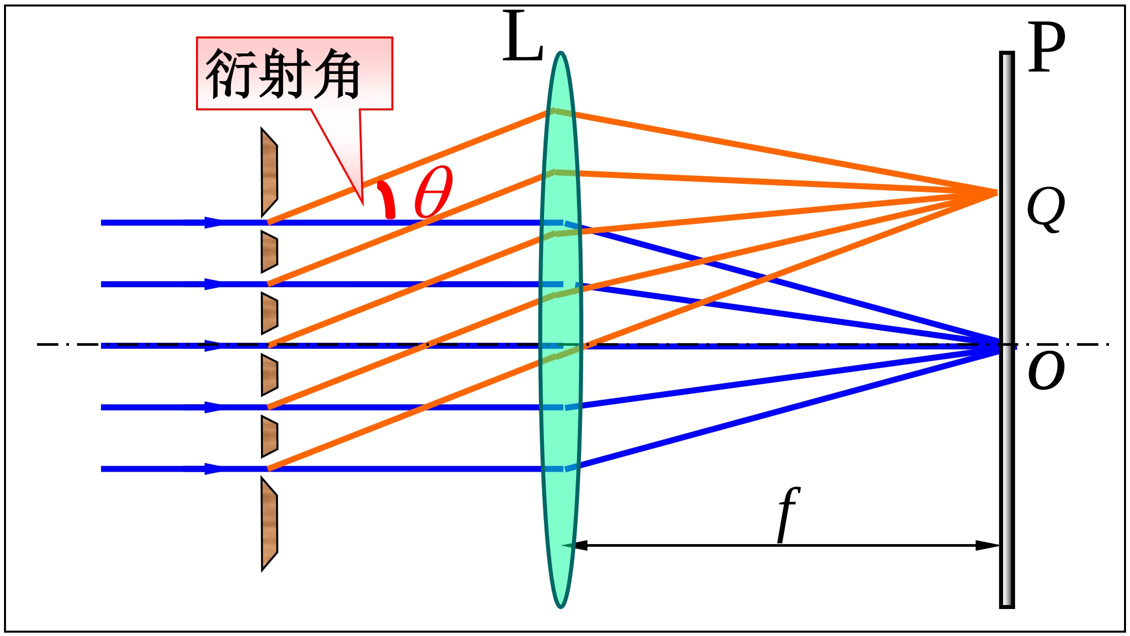
（2）

$$\Delta\theta_2 = 2.44\frac{\lambda_2}{D_2} = 2.44\times\frac{1.57\times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2.33\,\mathrm{m}} = 0.0164\,\mathrm{rad}$$

§18－3 光栅衍射

光栅

许多等宽度的狭缝等距离排列起来形成的光学元件.



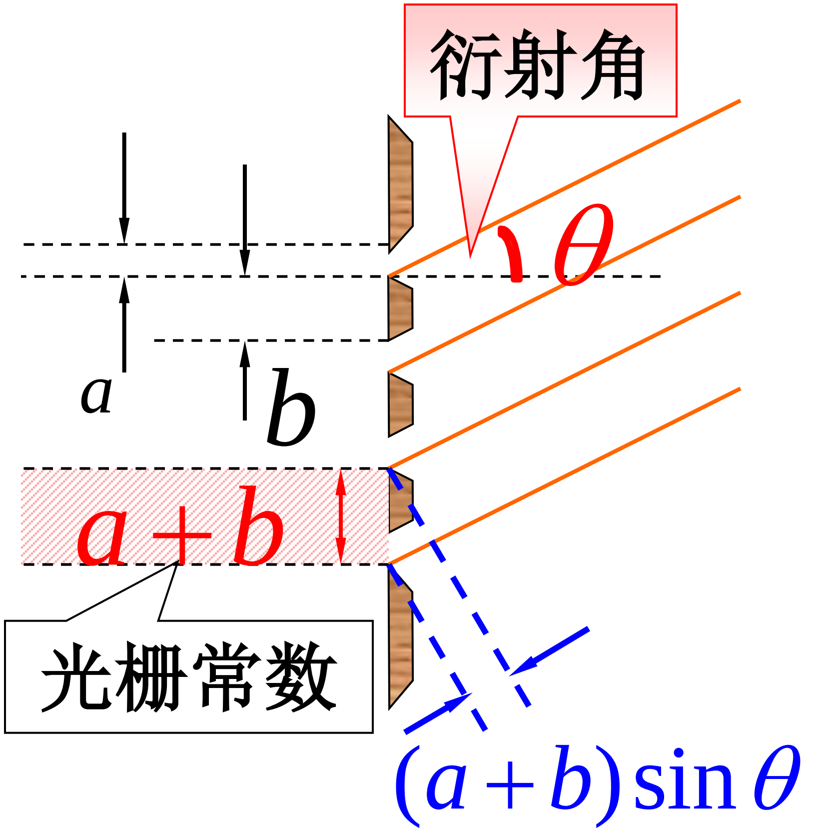
•光栅各个单缝的衍射是完全重叠的.

