**广 州 大 学**

**2020 -2021 学年第 2 学期研究生专业课考试卷**

**课程 高等计算机算法 考试形式（开卷）**

**学院 计算机科学与网络工程学院 专业 网络空间安全 学号 姓名**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **题次** | **一** | **二** | **三** | **四** | **五** | **总分** | **评卷人** |
| 分数 |  |  |  |  |  |  |  |
| 评分 |  |  |  |  |  |  |  |

1. 请回答下面两个问题。
2. （10分） 设*f*(*n*)和*g*(*n*)是两个非负函数。请证明函数的阶有如下性质： *f*(*n*)= *O*(*g*(*n*))*,* 当且仅当 *g*(*n*) = *Ω* (*f*(*n*))。
3. （10分） 假设你的算法有如下6种时间复杂度，请根据其阶由低到高进行排序（如果*fi*(*n*)排在*fj*(*n*)前面，则有*fi*(*n*) = *O*(*fj*(*n*))），并证明你的排序是对的。
   1. *f*1(*n*) = 1000000
   2. *f*2(*n*) = 10*n*
   3. *f*3(*n*) = *n*1/3
   4. *f*4(*n*) = 
   5. *f*5(*n*) = 
   6. *f*6(*n*) = *nn*
4. （20分） 给定两个整数集合*A*={*a*1, *a*2, …, *an*}和*B*={*b*1, *b*2, …, *bm*}，其中*m*=log *n*，请设计时间复杂度为O()的算法计算集合*C*=，要求：
5. 给出算法伪代码，并给出时间复杂度和空间复杂度的分析；
6. 严格证明算法正确性。
7. （20分）某众包平台发布了一项图片标记任务：给定图片集合*S*={*p*1, *p*2, …, *pn*}，图片*pi*的尺寸是*hi*×*vi*，要求给*S*中的每张图片都打上标签。

worker A和worker B打算共同完成这项任务，两人工作效率相同，且每张图片只需要一人就可完成，打标签需要的时间与图片尺寸成正比。不过，worker A和worker B都不想“吃亏”，换言之，两人都不希望自己在这项任务上的工作时间比对方长。因此，他们想找到“绝对公平”的任务分配方案：在*S*中每张图片分配且仅分配给一个人的前提下，保证worker A和worker B的工作时间相同。

请设计算法判断是否存在worker A和worker B想要的“绝对公平”的任务分配方案，要求：

1. 给出算法伪代码，并分析算法时间和空间复杂度；
2. 严格证明算法正确性。
3. （20分） 给定无权无向连通图*G*(*V*, *E*)，*G*为幂律图，幂律2<λ<3。*T*为*G*上一棵生成树，按照如下规则给*T*上的每个节点分配坐标：生成树上每个节点为其子节点分配不同字母(也可以是编码，为表示方便这里直接用单个字母表示，子节点数量假设不超过26个)，节点坐标即为其父节点坐标与被分配字母的组合。例如，父节点坐标为aa，其子节点被分配字母b，则子节点坐标为aab。给定图*G*上任意源节点和目的节点对(*u*, *v*)，以节点坐标为地址，将数据包从*u*发送到*v*。转发路径上的每个节点均按照固定的贪心策略选择下一跳节点，直至数据包达到目的节点。

贪心策略如下：选择距离目标节点*v*最近的邻居节点作为下一跳节点。对于*w*和*s*，节点距离*d*=*len*(*w*)+*len*(*s*)-2*len*(*c*(*w*, *s*))，其中，*len*(*w*)为*w*节点坐标长度，即字符串长度，*c*(*w*, *s*)为节点*w*和节点*s*的最长公共前缀。

1. 给出贪心算法伪代码，并分析算法时间复杂度。
2. 严格证明算法正确性，即给定任意源节点和目的节点，按照以上贪心策略是否能找到一条转发路径。假设找不到，应如何解决改问题？
3. 请回答贪心算法是否存在优化解？若存在优化解，给出贪心选择性和优化子问题分析和证明；若不存在优化解，证明该算法的近似比。
4. 请按要求分析下述问题（20分）

给定简单连通无向图（无自环、无多重边）以及正整数，问：图*G*中是否包含一棵生成树*T*，使得生成树*T*中叶子节点总数至少为*k*？

回答以下两问：

1. 请给出上述问题的问题复杂性分析，并严格证明你的结论。
2. 哪些现实世界中的应用场景可以形式化上述问题？请给出形式化的过程。