重庆大学2024数学建模春季赛题目

请各队从下列6个题目中任选一个解决,并写出竞赛论文（包括标题、摘要、关键词、问题重述、问题分析、模型假设、符号说明、模型的建立与求解、结果分析与模型检验、模型评价、参考文献和附录）。论文附录内容应包括支撑材料的文件列表，建模所用到的全部完整、可运行的源程序代码（含EXCEL、SPSS等软件的交互命令）等。如果缺少必要的源程序、程序不能运行或运行结果与论文不符，都可能会被取消评奖资格。如果确实没有用到程序，应在论文附录中明确说明“本论文没有用到程序”。

请将你们的选拔赛论文的电子稿（**论文和支撑材料两个文档**）于**5月26日23：55前以附件形式发送至**[**mgsxjm@163.com**](mailto:mgsxjm@163.com)**，不要使用超大附件或第三方链接发送**。请在邮件主题写上选择的A、B、C、D、E或F题，队号以及队员名字，如“A2222张民，李立，王进”。电子稿论文（pdf格式）的文件名也这样命名，如“A2222张民，李立，王进.pdf”，电子稿论文不压缩。支撑材料（不超过20MB）包括用于支撑论文模型、结果、结论的所有必要文件，至少应包含参赛论文的所有源程序，通常还应包含参赛论文使用的数据（赛题中提供的原始数据除外）、较大篇幅的中间结果的图形或表格、难以从公开渠道找到的相关资料等。所有支撑材料使用WinRAR软件压缩在一个文件中（后缀为RAR），支撑材料的命名方式为“A2222张民，李立，王进+支撑材料”。

**A题 数字经济发展与城乡收入差距**

进入21世纪以来，随着互联网和信息技术的不断创新，新一轮的科技革命和行业变迁己经成为全球关注的焦点，借助于数字技术给经济带来的增长红利，全球都在努力发展数字经济。2023年2月，国务院发布《数字中国建设整体布局规划》，数字中国建设的目标是以信息化、智能化、网络化等手段，推动各行业的数字化转型，其中，构建数字经济体系和数字社会体系是政策措施的重点内容，未来数字经济的发展水平将成为衡量综合国力的重要标准。重庆市十分重视数字经济的发展，2021年12月，重庆市政府印发了《重庆市数字经济“十四五”发展规划（2021—2025年）》以及《重庆市深化“云行巴渝”推动数字经济高质量发展实施方案》，以推动重庆市数字经济的发展。

数字技术具有打破时空限制的特点。近些年来，农村电商、农村主播等新兴行业带动一批农村居民实现收入增长。数字通信技术打破城乡之间的信息壁垒，农村居民能够及时获取更多有关就业机会、农业生产等促进其收入提升的信息，城乡都能享受到数字经济快速发展带来的红利。



在我国大力发展数字经济和全面实施乡村振兴战略的背景下，探究数字经济的发展对城乡收入差距的影响作用，可以从促进数字经济发展的角度为缩小城乡差距提供新思路新对策，缓解地区发展不平衡的严峻形势，从而为推动实现共同富裕贡献力量。

（1）收集数据，分析重庆市及其区县数字经济的发展情况和城乡收入差距的现状；

（2）建立数字经济发展评价模型，并计算重庆市及其区县数字经济得分；

（3）分析重庆市数字经济发展对城乡收入差距的影响；

（4）找出重庆市及其区县通过数字经济发展缩小城乡收入差距的瓶颈；

（5）根据你们的研究，给出相关建议。

# B题 “超级海绵”的最优设计问题

海绵是一种多孔材料，通常由天然或人造材料制成，有着良好的吸水性和透气性，广泛应用于各种领域，例如家居用品、工业制造、医疗卫生等。

海绵的密度和孔径大小会影响其吸水和透气性能。一般来说，密度高、孔径小的海绵吸水性强，而密度低、孔径大的海绵透气性强。目前已知的能从空气中吸收水分的“超级海绵”，每公斤海绵能吸收大约50公斤水。

多孔材料的孔径大小和空隙分布是描述其微观结构的两个重要参数，可以影响到海绵吸收水分时的扩散过程、渗透过程和毛细过程。为了探究海绵的微观结构与其吸水能力的关系，请建立数学模型，回答下列问题：

