第十五章

§15-1 机械波的产生和传播

§15-2 平面简谐波 波动方程

§15-3 波的能量 波的强度

§15-5 惠更斯原理 波的衍射、反射、折射

§15-6 波的叠加原理 波的干涉

§15-7 驻波

§15-8 多普勒效应

本章作业

5，11，12，
14，21，23，
29，31，35，
37，44，46

波动是振动状态的传播。

振动是激发波动的波源。

波动
- 机械波　机械振动在弹性介质中的传播.
- 电磁波　交变电磁场在空间的传播.

两类波的不同之处

- 机械波的传播需有传播振动的介质;
- 电磁波的传播可不需介质.

两类波的共同特征

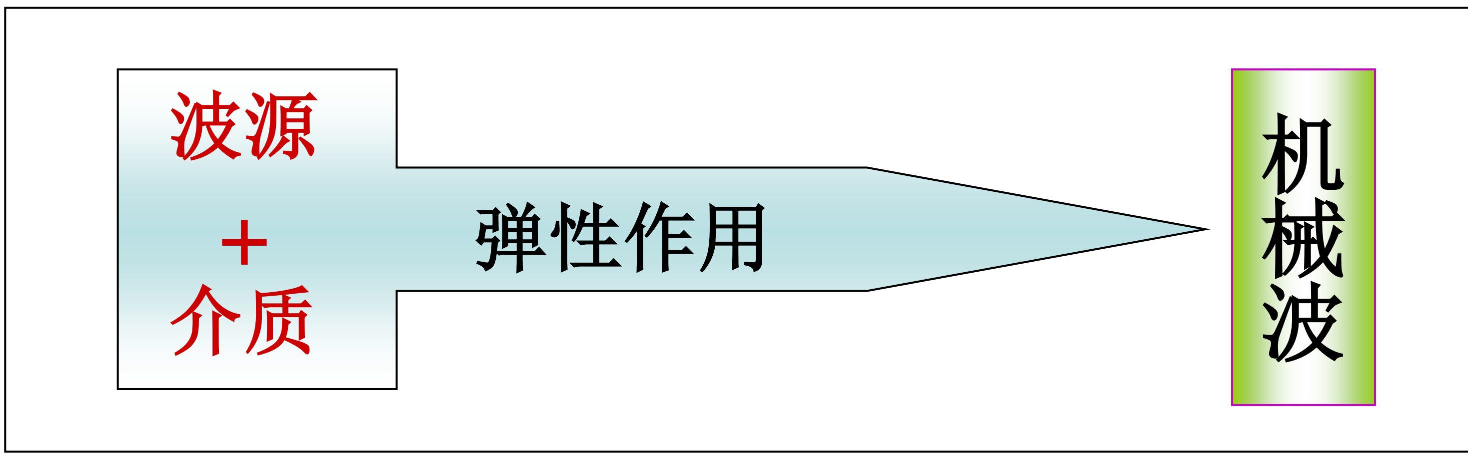
- 能量传播
- 反射
- 折射
- 干涉
- 衍射

§ 15-1　机械波的产生和传播

一、机械波产生的条件

机械波：机械振动在弹性介质中的传播.

产生条件：**1**）波源；**2**）弹性介质.



注意

波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播.

二、机械波的传播

波形图： 某时刻 各点振动的位移 y (广义：任一物理量)与相应的平衡位置坐标 *x* 的关系曲线

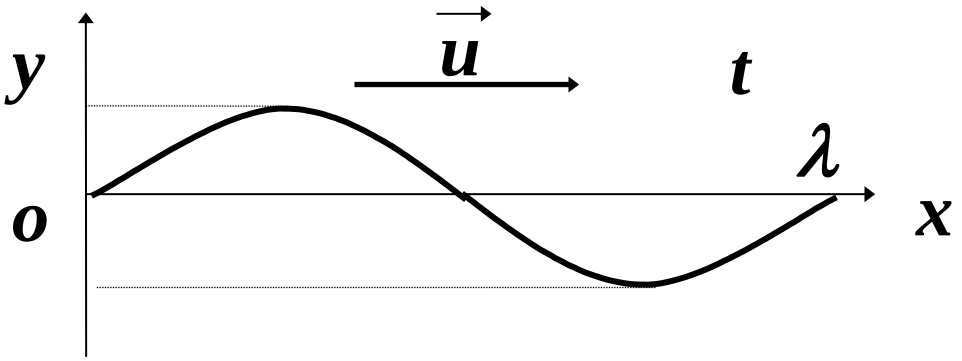
波的特征：

(1) 质元并未“随波逐流” 波的传播不是媒质质元的传播

(2) “上游”的质元依次带动“下游”的质元振动

(3) 某时刻某质元的振动状态将在较晚时刻于“下游”某处出现---波是振动状态的传播

波形曲线(波形图)



- 不同时刻对应有不同的波形曲线
- 波形曲线能反映横波、纵波的位移情况

三、横波和纵波

横波：质点振动方向与波的传播方向相**垂直**的波.

（<u>仅在固体中传播</u>）

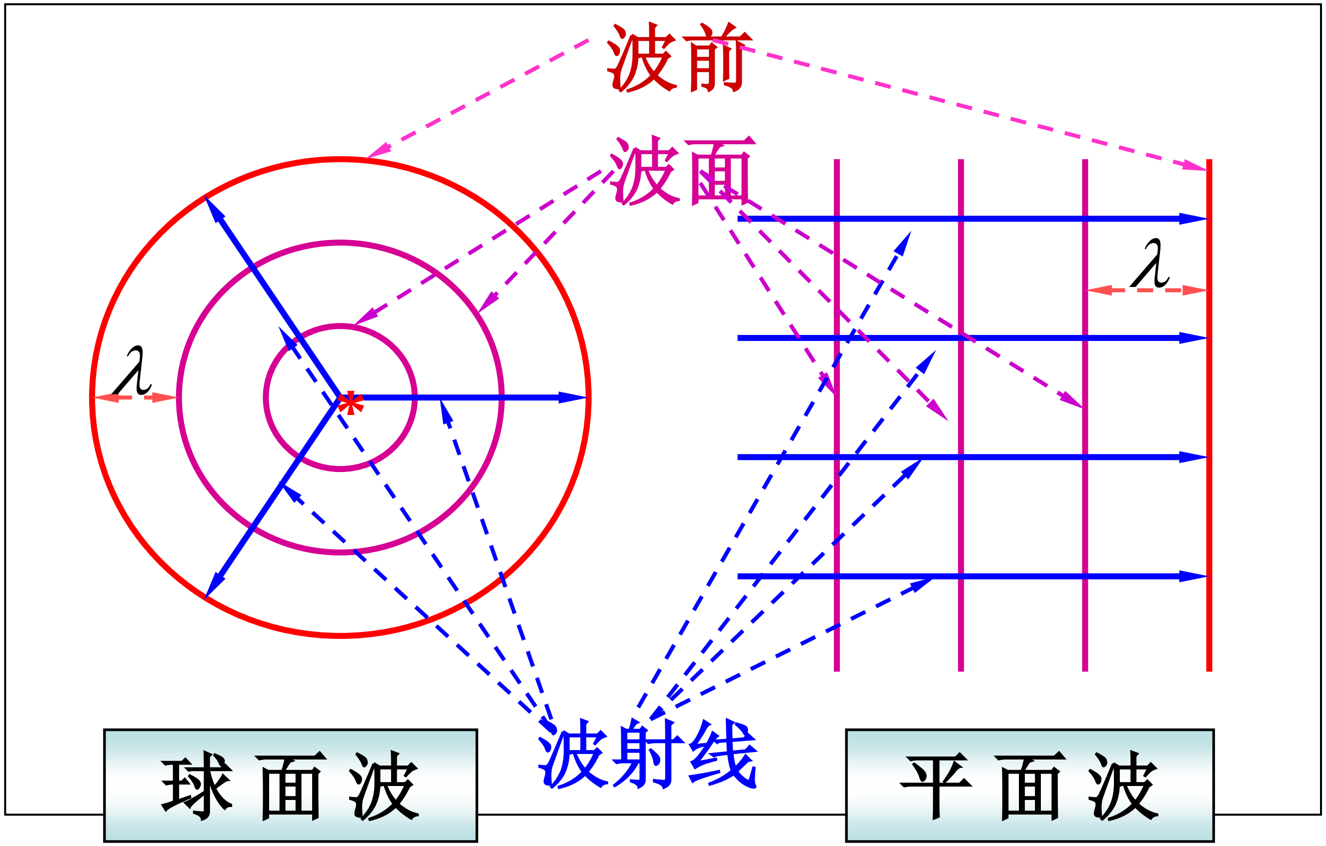
- 特征：具有交替出现的波峰和波谷.

纵波：质点振动方向与波的传播方向互相平行的波.

（可在固体、液体和气体中传播）

- 特征：具有交替出现的密部和疏部.

波射线(line of wave)、波面(wave surface)和波前(wave front)



波面：波线上同相位点连成的面，又称同相面

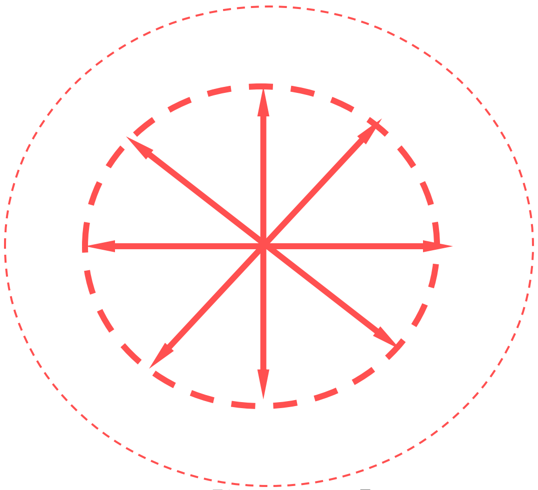
波前：波面中走在最前面的那个波面。

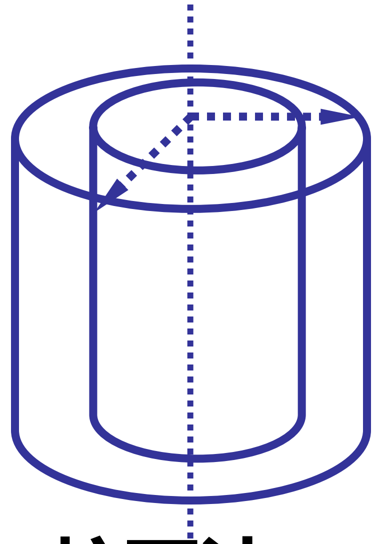
波射线：描述波的传播方向的有向曲线。

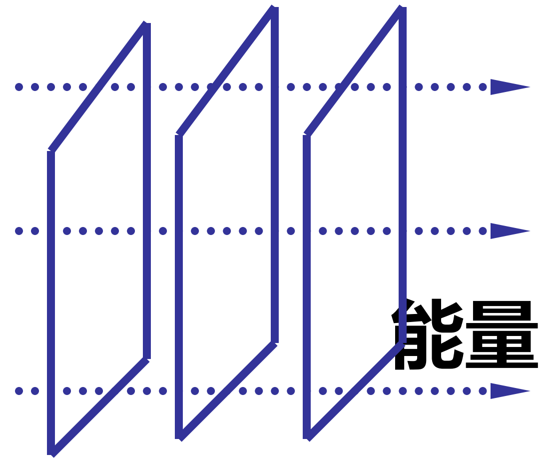
球面波(spherical wave)：波前为球面

平面波(plane wave)：波前为平面

在各向同性介质中


球面波


柱面波



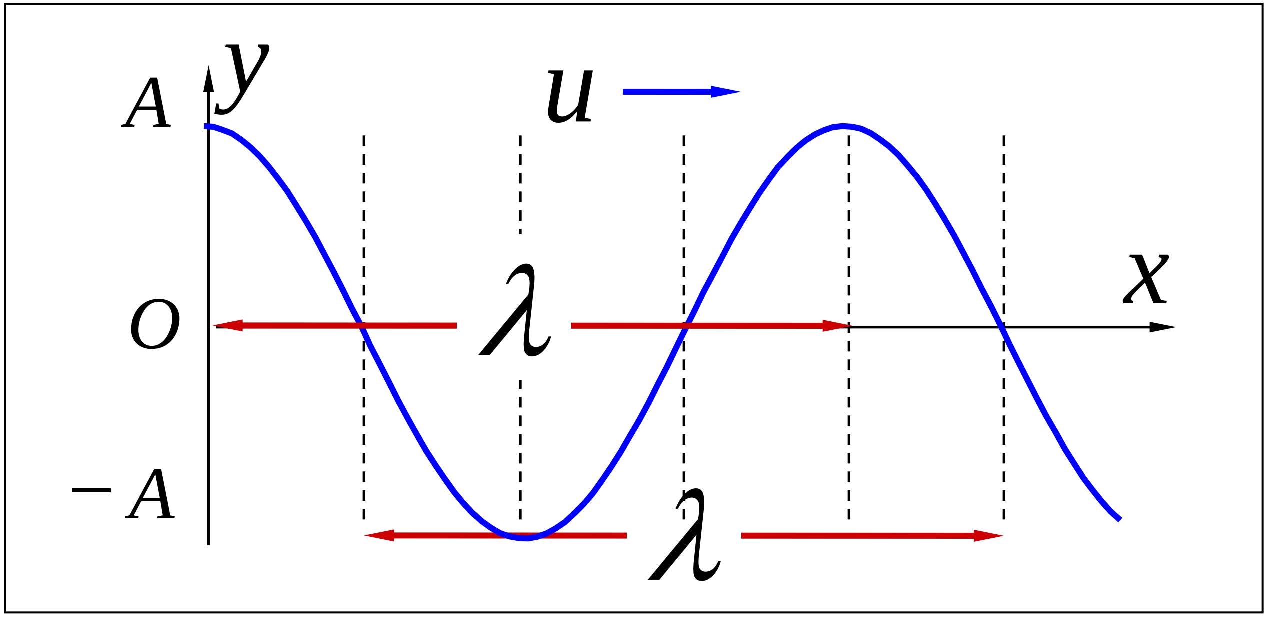
平面波

1)波面与波射线的关系：波射线垂直波面

2)波射线是波的能量传播方向

3)平面波是最理想的波（一维问题 能量不发散）

五、波长(wavelength) 频率(frequency)和波速(velocity)



波长定义：

同一波线上两个相邻的、相位差为2π 的质点的间距，

(沿波的传播方向，相邻的两个同相质点之间距)。

说明：波长可形象地想象为一个完整的“波”的长度；

横波：相邻两个波峰或波谷之间的距离

纵波：相邻两个密部或疏部之间的距离

- **周期** T ：波前进一个波长的距离所需要的时间(一个质点进行一次全振动的时间)
- **频率** ν ：周期的倒数，即单位时间内波动所传播的完整波的数目.

$$\nu = 1/T$$

- **波速** u ：波动过程中，某一振动状态（即振动相位）单位时间内所传播的距离（相速）.

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \qquad \lambda = \frac{u}{\nu} = Tu$$

注意

周期或频率只决定于波源的振动!

波速只决定于媒质的性质！

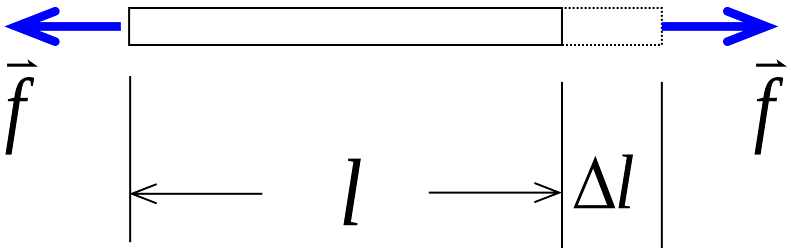
五、弹性介质(Elastic medium)

1、杨氏弹性模量Y (Youngs modulus)

应力

$$E=\frac{f/S}{\Delta l/l}$$

应变



S为棒之横截面积

$$f=\frac{ES}{l}\Delta l=k\Delta l$$

k为弹性系数或倔强系数。

弹性势能：$W_p=\frac{1}{2}k(\Delta l)^2=\frac{1}{2}ESl(\frac{\Delta l}{l})^2=\frac{1}{2}E\Delta V(\frac{\Delta l}{l})^2$

单位体积的弹性势能：$w_p=\frac{1}{2}E(\frac{\Delta l}{l})^2$

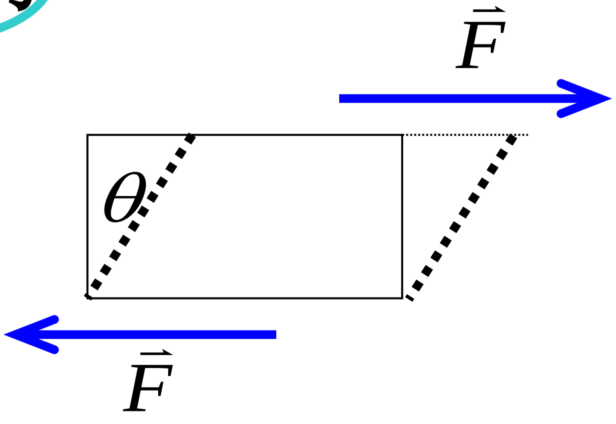
在弹性限度内应力与应变成正比，
比例系数称为材料的弹性模量。

2、切变弹性模量*G*(shear modulus)

切应力

$$G=\frac{F/S}{\theta}=\frac{F/S}{\Delta d/D}$$

切应变

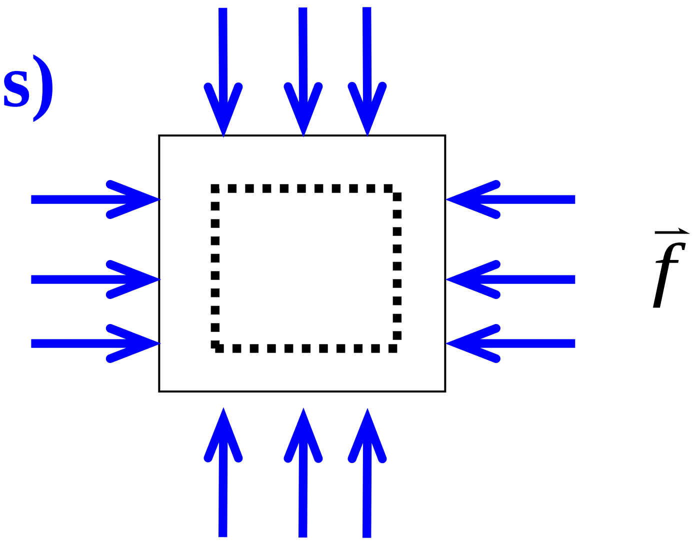


切变时，单位体积的弹性势能：

$$w_p=\frac{1}{2}G(\Delta d/D)^2$$

3、体变弹性模量B (bulk modulus)

$\Delta p = f/S$ 胁强 体应力



$\Delta V/V$ 胁变 体应变

f 表示正压力

S受力面积

容变弹性模量定义为：

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

应变时，单位体积的弹性势能：

$$w_p = \frac{1}{2}B(\Delta V/V)^2$$

波速u与介质的性质有关，ρ为介质的密度.

