第十四章

本章作业

3，7，11，
12，13，18，
22，23，24，
26，38，40

§14-1　简谐振动的描述

一、简谐振动的描述

物体在同一路径的一定位置附近作重复往返运动
——机械振动。

特点：有平衡点，且具有重复性。

周期性振动—在 T时间内运动状态能完全重复。

非周期性振动—在 T时间内运动状态不能完全重复。

形式包括：机械振动　电磁振动　…

广义振动：任一物理量(如位移、电 流等)
在某一数值附近反复变化。

- 机械振动分类

按振动规律分：简谐、非简谐、随机振动。

按产生振动原因分：自由、受迫、自激、参变振动。

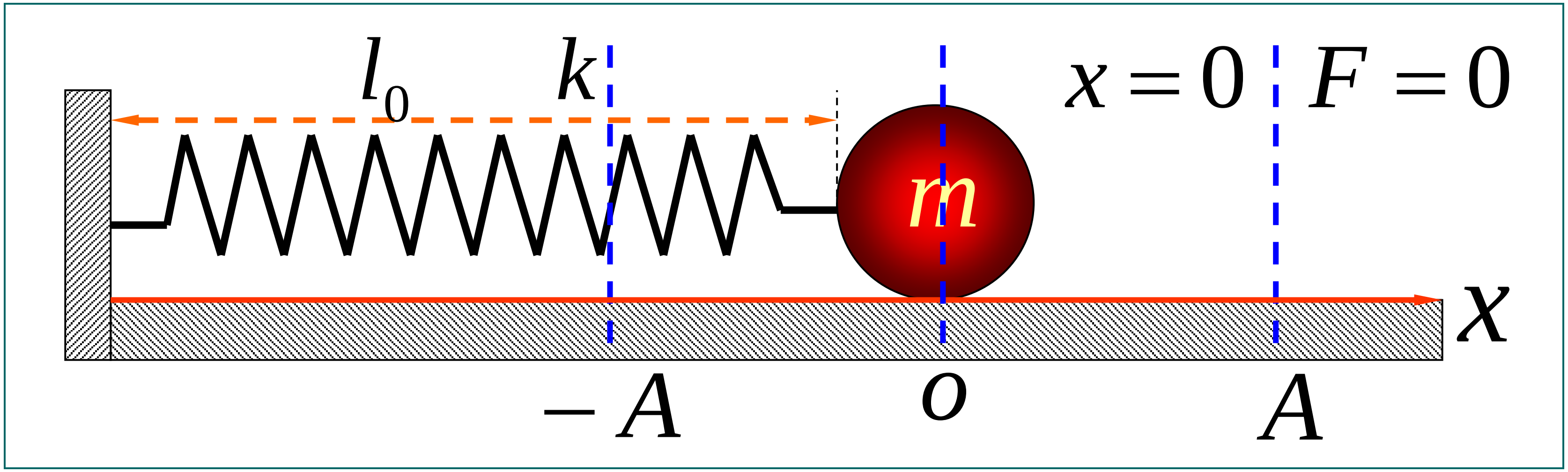
按振动位移分：角振动、线振动。

按系统参数特征分：线性、非线性振动。

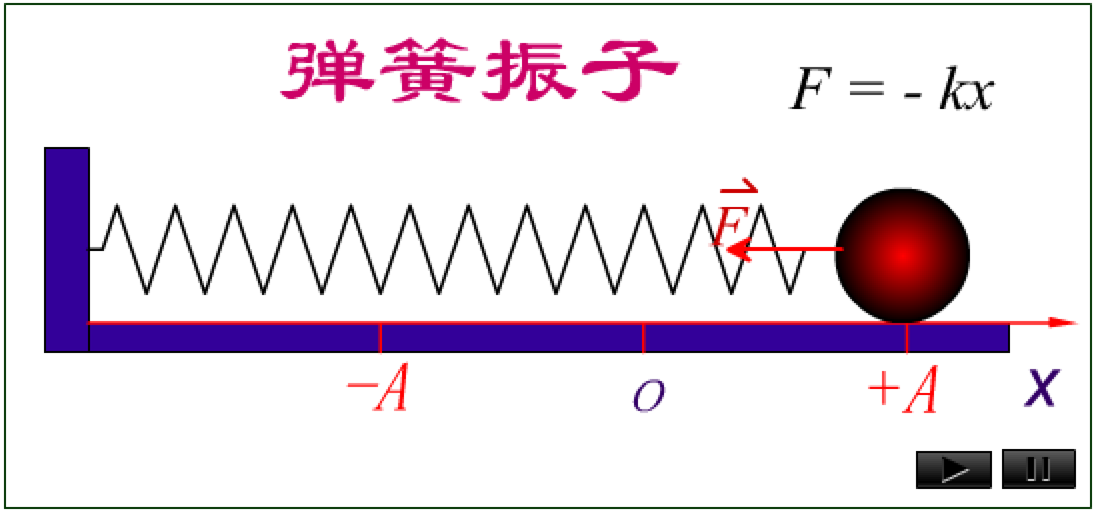
- 受迫振动
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动（简谐振动）

简谐运动 $\xleftrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

谐振子　作简谐运动的物体.



l_0
k
$x=0$
$F=0$
m
x
$-A$
o
A



弹簧振子
$F = -kx$
$\vec{F}$
$-A$
o
$+A$
x

以弹簧振子为例

系统的位移按

$$x(t) = A\cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_o)$$

的规律运动，其中ω_0由系统自身决定。

简谐振动的运动方程，简称谐振方程。

A 振幅， 振动中最大位移量

$\Phi = \omega t + \varphi$ ----简谐振动的相位

φ ----简谐振动的初相位

$$\omega = \frac{d\Phi}{dt}$$ ----简谐振动的角频率

周期T: **物体作一次完全振动所经历的时间**

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos[\omega(t+T)+\varphi] = A\cos(\omega t + \omega T + \varphi)$$

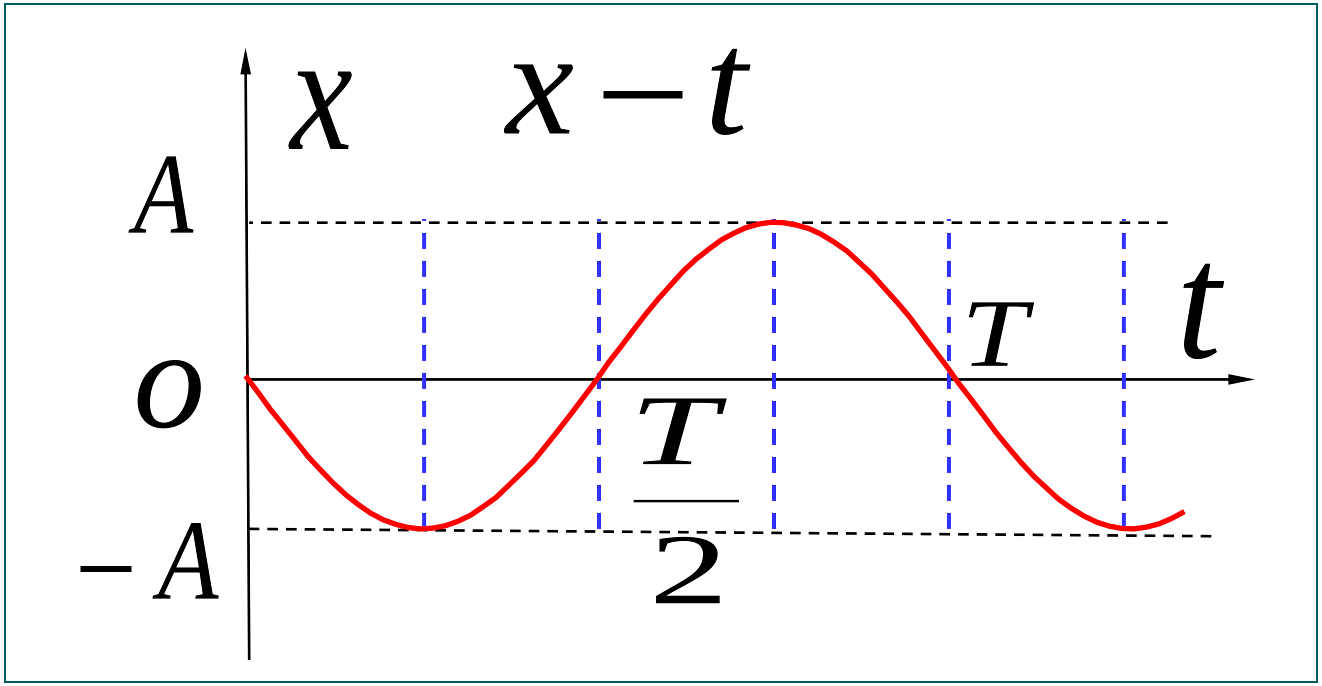
所以 $\omega T = 2\pi$ $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

振动频率ν，单位时间内振动的次数。

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关

谐振曲线



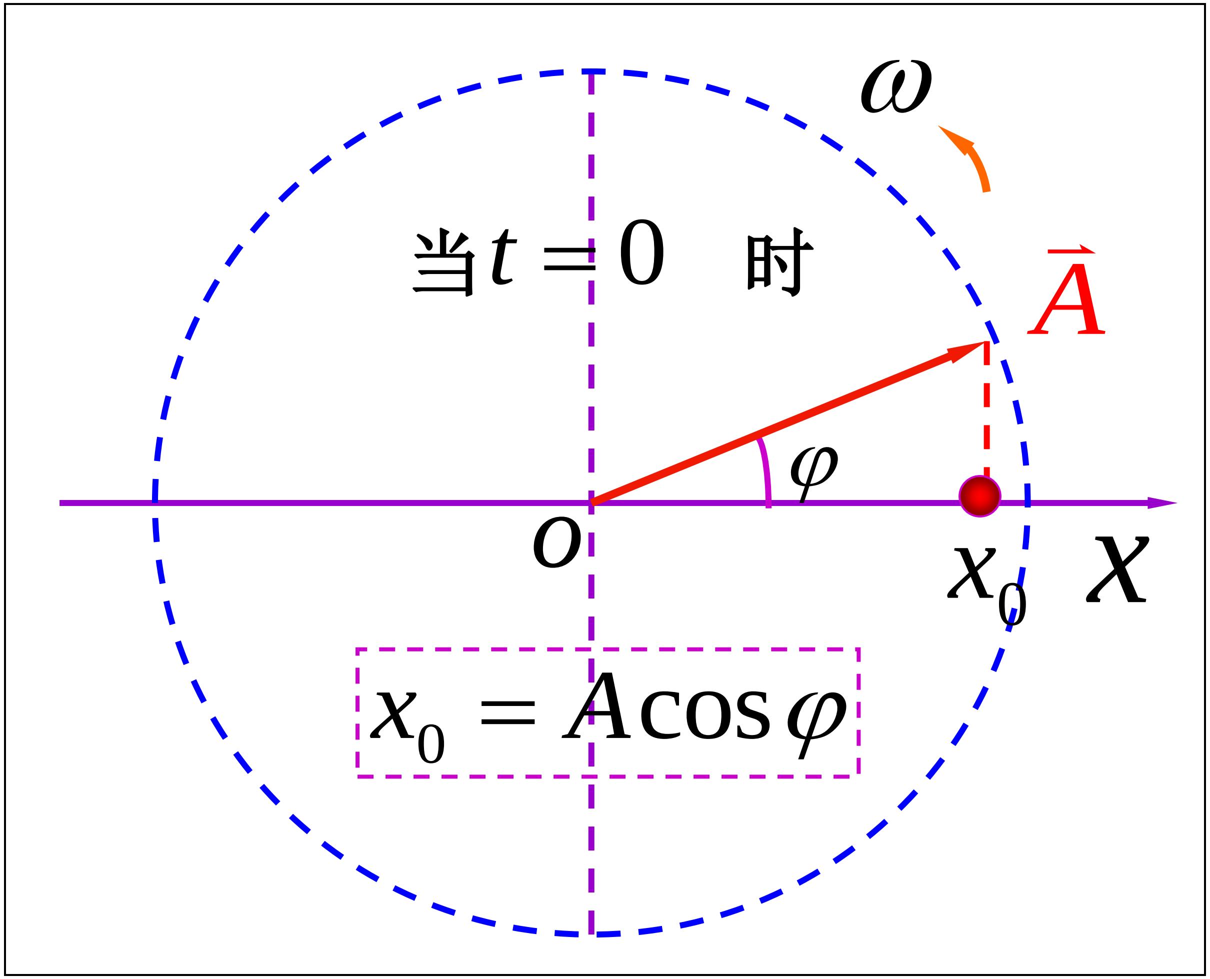
$$A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0+2\pi n)$$

$$=A\cos[\omega_0(t+\frac{2\pi}{\omega_0}n)+\varphi_0]$$

$$=A\cos[\omega_0(t+nT)+\varphi_0]$$

旋转矢量(rotating vector)