1. 建立数学模型，描述海绵孔径大小与其吸收水分质量之间的关系；
2. 建立数学模型，描述海绵空隙分布与其吸收水分质量之间的关系；
3. 综合（1）和（2）的模型，建立孔径大小和空隙分布与海绵吸水质量之间的关系；
4. 为了找到能够最大限度吸收空气中水分的“超级海绵”，综合（1）、（2）、（3）中的模型，确定“超级海绵”的最优孔径大小和空隙分布规律；
5. 取（4）中求得的“超级海绵”，做成长宽高都是1米的干燥正方体，将其放置在室温20℃，大气压强为一个标准大气压，空气相对湿度为45%的超大密闭空间内。建立“超级海绵”吸收水分质量与时间的关系。

**C题 多个火箭残骸的准确定位**

绝大多数火箭为多级火箭，下面级火箭或助推器完成既定任务后，通过级间分离装置分离后坠落。在坠落至地面过程中，残骸会产生跨音速音爆。为了快速回收火箭残骸，在残骸理论落区内布置多台震动波监测设备，以接收不同火箭残骸从空中传来的跨音速音爆，然后根据音爆抵达的时间，定位空中残骸发生音爆时的位置，再采用弹道外推实现残骸落地点的快速精准定位。

**（1）** 建立数学模型，分析如果要精准确定空中单个残骸发生音爆时的位置坐标（经度、纬度、高程）和时间，至少需要布置几台监测设备？假设某火箭一级残骸分离后，在落点附近布置了7台监测设备，各台设备三维坐标（经度、纬度、高程）、音爆抵达时间（相对于观测系统时钟0时）如下表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 设备 | 经度(°) | 纬度(°) | 高程(m) | 音爆抵达时间(s) |
| A | 110.241 | 27.204 | 824 | 100.767 |
| B | 110.780 | 27.456 | 727 | 112.220 |
| C | 110.712 | 27.785 | 742 | 188.020 |
| D | 110.251 | 27.825 | 850 | 258.985 |
| E | 110.524 | 27.617 | 786 | 118.443 |
| F | 110.467 | 27.921 | 678 | 266.871 |
| G | 110.047 | 27.121 | 575 | 163.024 |

从上表中选取合适的数据，计算残骸发生音爆时的位置和时间。

**（2）** 火箭残骸除了一级残骸，还有两个或者四个助推器。在多个残骸发生音爆时，监测设备在监测范围内可能会采集到几组音爆数据。假设空中有4个残骸，每个设备按照时间先后顺序收到4组震动波。建立数学模型，分析如何确定监测设备接收到的震动波是来自哪一个残骸？如果要确定4个残骸在空中发生音爆时的位置和时间，至少需要布置多少台监测设备？

**（3）** 假设各台监测设备布置的坐标和4个音爆抵达时间分别如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 设备 | 经度(°) | 纬度(°) | 高程(m) | | 音爆抵达时间(s) | | |
| A | 110.241 | 27.204 | 824 | 100.767 | 164.229 | 214.850 | 270.065 |
| B | 110.783 | 27.456 | 727 | 92.453 | 112.220 | 169.362 | 196.583 |
| C | 110.762 | 27.785 | 742 | 75.560 | 110.696 | 156.936 | 188.020 |
| D | 110.251 | 28.025 | 850 | 94.653 | 141.409 | 196.517 | 258.985 |
| E | 110.524 | 27.617 | 786 | 78.600 | 86.216 | 118.443 | 126.669 |
| F | 110.467 | 28.081 | 678 | 67.274 | 166.270 | 175.482 | 266.871 |
| G | 110.047 | 27.521 | 575 | 103.738 | 163.024 | 206.789 | 210.306 |

利用（2）中所建立的数学模型，从上表中选取合适的数据，确定4个残骸在空中发生音爆时的位置和时间（4个残骸产生音爆的时间可能不同，但互相差别不超过5 s）。

**（4）**假设设备记录时间存在0.5 s的随机误差，请修正（2）中所建立的模型以较精确地确定4个残骸在空中发生音爆时的位置和时间。通过对问题（3）的表中数据叠加随机误差，给出修正模型的算例，并分析结果误差。如果时间误差无法降低，提供一种解决方案实现残骸空中的精准定位（误差 km），并自行根据问题（3）所计算得到的定位结果模拟所需的监测设备位置和音爆抵达时间数据，验证相关模型。