固体

$$u=\sqrt{\frac{G}{\rho}}$$ 切变模量 —— 横 波

$$u=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ 杨氏模量

液、气体 $$u=\sqrt{\frac{B}{\rho}}$$ 体变模量

纵 波

弦线中的横波速度： $$u=\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

张力

单位长度质量

对理想气体，声波传播可近似看做绝热过程

$$pV^{\gamma} = \text{常量} \qquad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\gamma \frac{\mathrm{d}V}{V}$$

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V} = \gamma p$$

$$u = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

$$\text{声音的传播速度} \begin{cases} 343\ \mathrm{m/s} & \text{空气，常温} \\ 4000\ \mathrm{m/s}\ \text{左右，} & \text{混凝土} \end{cases}$$

§15-1 平面简谐波 波动方程

介质中任一质点（坐标为 x）相对其平衡位置的位移（坐标为 y）随时间的变化关系，即 $y(x,t)$ 称为波函数.

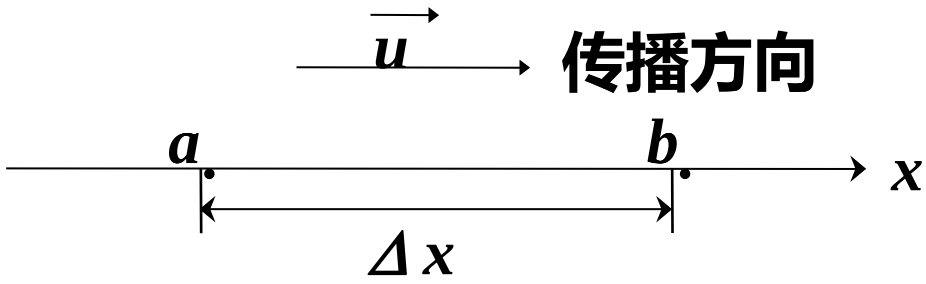
$$y = y(x,t)$$

各质点相对平衡位置的位移

波线上各质点平衡位置

- 简谐波：在均匀的、无吸收的介质中，波源作简谐运动时，在介质中所形成的波.
- 平面简谐波：波面为平面的简谐波.

沿波的传播方向, 各质元的相位依次落后。



图中*b*点振动比*a*点在时间上落后 $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{u} = \dfrac{l}{\lambda}T$

图中*b*点相位比*a*点落后

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

一、平面简谐波的波动方程

(Wave function of planar simple harmonic wave)

以速度u 沿x 轴正向传播的平面简谐波．令原点O 的初相为零，其振动方程

$$y_O = A\cos\omega t$$

时间推迟方法

点O 的振动状态

$$y_O = A\cos\omega t$$

$$\Delta t = \frac{x}{u}$$

点 P

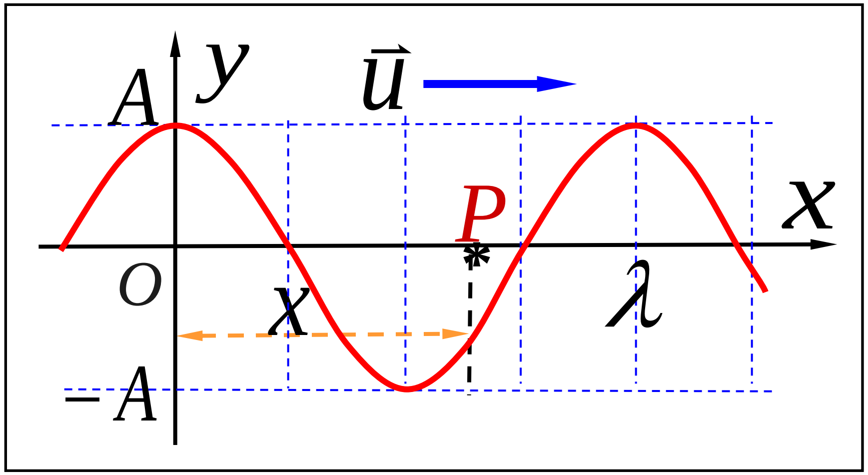
$t\text{-}x/u$时刻点O 的运动 $=$ t 时刻点 P 的运动

点P 振动方程

$$y_P = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

➢ 波动方程

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$



点 O 振动方程

$$y_o = A\cos\omega t$$

$$x = 0, \varphi = 0$$

相位落后法

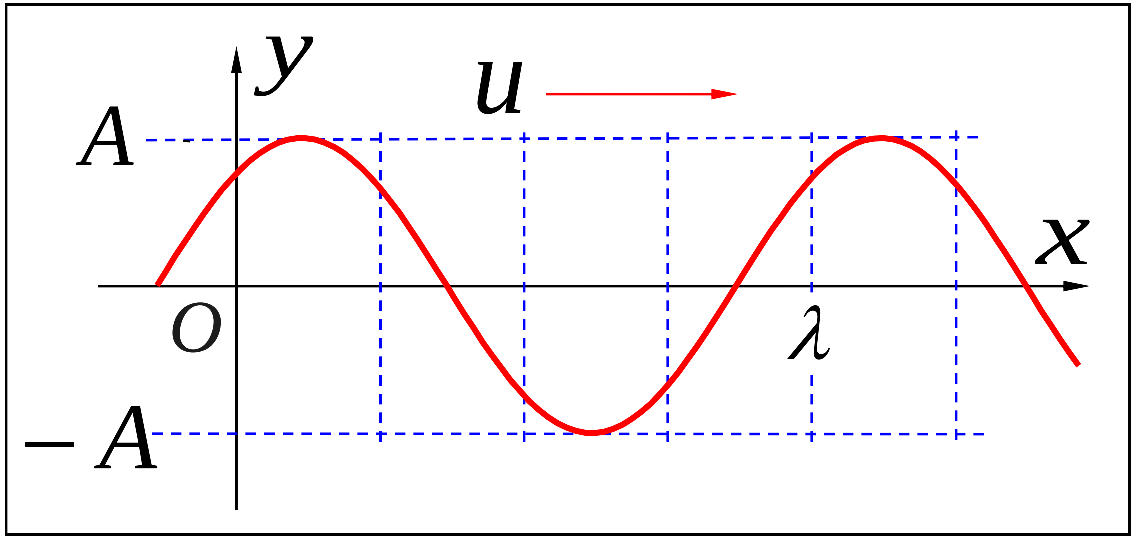
点 P 比点 O 落后的相位 $\Delta\varphi = \varphi_p - \varphi_O = -2\pi\frac{x}{\lambda}$

$$\varphi_p = -2\pi\frac{x}{\lambda} = -2\pi\frac{x}{Tu} = -\omega\frac{x}{u}$$

点 P 振动方程 $y_p = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$

如果原点的初相位不为零，即

$$x=0, \varphi \neq 0$$



点 O 振动方程 $y_O = A\cos(\omega t+\boxed{\varphi})$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$ u 沿 x 轴正向

$$y = A\cos[\omega(t\boxed{+}\frac{x}{u})+\varphi]$$ u 沿 x 轴负向

- 波动方程的其它形式

$$y(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

角波数 (wave number) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- 质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

讨论

波函数的物理意义

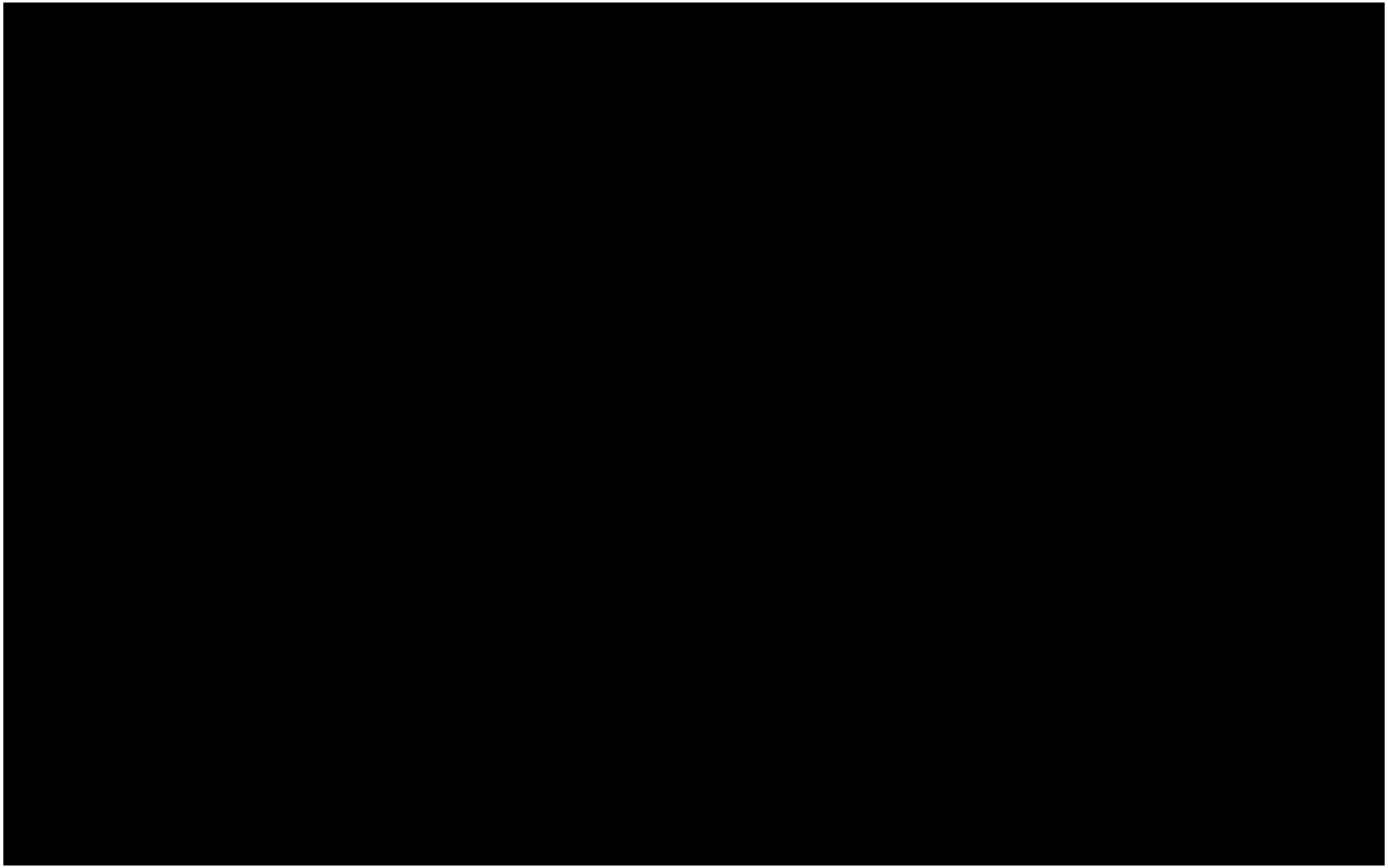
$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

1、当 x 固定时， 波函数表示该点的简谐运动方程，并给出该点与点 O 振动的相位差.

$$\Delta\varphi = -\omega\frac{x}{u} = -2\pi\frac{x}{\lambda}$$

$$y(x,t) = y(x,t+T)$$ （波具有时间的周期性）

波线上各点的简谐运动图



$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi] = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

2 当 t 一定时，波函数表示该时刻波线上各点相对其平衡位置的位移，即此刻的波形.

$y(x,t) = y(x+\lambda,t)$（波具有空间的周期性）

$$\varphi_1 = \omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi = 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\lambda})+\varphi$$

波程(**wave path**)差

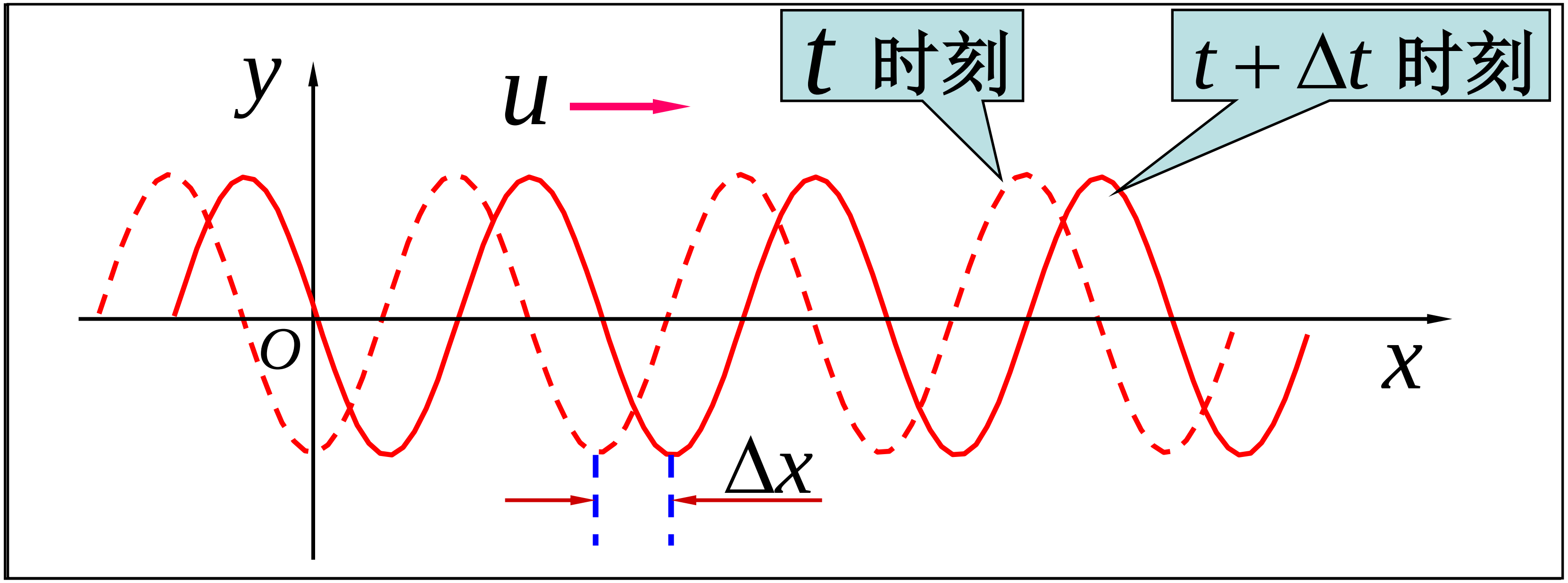
$$\varphi_2 = \omega(t-\frac{x_2}{u})+\varphi = 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\lambda})+\varphi$$

$$\Delta x_{21} = x_2 - x_1$$

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda} = 2\pi\frac{\Delta x_{21}}{\lambda}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}}$$

3 若 x,t 均变化，波函数表示波形沿传播方向的运动情况（行波）。



$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) \qquad \varphi(t,x)=\varphi(t+\Delta t, x+\Delta x)$$

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)=2\pi\left(\frac{t+\Delta t}{T}-\frac{x+\Delta x}{\lambda}\right) \qquad \frac{\Delta t}{T}=\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad \Delta x = u\Delta t$$

二、波动微分方程

对 $y = A\cos\left[\omega\left(t - x/u\right) + \varphi_0\right]$ **求** x **、** t **的二阶偏导数，得到**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{u^2} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

平面波的波动微分方程

任何物理量 y **，若它与时间、坐标间的关系满足上式，则这一物理量就按波的形式传播。**

在三维空间中的一切波动过程，只要介质无吸收且各向同性，都适合下式：

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \qquad \vec{\nabla}^2\vec{E}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

ξ代表振动位移，u代表传播速度。

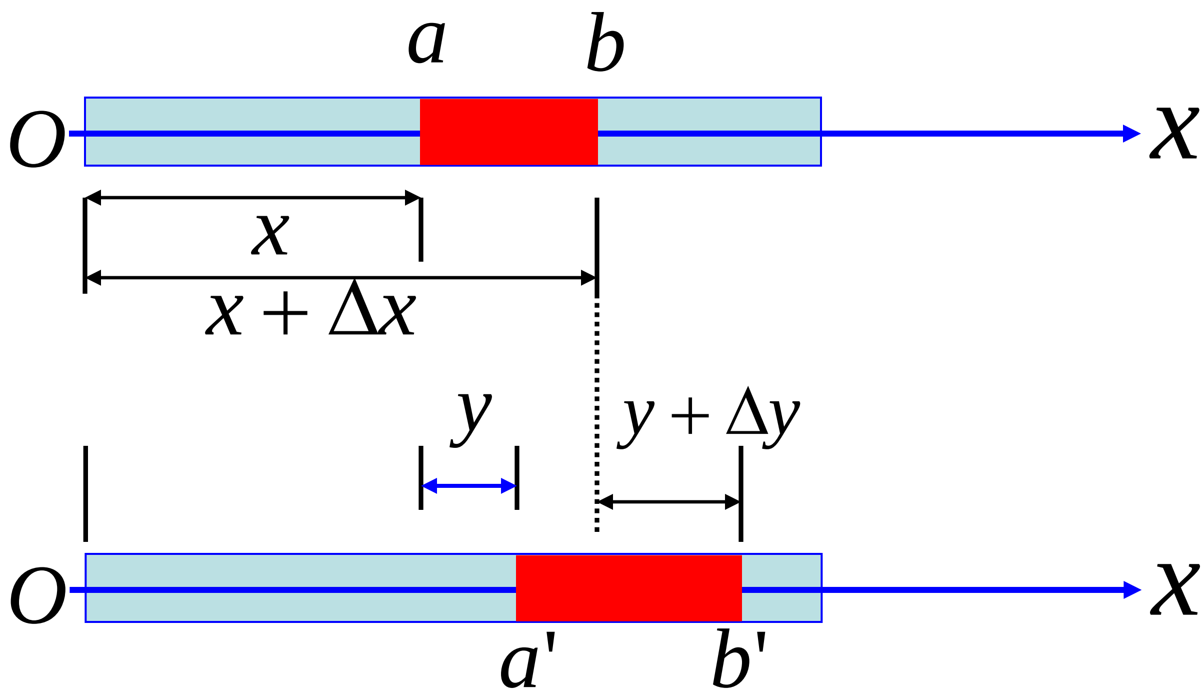
球面波的波动方程：$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2}$$

球面波的余弦表式如下：

$$\xi=\frac{a}{r}\cos\omega\left[\left(t-\frac{r}{u}\right)+\phi_0\right] \qquad a/r\text{——振幅}$$