•从各个单缝衍射到屏幕上同一点处的光是相干的.

•从各个单缝衍射到屏幕上同一点处的光的光程是不同的.

一 光栅方程

光栅的衍射条纹是单缝衍射和多缝干涉的总效果



相邻两缝间的光程差：

$$\delta=(a+b)\sin\theta$$

$$\begin{cases} a：\text{透光部分的宽度} \\ b：\text{不透光部分的宽度} \end{cases}$$

光栅常数：$10^{-5}\sim10^{-6}\,\mathrm{m}$

明纹位置

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

光栅方程

二 光栅衍射光强的分布特点

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

1. 条纹最高级数

$$\sin\theta_k = \pm\frac{k\lambda}{a+b}$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad k = k_{\max} = \frac{a+b}{\lambda}$$

2. 两个主极大明纹之间，有***N*-1个暗纹**，还有***N*-2个次级明纹**，每个次级明纹的宽度为主极大明纹的一半。

$$设:(a+b)\sin\theta=\lambda/2$$

此时，光栅*相邻的*各个缝沿此θ角衍射到屏幕上同一点处的衍射光是相消的.如果光栅缝数为偶数，该处出现的将是暗纹。

$$设:(a+b)\sin\theta=\lambda/4$$

此时，光栅*的1与3或2与4…*缝沿此θ角衍射到屏幕上同一点处的衍射光是相消的.如果光栅缝数为偶数，该处出现的将是暗纹。

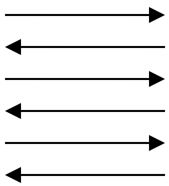
$$设:(a+b)\sin\theta=\lambda/6$$

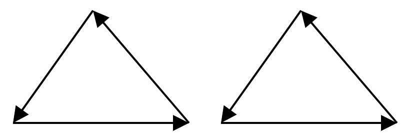
此时，光栅*的1与4或2与5或3与6…*缝沿此θ角衍射到屏幕上同一点处的衍射光是相消的.如果光栅缝数为偶数，该处出现的将是暗纹。

结论：在两个光栅衍射的主明纹之间共有***N*-1**个暗纹。

以6个缝的光栅为例

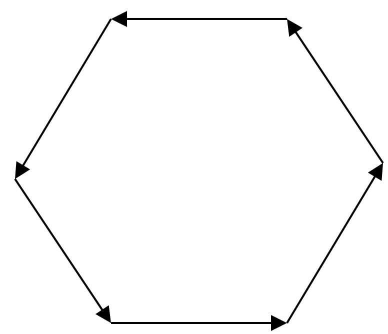
设:$(a+b)\sin\theta=\lambda/2$,相邻缝的相差为$\pi$