考虑做匀速圆周运动物体的位置矢量



位置矢量的 x 分量

初始时刻

$$\theta = \varphi$$

$$x_0 = A\cos\varphi$$

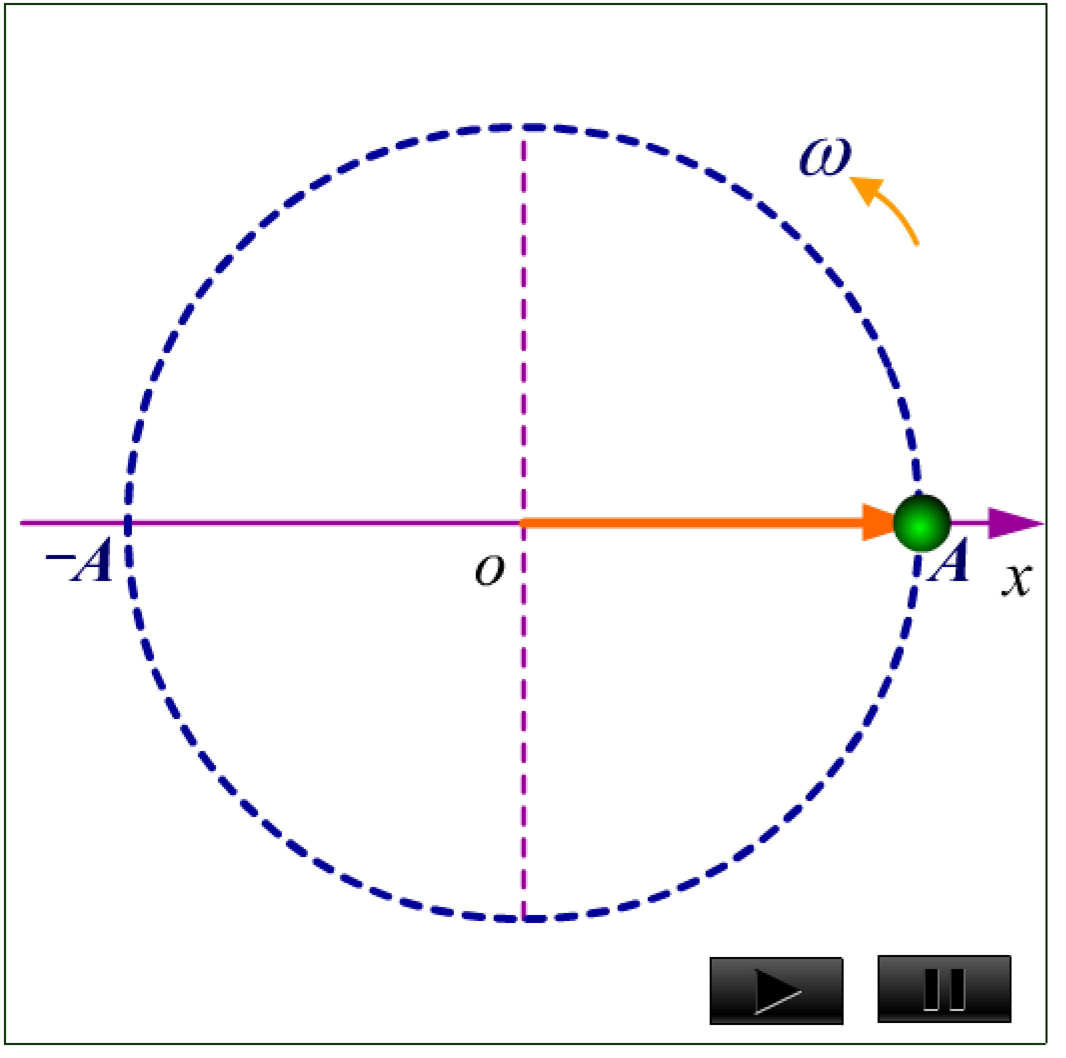
任意时刻 t

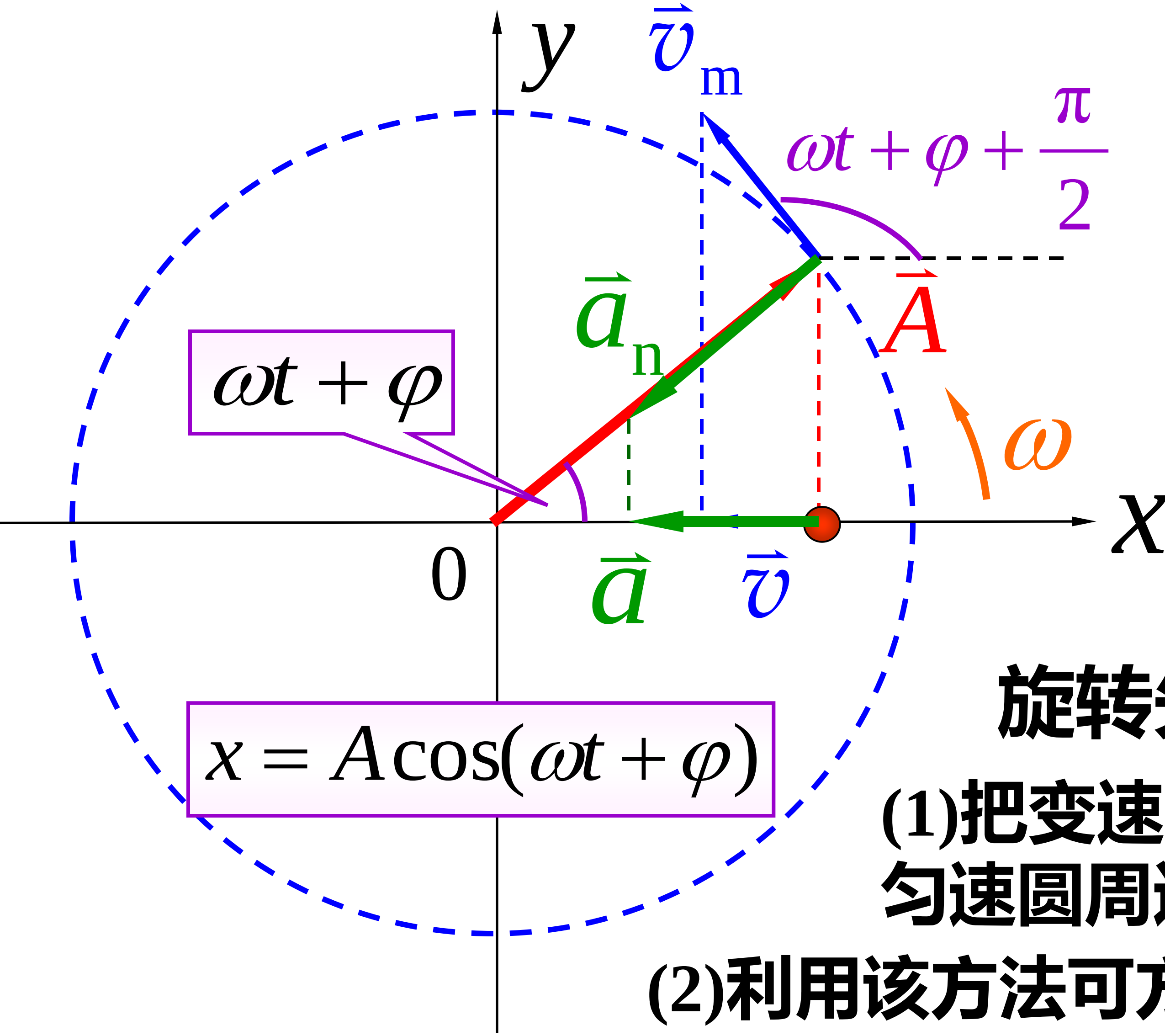
$$\theta = \omega t + \varphi$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

旋转矢量$\vec{A}$的端点在X轴上的投影点的运动为简谐运动.





旋转矢量法的优点

(1)把变速直线运动转化为匀速圆周运动.