**附** 震动波的传播速度为340 m/s，计算两点间距离时可忽略地面曲率，纬度间每度距离值近似为111.263 km，经度间每度距离值近似为97.304 km。

**D题 音板的振动模态分析与参数识别**

音乐来自乐器，乐器产生于制造，而制造需要数理逻辑。

在20世纪末，我国就已经形成了较为完整的乐器工业生产体系，基本可以加工世界上所有大类乐器，门类齐全，品种众多。其中，在弦乐器（例如钢琴、小提琴、吉他、二胡等）的生产过程中，音板是决定乐器音色质量的重要部件。由于弦的振动所辐射的声能量效率很低，因此琴弦通常需要带动音板振动，以提高其声能量辐射效率。音板是连续弹性薄板，受到琴弦的激励后会产生更多的振动模态，从而产生更丰富美妙的谐音。

弹性板的振动模态包含振动频率、振型等，分别是弹性算子（偏微分算子）的特征值的虚部和相应的特征向量。音板的振动模态与其几何形状和厚度，所选材质的密度、杨氏模量、剪切模量、泊松比等密切相关。本题聚焦于乐器音板的振动模态研究，要求参赛队收集常见乐器制作所用木材、金属、或某类型复合材料和新型材料的振动力学参数资料，建立数学模型，研究如下问题：

**（1）**考虑具有自由边界条件的方形均质音板，建立音板的振动数学模型，计算并对比大小一致材质不同的音板频率在2000 Hz范围内相应振动模态的频率和振型：云杉木材，某类型常用金属、某类型高新复合材料和新型材料。

**（2）**选择一种特定的云杉木材来制作一块厚度非均匀，且具有一定弯曲度的薄音板（具自由边界条件）。建立音板的振动数学模型，并计算附件里图所示轮廓的木材音板在2000 Hz的范围内相应振动模态的频率和振型。

**（3）** 附件给出了通过特殊设备获得的某种具有自由边界条件非均质音板的5个模态情况，包括从小到大排列的5个振动频率和对应的振型图。图的颜色相同的地方代表振动方向一致，红、黄色代表该处向上振动，蓝色、绿色代表该处向下振动，暖色或冷色越深代表振动幅度越大。它们是动态曲面函数在这些振动频率上的单位范数分解，即

其中频率从小到大排列，理论上有无限多个，函数是对应的振型，它的平方在参考平面区域的积分等于1。根据附件给出的5个频率对应的振型图描述振型函数。

**（4）**对附件给出的振型图轮廓形状的自由振动非均质音板，确定它的物理和厚度参数（可能随平面位置变化），使得它的前5个模态最接近附件给出的模态信息。对其制造材质选择给出建议。

**E题 编译器版本的识别问题**

作为一种重要的工具，电子计算机自诞生以来，经历了极为快速的发展。区区百年的时间内，无论从体积、能耗、计算速度，还是应用能力等方面，电子计算机都出现了极为显著的变化。但要充分利用这一工具，必须使用能够被电子计算机解释执行的指令序列，即程序。

最早可用于在电子计算机上执行的程序通常使用机器语言（machine language）编制。由于该类语言并不直观，故它极大地限制了电子计算机的普及。为克服这一困难，1957年诞生了第一个自动编译器，FORTRAN。此后，大量性能更高并支持近乎自然语言的编译器被设计了出来，例如，著名的C/C++编译器，Python编译器等。编译器的出现极大地推动了电子计算机在当代的广泛应用。

为方便使用电子计算机，人们需首先按照一定的规则（即程序设计语言）将需要电子计算机完成的指令以特定的顺序集成在一起，形成脚本（即程序），然后使用编译器自动将脚本翻译为一系列机器语言的组合（即编译），编译器的编译结果最后会提交电子计算机执行。