设:$(a+b)\sin\theta=\lambda/3$,相邻缝的相差为$120°$

设:$(a+b)\sin\theta=\lambda/6$,相邻缝的相差为$60°$



设：$(a+b)\sin\theta = 2\lambda/3$，相邻缝的相差为$240°$

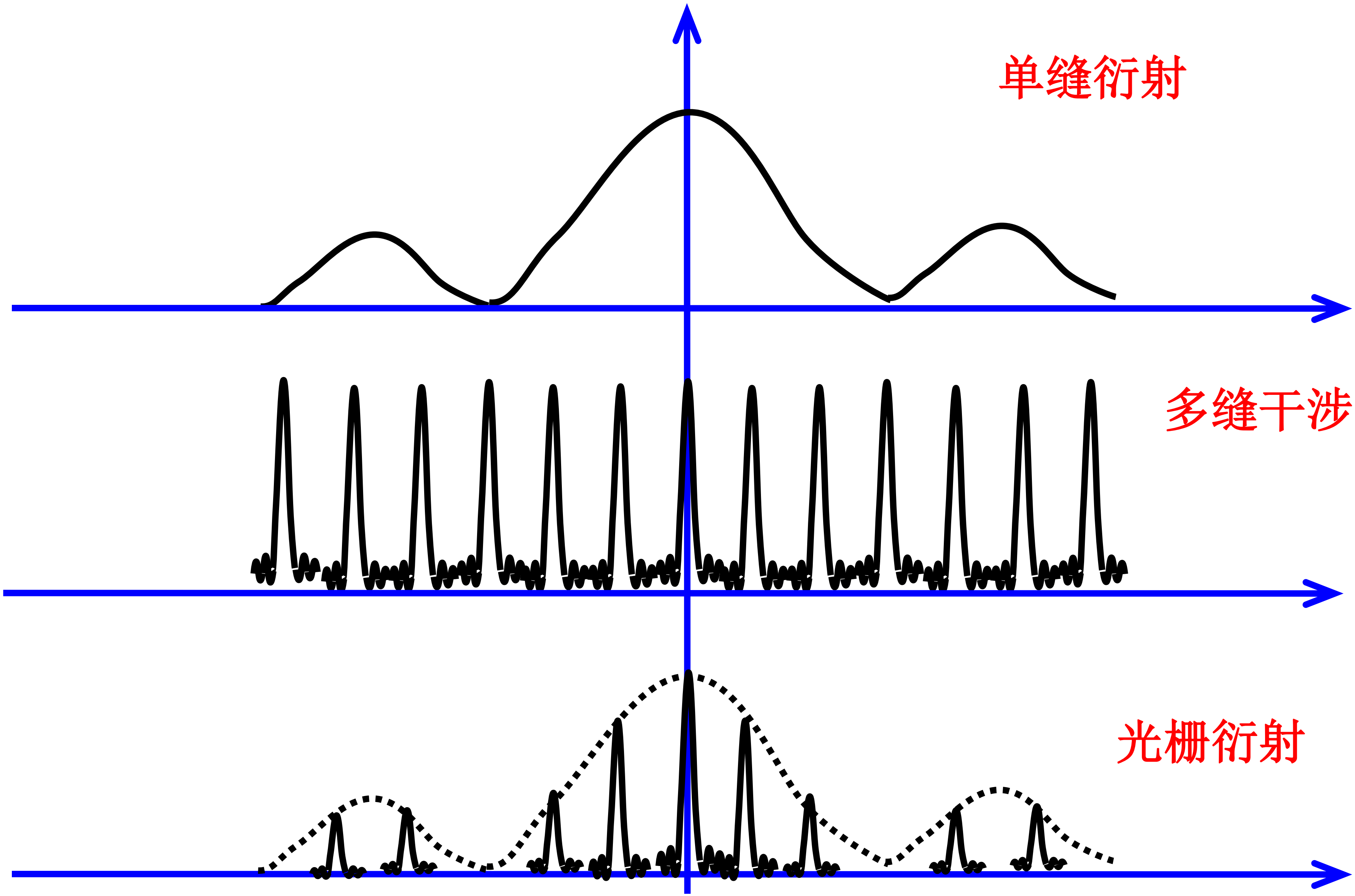
设：$(a+b)\sin\theta = 5\lambda/6$，相邻缝的相差为$300°$

结论：有6个缝时,在两个光栅衍射的主明纹之间共有5个暗纹。

每两个暗纹之间有一个次级明纹。

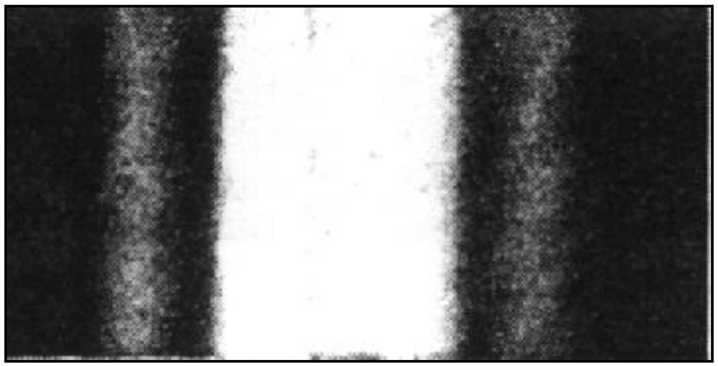
结论：有6个缝时,在两个光栅衍射的主明纹之间共有4个次级明纹。

3. 光强分布

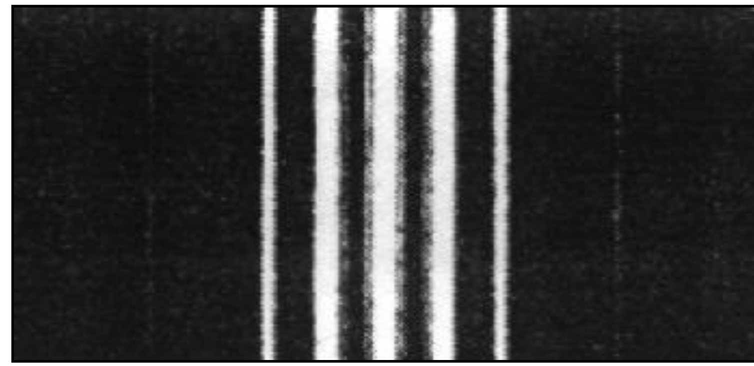


4. 光栅中狭缝条数越多，明纹越亮.