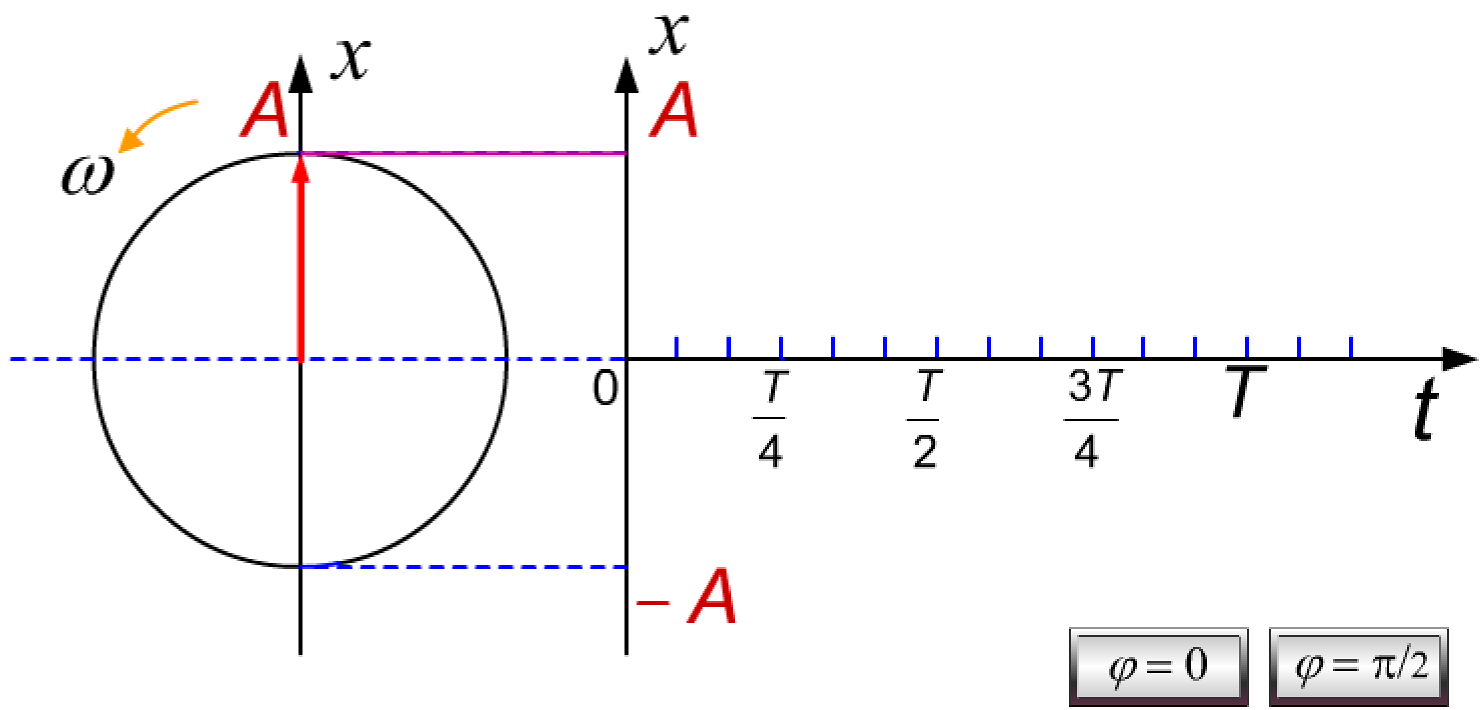
(2)利用该方法可方便地画出$x \sim t$图

(3)可方便地比较两个振动的相位,方便地求初相位

(4)方便地进行两个振动的合成

用旋转矢量图画简谐运动的 $x-t$ 图

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



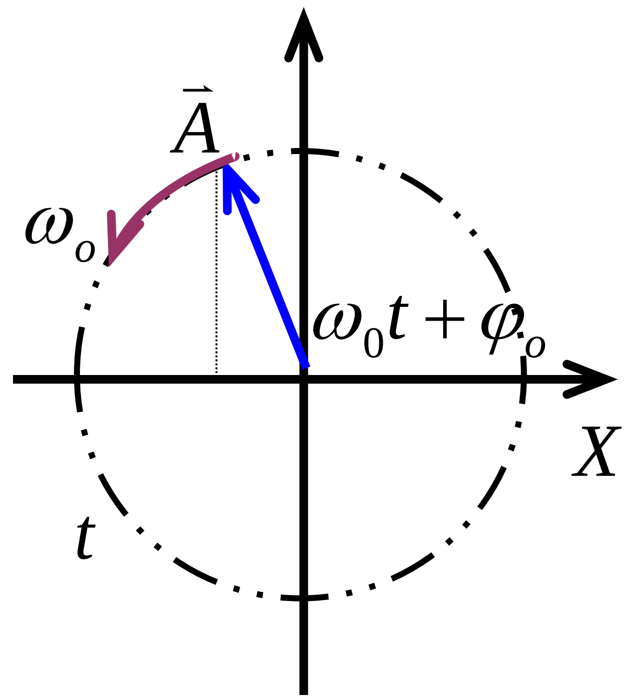
$T = 2\pi/\omega$（旋转矢量旋转一周所需的时间）

我们也用一个复数$Ae^{i(\omega_0 \cdot t+\varphi_0)}$表达简谐振动：

振幅是复数的模，相位为复数的幅角。

位移$x(t)=\mathrm{Re}(Ae^{i(\omega_0 \cdot t+\varphi_0)})$是复数的实部。

复平面上任意一点对应一个矢量，因此，可用一个旋转矢量来描述简谐振动。

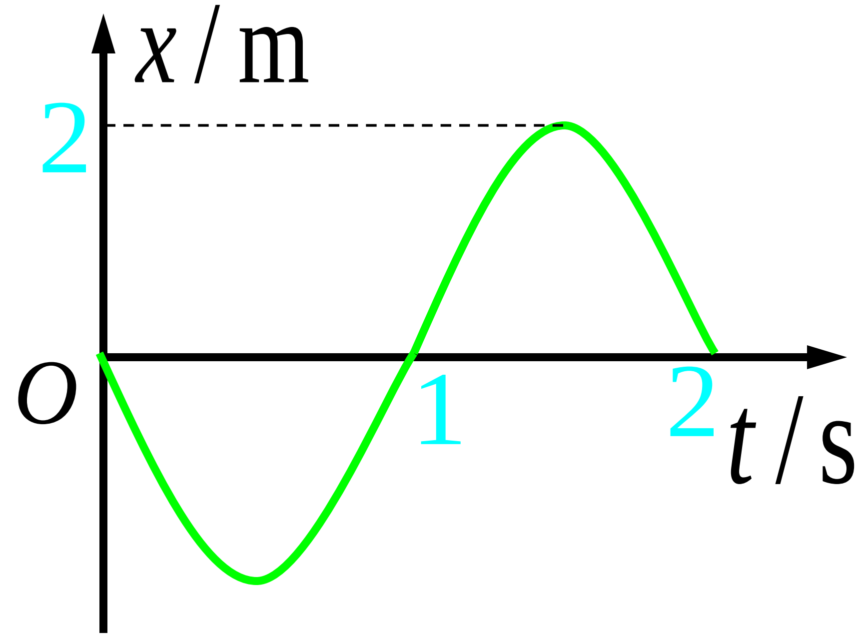


$$\vec{A}=Ae^{i(\omega_0 \cdot t+\varphi_0)}$$

$\vec{A}$ 是模为 A，幅角为 $(\omega_0 \cdot t+\varphi_0)$的矢量。

它以角频率ω_0，从初始幅角φ_0出发绕原点匀速旋转。

【例】如图的谐振动*x-t* 曲线，试求其振动表达式



【解】由图知

$$A = 2\,\mathrm{m}, T = 2\,\mathrm{s}$$

$$\therefore \omega = 2\pi / T = \pi$$

设振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

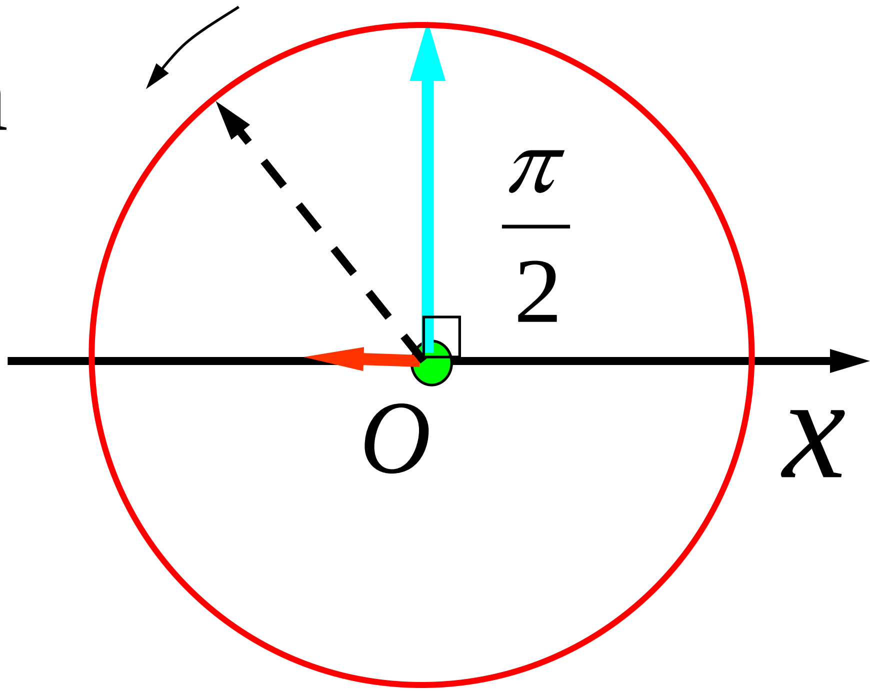
$$\therefore v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

t=0时 $x = 0$ 即 $0 = A\cos\varphi$ $\therefore \varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

又 $v<0$ 即 $-\omega A\sin\varphi<0$

$\therefore \sin\varphi>0$ ⇨ $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore x=2\cos(\pi t+\dfrac{\pi}{2})$ m



旋转矢量法

$\therefore \varphi=\dfrac{\pi}{2}$

【例】用旋转矢量法讨论质点初始时刻位移为以下情况时谐振动的初相位：**A**；**-A**；**0**，且向负方向运动；**-A/2**，且向正方向运动

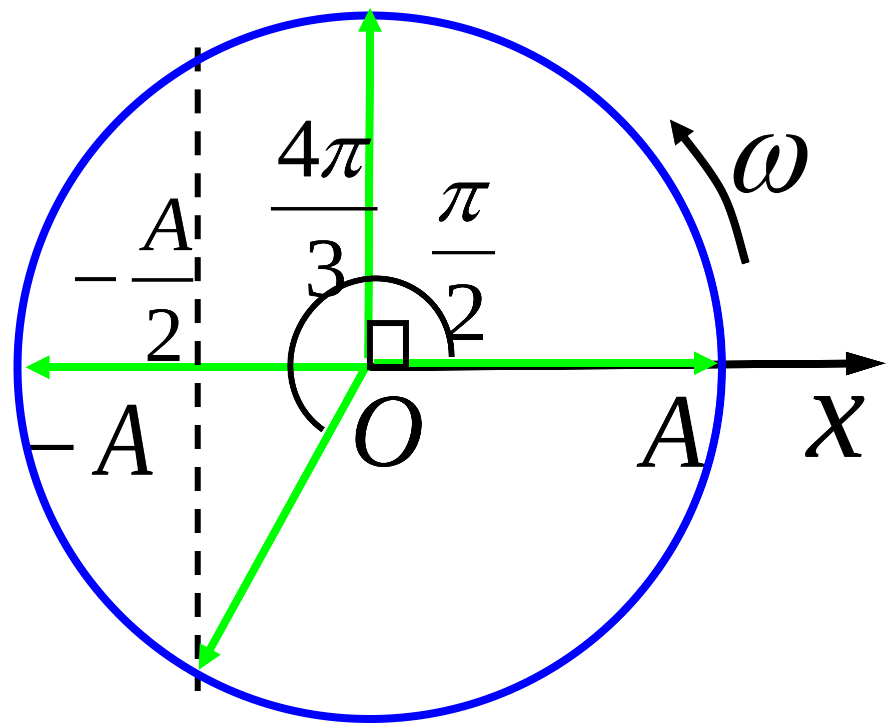
【解】 (1) $\varphi = 0$

(2) $\varphi = \pi$

(3) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

(4)

$$\varphi = \frac{4\pi}{3} \quad 或 \quad \varphi = -\frac{2\pi}{3}$$



【例】质量为0.01kg物体作周期为4s、振幅为0.24m的简谐振动。t=0时物体的初始位置在*x*=0.24m处。求(1)谐振动表达式；(2)物体从初始位置运动至*x*=-0.12m处所需的最短时间

【解】 (1)设振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

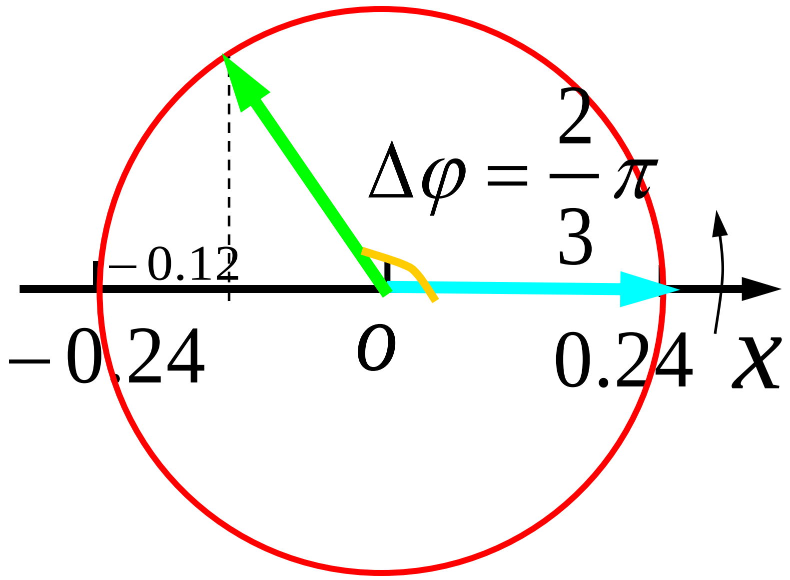
其中 $A = 0.24\,\mathrm{m}$

$$T = 4\mathrm{s} \qquad \therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$\because x_0 = A$$

由旋转矢量法得 $\varphi = 0$

$$\therefore x = 0.24\cos\frac{\pi}{2}t \quad m$$

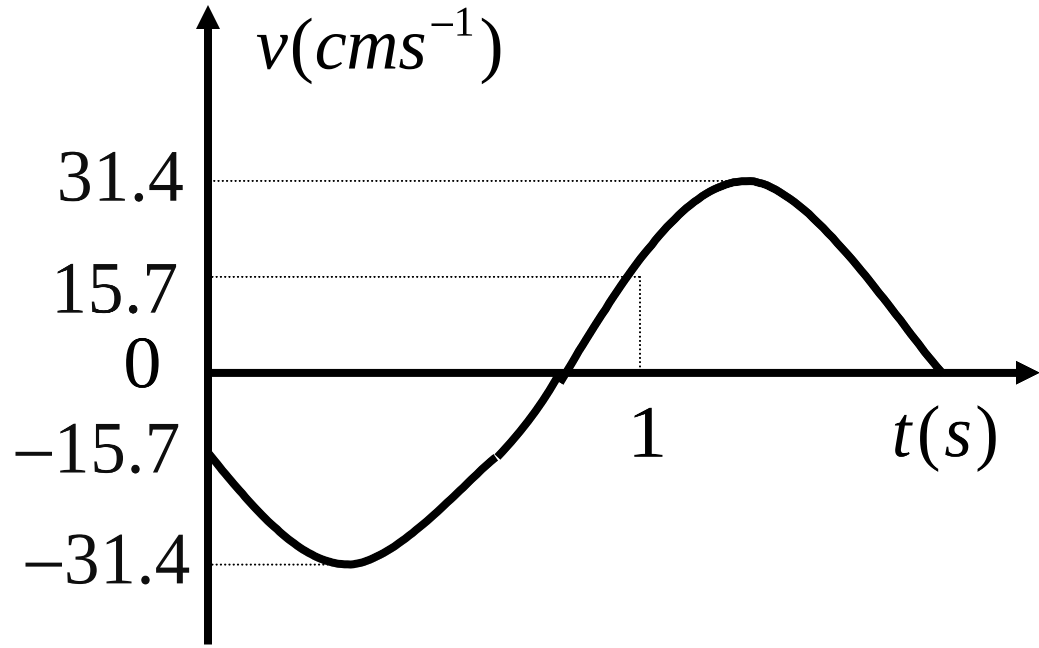


(2) $\because \Delta\varphi = \omega(t_{\min} - 0) = \omega\Delta t_{\min} = \frac{2}{3}\pi$

$$\therefore \Delta t_{\min} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{2\pi/3}{\pi/2} = \frac{4}{3}\mathrm{s}$$

【例】 已知某简谐振动的 速度与时间的关系曲线如图所示，试求其振动方程。

【解】方法1



设振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v_0 = -\omega A \sin\varphi_0$$

$$= -15.7cms^{-1}$$

$$a_0 = -\omega^2 A\cos\varphi_0 < 0$$

$$\because \quad \omega A = v_m = 31.4cms^{-1}$$

$$\therefore \quad \sin\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega A} = \frac{15.7}{31.4} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{6} 或 \frac{5}{6}\pi \xrightarrow{a_0 < 0, 则 \cos\varphi_0 > 0} \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$t = 1 \quad v = 15.7cms^{-1}$$

$$\therefore \quad \sin(\omega \cdot 1 + \frac{\pi}{6}) = -\frac{v}{\omega A} = -\frac{v}{v_m} = -\frac{1}{2}$$

$$\omega\cdot 1+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi\text{或}\frac{11}{6}\pi \xrightarrow[\cos(\omega\cdot 1+\varphi_0)<0]{a_1>0,\text{则}} \omega\cdot 1+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$$

$$\omega=\pi=3.14s^{-1} \qquad \therefore \quad A=\frac{v_m}{\omega}=\frac{31.4}{3.14}=10cm$$