三、波动微分方程的推导

设固体细长棒的截面为S**、密度为**ρ



a **处应力** σ　　　b **处应力** $\sigma + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x}\Delta x$

体积元所受合力： $-\sigma S+\left(\sigma+\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\Delta x\right)S=\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}S\Delta x$

体积元质量为$\rho S\Delta x$，**其振速为**v，**据牛顿第二定律，得**

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}S\Delta x=\rho S\Delta x\frac{\partial v}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\sigma}{\partial x}=\rho\frac{\partial v}{\partial t}$$

因 $\sigma=E\dfrac{\partial y}{\partial x}$　　$\dfrac{\partial y}{\partial x}$ —**应变**　　E —**杨氏模量**

利用$v=\dfrac{\partial y}{\partial t}$**牛顿第二定律变为：**

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{E/\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

将 $y = A\cos\left[\omega(t - x/u) + \varphi_0\right]$ 求导后代入微分方程后可知，当 $u = \sqrt{E/\rho}$ 时等式成立。

细长棒中传播的纵波的波速为 $u = \sqrt{E/\rho}$

按照偏微分方程理论，方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

的一般解为：

$$y = F\left(t - \frac{x}{u}\right) + \Phi\left(t + \frac{x}{u}\right)$$

【例】 已知波动方程如下，求波长、周期和波速.

$$y = (5\text{cm})\cos\pi[(2.50\text{s}^{-1})t - (0.01\text{cm}^{-1})x].$$

【解】上波动方程可改写成

$$y = (5\text{cm})\cos 2\pi[(\frac{2.50}{2}\text{s}^{-1})t - (\frac{0.01}{2}\text{cm}^{-1})x]$$

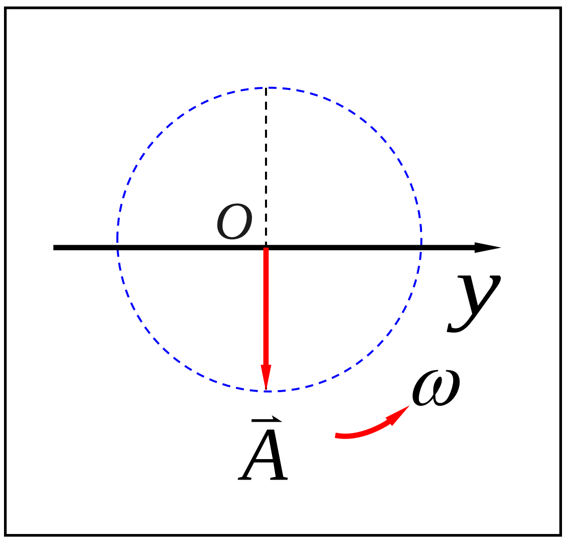
与 $\boxed{y = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})}$ 比较，得

$$T = \frac{2}{2.5}\text{s} = 0.8\,\text{s}$$

$$\lambda = \frac{2\text{cm}}{0.01} = 200\,\text{cm}$$

波速 $u = \frac{\lambda}{T} = 250\,\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$

【例】一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播， 已知振幅 $A=1.0\text{m}$ ，$T=2.0\text{s}$ ，$\lambda=2.0\text{m}$. 在 $t=0$ 时坐标原点处的质点位于平衡位置沿 Oy 轴正方向运动． 求波动方程



【解】 波动方程的标准式

$$y=A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\boxed{\varphi}\right]$$

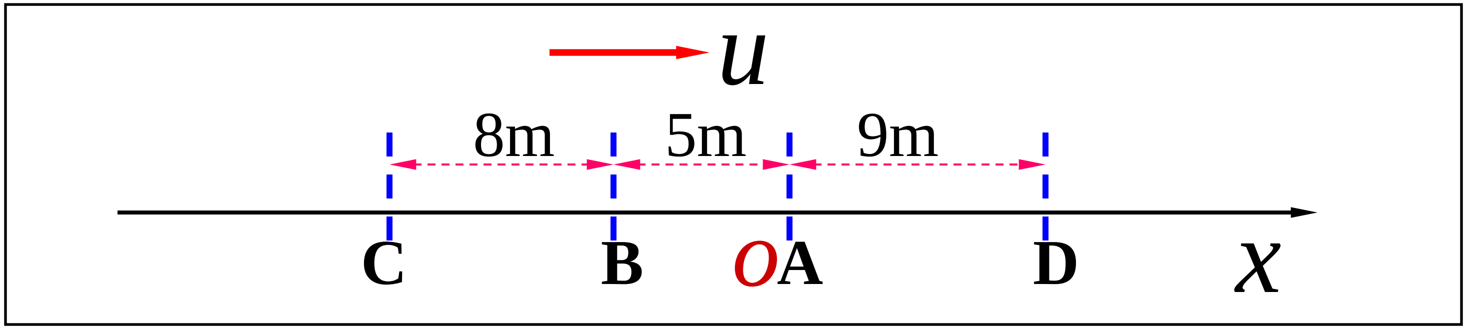
$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0,\ v=\frac{\partial y}{\partial t}>0$$

$$\boxed{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$

$$y=(1.0\text{m})\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{2.0\text{s}}-\frac{x}{2.0\text{m}}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

【例】一平面简谐波以速度$u=20\mathrm{m/s}$沿直线传播,波线上点A的简谐运动方程 $y_A=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos(4\pi\mathrm{s}^{-1})t$.



1）以 A 为坐标原点，写出波动方程

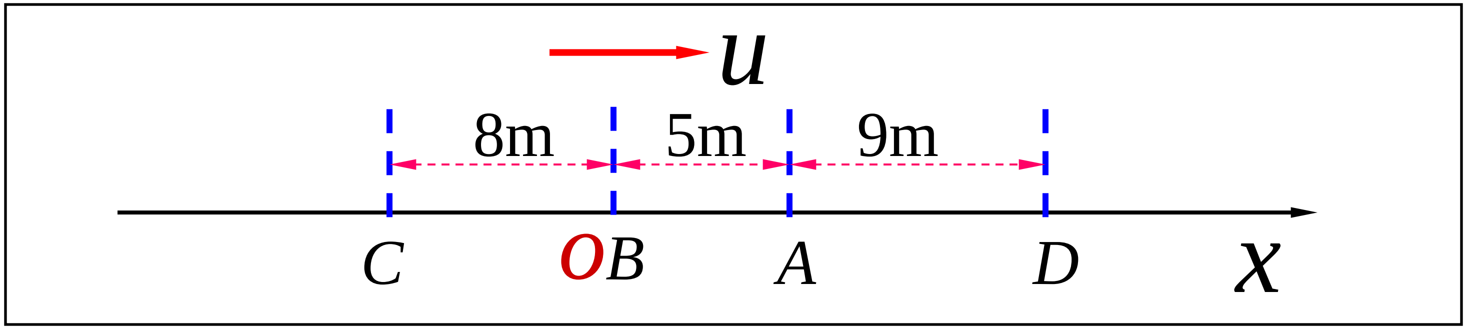
$$A=3\times10^{-2}\mathrm{m}\quad T=0.5\mathrm{s}\quad \varphi=0\quad \lambda=uT=10\mathrm{m}$$

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

$$y=(3\times10^{-2}\mathrm{m})\cos2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}}-\frac{x}{10\mathrm{m}})$$

2）以 B 为坐标原点，写出波动方程

$$y_A=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

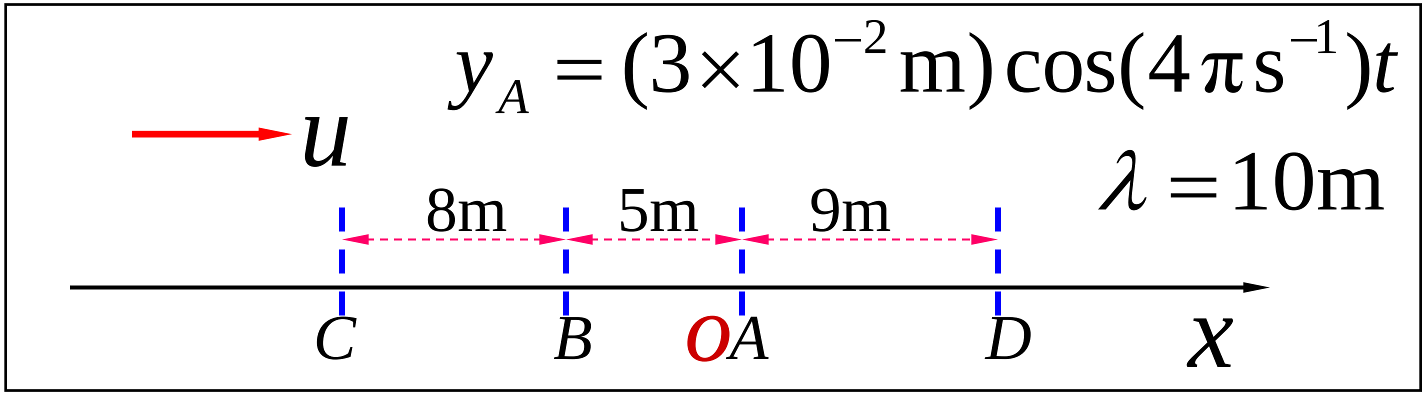


$$\varphi_B-\varphi_A=-2\pi\frac{x_B-x_A}{\lambda}=-2\pi\frac{-5}{10}=\pi$$

$$\varphi_B=\pi \qquad y_B=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t+\pi]$$

$$y=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}}-\frac{x}{10\mathrm{m}})+\pi]$$

3）写出传播方向上点C、点D 的简谐运动方程



点 C 的相位比点 A 超前

$$y_C=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t+2\pi\frac{AC}{\lambda}]$$

$$=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t+\frac{13}{5}\pi]$$

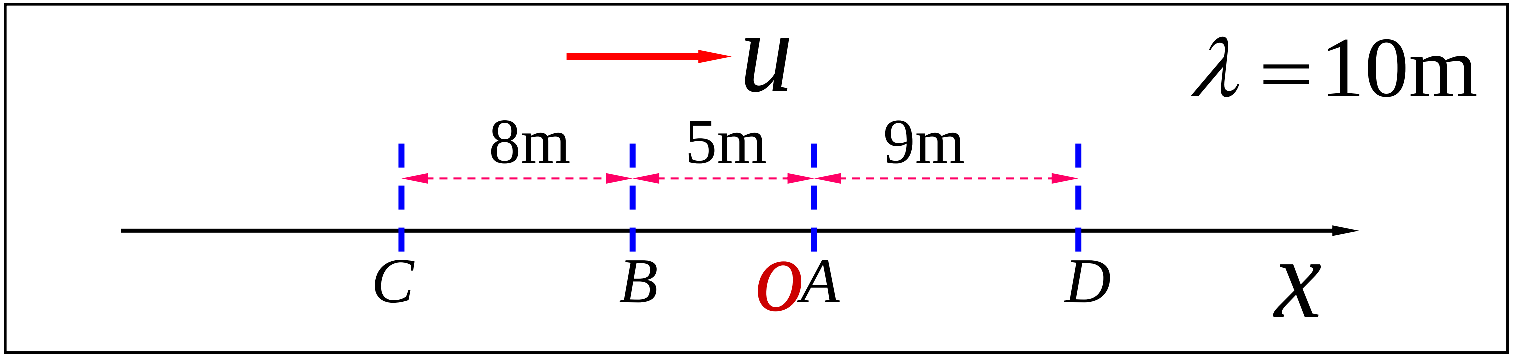
点 D 的相位落后于点 A

$$y_D=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t-2\pi\frac{AD}{\lambda}]$$

$$=(3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t-9\pi/5]$$

4）分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$



$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$

讨论

1）给出下列波函数所表示的波的传播方向和 $x=0$ 点的初相位.

$$y=-A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$ （向 x 轴正向传播， $\varphi=\pi$ ）

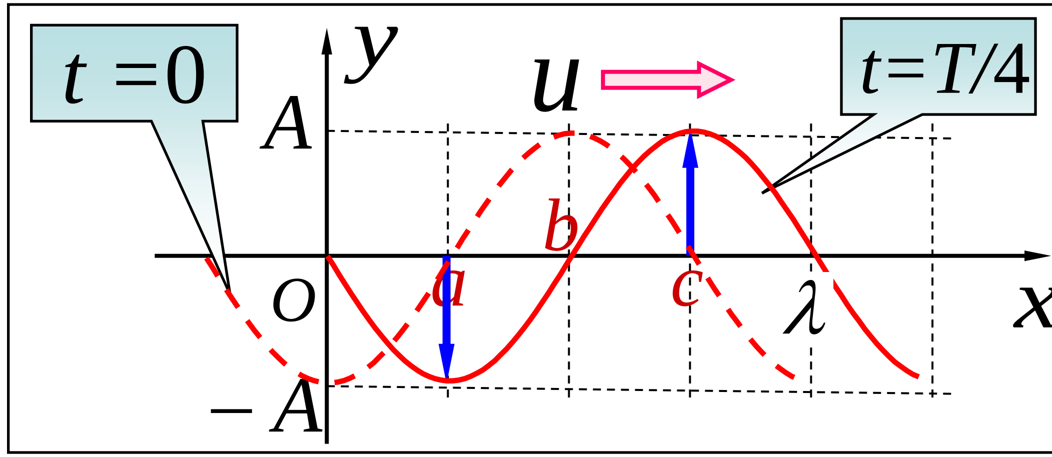
$$y=-A\cos\omega\left(-t-\frac{x}{u}\right)$$ （向 x 轴负向传播， $\varphi=\pi$ ）

2）平面简谐波的波函数为 $y=A\cos(Bt-Cx)$ 式中 A,B,C 为正常数，求波长、波速、波传播方向上相距为 d 的两点间的相位差.

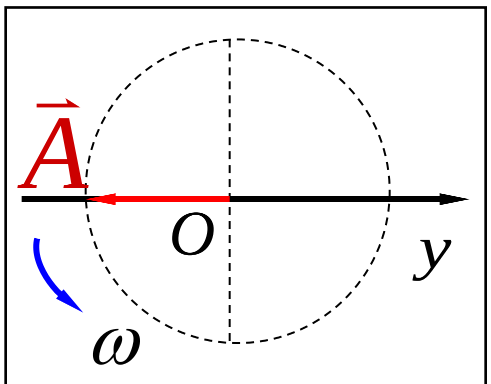
$$y=A\cos(Bt-Cx) \qquad y=A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{\lambda=\frac{2\pi}{C}} \qquad T=\frac{2\pi}{B} \qquad \boxed{u=\frac{\lambda}{T}=\frac{B}{C}} \qquad \boxed{\Delta\varphi=2\pi\frac{d}{\lambda}=dC}$$

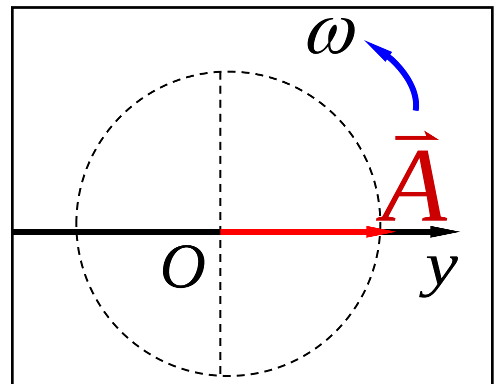
3）如图简谐波以余弦函数表示，求 O、a、b、c 各点振动**初相位**.



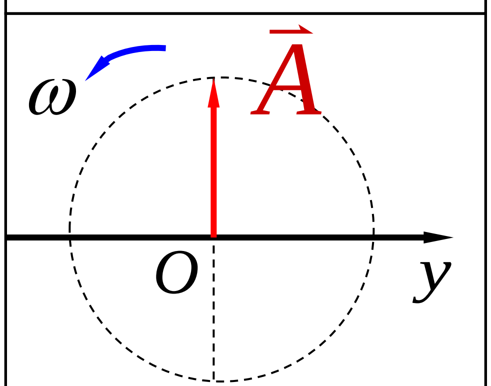
$\varphi(-\pi \sim \pi)$



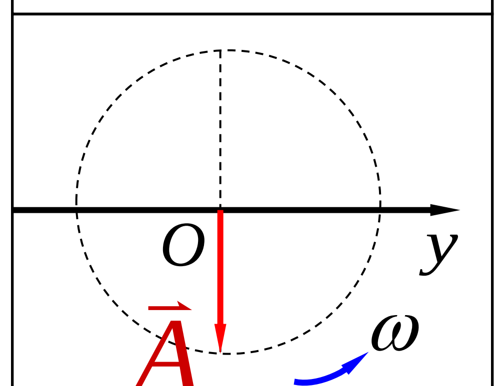
$$\varphi_o = \pi$$



$$\varphi_b = 0$$



$$\varphi_a = \frac{\pi}{2}$$



$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

§ 15-3 波的能量 波的强度

一、波的能量

考虑横波的波函数 $y = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u})]$

某一体积元(即某点附近一很小的体积)在某时的振动速度

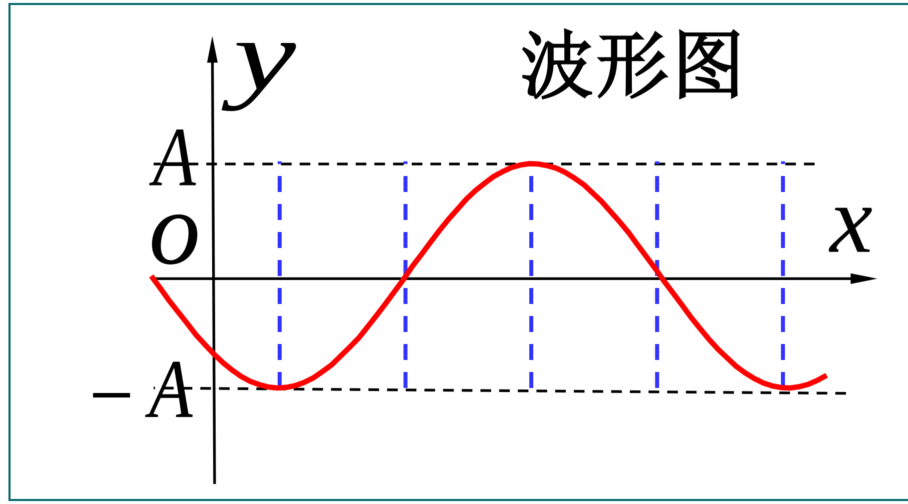
$$\frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega \sin[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

该体积元 $\mathrm{d}V$ 振动的动能为

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}m)v^2 = \frac{1}{2}(\rho \mathrm{d}V)v^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}V A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t - \frac{x}{u})]$$

可以证明，体积元的动能和势能相等，



$$\mathrm{d}E_k = \mathrm{d}E_p$$

$$= \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

机械能 $$\mathrm{d}E = \rho \mathrm{d}VA^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