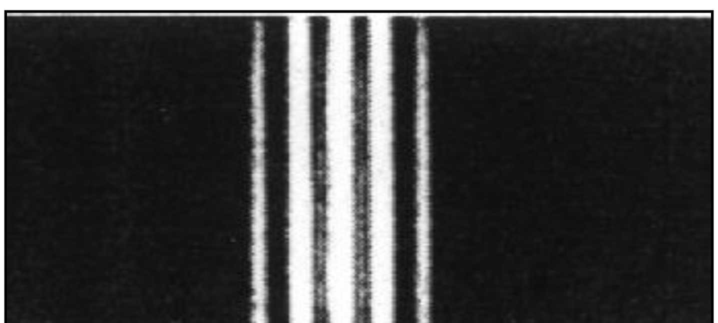
亮纹的光强 $I = N^2 I_0$（N：狭缝数，I_0：单缝光强）



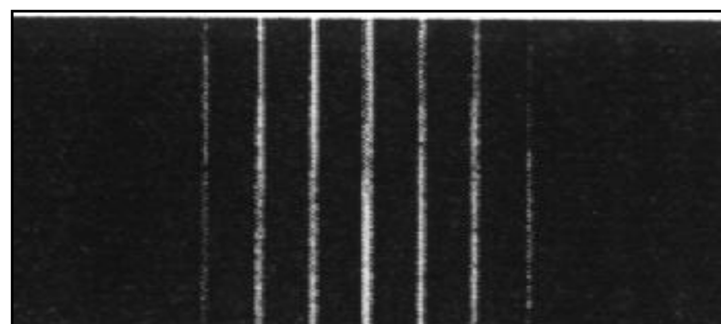
1 条 缝



5 条 缝



3 条 缝



20 条 缝

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\Delta k = 1, \quad \sin\theta_{k+1} - \sin\theta_k = \frac{\lambda}{a+b}$$

- 光栅常数越小，明纹越窄，明纹间相隔越远

λ 一定， $a+b$ 减少，$\theta_{k+1} - \theta_k$ 增大.

- 入射光波长越大，明纹间相隔越远

$a+b$ 一定， λ 增大，$\theta_{k+1} - \theta_k$ 增大.

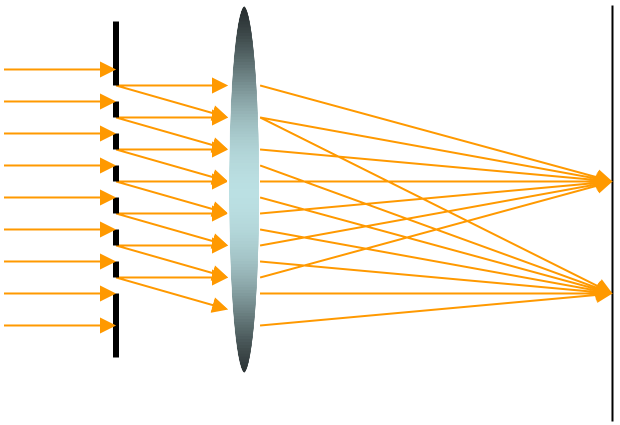
三　缺级现象

在光栅衍射中,如果在同一个θ处同时满足下面两个式子.则在该处出现缺级现象.

$$(a+b)\sin\theta=\pm k\lambda$$

$$a\sin\theta=\pm k'\lambda$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}$$