故振动方程为 $x=10\cos(\pi t+\frac{\pi}{6})cm$

方法2：用旋转矢量法辅助求解。

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=v_m\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$v_m=\omega A=31.4cms^{-1}$$

***v*的旋转矢量与*v*轴夹角表示*t* 时刻相位**

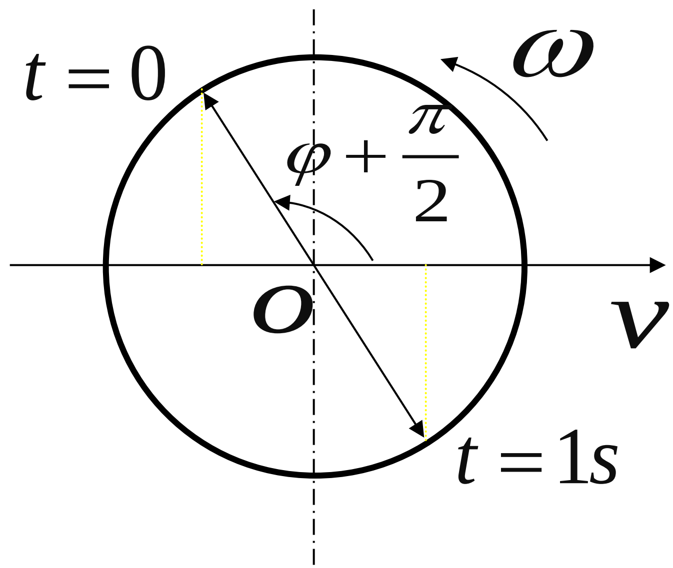
$$\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}$$

由图知 $\varphi+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi \longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$

$$\omega\cdot 1=\pi \longrightarrow \omega=\pi s^{-1}$$

$$A=\frac{v_m}{\omega}=\frac{31.4}{3.14}=10cm$$

$$x=10\cos(\pi t+\frac{\pi}{6})cm$$



二、同频率的简谐振动的相位差

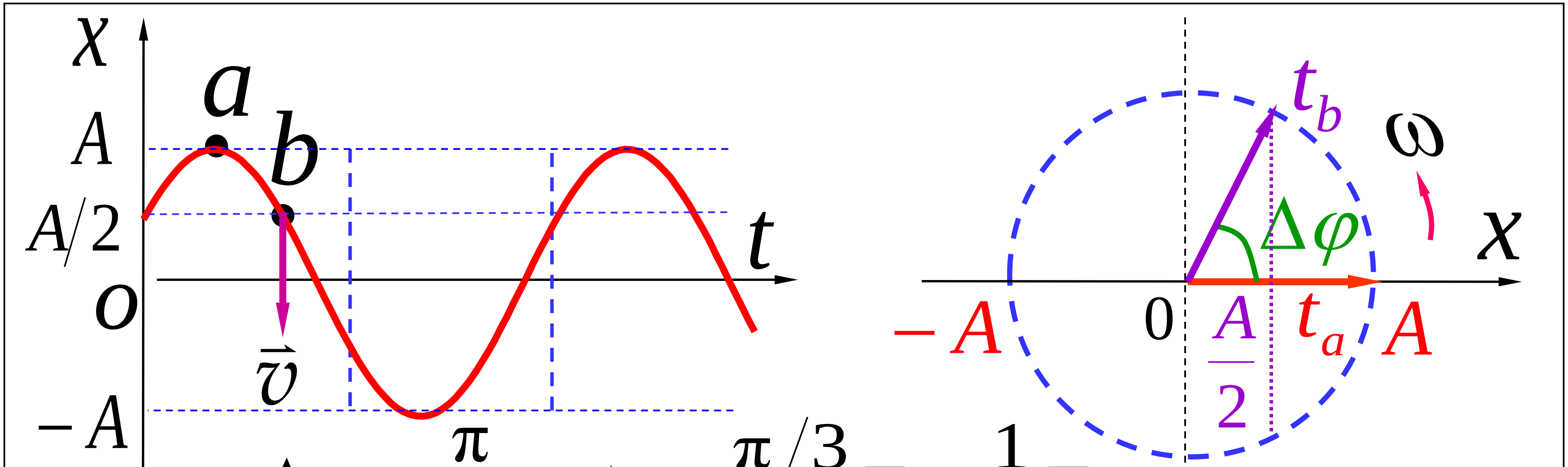
1）对同一简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间. $\Delta\varphi=(\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)$

$$x=A\cos(\omega t_1+\varphi)$$

$$x=A\cos(\omega t_2+\varphi)$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{\Delta\varphi}{\omega}$$

求b、a之间的时间差



$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}\qquad \Delta t=\frac{\pi/3}{2\pi}T=\frac{1}{6}T$$

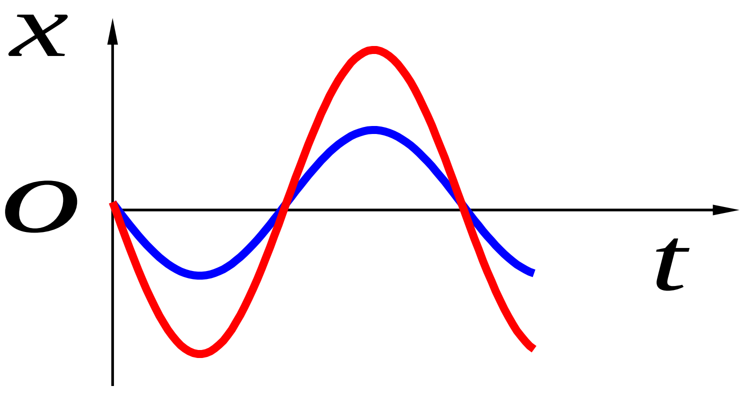
2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异。

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

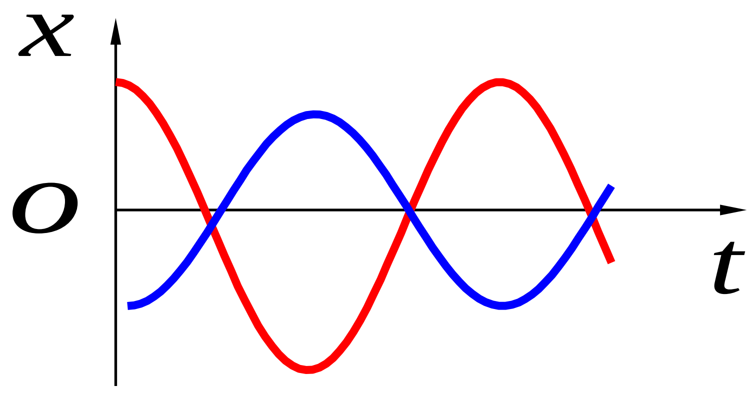
$$\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1}$$

$\Delta\varphi = 0$ 同相



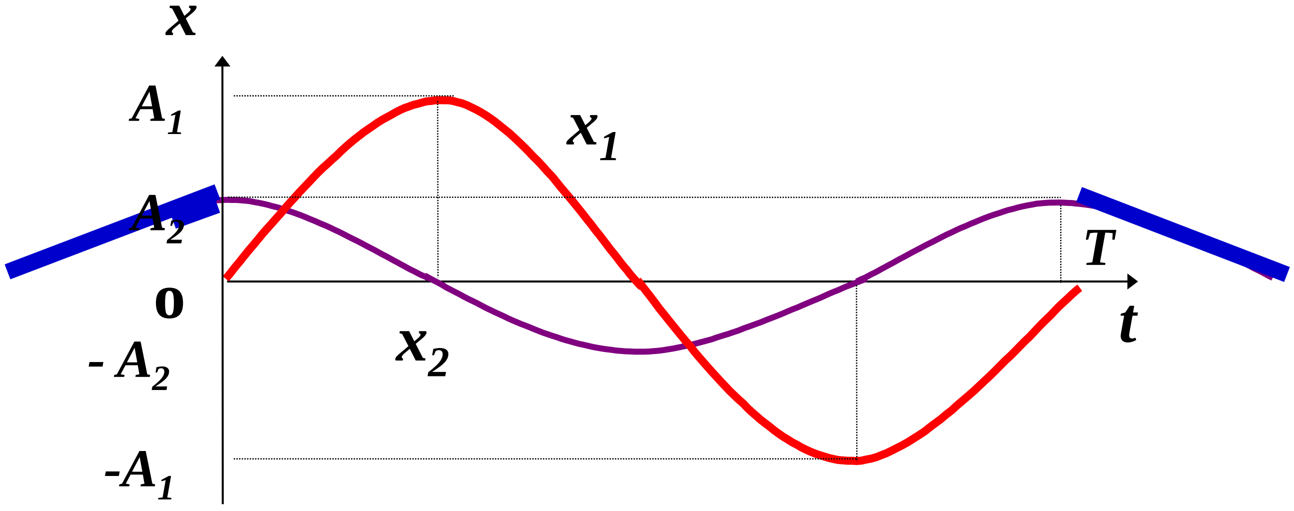
$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相



- 超前和落后

若$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，则 x_2比x_1较早达到正最大，称 x_2 比 x_1 超前（或 x_1 比 x_2 落后)。

超前、落后以<π 的相位角来判断



2 超前于1

三、简谐振动的速度和加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$= -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

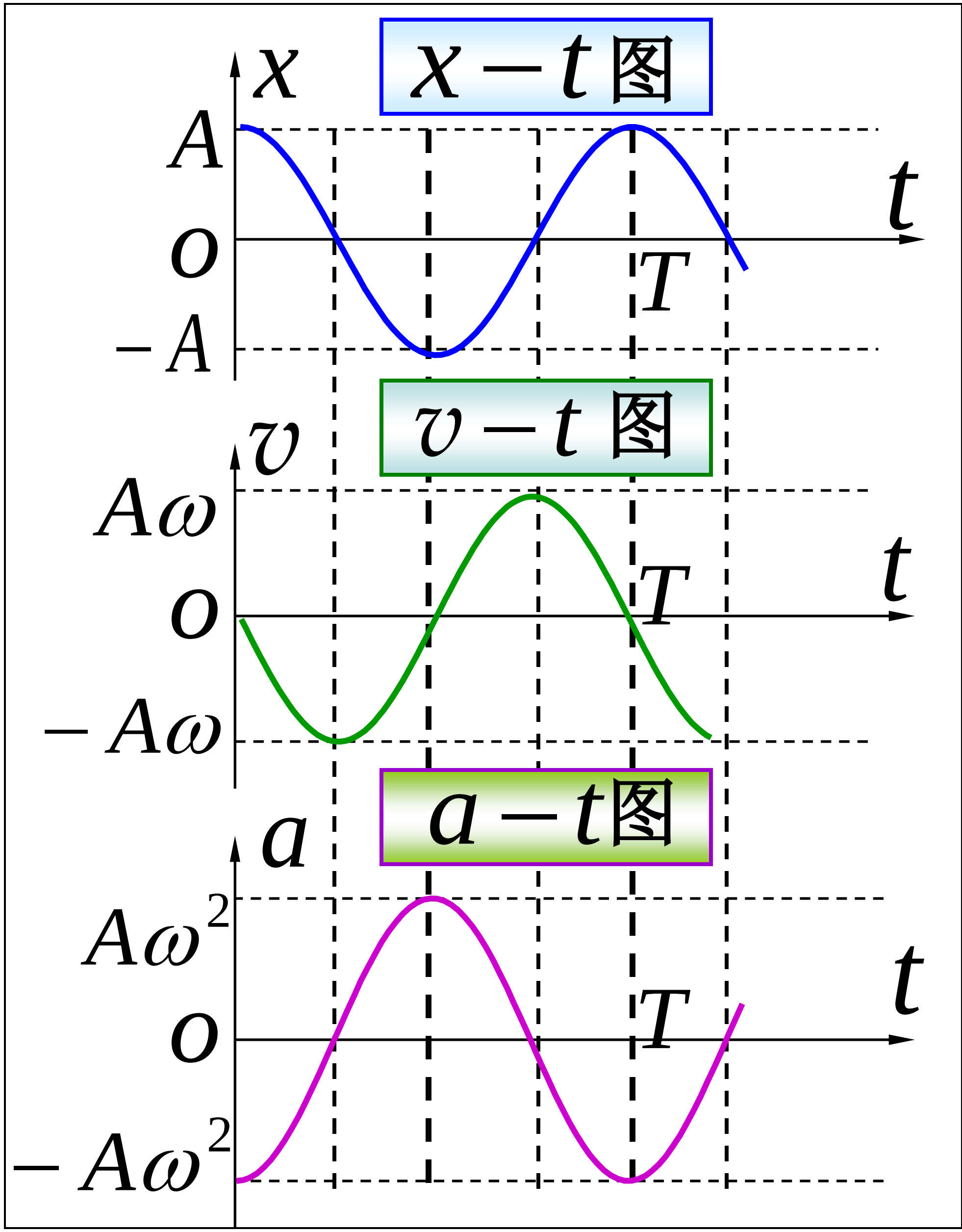
$$= A\omega\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$= -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= A\omega^2\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$= -\omega^2 x$$