能量密度： $$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

平均能量密度： $$\overline{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

讨论

1)体积元的机械能均随 x, t 作周期性变化，且变化是同相位的;

2)体积元在平衡位置时，动能、势能和总机械能均最大;

3)体积元的位移最大时，动能、势能和总机械能均为零;

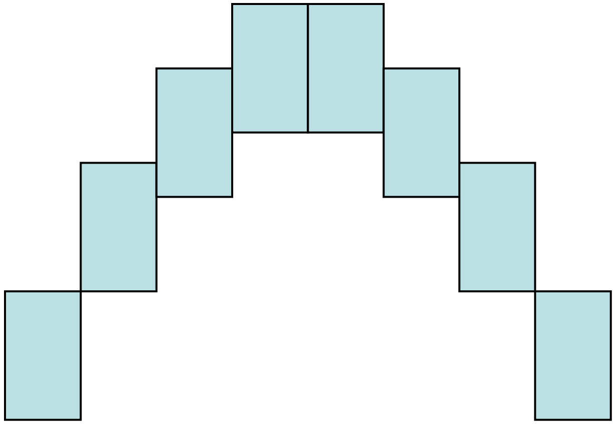
4)任一体积元的运动和形变都影响相邻的体积元的运动和形变，即该体积元对外作功，所以体积元的机械能不守恒;

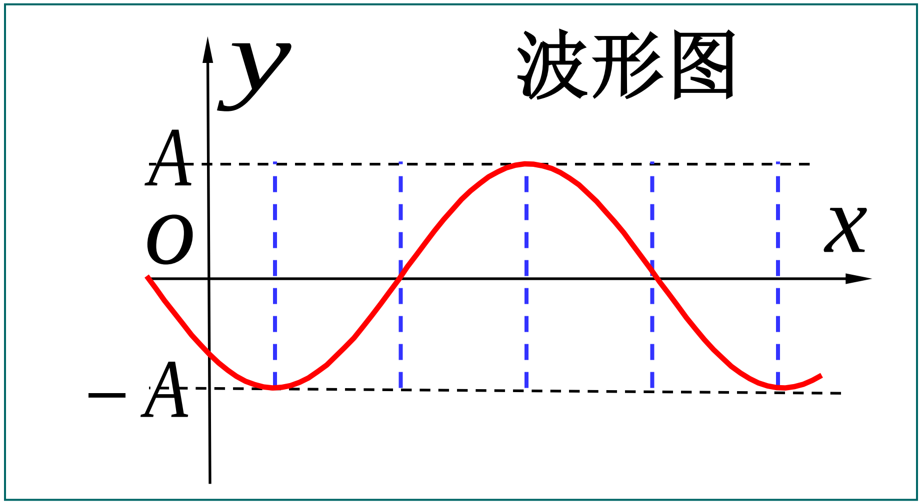
5)任一体积元都在不断地接收和放出能量，即不断地传播能量；

6)波动是能量传递的一种方式。

二、波动能量的推导

体积元势能的来源：一体积元与相邻体积元有相对位移而产生的弹性回复力





波速 $u=\sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$

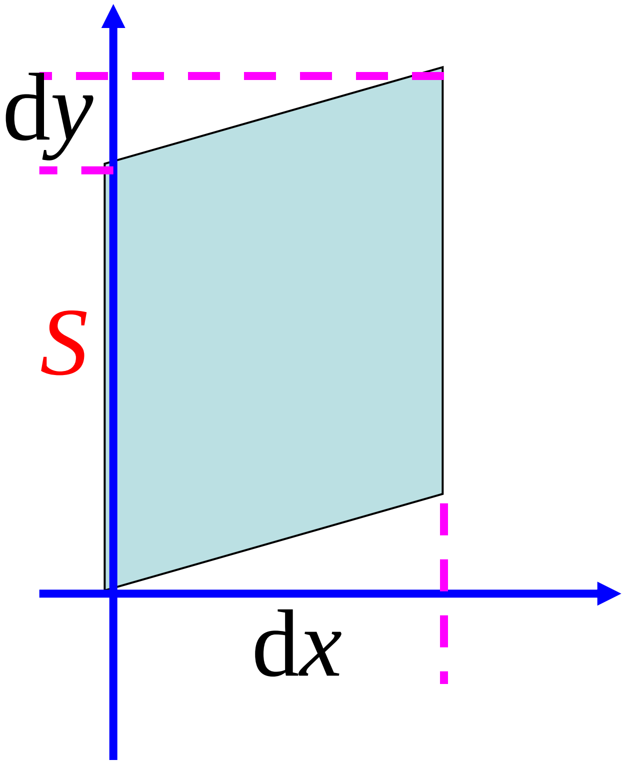
切变模量

$$G=\rho u^{2}$$

忽略纵向形变和重力等其它力的影响，某点附近形变率为

$$\frac{\partial y}{\partial x}=A\frac{\omega}{u}\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

弹性回复力



$$F \propto \frac{S\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

S：体积元侧面与介质接触的面积

$$F = G\frac{S\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\mathrm{d}y$$

$$k = \frac{GS}{\mathrm{d}x}$$

该体积元具有势能

$$\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}y)^2 = \frac{1}{2}k(\mathrm{d}x)^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}GS\mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

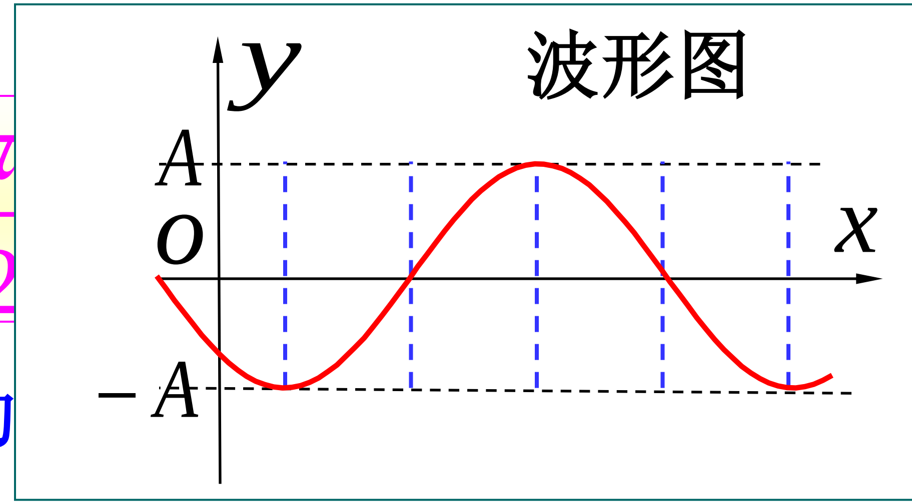
$$G = \rho u^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho \mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

什么地方动能最大?

$$\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

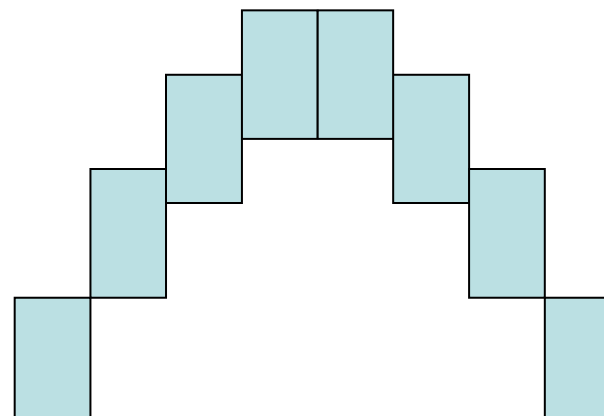
体积元在平衡位置处振动速率最大，动能也最大



什么地方势能最大?

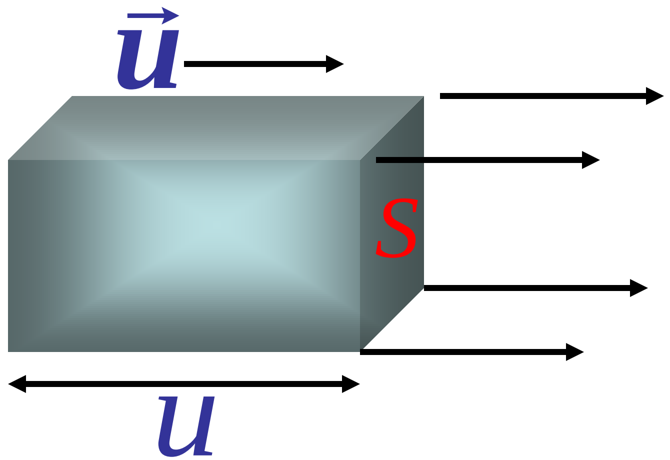
$$\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

体积元在平衡位置处切向形变最大，势能也最大



三、波的强度

能流 在介质中垂直于波速方向取一面积S，在单位时间内通过S 的能量。



$$P=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{wSu\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=wSu$$

$$=uS\rho A^2\omega^2\sin^2\omega(t-x/u)$$

平均能流： $\overline{P}=\overline{w}Su=\frac{1}{2}uS\rho A^2\omega^2$

能流密度：通过与波传播方向垂直的单位面积的能流，用I 来表示，即

$$I=\frac{dW}{dt\cdot dS}=\frac{wdS\cdot dl}{dt\cdot dS}=wu \quad 或 \quad \vec{I}=w\vec{u}$$

平均能流密度或**波的强度** 通过与波传播方向垂直的单位面积的平均能流，用I 来表示，即

$$\bar{I} = \bar{w}u = \rho u \omega^2 A^2 / 2 = z\omega^2 A^2 / 2$$

对任意一个截面，设面元法线方向与波的传播方向夹角为α，则

$$dP = IdS\cos\alpha = \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

$$P = \int_S dP = \int_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

若波的能流密度与曲面垂直且大小不变

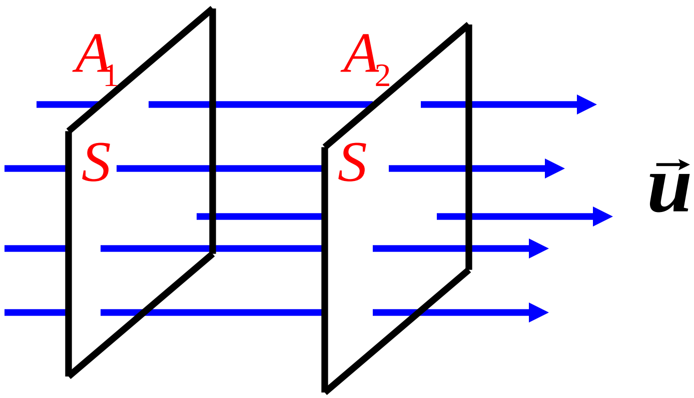
$$\bar{P} = \bar{w}Su = \frac{1}{2}uS\rho A^2\omega^2$$

介质的特性阻抗 $z=\rho u$

I **的单位：瓦特/米**^{2} $(\mathrm{W.m^{-2}})$

平面余弦行波振幅不变的意义：

$$y = A\cos\omega\,(t - x/u)$$



$$\overline{P}_1 = \overline{w}_1 uS = \frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 uS \qquad \overline{P}_2 = \overline{w}_2 uS = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 uS$$

若 $\overline{P}_1 = \overline{P}_2$，**有** $A_1 = A_2$。

对于球面波，$S_1 = 4\pi r_1^2$ $S_2 = 4\pi r_2^2$ 介质不吸收能量时，通过两个球面的总能流相等

$$\frac{1}{2}\rho A_1^2\omega^2 u 4\pi r_1^2 = \frac{1}{2}\rho A_2^2\omega^2 u 4\pi r_2^2$$

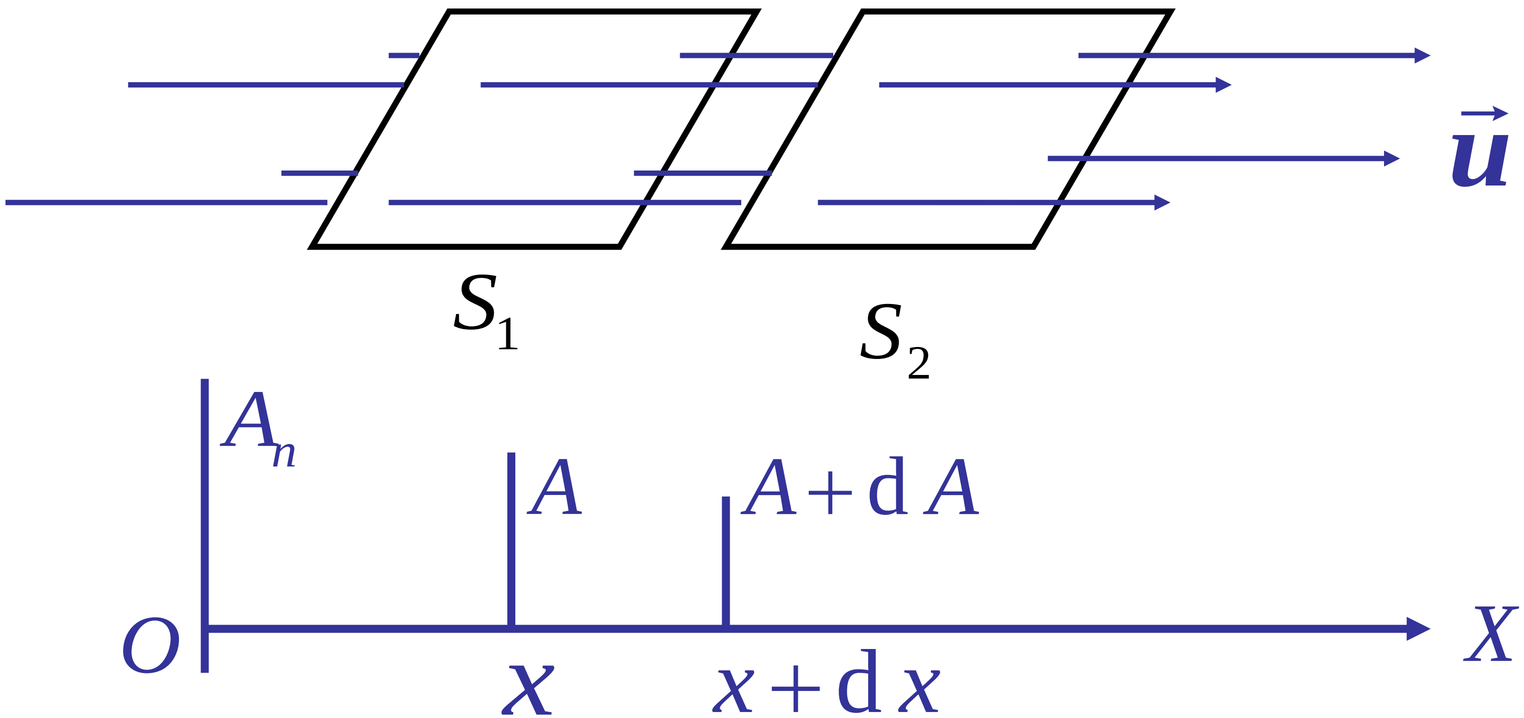
$$\Rightarrow \quad A_1/A_2 = r_2/r_1$$

球面波表达式：

$$\xi = \frac{a}{r}\cos\omega\,(t - r/u)$$

式中a 为波在离原点单位距离处振幅的数值。

三、波的吸收



若波不被介质吸收，对于平面简谐波，S_1和S_2处振幅相同。若介质吸收机械波的能量，则波线上不同点处振幅是不相同的。上图的$\mathrm{d}A<0$。

$-\mathrm{d}A = \alpha A\,\mathrm{d}x,$ α ---介质的吸收系数。

若α为常数,则有 $A = A_0 e^{-\alpha x}$

A_0为$x=0$ 处的振幅。

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2}u\rho A^2\omega^2 = \frac{1}{2}u\rho A_0^2\omega^2 e^{-2\alpha x} \\ I_0 = \frac{1}{2}u\rho A_0^2\omega^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $I = I_0 e^{-2\alpha x}$

式中的I_0和I 分别为$x=0$ 和$x=x$ 处的波的强度。

【例】空气中声波的吸收系数为$\alpha_1=2\times10^{-11}v^2\mathrm{m}^{-1}$，钢中的吸收系数为$\alpha_2=4\times10^{-7}v\mathrm{m}^{-1}$，式中$v$ 代表声波频率的数值。问5MHz的超声波透过多少厚度的空气或钢后，其声强减为原来的1%？