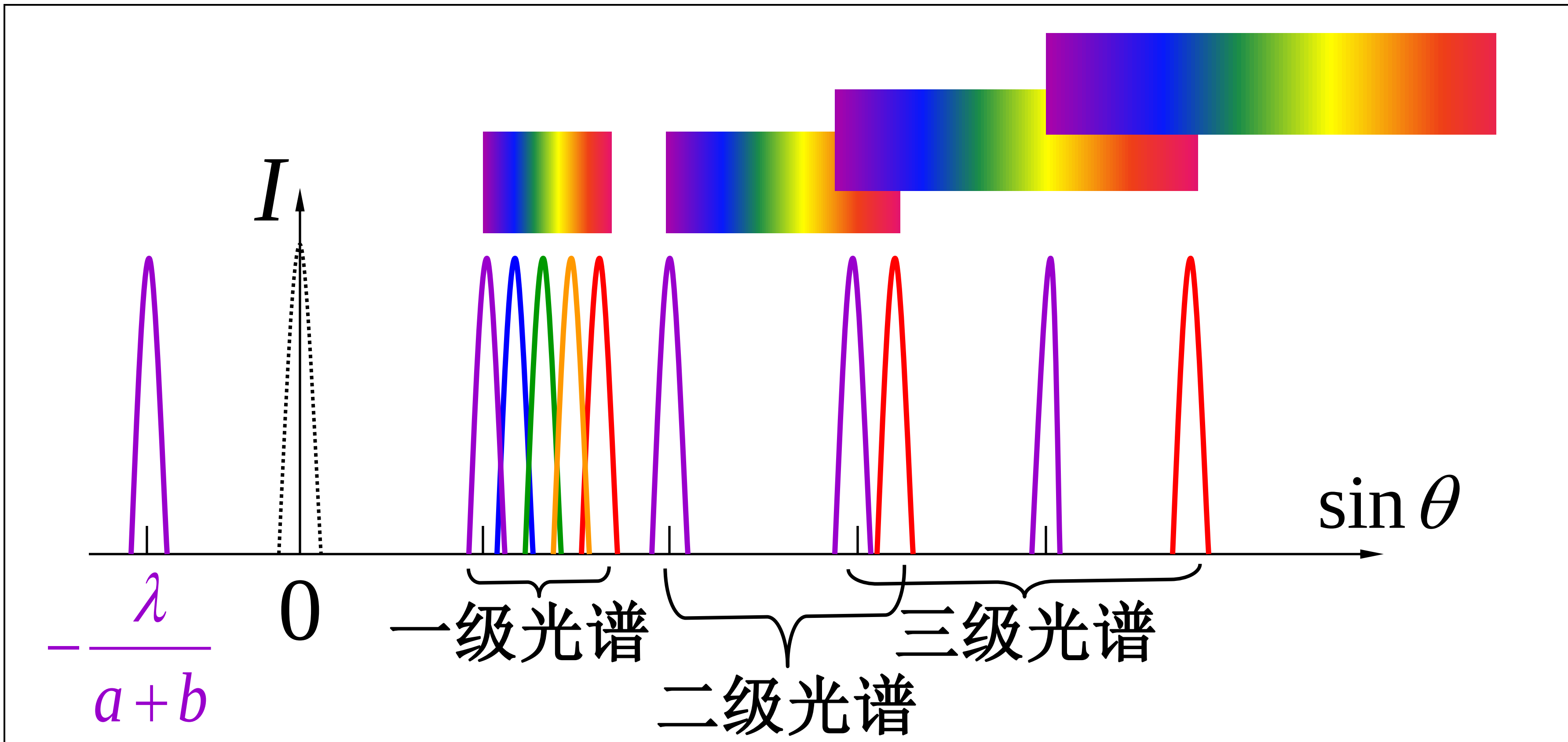


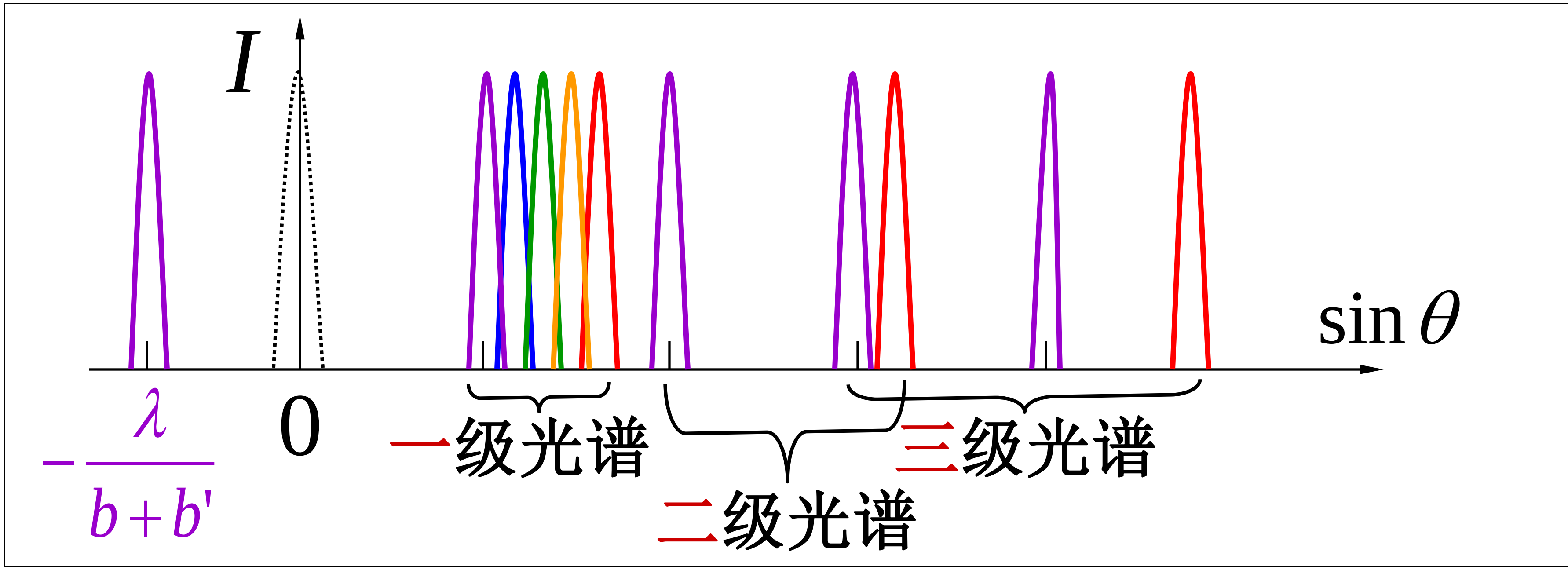
光栅多缝干涉的 **k** 级主极大的位置恰为单缝衍射 **k'** 级暗纹的位置，**k** 级主极大将不再出现，发生缺级。