四、常数 A 和 φ 的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t+\varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t=0 \quad x=x_0 \quad v=v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

讨论

已知 $t=0, x=0, v<0$ 求 φ

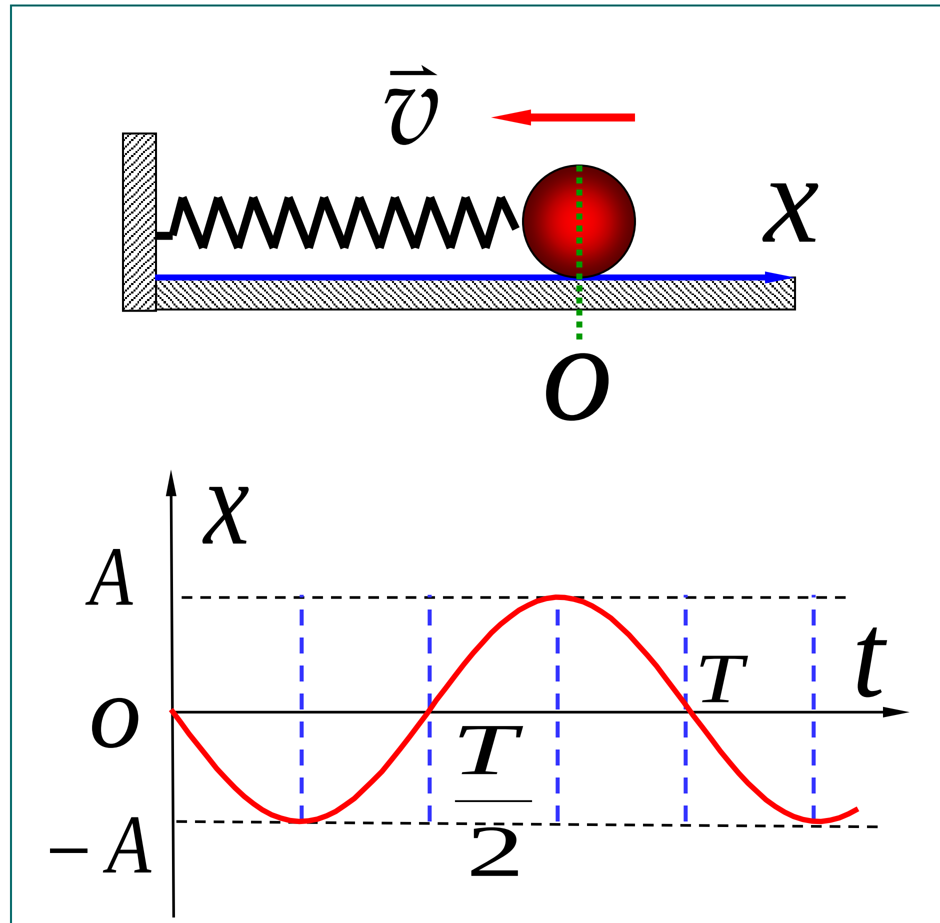
$$0 = A\cos\varphi$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\because v_0 = -A\omega\sin\varphi < 0$$

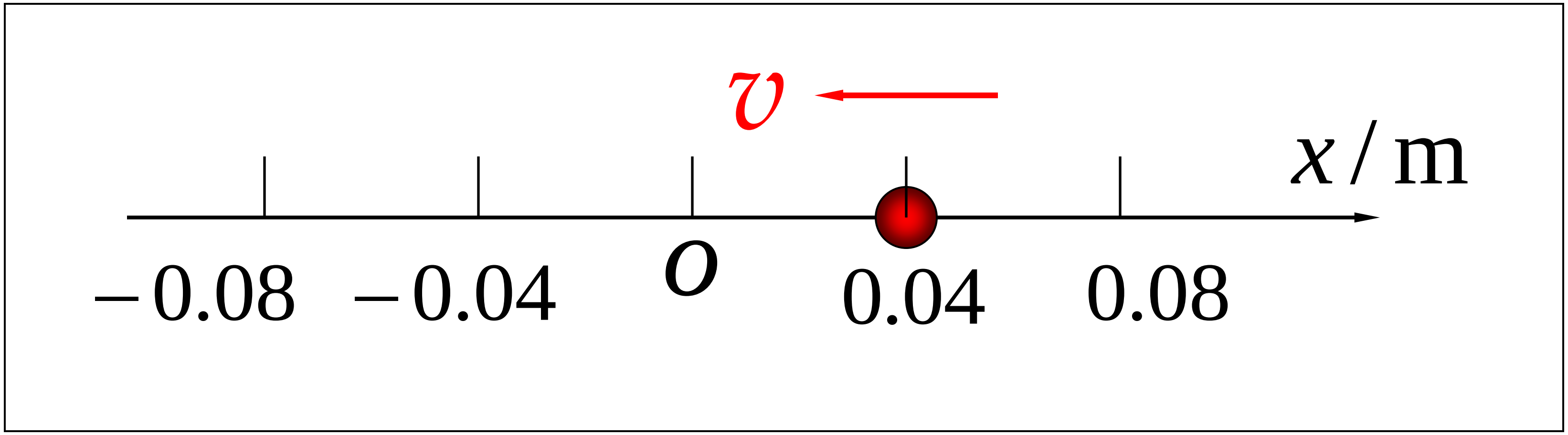
$\therefore \sin\varphi > 0$ 取 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



【例】 一质量为 0.01kg 的物体作简谐运动，其振幅为 0.08m，周期为 4s ，起始时刻物体在 $x=0.04\text{m}$ 处，向 Ox 轴负方向运动（如图）. 试求

（1）$t=1.0\text{s}$ 时，物体所处的位置和所受的力；



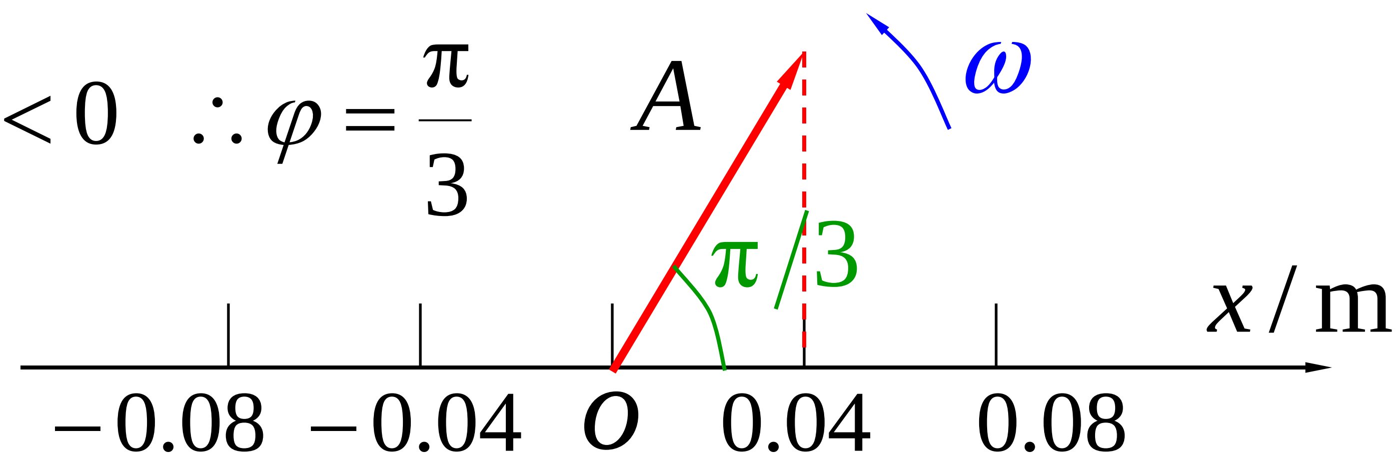
【解】$A=0.08\text{m}$ $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}\text{s}^{-1}$

$$A = 0.08\mathrm{m} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1}$$

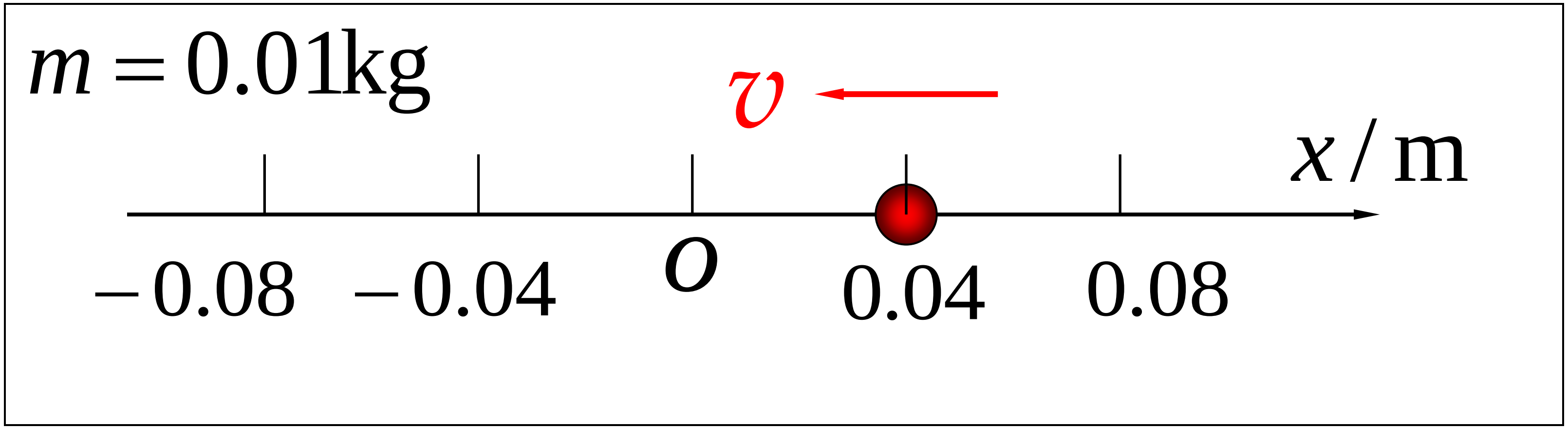
$$t = 0, x = 0.04\mathrm{m} \quad \text{代入 } x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$0.04\mathrm{m} = (0.08\mathrm{m})\cos\varphi \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$$



$$x = (0.08\mathrm{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$



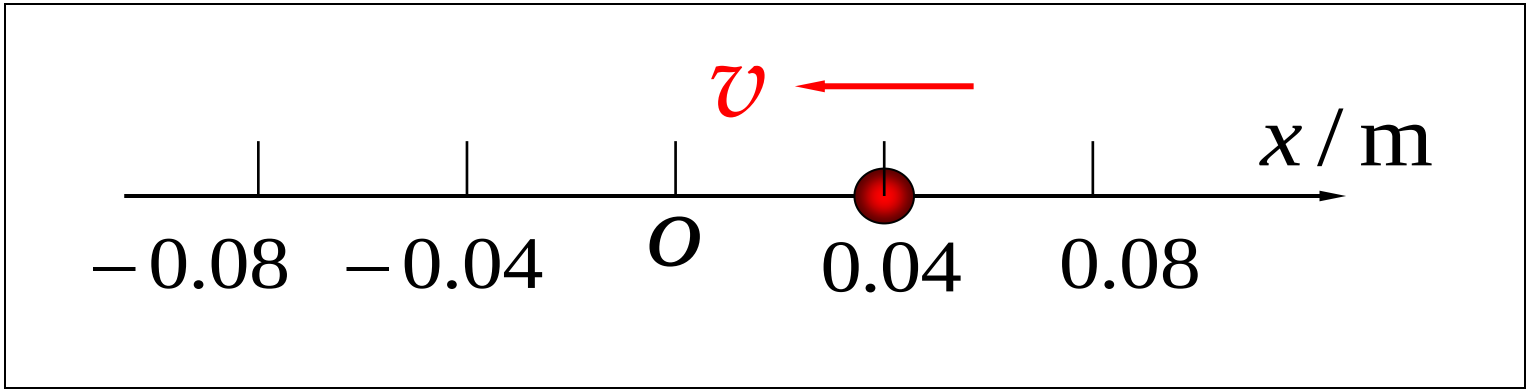
$$x = (0.08\text{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})t + \frac{\pi}{3}]$$

$t = 1.0\text{s}$ 代入上式得 $x = -0.069\text{m}$

$$F = -kx = -m\omega^2 x$$

$$= -(0.01\text{kg})(\frac{\pi}{2}\text{s}^{-1})^2(-0.069\text{m}) = 1.70\times10^{-3}\,\text{N}$$

（2）由起始位置运动到 $x=-0.04\mathrm{m}$ 处所需要的最短时间.