【解】 **据题意，空气和钢的吸收系数分别为**

$$\alpha_1=2\times10^{-11}\times(5\times10^6)^2\mathrm{m}^{-1}=500\mathrm{m}^{-1}$$

$$\alpha_2=4\times10^{-7}\times(5\times10^6)^2\mathrm{m}^{-1}=2\mathrm{m}^{-1}$$

把α_1、α_2**分别代入**$I=I_0e^{-2\alpha x}$**或下式，**

$$x=(1/2\alpha)1n(I_0/I)$$

据题意有 $I_0/I = 100$ 得空气的厚度

$$x_1 = \frac{1}{1000} 1\text{n}100\,\text{m} = 0.0046\,\text{m}$$

钢的厚度为

$$x_2 = \frac{1}{4} \ln 100\,\text{m} = 1.15\,\text{m}$$

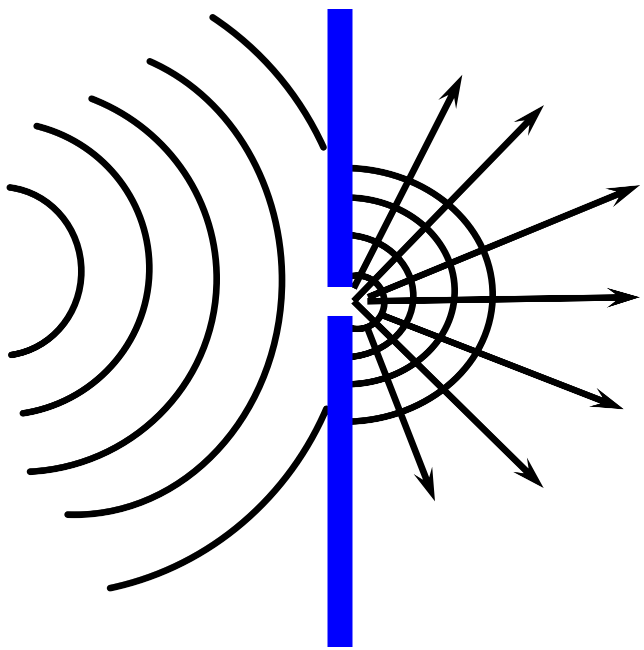
可见高频超声波很难透过气体，但极易透过固体。

§15-5 惠更斯原理 波的衍射、反射和折射

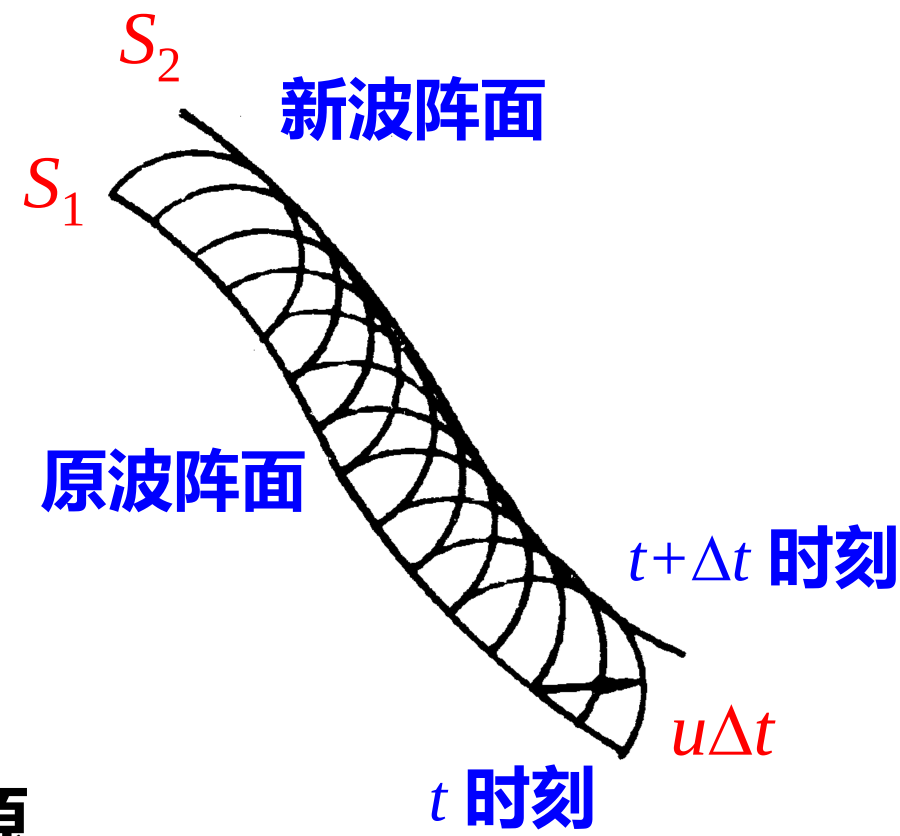
一、惠更斯原理

波在弹性介质中运动时,任一点P 的振动,将会引起邻近质点的振动。就此特征而言，振动着的P点与波源相比，除了在时间上有延迟外，并无其他区别。因此，P 可视为一个新的波源。1678年，惠更斯总结出了以其名字命名的惠更斯原理：

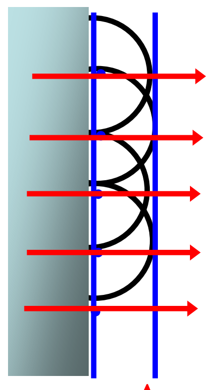
介质中任一波面上的各点，都可看成是产生球面子波的波源；在其后的任一时刻，这些子波的包络面构成新的波面。



障碍物的小孔成为新的波源

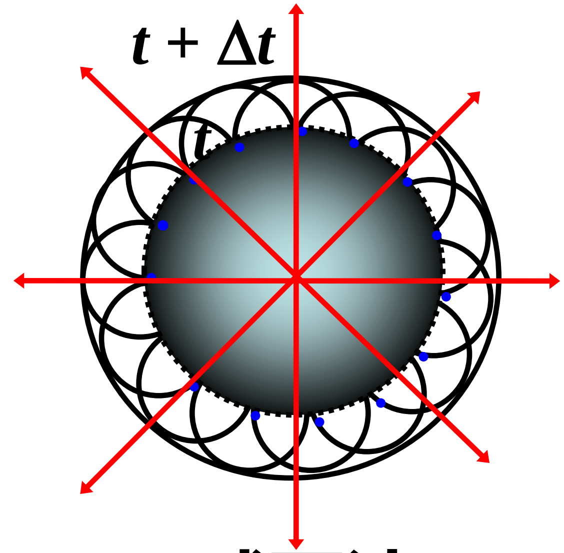


t 时刻波面　$t+\Delta t$ 时刻波面

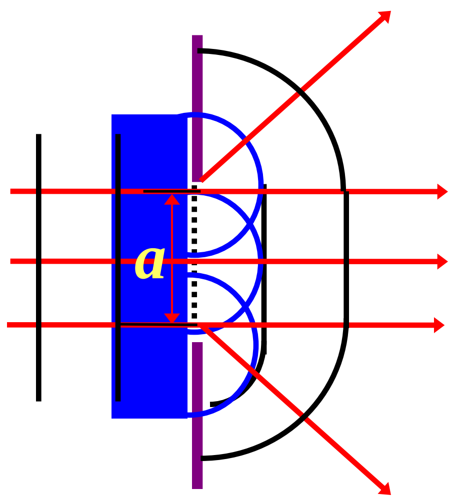


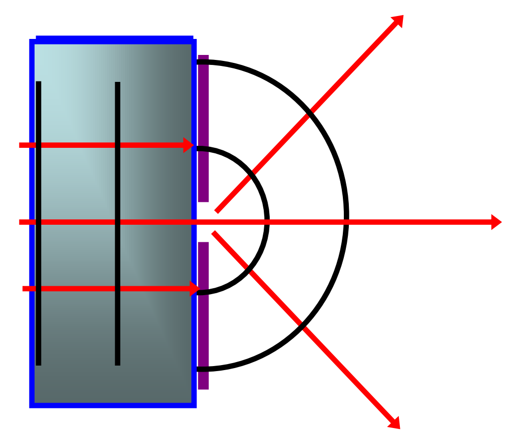
波传播方向

平面波



球面波

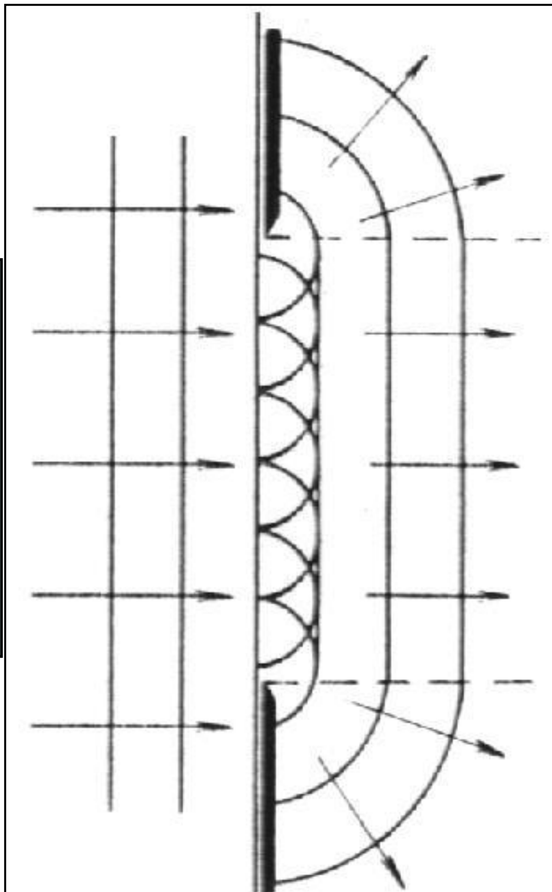




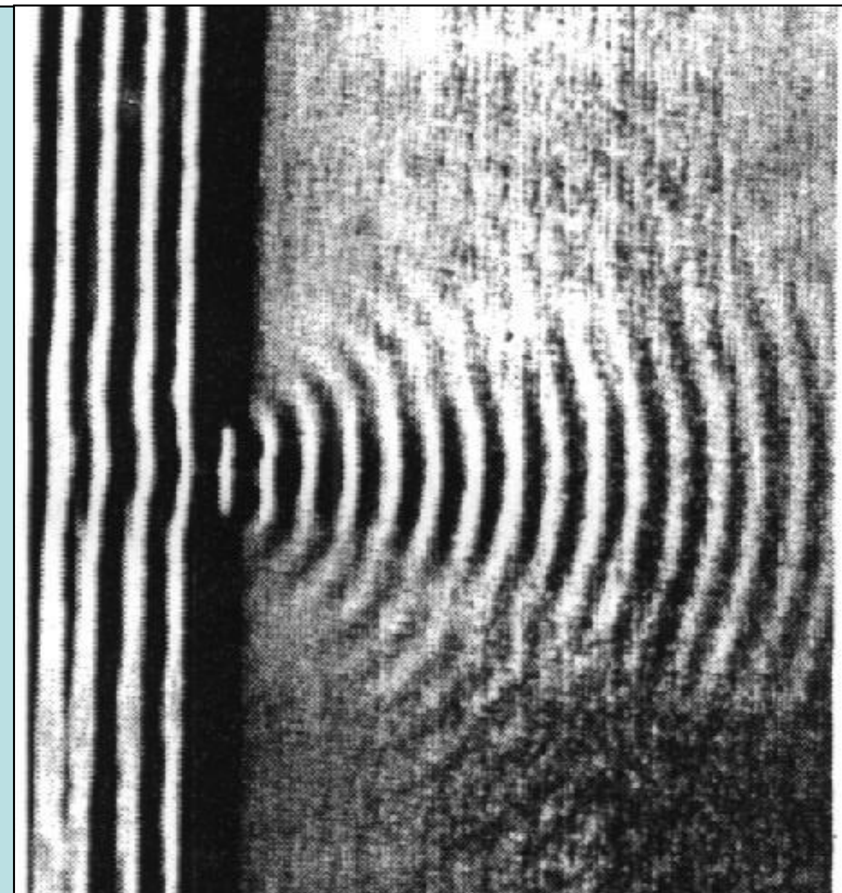
二、波的衍射(diffraction)

波在传播过程中遇到障碍物时，能绕过障碍物的边缘，在障碍物的阴影区内继续传播.

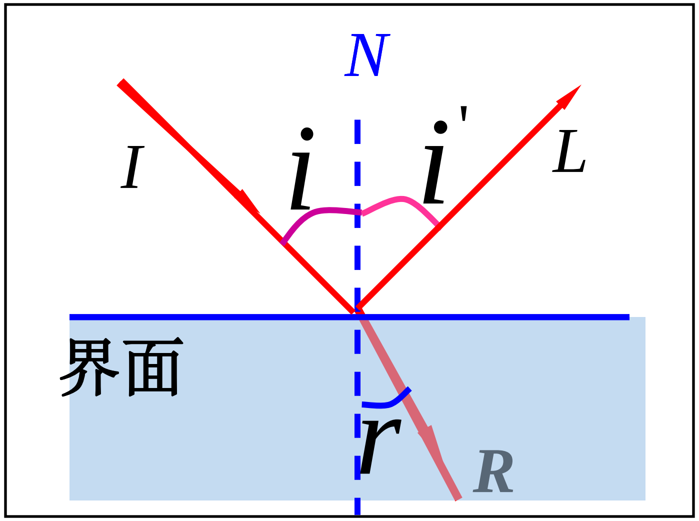
波的衍射



水波通过狭缝后的衍射



二、波的反射(reflection)和折射(refraction)

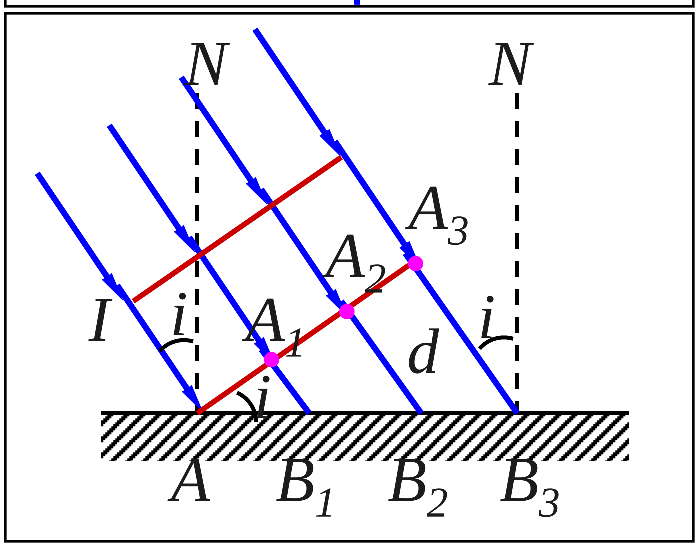


反射定律

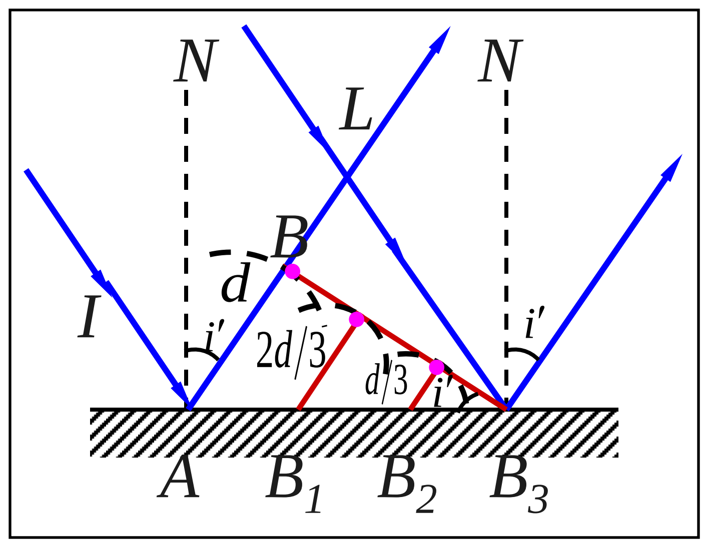
1）反射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

2）$i = i'$

用惠更斯原理证明.

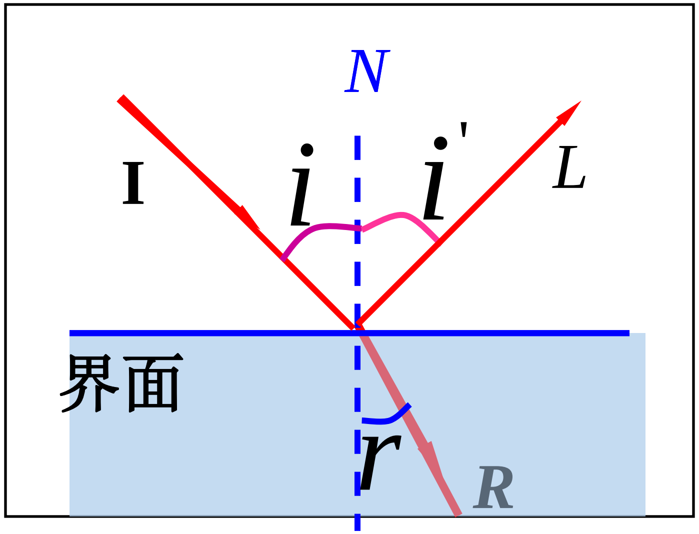


时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

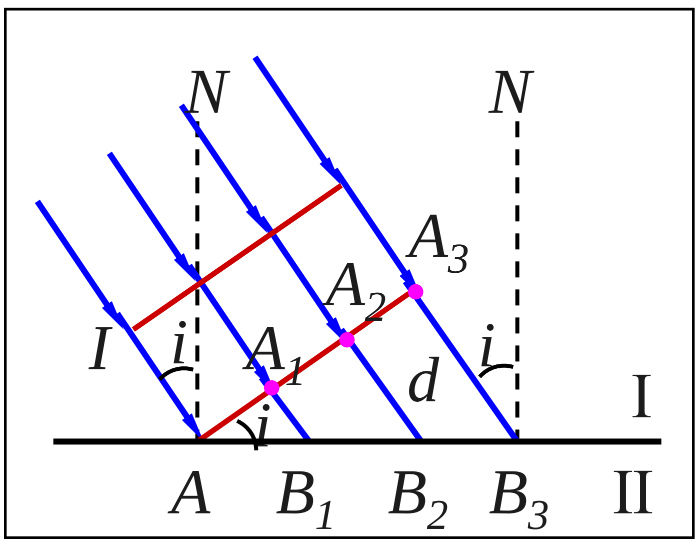
波的折射



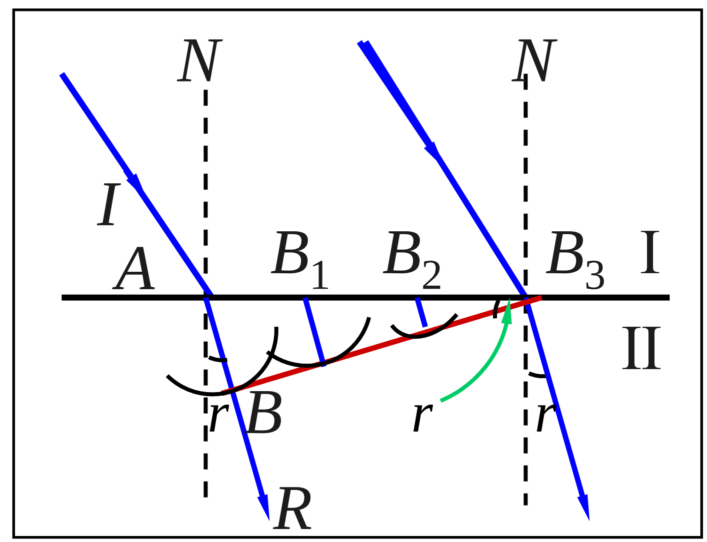
1）折射线、入射线和界面的法线在同一平面内；

2）$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{u_1}{u_2}$$

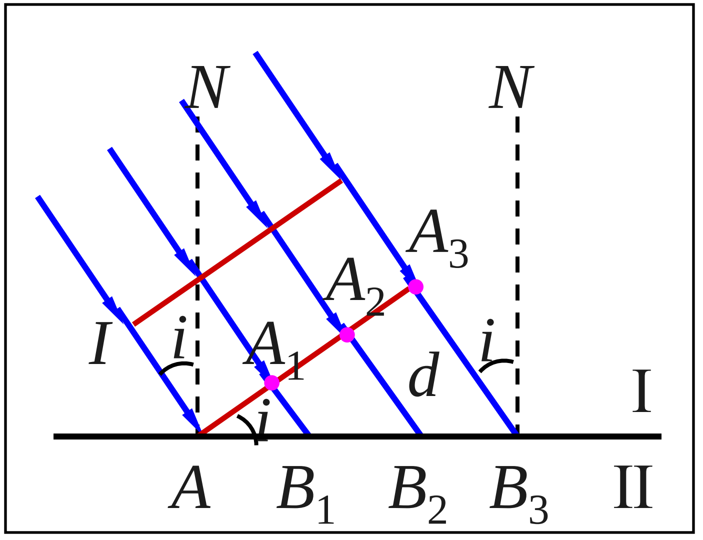
用惠更斯原理证明.