四　光栅光谱

$$(a+b)\sin\theta = \pm k\lambda \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

入射光为白光时，λ不同，θ_k不同，按波长分开形成光谱.





例如　二级光谱重叠部分光谱范围

$$\begin{cases}(a+b)\sin\theta = 3\lambda_{紫} \\ (a+b)\sin\theta = 2\lambda\end{cases}$$

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_{紫} = 600\text{nm}$$

$$\lambda = 400 \sim 760\text{nm}$$

二级光谱重叠部分:

$600 \sim 760\text{nm}$

例1 用白光垂直照射在每厘米有6500条刻痕的平面光栅上，求第三级光谱的张角.

解 $\lambda = 400 \sim 760\text{nm} \quad a+b = 1\text{cm}/6500$

紫光 $\sin\theta_1 = \dfrac{k\lambda_1}{a+b} = \dfrac{3\times4\times10^{-5}\text{cm}}{1\text{cm}/6500} = 0.78$ $\boxed{\theta_1 = 51.26^\circ}$

红光 $\sin\theta_2 = \dfrac{k\lambda_2}{a+b} = \dfrac{3\times7.6\times10^{-5}\text{cm}}{1\text{cm}/6500} = 1.48 > 1$ 不可见

第三级光谱的张角 $\Delta\theta = 90.00^\circ - 51.26^\circ = 38.74^\circ$

第三级光谱所能出现的最大波长

$$\lambda' = \frac{(a+b)\sin 90^\circ}{k} = \frac{a+b}{3} = 513\text{nm}$$ 绿光

例2 试设计一个平面透射光栅的光栅常数，使得该光栅能将某种光的第一级衍射光谱展开 20.0° 角的范围．设该光的波长范围为 $430\text{nm} \sim 680\text{nm}$.

解

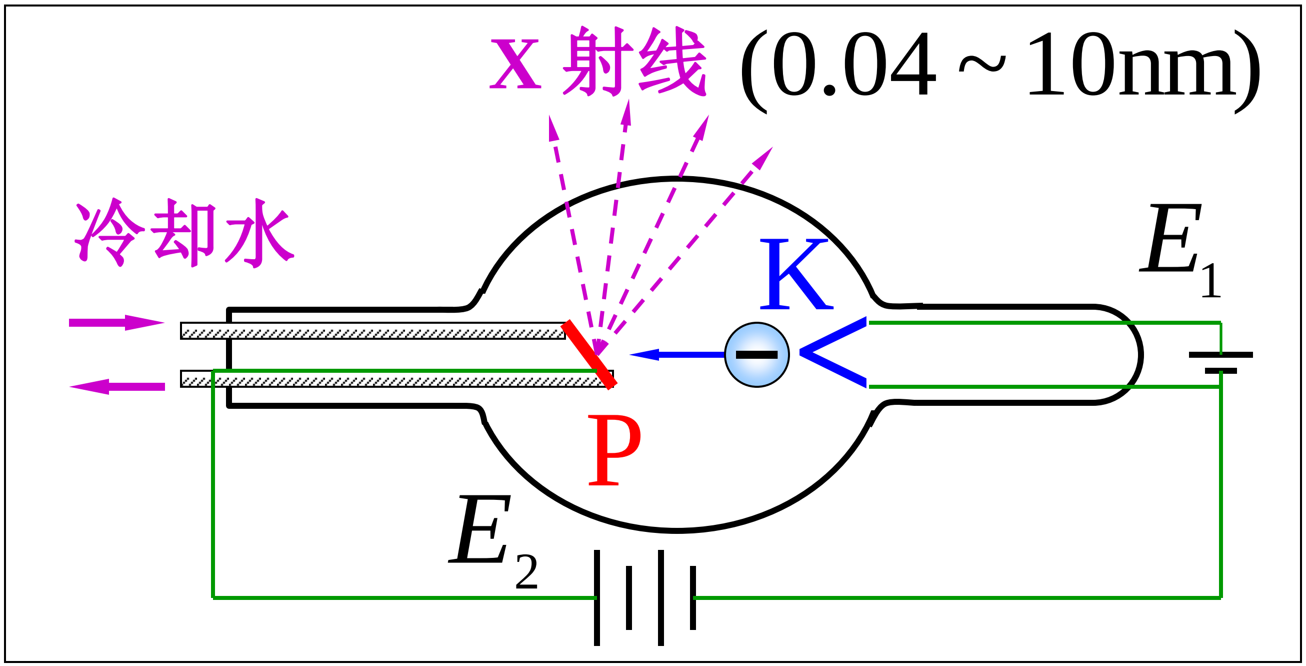
$$\begin{cases} (a+b)\sin\theta_1 = \lambda_1 = 430\text{nm} \\ (a+b)\sin(\theta_1 + 20.0^{\circ}) = \lambda_2 = 680\text{nm} \end{cases}$$