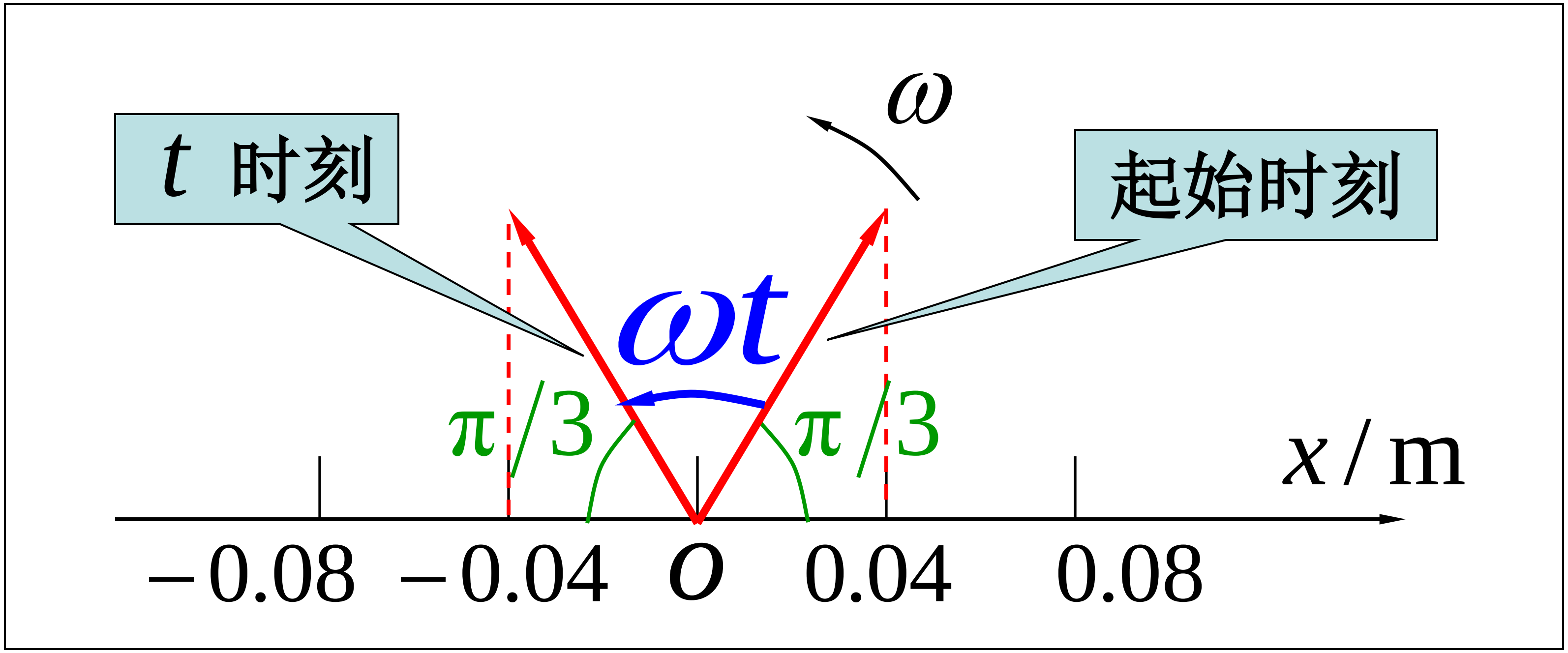


【解】一　设由起始位置运动到 $x=-0.04\mathrm{m}$ 处所需要的最短时间为 t

$$-0.04\mathrm{m}=(0.08\mathrm{m})\cos[(\frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1})t+\frac{\pi}{3}]$$

$$t=\frac{\arccos(-\frac{1}{2})-\frac{\pi}{3}}{\pi/2}\mathrm{s}=\frac{2}{3}\mathrm{s}=0.667\mathrm{s}$$

【解】二



$$\omega t = \frac{\pi}{3} \qquad \omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{s}^{-1} \qquad t = \frac{2}{3}\mathrm{s} = 0.667\mathrm{s}$$

§ 14-2　简谐振动的动力学

一、简谐振动的微分方程

由 $a=-\omega^2 x$ 可得：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

$\boxed{\text{简谐振动微分方程}}$

数学上能严格证明它的唯一可能解

$$x=x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

A，φ_0 是二阶微分方程解的积分常数，
可以从初始条件决定

满足上述微分方程的物理量是一个谐振量，
它的运动是简谐振动

二、简谐振动的动力学特征

由 $F=ma=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 有 $F=-m\omega^2 x$

作简谐振动的质点所受合外力的大小与它对于平衡位置的位移成正比而方向相反。——正比回复力

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftarrow F=-kx \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

$$\boxed{\frac{k}{m}\equiv\omega^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

求解可得： $\boxed{x=A\cos(\omega t+\varphi)}$ $\quad T=2\pi\sqrt{m/k}$

若质点所受合外力是正比回复力，则质点的运动是简谐振动。

如果一个刚体的合外力矩为正比合外力矩，

$$M = -k\theta \qquad -k\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

令 $\omega^2 = \dfrac{k}{J}$

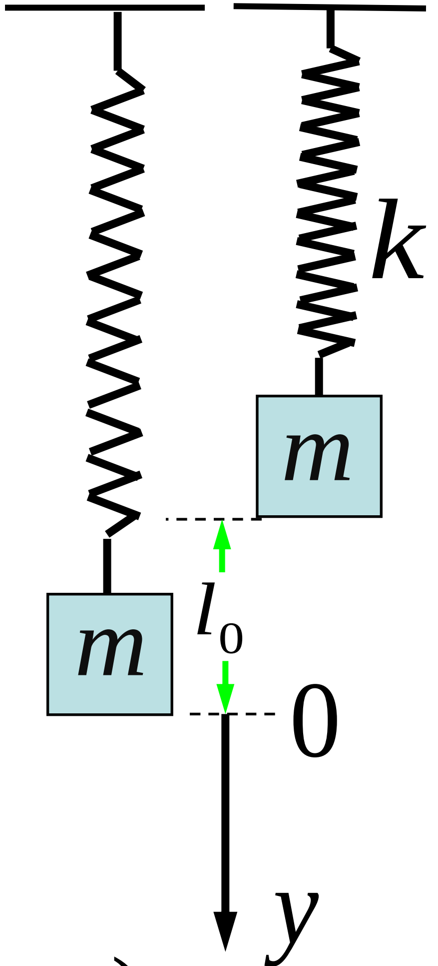
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

$$\boxed{\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{J/k}$$

若刚体所受合外力矩是正比回复力矩，则刚体的转动是简谐振动。

1、弹簧振子



建立如图坐标系，原点为物体静平衡时位置，它距弹簧原长位置为 l_0

$$\therefore kl_0 = mg$$

$$\Rightarrow \quad l_0 = mg/k$$

在*y*处时

$$F_{合外力} = mg - k(y + l_0) = -ky$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}$$

2、单摆(simple pendulum)

$$\theta < 5^\circ \text{ 时}, \sin\theta \approx \theta$$

$$M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$$

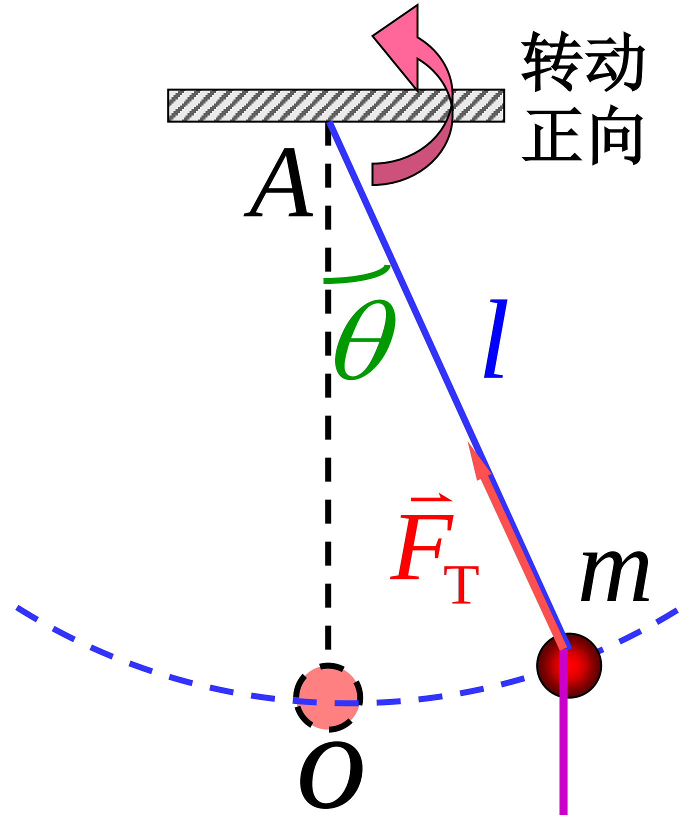
$$-mgl\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{l}\theta \qquad \text{令 } \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\theta$$

$$\theta = \theta_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

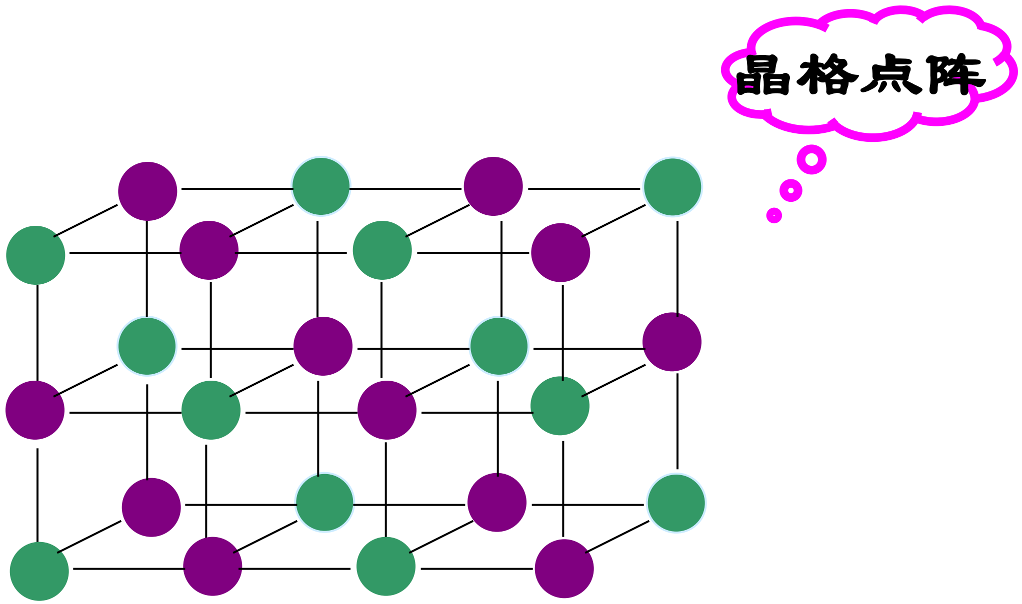


$$\vec{F}_{\mathrm{T}} \qquad \vec{P}$$

$$J = ml^2$$

3、稳定平衡位置附近的微小振动

实际上，任何一个稍微偏离平衡状态的稳定系统，都可看成简谐振子。对于物理学中的许多问题，谐振子都可以作为一个近似的或相当精确的模型。



三、简谐振动的能量

以弹簧振子为例

$$F=-kx \quad \begin{cases} x=A\cos(\omega t+\varphi) \\ v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