随着程序设计语言的不断变化，编译器也会不断更新。例如，GCC（the GNU Compiler Collection）就已经更新到了13.2.0版本[1]。不同版本的编译器在编译同一程序脚本时，编译结果会存在一定的差异；相同版本的编译器在使用不同编译选项时，编译结果也会出现差异。能否利用编译结果差异区分编译器的版本？你们的任务是

（1）使用GCC中不同版本的C++编译器编译附件1中的程序源代码[2]，并对比使用默认编译选项时的编译结果。找出区分这些编译结果的主要特征。

（2）根据问题（1）中得到的特征，构造一个判别函数，使得能从各版本C++编译器使用默认编译选项时的编译结果，判别区分编译器版本。

（3）用GCC中不同版本的C++编译器编译附件2中的源程序代码[3]，给出直接使用问题（2）中得到的判别函数区分编译器区版本的结果。研究使用附件1、2原代码编译结果之一都能区分GCC中不同版本的C++编译器的判别函数。

（4）给出几条提高由编译结果区分编译器版本的判别函数性能的建议，包括区分度和对原代码的泛化性。

**注意事项**

1. 请直接从文献[1]给出的GCC网站上下载必要的编译器，不要使用第三方工具中提供的编译环境及编译器；

2. 请根据问题的需要自主选择适当的操作系统，并在作品中明确指出操作系统类型。

**参考文献**

[1] https://bigsearcher.com/mirrors/gcc/releases/

[2] https://www.jb51.net/article/170405.htm

[3] https://zhuanlan.zhihu.com/p/499738807

**F题 批量工件并行切割下料问题**

板材切割下料是工程机械领域重要的生产环节。热切割机由固定板材的底部轨道和发出激光（或火焰）的多刀具系统构成。在一块板材下料过程中，底部轨道（下面简称轨道）只能沿着板材的长边（纵向）做来回移动，移动速度可在区间[-80,80]mm/s上连续变化；多把切割刀排列在平行于板材短边的一条直线上，每一把切割刀具可以在保持至少100（mm）相互间距和横向次序下做独立（方向和速度都可不一样）横向移动、升起空载、恢复切割、或停机等待其它刀具运行完毕；横向移动速度可在区间[-50,50]/s上连续变化。每一切割刀具不能做纵向移动，在同一块板材加工过程中，每一刀具停机后也不能从新开机。理论上，在底部轨道与多刀具移动配合下，可并行切割下料多个曲边工件。工件与板边保留不小于10边距,工件之间保留不小于10加工间距。你们的任务是：

1. 不考虑切割机运行约束和一块板材的切割下料所需时间，分别针对三种矩形板材：A8000\*2500、B6000\*2000、C6000\*2500，任意选取附件1中1-15号工件模板（忽略每个模板的内部孔洞）中的工件切割下料，每个型号工件可下料多个，但每块板材切割出的工件至少包含5种型号。给出三种板材的切割排版方案，极大化板材面积利用率。
2. 假设可以最多使用5把切割刀下料，设计分别从A、B、C三种型号的板材切割出一题中所得到的下料结果工件的方案，使得整块板的切割下料所需时间尽量短。给出轨道一维移动和所使用的每把刀具的协同运行方案（包括每个刀具横向移动、升起空载、恢复切割、停机等）。
3. 附件2给出了一个批量工件的型号分布。选取A,B,C 型板材的任意数量组合切割下料这批工件，不考虑设备时间利用率，极大化所需三个型号板材的总体面积利用率，给出每个型号的板材所需数量和切割排版方案。
4. 假设可以最多使用10把切割刀下料附件2给出的批量工件，所需A,B,C 型板材的总体利用率不小于三题中所得排版利用率的95%，极小化这批工件的总体切割下料所需时间。给出每个型号的板材所需数量，给出每块板材下料时轨道移动和所使用的每把刀具的运行方案。
5. 实际工况不仅要考虑板材利用率和设备时间利用率，还要考虑刀具空载的能量耗费，能量、板材和设备时间三者都具有经济价值，附件2给出了三者价格比例（其中能量的计量单位使用1刀具开机1小时）。使用最多10把刀具切割下料附件2给出的批量工件，极小化所使用的能量、板材和设备时间的价值总和。给出每个型号的板材所需数量，给出每块板材下料时轨道移动和所使用的每把刀具的协同运行方案。