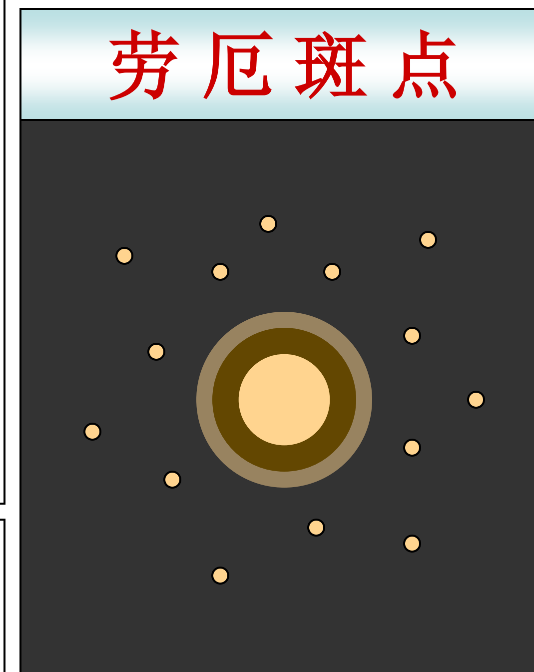
$$(a+b) = 913\text{nm}$$

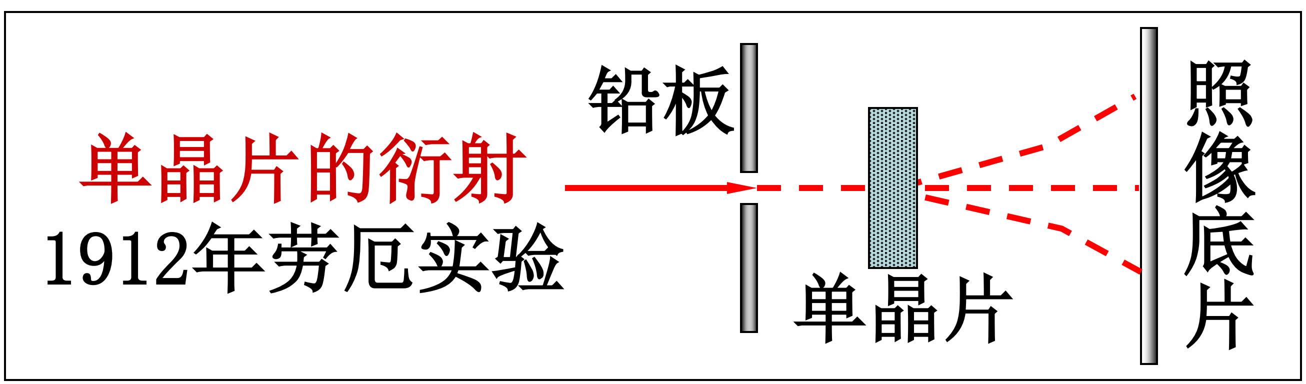
每厘米大约有 10^4 条刻痕

§18—4 X射线衍射

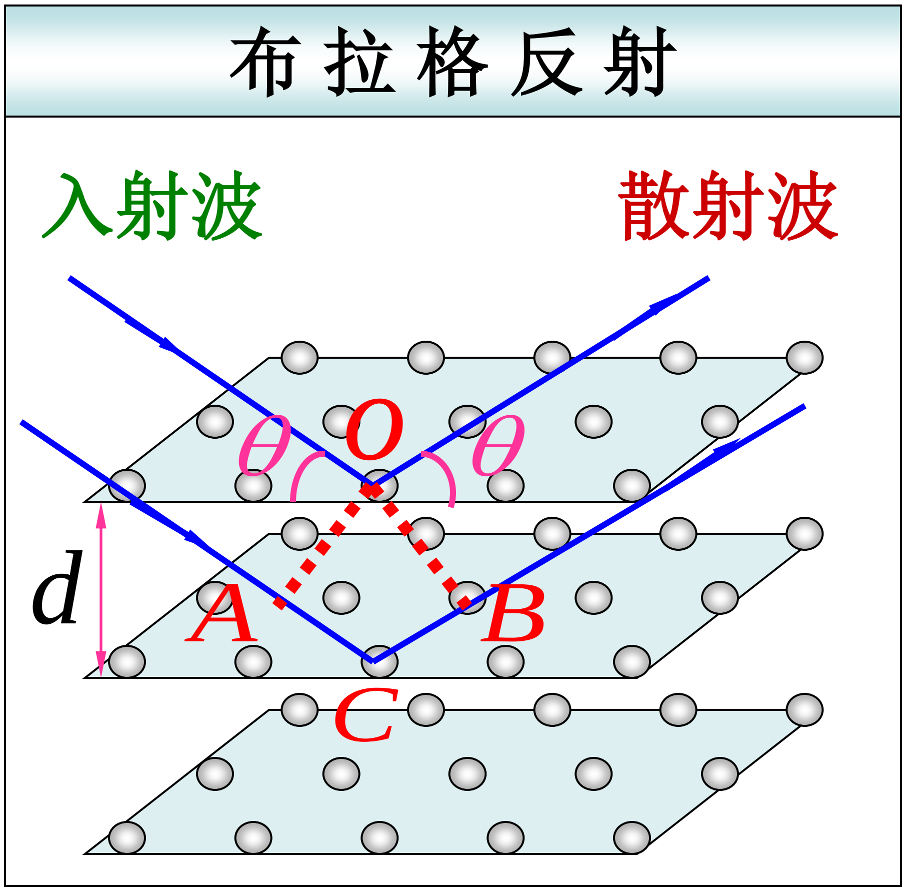
1885年伦琴发现，受高速电子撞击的金属会发射一种穿透性很强的射线称X射线.







1913年英国布拉格父子提出了一种解释X射线衍射的方法，给出了定量结果，并于1915年荣获物理学诺贝尔奖.



晶格常数 d　掠射角 θ

$$\Delta = AC + CB$$
$$= 2d\sin\theta$$

相邻两个晶面反射的两X射线干涉加强的条件