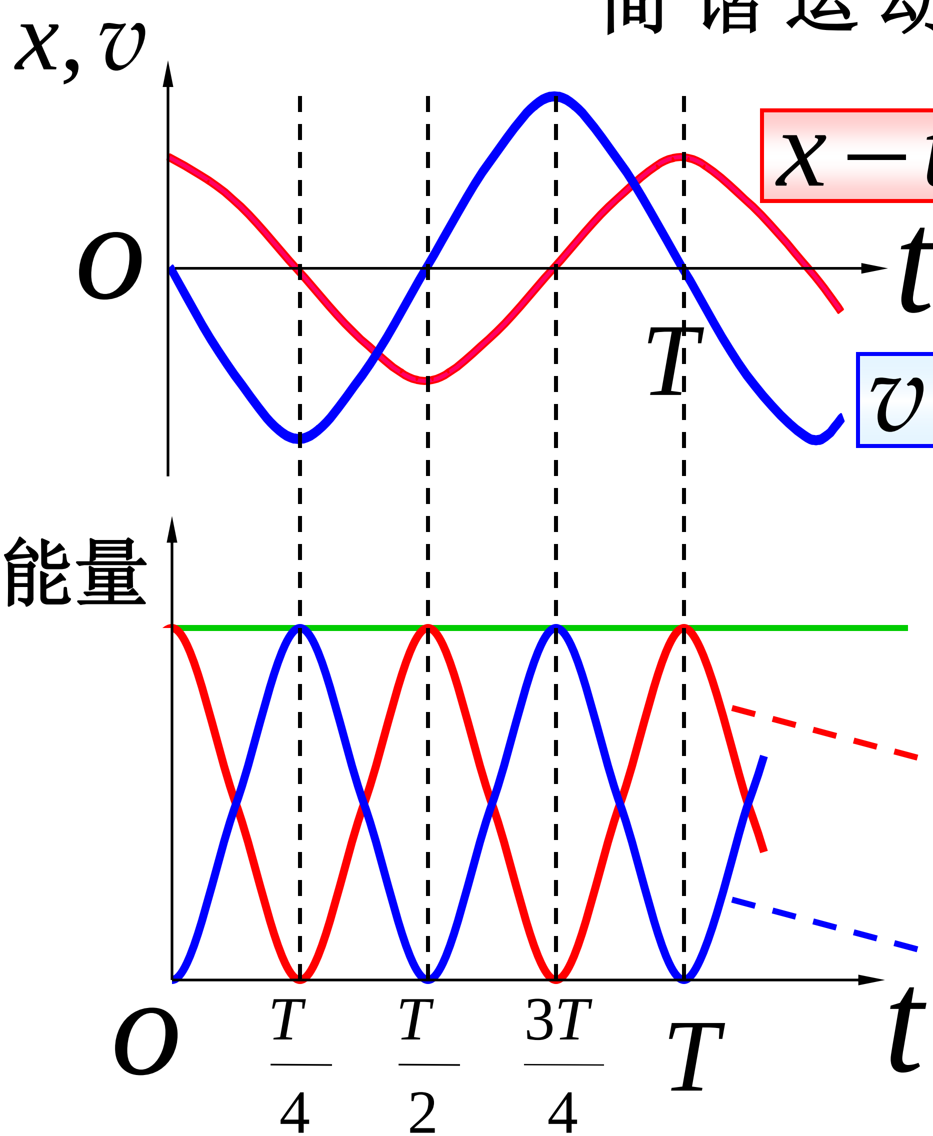
$$\begin{cases} E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi) \\ E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

$$\omega^2=k/m$$

$E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kA^2\propto A^2$（振幅的动力学意义）

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒

简谐运动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos\omega t$$

$$v = -A\omega\sin\omega t$$

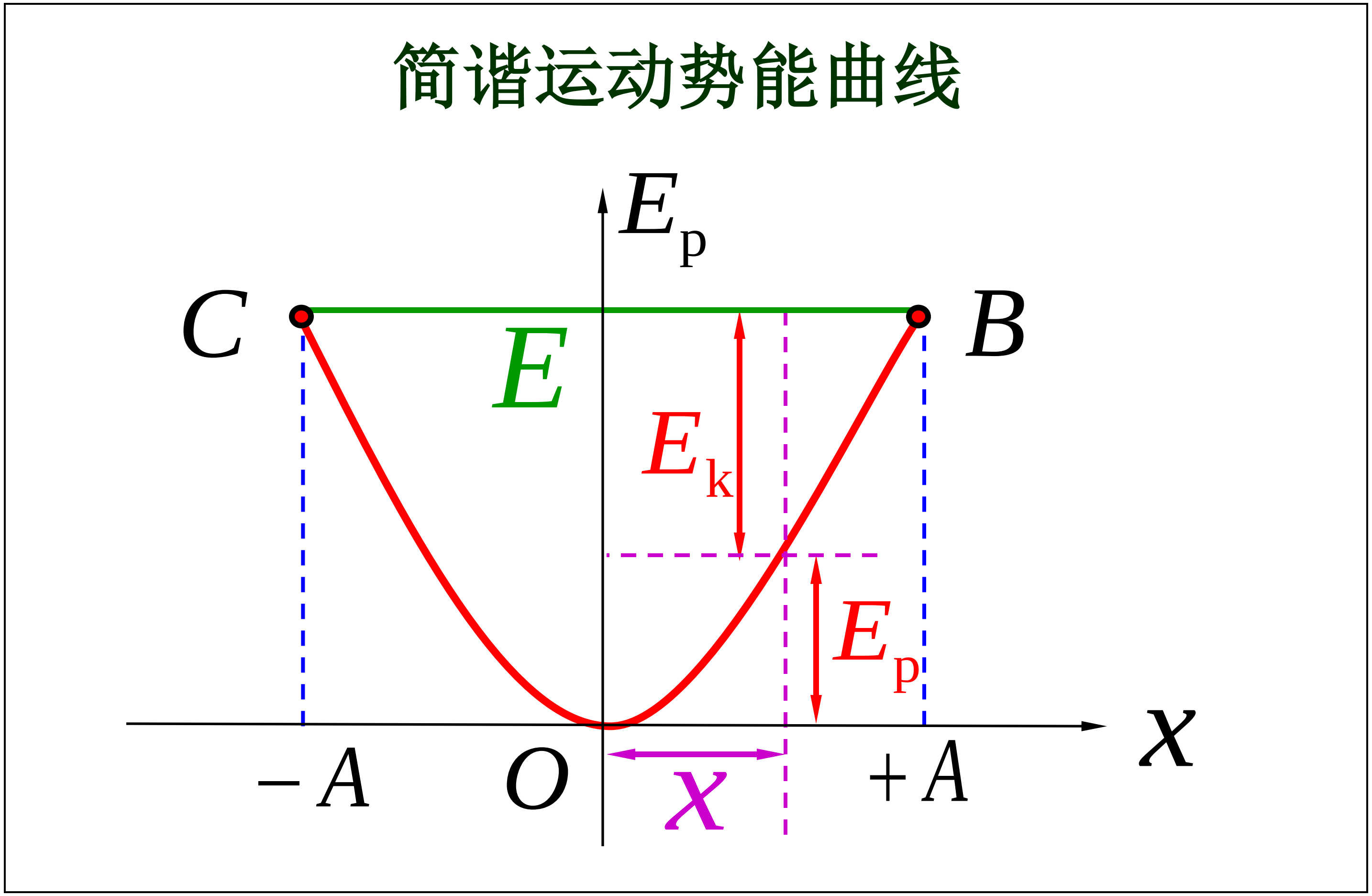
$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

简谐运动能量守恒，振幅不变



推导

能量守恒 $\longrightarrow$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^{2}+\frac{1}{2}kx^{2}=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^{2}+\frac{1}{2}kx^{2}\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\cancel{\mathrm{d}x}}{\cancel{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x}{\mathrm{d}t^{2}}+\frac{k}{m}x=0$$

【例】质量为0.10kg 的物体，以振幅$1.0\times10^{-2}\,\text{m}$作简谐运动，其最大加速度为$4.0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$，求：

（1）振动的周期；

（2）通过平衡位置的动能；

（3）总能量；

（4）物体在何处其动能和势能相等？

【解】（1）

$$a_{\max}=A\omega^2 \qquad \omega=\sqrt{\frac{a_{\max}}{A}}=20\text{s}^{-1}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\text{s}$$

（2） $E_{\mathrm{k,max}}=\frac{1}{2}mv_{\max}^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}A^{2}=2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（3） $E=E_{\mathrm{k,max}}=2.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

（4） $E_{\mathrm{k}}=E_{\mathrm{p}}$ 时， $E_{\mathrm{p}}=1.0\times10^{-3}\,\mathrm{J}$

由 $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^{2}=\frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}$

$$x^{2}=\frac{2E_{\mathrm{p}}}{m\omega^{2}}=0.5\times10^{-4}\,\mathrm{m}^{2}$$

$$x=\pm0.707\mathrm{cm}$$

【例】一水平放置的弹簧振子，质量为m，弹簧倔强系数为k，当它振动时，在什么位置动能和势能相等？它从该位置到达平衡位置所需的最短时间为多少？

【解】
$$\because \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\therefore mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) = kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$\sin^2(\omega t+\varphi) = \cos^2(\omega t+\varphi)$$

$$\therefore \omega t+\varphi = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

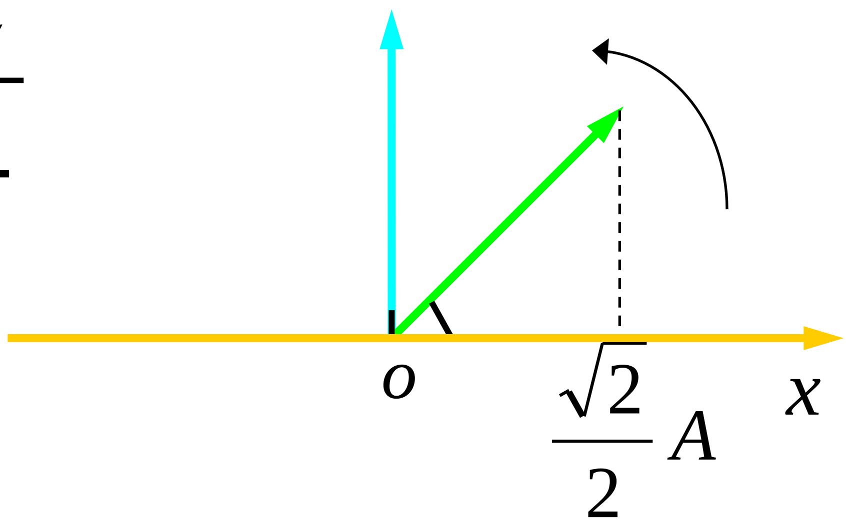
$$E_k = E_p = \frac{E}{2}$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}kA^2 \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

$$\omega t + \varphi = \pi/4 \qquad \omega(t + \Delta t) + \varphi = \pi/2$$

$$\therefore \Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$$



§14-5 同方向同频率的简谐振动的合成

1、代数法

设两个简谐振动

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$= A\cos(\omega t+\phi)$$

其中

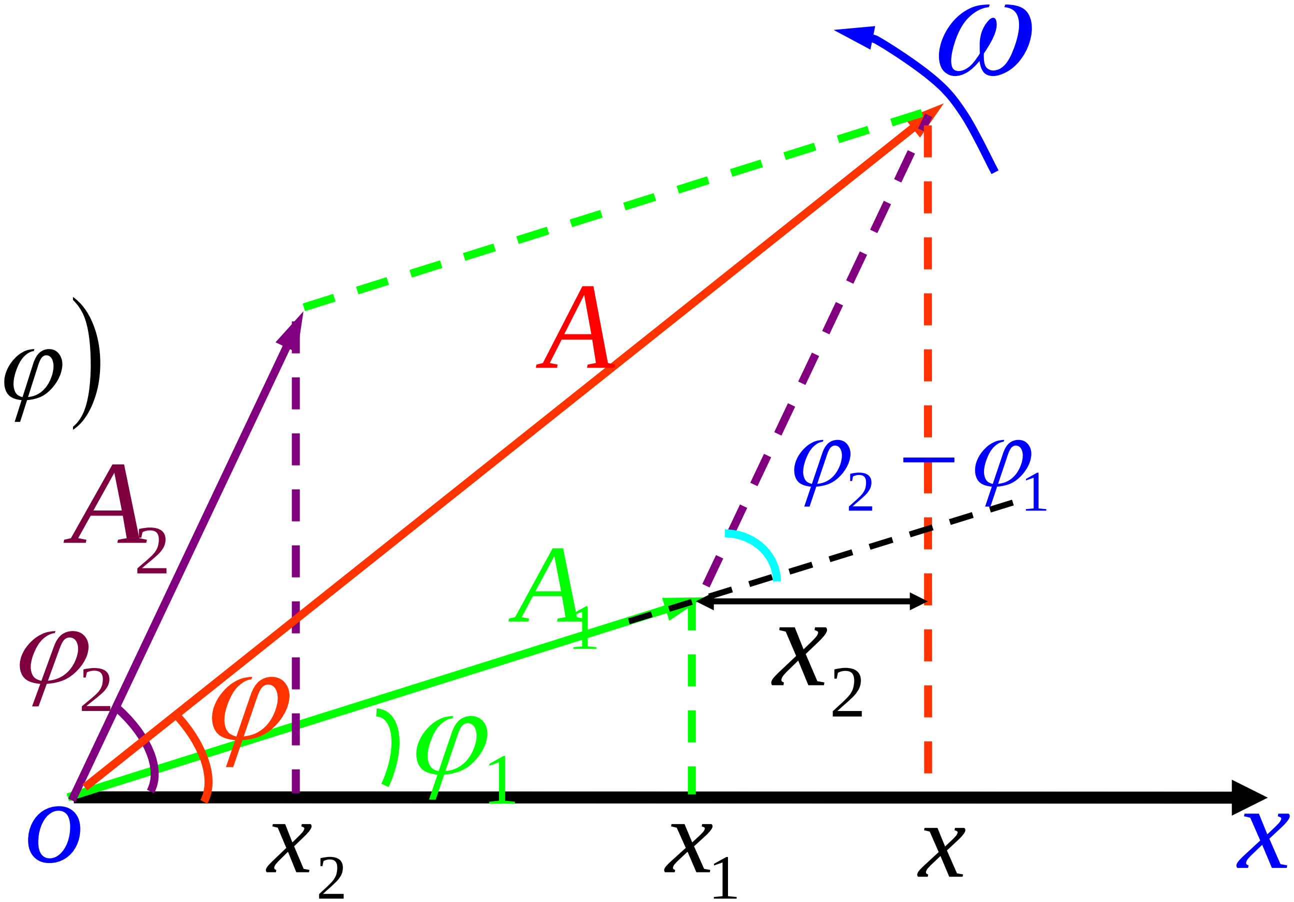
$$A=\sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