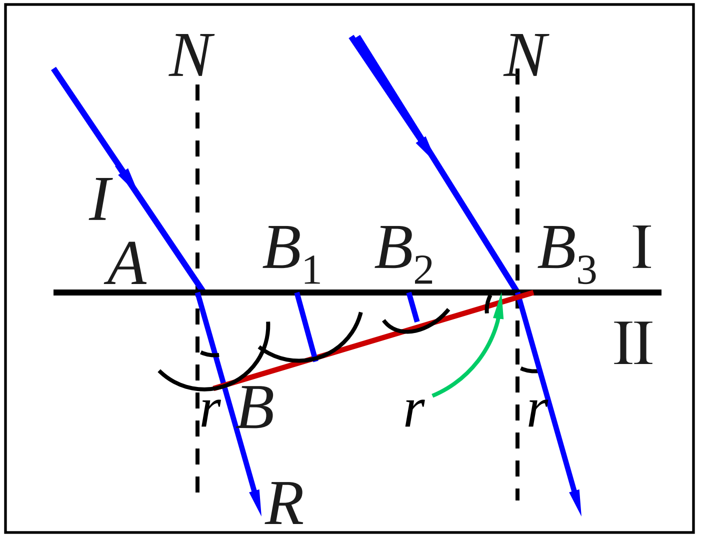
时刻 t



时刻 $t+\triangle t$



时刻 t



时刻 $t+\triangle t$

$$A_3B_3 = u_1\Delta t \qquad AB = u_2\Delta t$$

$$\angle A_3AB_3 = i \qquad \angle BB_3A = r$$

所以 $$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{A_3B_3}{AB} = \frac{u_1}{u_2}$$

§ 15-6 波的叠加原理 波的干涉

一 波的叠加原理(Superposition of waves)

[redacted]

➢ 几列波相遇之后， 每一列波都独立的保持自己原有的特征（ω、λ、A、振动方向等），并不因为其他波的存在而改变.

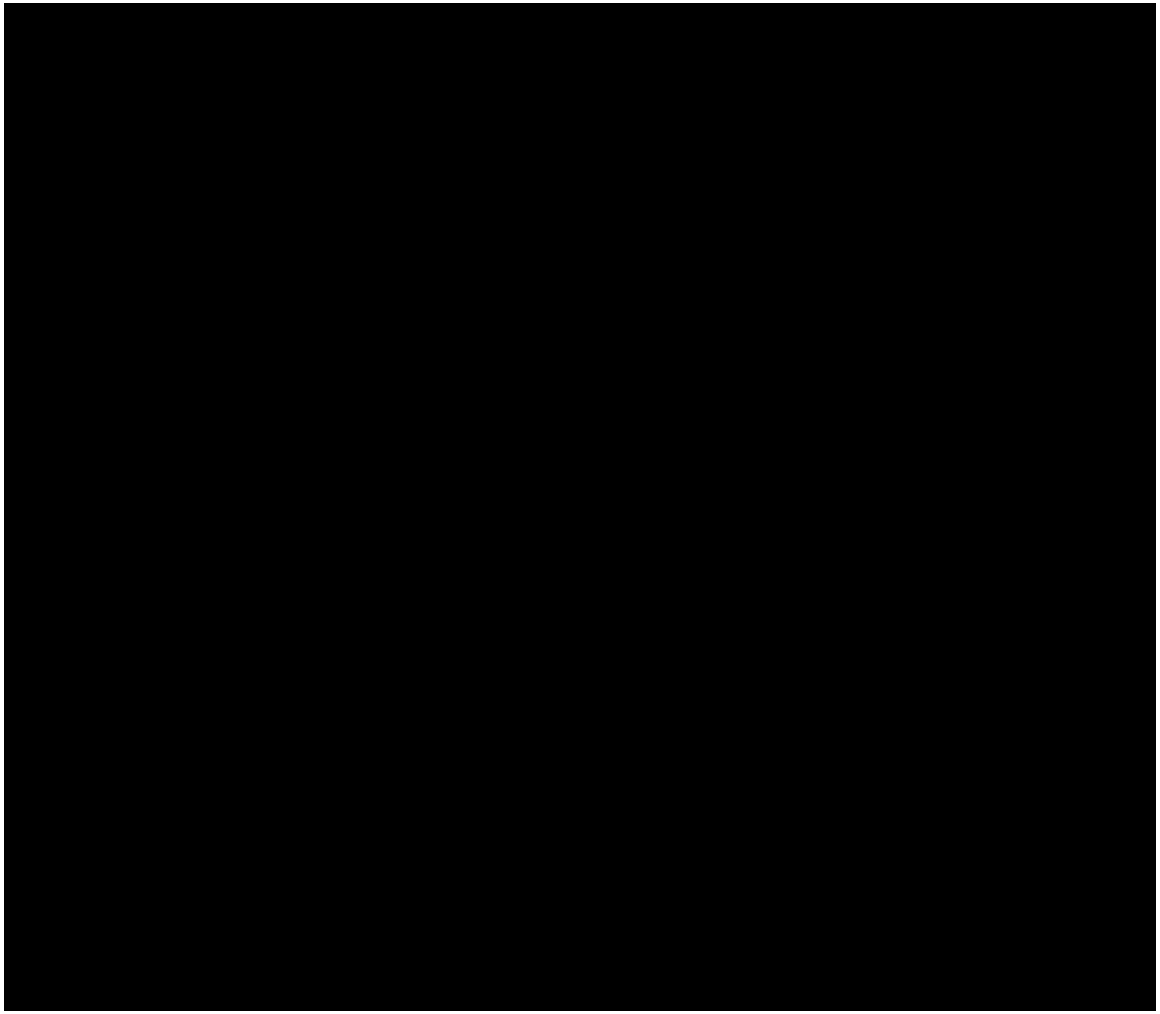
——波传播的独立性

➢ 任何一点的振动为各列波单独在该点引起振动的合振动.

—— 波 的 叠 加 原 理

细雨绵绵
独立传播

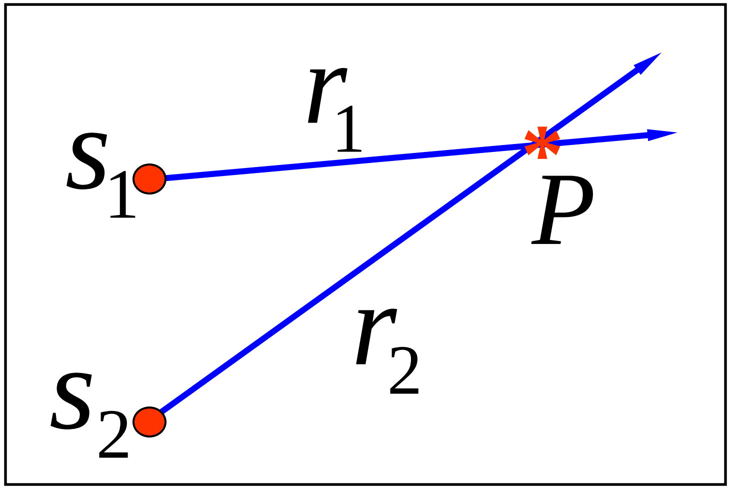
二　波的干涉(Interference)



频率相同、振动方向相同、相位差恒定的两列波相遇时，使某些点处振动始终加强，而使另一些点处振动始终减弱，呈现规律性分布的现象。

——波的干涉现象.

➢ 波的相干条件



1） 频率相同；

2） 振动方向相同；

3） 相位差恒定.

波源振动

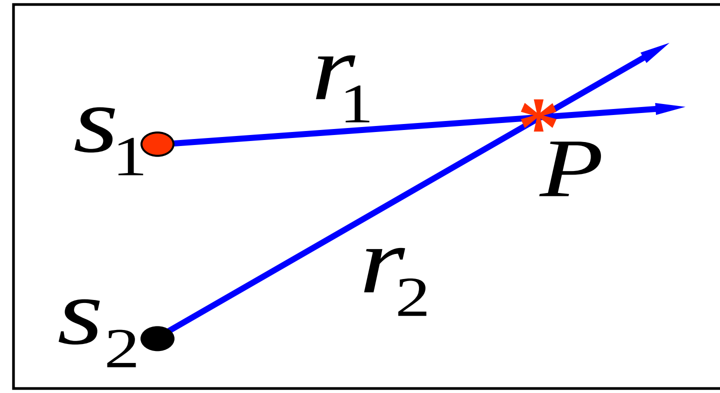
$$\begin{cases} y_{S_1} = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y_{S_2} = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

点P 的两个分振动

$$\begin{cases} y_1 = A_1\cos\left(\omega t + \boxed{\varphi_1 - 2\pi\dfrac{r_1}{\lambda}}\right) \\ y_2 = A_2\cos\left(\omega t + \boxed{\varphi_2 - 2\pi\dfrac{r_2}{\lambda}}\right) \end{cases}$$

点P 的两个分振动

$$\begin{cases} y_1 = A_1\cos(\omega t + \boxed{\varphi_1 - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}}) \\ y_2 = A_2\cos(\omega t + \boxed{\varphi_2 - 2\pi\frac{r_2}{\lambda}}) \end{cases}$$



合振动 $$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

振幅 $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi}$$

相位差 $$\Delta\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda}$$

常量

初相位 $$\tan\varphi = \frac{A_1\sin(\varphi_1 - \frac{2\pi\, r_1}{\lambda}) + A_2\sin(\varphi_2 - \frac{2\pi\, r_2}{\lambda})}{A_1\cos(\varphi_1 - \frac{2\pi\, r_1}{\lambda}) + A_2\cos(\varphi_2 - \frac{2\pi\, r_1}{\lambda})}$$

讨 论

$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\Phi} \\ \Delta\Phi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda} \end{cases}$$

1）合振动的振幅（波的强度）在空间各点的分布随位置而变。

2）干涉的极值条件

$$\Delta\Phi=2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$A=A_1+A_2$$

干涉极大点

$$\Delta\Phi=(2k+1)\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$

干涉极小点

$$\Delta\Phi=\text{其他} \quad \left|A_1-A_2\right|<A<A_1+A_2$$

$$\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\Phi} \\ \Delta\Phi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\dfrac{r_2-r_1}{\lambda} \end{cases}$$

若 $\varphi_1=\varphi_2$ 则 $\Delta\Phi=-2\pi\dfrac{\delta}{\lambda}$

波程差 $\delta=r_2-r_1$

3）
$$\begin{cases} \delta=\pm k\lambda \quad k=0,1,2,\cdots \\ A=A_1+A_2 \quad \boxed{\text{干涉极大点}} \\ \delta=\pm(k+1/2)\lambda \quad k=0,1,2,\cdots \\ A=|A_1-A_2| \quad \boxed{\text{干涉极小点}} \\ \delta=\text{其他} \quad |A_1-A_2|<A<A_1+A_2 \end{cases}$$

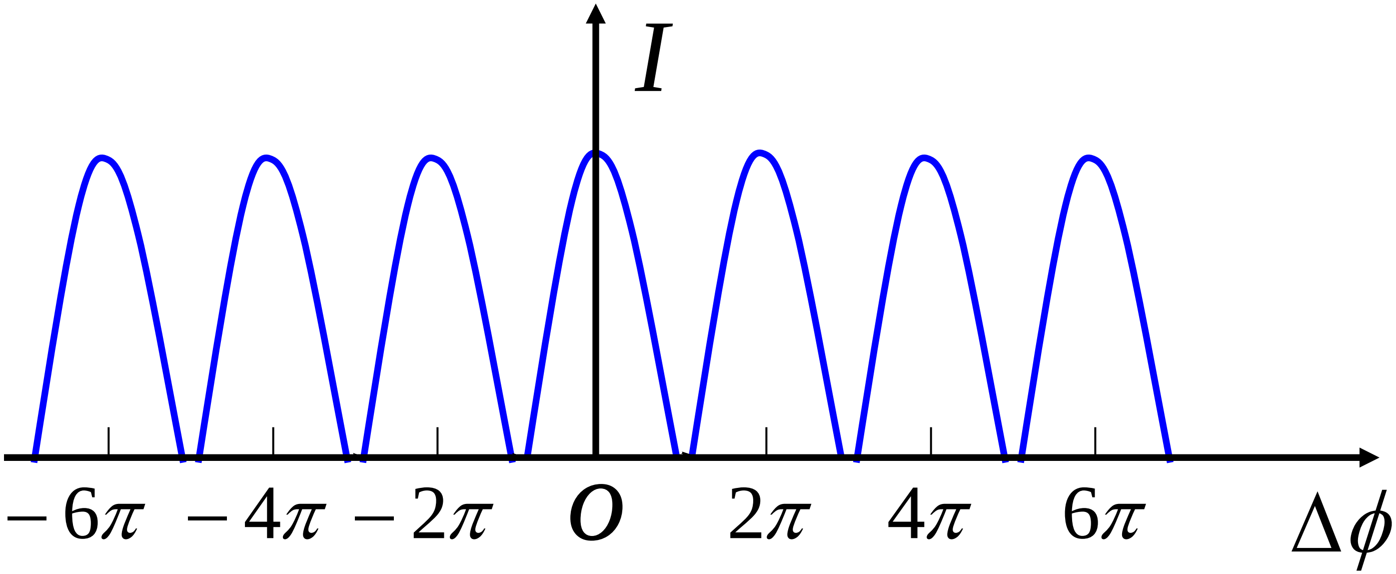
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\Phi$$

$$I = \rho u\omega^2 A^2/2$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\Phi$$

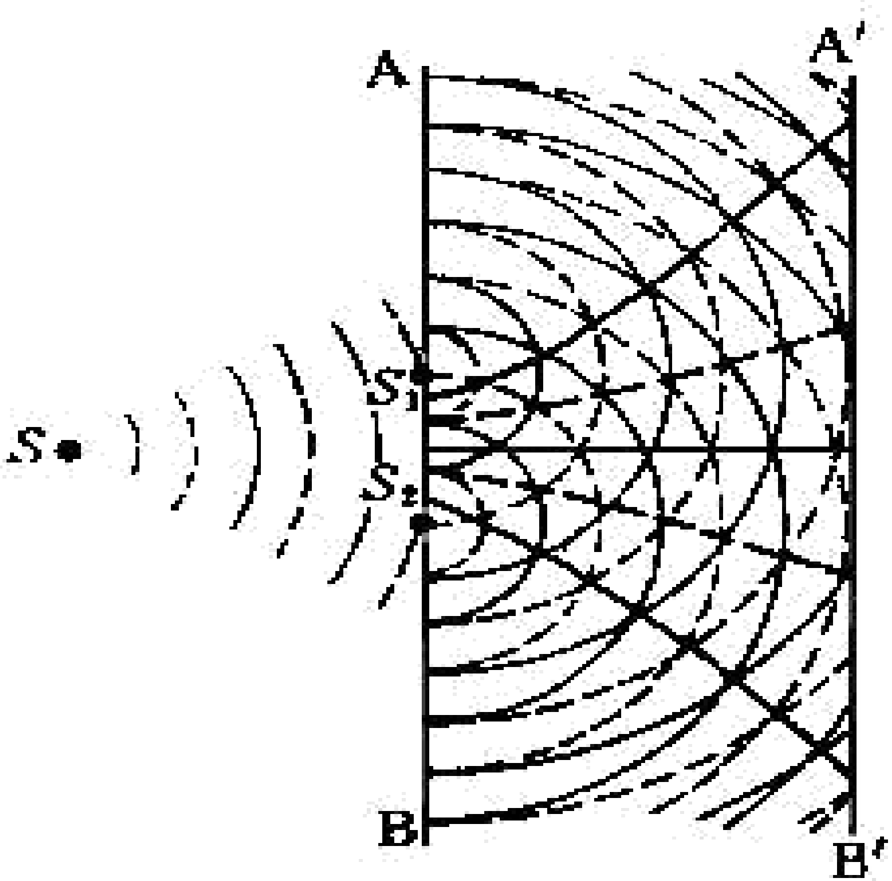
如果 $I_1 = I_2$，则叠加后，波的强度

$$I = 2I_1\left[1 + \cos\Delta\Phi\right] = 4I_1\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$



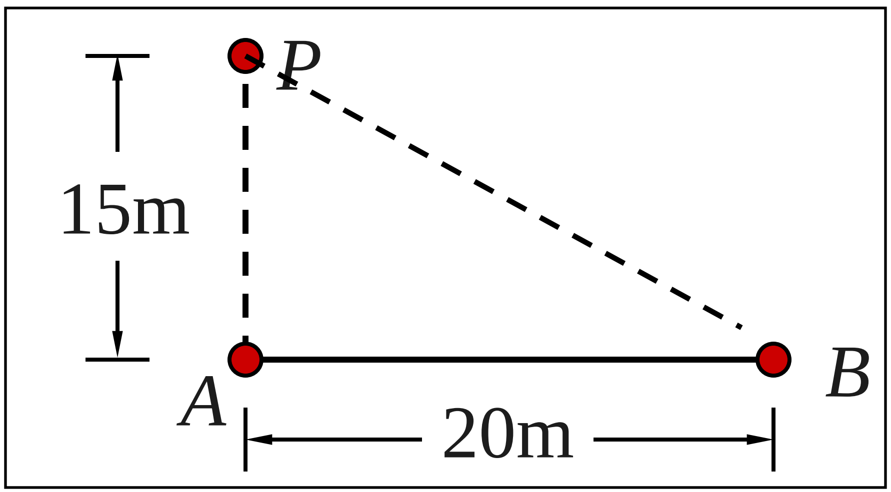
干涉现象的强度分布

同频率、同方向、相位差恒定的两列波,在相遇区域内,某些点处振动始终加强,另一些点处的振动始终减弱,这一现象称为波的干涉。



干涉现象的强度分布

【例】 如图所示，A、B 两点为同一介质中两相干波源.其振幅皆为5cm，频率皆为100Hz，但当点 A 为波峰时，点B 适为波谷.设波速为10m/s，试写出由A、B 发出的两列波传到点P 时干涉的结果.



【解】

$$BP = \sqrt{15^2 + 20^2}\,\mathrm{m} = 25\,\mathrm{m}$$

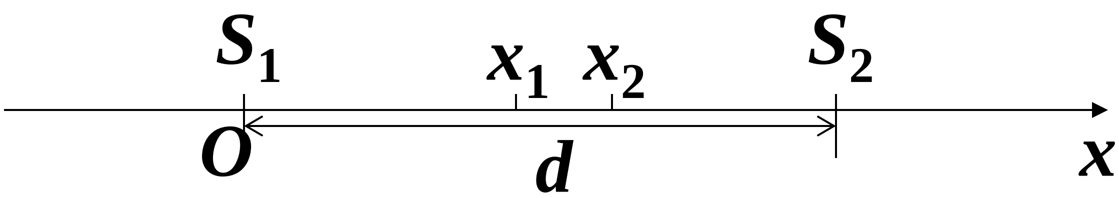
$$\lambda = \frac{u}{v} = \frac{10}{100}\,\mathrm{m} = 0.10\,\mathrm{m}$$

设 A 的相位较 B 超前，则 $\varphi_A - \varphi_B = \pi$.