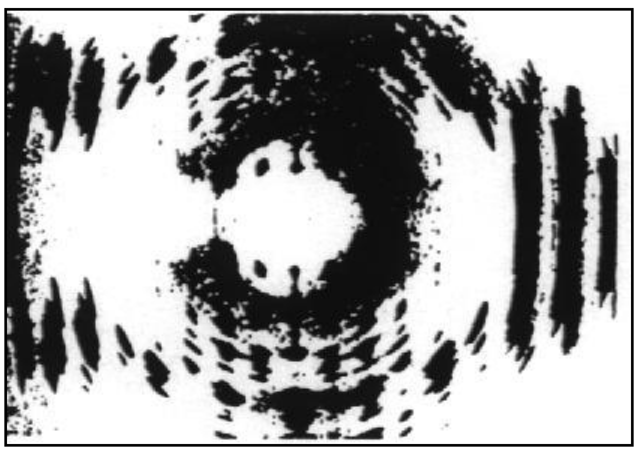
◆ 布拉格公式

$$\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$$

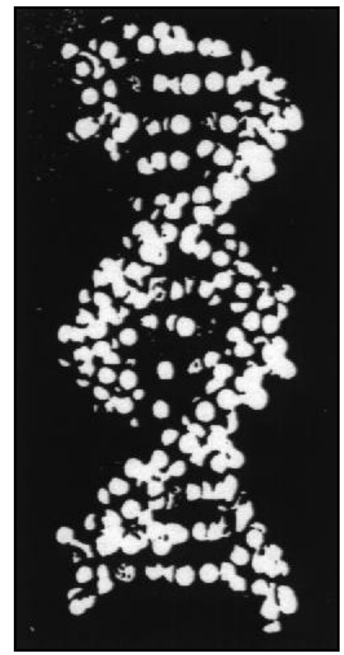
$$k = 0,1,2,\cdots$$

◆ 布拉格公式 $\boxed{2d\sin\theta = k\lambda}$ $k=0,1,2,\cdots$

用途 测量射线的波长研究X射线谱，进而研究原子结构；研究晶体的结构，进一步研究材料性能. 例如对大分子 DNA 晶体的成千张的X射线衍射照片的分析，显示出DNA分子的**双螺旋**结构.



DNA 晶体的X衍射照片



DNA 分子的双螺旋结构