2、旋转矢量法

$$x = x_1 + x_2$$

$$= A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

讨论 $A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

(1) 合振动仍然是简谐振动，其频率与分振动相同

(2) 合振动振幅不但与两分振动的振幅有关，而且与相位差有关

当 $\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$ 时(同相)

$$\boxed{A=A_1+A_2=A_{max}}$$

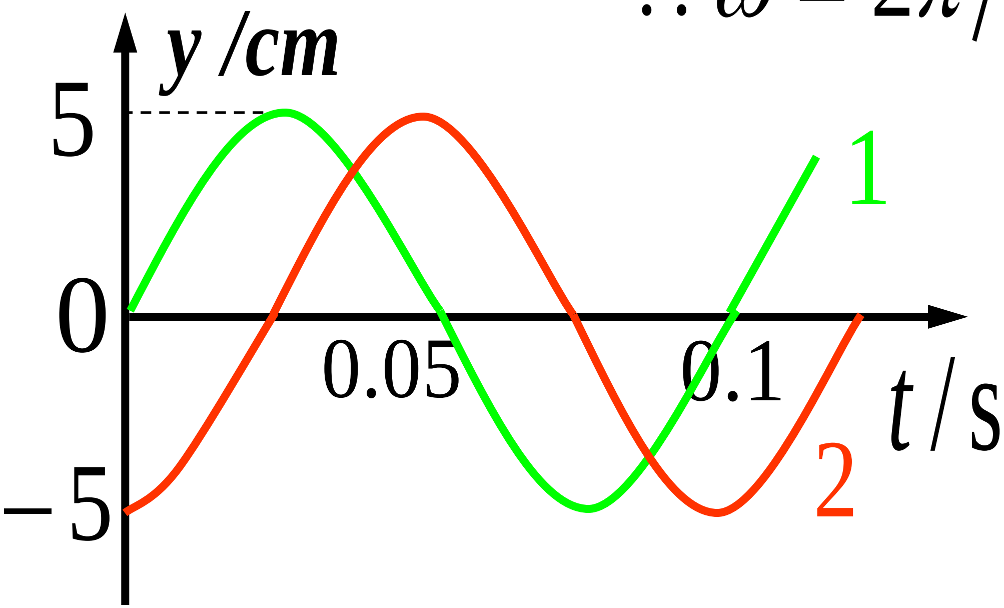
当 $\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi\ (k=0,\pm1,\cdots)$ 时(反相)

$$\boxed{A=\left|A_1-A_2\right|=A_{min}}$$

【例】已知两谐振动的曲线(如图), 它们是同频率的谐振动, 求它们的合振动方程

【解】由图知 $A = 5\,\text{cm}$ $T = 0.1\,\text{s}$

$$\therefore \omega = 2\pi / T = 20\pi$$



1振动在t=0时：

$$y_0 = 0 \quad v_0 > 0$$

$$\therefore \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

2振动在t=0时： $y_0=-5=-A \qquad \therefore \varphi_2=\pi$

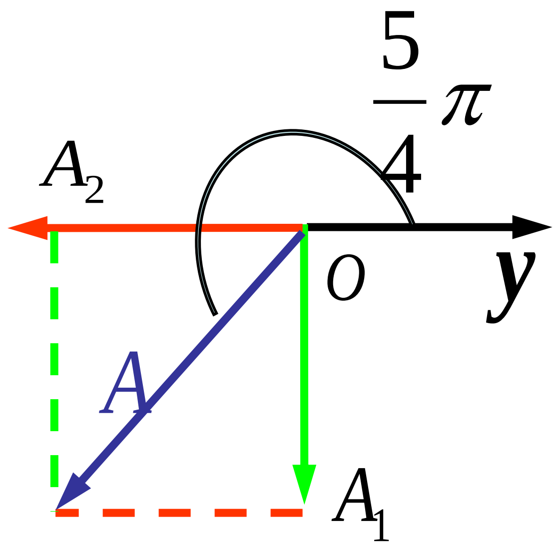
$$y_1=5\cos(20\pi t-\frac{\pi}{2}) \quad cm$$

$$y_2=5\cos(20\pi t+\pi) \quad cm$$

由旋转矢量法

$$A=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}}=5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$$

$$\varphi=\frac{5}{4}\pi$$



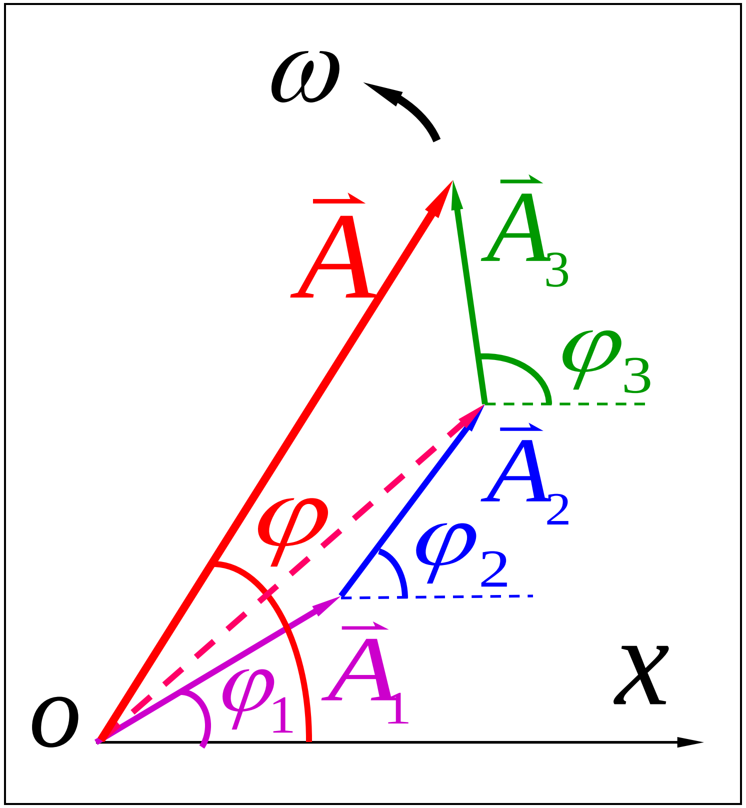
$$y=5\sqrt{2}\cos(20\pi t+\frac{5}{4}\pi) \quad cm$$

*多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n \cos(\omega t + \varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$



多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \quad \cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$

讨论

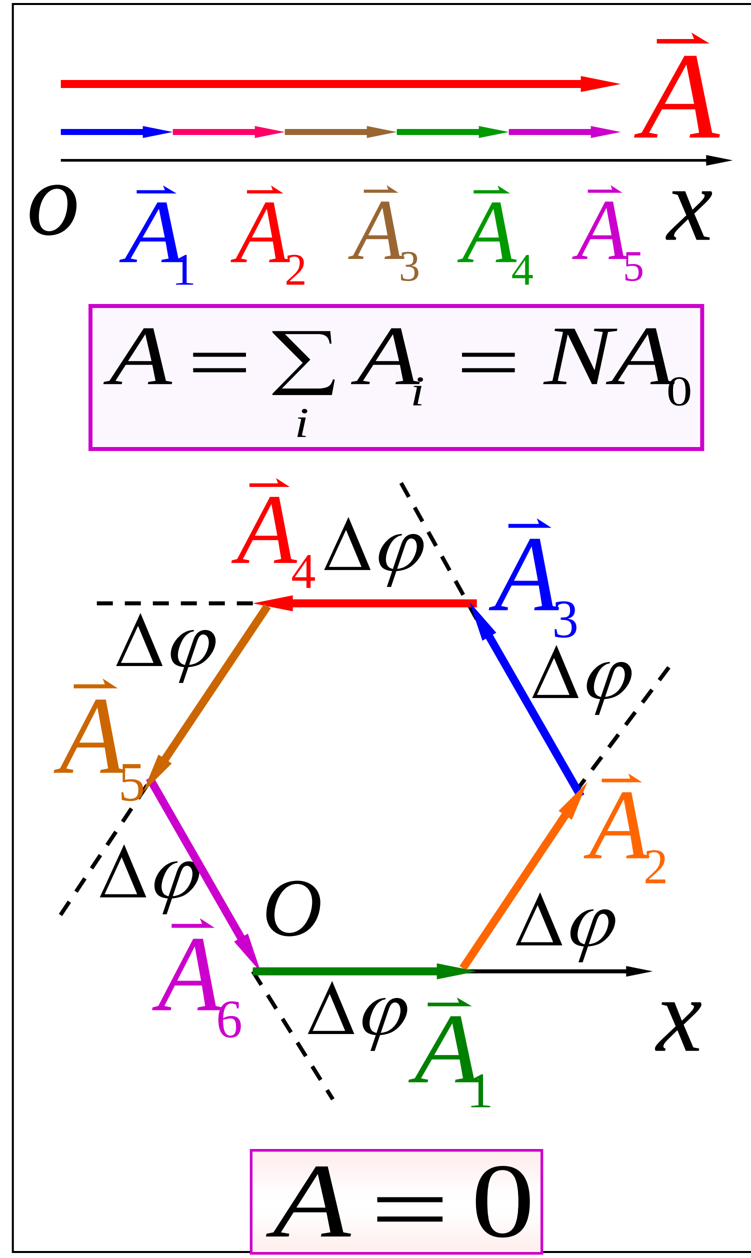
1） $\Delta\varphi = 2k\pi$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

2） $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$$(k' \neq kN, k' = \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

N个矢量依次相接构成一个闭合的多边形 .



§ 14-6 同方向不同频率的简谐振动的合成

设 $$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

讨论$A_1=A_2=A$的情况

$$x = x_1 + x_2$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right)$$

讨论 $x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right)$

(1) $\omega_1 \approx \omega_2$ 时合振幅 $2A\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}) = A(t)$

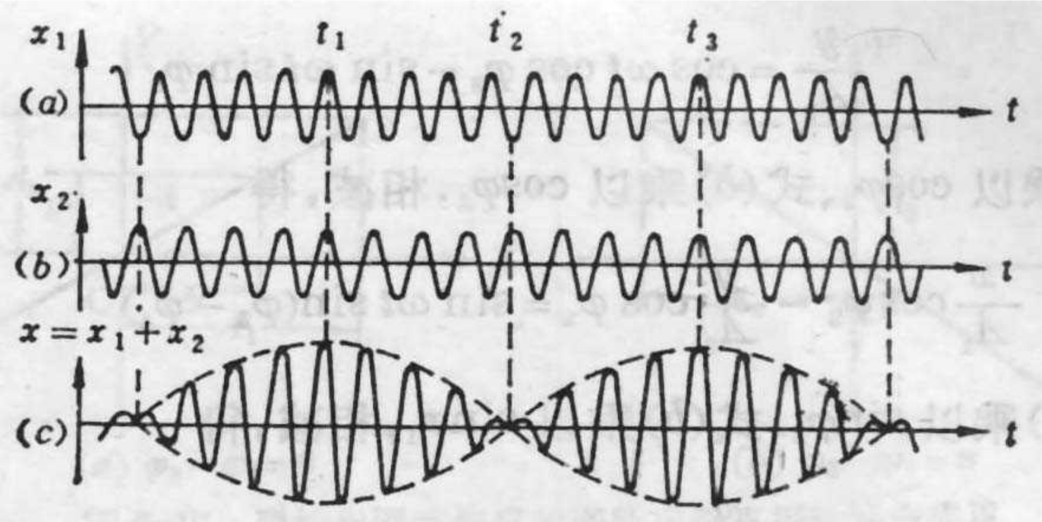
随时间周期性缓慢地变化

$$\boxed{x = A(t)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

$\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t++\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2})$ 作角频率近于 ω_2 或 ω_1 的谐振动

(2) 合振动出现时强时弱的“拍”现象



(3) $\because \left|\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right| = \left|\cos(\nu_2-\nu_1)\pi t\right|$

合振幅最大处

$$\left|\cos(\nu_2-\nu_1)\pi t\right| = 1 = \left|\cos n\pi\right|$$

即两相邻振幅极大之间的相位差为π

$$\therefore \left|(\nu_2-\nu_1)\pi\tau\right| = \pi$$

τ:振幅变化周期

拍频 $\nu = \frac{1}{\tau} = \left|\nu_2-\nu_1\right|$

单位时间内合振动加强和减弱的次数叫拍频