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi\,\frac{BP - AP}{\lambda} = -\pi - 2\pi\,\frac{25 - 15}{0.1} = -201\pi$$

点P 合振幅 $$A = |A_1 - A_2| = 0$$

【例】两相干波源S_1和S_2的间距为d=30m，且都在x轴上，S_1位于原点O。设由两波源分别发出两列波沿x 轴传播，强度保持不变。x_1 =9m和 x_2=12m处的两点是相邻的两个因干涉而静止的点。求两波长和两波源间最小位相差。

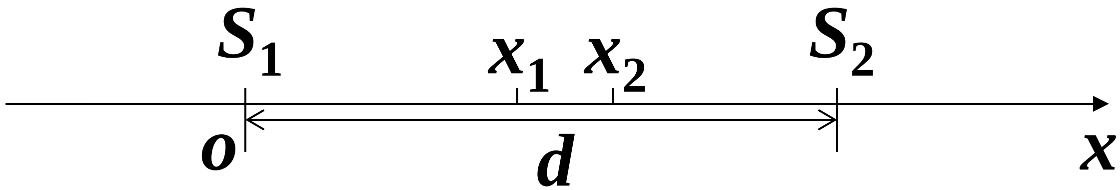


【解】

设S_1和S_2的振动位相分别为： φ_1 φ_2

x_1点的振动位相差：

$$[\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}(d-x_1)]-[\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}x_1]=(2k+1)\pi$$



x_2点的振动位相差：

$$[\varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda}(d - x_2)] - [\varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_2] = (2k+3)\pi$$

（2）

$$\frac{4\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2\pi$$

$$\lambda = 2(x_2 - x_1) = 2(12-9) = 6\text{m}$$

由（1）式

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi + \frac{2\pi}{\lambda}(d - 2x_1) \quad = (2k+5)\pi$$

k= -2，-3时位相差最小　　　$\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$

§15-7 驻波(Standing Wave)

一 驻波现象

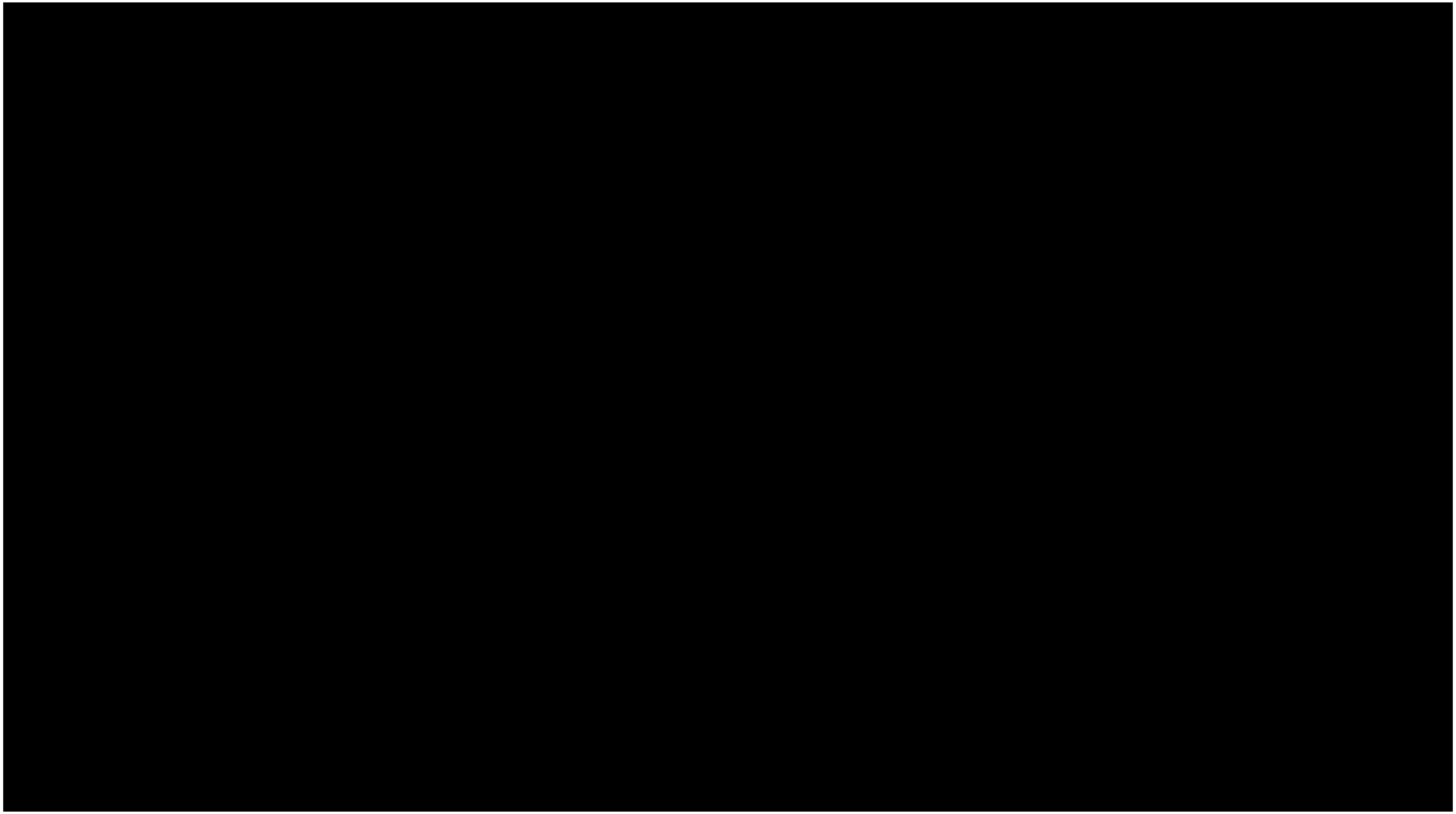
振幅、频率、传播速度都相同的两列相干波，在同一直线上沿[redacted]

(1)某些点始终不动—波节，某些点振动最大—波腹。

(2)波腹、波节等间隔稳定分布(波形没有跑动).

(3)媒质质元分段振动,各分段步调一致,振幅不同.

二　驻波的产生



同振幅、反方向、相干波（同频率、同振动方向、恒定相差）

三　驻波方程

正向　$$y_1 = A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})$$

负向　$$y_2 = A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A\cos 2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda}) + A\cos 2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda})$$

$$= \boxed{2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x}\,\underline{\cos\frac{2\pi}{T}t}$$

驻波方程

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

讨论

➢ 驻波方程 $y = 2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cos\dfrac{2\pi}{T}t$

1） 振幅 $\left|2A\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}x\right|$ 随 x 而异，与时间无关.

$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = \begin{cases} 1 & \dfrac{2\pi}{\lambda}x = k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ 0 & \dfrac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} k\dfrac{\lambda}{2} & k = 0, \pm 1, \cdots \quad A_{max} = 2A \\ (2k+1)\dfrac{\lambda}{4} & k = 0, \pm 1, \cdots \quad A_{min} = 0 \end{cases}$$

波腹

波节

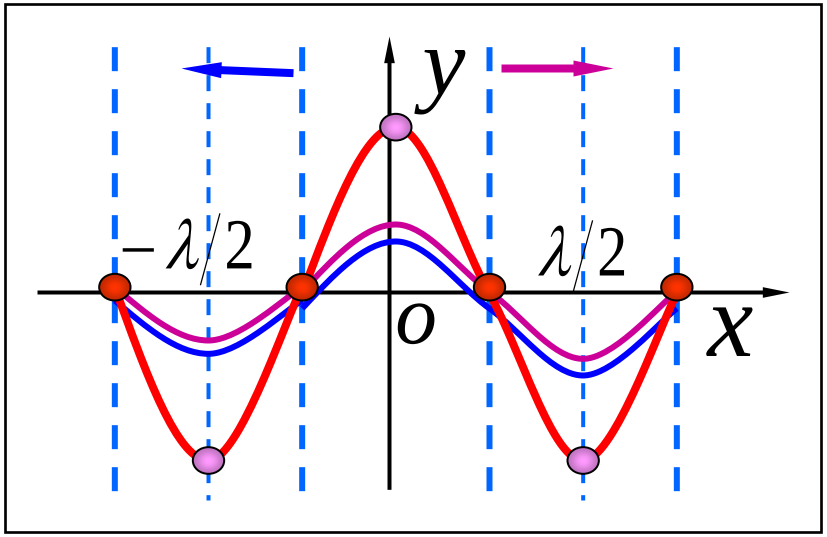
相邻波腹（节）间距 $= \lambda/2$

相邻波腹和波节间距 $= \lambda/4$

2）相邻两波节之间质点振动同相位，任一波节两侧振动相位相反，在波节处产生 π 的相位跃变．（与行波不同，无相位的传播）．

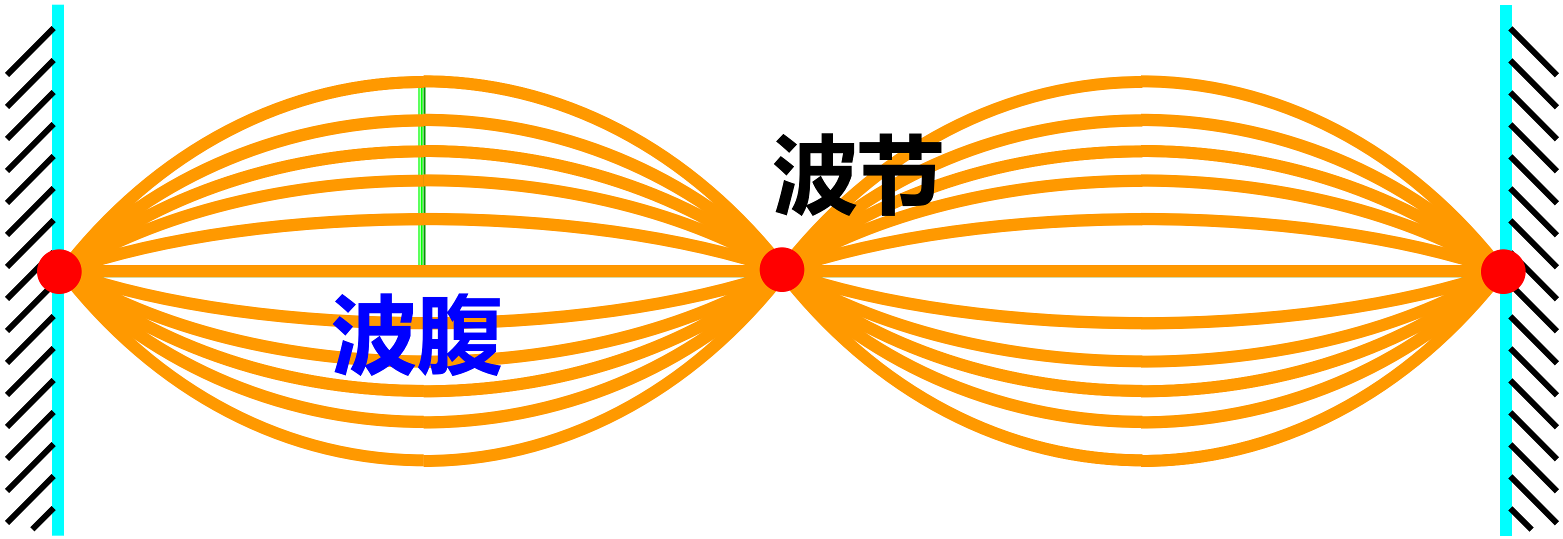
$$y = 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$$

例 $x = \pm \dfrac{\lambda}{4}$ 为波节



$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} > 0, \quad -\frac{\lambda}{4} < x < \frac{\lambda}{4}, \quad y = 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \nu t$$

$$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} < 0, \quad \frac{\lambda}{4} < x < \frac{3\lambda}{4}, \quad y = \left| 2A\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| \cos(2\pi \nu t + \pi)$$



各质点位移达到最大时，动能为零，势能不为零。在波节处相对形变最大，势能最大；在波腹处相对形变最小，势能最小。势能集中在波节。

当各质点回到平衡位置时，全部势能为零；动能最大。动能集中在波腹。

能量从波腹传到波节，又从波节传到波腹，往复循环，能量没有定向传播。

四　半波损失（half-wave loss)

波疏介质 ρu 较小

波密介质 ρu 较大

当波从波疏介质垂直入射到波密介质， 被反射到波疏介质时形成波节。 入射波与反射波在此处的相位时时相反, 即反射波在分界处产生π的相位突变，相当于出现了半个波长λ/2的波程差，称半波损失.

当波从波密介质垂直入射到波疏介质， 被反射到波密介质时形成**波腹**. 入射波与反射波在此处的相位时时**相同**，即反射波在分界处**不**产生相位**跃变**.

五、弦线上的驻波

[redacted]

最低频率ν_1称为基频

频率ν_n为ν_1的**n**倍，称为**n**次谐频

两端固定的弦线形成驻波时，波长λ_n 和弦线长l 应满足

$$\boxed{l = n\frac{\lambda_n}{2}}$$

$$\nu_n = n\frac{u}{2l} \qquad n = 1,2,\cdots$$

这些频率称为弦振动的本征频率

每一本征频率对应于弦的一种可能振动方式

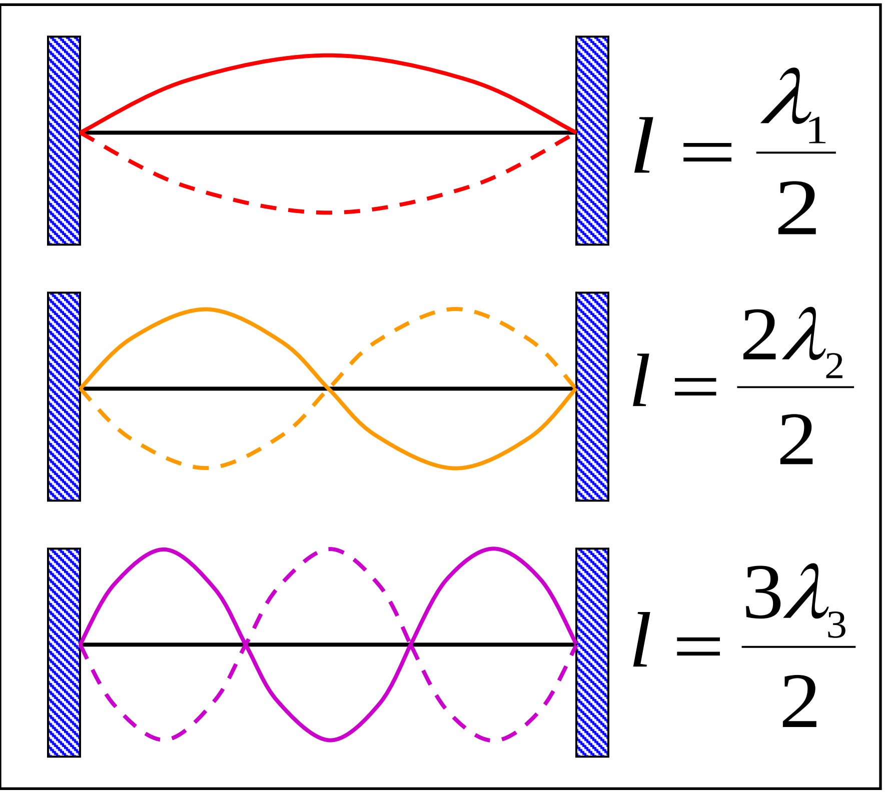
由此频率决定的各种振动方式称为弦线振动的简正模式.

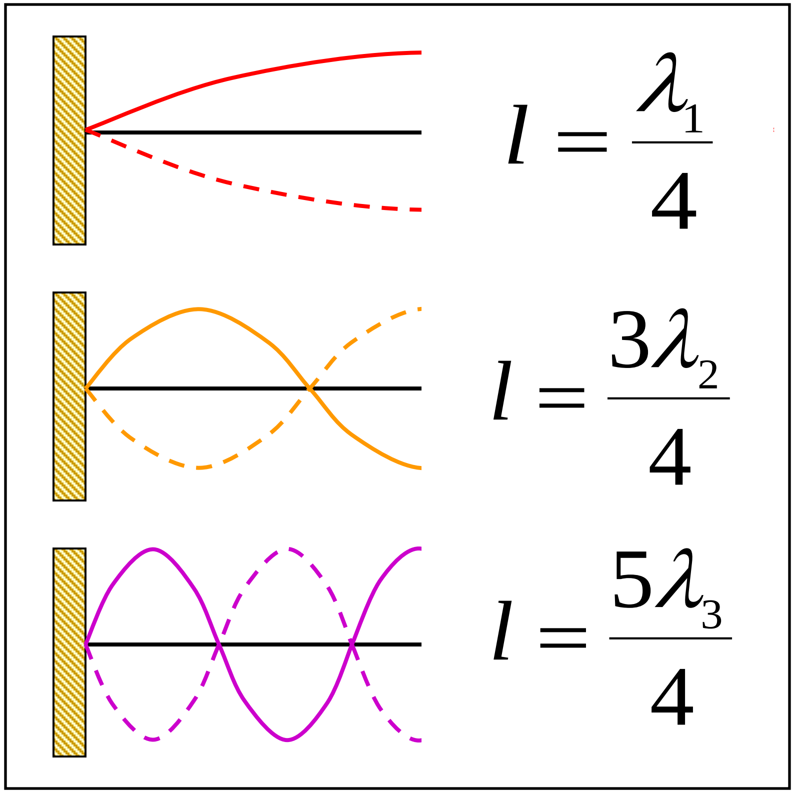
两端固定的弦振动的简正模式

一端固定一端自由的弦振动的简正模式：固定端—波节，自由端—波腹

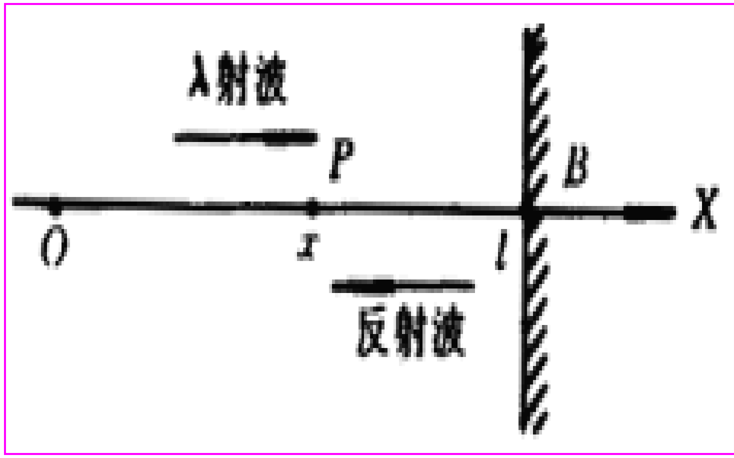
$$l = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$

$$l = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1,2,\cdots$$





【例】如图所示，有一平面简谐波 $y_A = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$ 向右传播，在距坐标原点O为l=5λ的B点被垂直界面反射，设反射处有半波损失，反射波的振幅近似等于入射波振幅。试求：



(1)反射波的表达式；

(2)驻波的表达式；

(3)在原点O到反射点B之间各个波节和波腹的坐标。

【解】(1) 首先要写出反射波在B的振动方程。依照题意，入射波在B点的振动方程为

$$y_{入B} = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda})$$

由于在B点反射时有半波损失，所有反射波在B点的振动方程为

$$y_{反B} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{l}{\lambda})-\pi]$$

在反射波行进方向上任取一点P，其坐标为*x*，P点的振动比B点的振动相位落后2π/(*l*-*x*)/λ，由此可得反射波的表达式为

$$y_{反} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{l}{\lambda})-\pi-2\pi\frac{(l-x)}{\lambda}]$$

将$l=5\lambda$代入上式得

$$y_{反} = A\cos(2\pi\frac{t}{T}-2l\pi-2\pi\frac{x}{\lambda})$$

$$=-A\cos 2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})$$

（2）驻波的表达式为

$$y = y_{入} + y_{反} = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}) - A\cos 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$$

$$= -2A\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\sin\frac{2\pi}{T}t$$

(3)由

$$\sin\frac{2\pi}{\lambda}x = 0$$

得波节坐标为 $x = \frac{k}{2}\lambda \qquad k = 0,1,2,\cdots 10$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{5\lambda}{2}, 3\lambda, \frac{7\lambda}{2}, 4\lambda, \frac{9\lambda}{2}, 5\lambda.$$

由

$$\left|\sin\frac{2\pi}{\lambda}x\right| = 1$$

得波腹坐标为 $x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \frac{7\lambda}{4}, \frac{9\lambda}{4}, \frac{11\lambda}{4}, \frac{13\lambda}{4}, \frac{15\lambda}{4}, \frac{17\lambda}{4}, \frac{19\lambda}{4}.$$

【例】 两人各执长为 l 的绳的一端, 以相同的角频率和振幅在绳上激起振动，右端的人的振动比左端的人的振动相位超前ϕ，试以绳的中点为坐标原点描写合成驻波。由于绳很长，不考虑反射。绳上的波速设为u。

【解】 左端的振动 $y_1 = A\cos\omega t$

右端的振动 $y_2 = A\cos(\omega t + \phi)$

右行波表达式：$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t - x/u\right) + \phi_1\right]$

左行波表达式：$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t + x/u\right) + \phi_2\right]$

当 $x = -l/2$ 时，$y_1 = A\cos\omega t$，即

$$A\cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{2u}\right) + \phi_1\right] = A\cos\omega t \Rightarrow \phi_1 = -\frac{\omega l}{2u}$$

当 $x = l/2$ 时，$y_2 = A\cos(\omega t + \phi)$，即

$$A\cos\left[\omega\left(t + \frac{l}{2u}\right) + \phi_2\right] = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \quad \phi_2 = \phi - \frac{\omega l}{2u}$$

右行波、左行波表达式：

$$y_1 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right)\right]$$

$$y_2 = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right) + \phi\right]$$

合成波 $y = y_1 + y_2 = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right)\right]$

$$+ A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{l}{2u}\right) + \phi\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = 2A\cos\left(\frac{\omega x}{u} + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\omega l}{2u} + \frac{\phi}{2}\right)$$

当ϕ=0，x=0 处为波腹;当ϕ=π时，x =0 处为波节。

§15-8 多普勒效应

一、多普勒效应

因波源或观察者相对于介质运动，而使观察者接受到的频率依赖于**波源**或**观察者**运动的现象。

·问题

假定波源与观察者在同一条直线上，

$\boldsymbol{v}_R$——观察者相对于介质的运动速度

$\boldsymbol{v}_S$——波源相对于介质的运动速度

$\boldsymbol{u}$——声波在介质中的传播速度

ν_S——波源的频率

ν_R——观察者接收到的频率

ν_W——波的频率

$$\nu_R = \frac{\nu_{WR}}{\lambda}$$

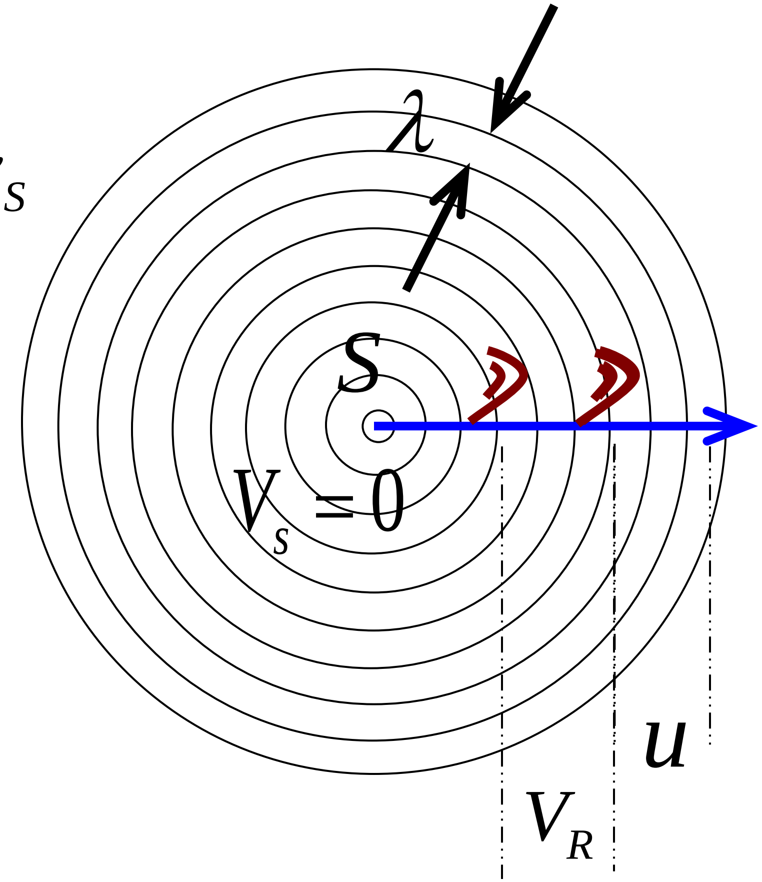
1，波源不动，观察者相对介质运动

若观察者以速度v_R向着波源运动

$$\nu_R = \frac{u+v_R}{\lambda} = \frac{u+v_R}{u/\nu} = \frac{u+v_R}{u}\nu_S$$

$$\boxed{\nu_R = \frac{u+v_R}{u}\nu_S}$$

频率升高



若观察者以速度v_R离开波源运动，同理可得观察者接受到的频率：

$$\boxed{\nu_R = \frac{u-v_R}{u}\nu_S}$$

频率降低

2，观察者不动，波源相对介质运动

若波源静止时媒质中的波长为λ

$$\lambda = uT$$

波源运动，在介质中的波长：

$$\lambda_b = \lambda - v_s T = (u - v_s)T = \frac{u - v_s}{\nu}$$

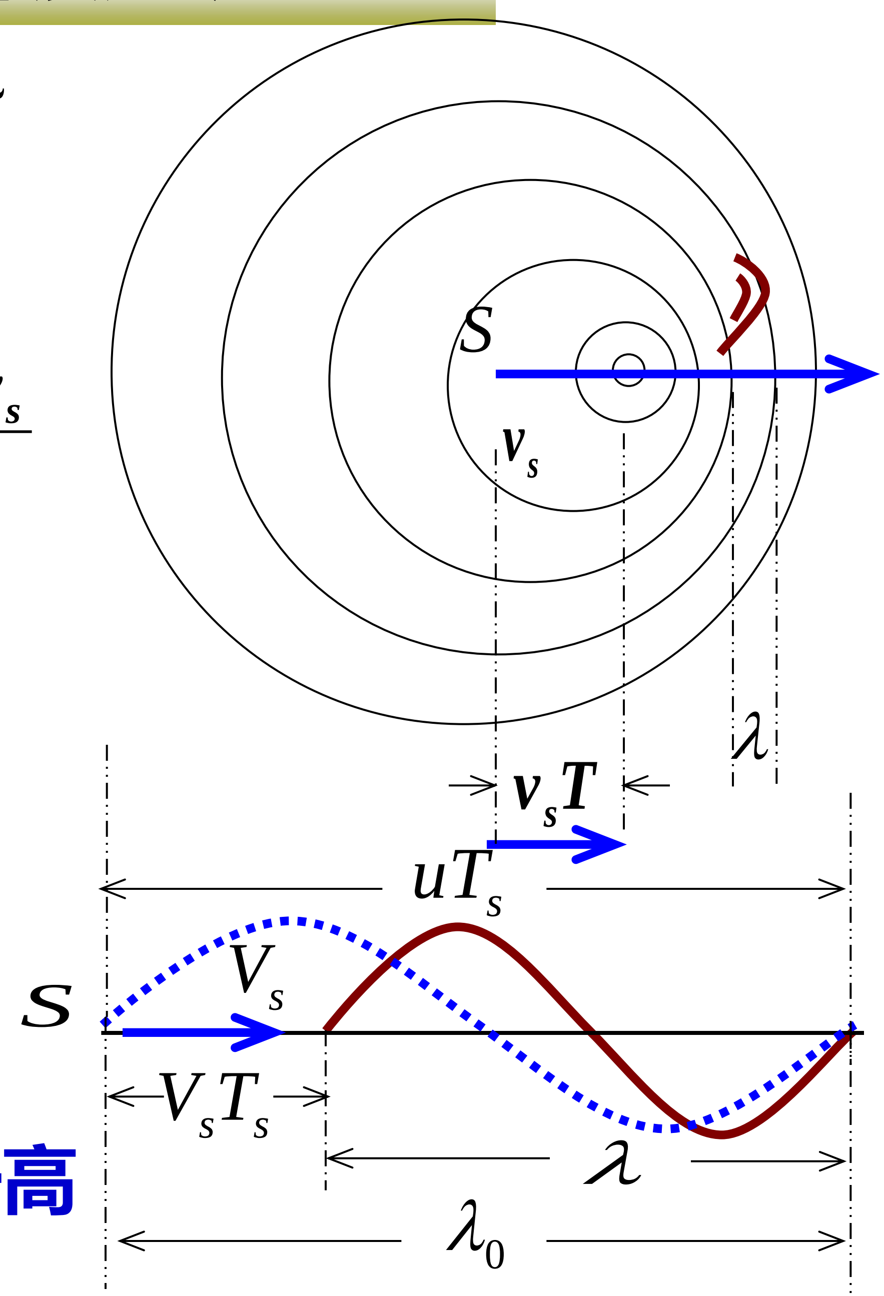
此时波的频率为：

$$\nu = \frac{u}{\lambda_b} = \frac{u}{u - v_s}\nu_S$$

由于观察者静止，所以他接受到的频率就是波的频率：

$$\nu_R = \frac{u}{u - v_s}\nu_S$$

频率升高



当波源以速度v_s远离观察者运动时，可得观察者接受到的频率：

$$\nu_R = \frac{u}{u + v_s}\nu_S$$

频率降低

3，波源和观察者同时相对于介质运动

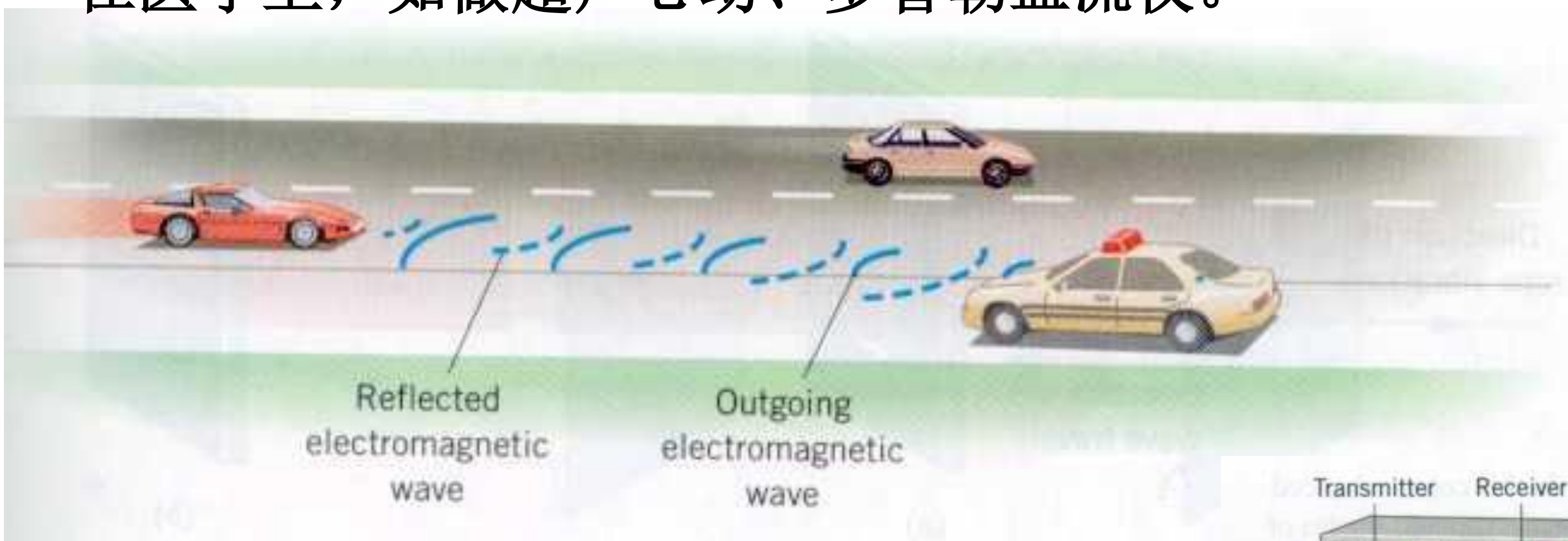
$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_s}\nu_S$$

v_R：观察者向着波源运动时为正，观察者背着波源运动时为负；

v_s：波源向着观察者运动时为正，波源背着观察者运动时为负。

波源与观察者相互接近时，频率升高；
波源与观察者彼此分离时，频率降低。

•利用声波的多普勒效应可以测定流体的流速，振动体的振动和潜艇的速度
•用来报警和监测车速
•在医学上，如做超声心动、多普勒血流仪。



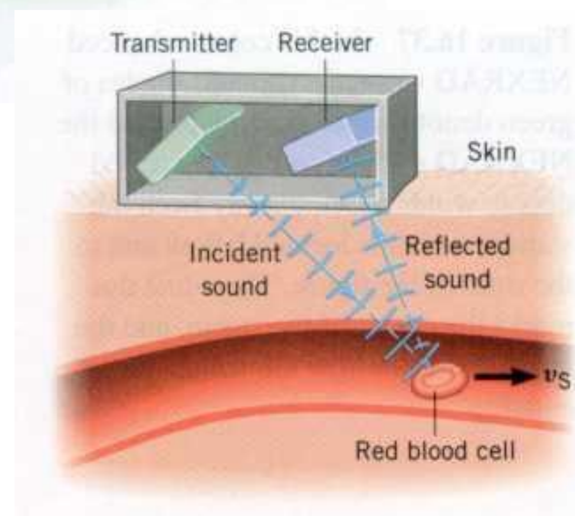


Figure A Doppler flow meter measures the speed of red blood cells.

【例】车上一警笛发射频率为1500Hz的声波。该车正以20m· s^{-1}的速度向某方向运动，某人以的5m· s^{-1}速度跟踪其后，已知空气中的声速为330 m· s^{-1}，求该人听到的警笛发声频率以及在警笛后方空气中声波的波长。

解：设没有风。根据题目条件已知ν_S =1500Hz，u = 330m· s^{-1}，观察者向着警笛运动，应取v_R = 5m· s^{-1}，而警笛背着观察者运动，应取v_s = -20m· s^{-1}。因而该人听到的频率为

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_s}\nu_S = \frac{330+5}{330+20}\times 1500 = 1436Hz$$

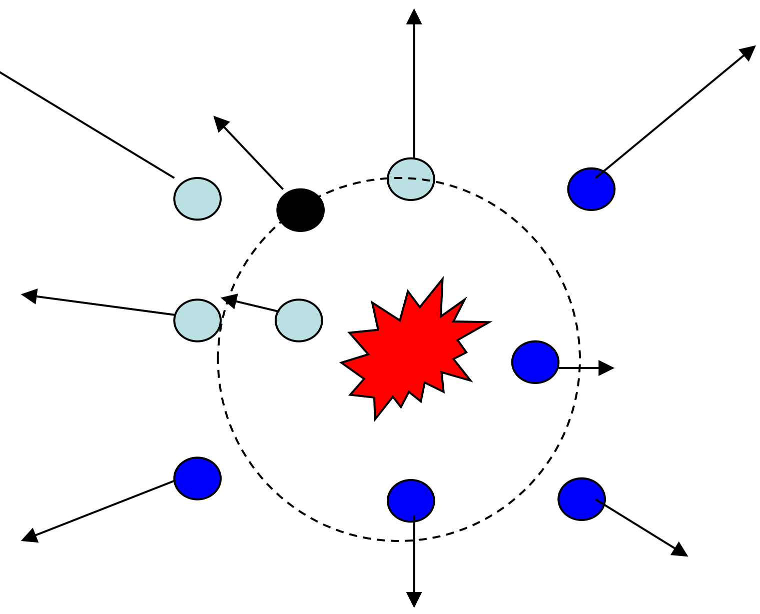
警笛后方的空气并不随波前进，相当于v_0=0，因此其后方空气中声波的频率为

$$\nu' = \frac{u}{u - v_s}\nu_S = \frac{330}{330+20}\times 1500 = 1414Hz$$

相应的波长为

$$\lambda' = \frac{u}{\nu'} = \frac{330}{1414} = 0.233m$$

星体光谱的红移



光波也有多普勒效应.

光波的传播不依靠媒质，要从相对论来讨论其多普勒效应的原理（略）。

但是，定性的结论也是一样的：

相互接近时 $\nu_R > \nu_S$ 接收频率变高；

相互远离时 $\nu_R < \nu_S$ 接收频率变低（红移）。

发现：星体光谱都有红移现象---- 宇宙在膨胀