QUANTUM COMPUTING CENTER LATIN AMERICA





K · **U** · **A** · **T** · **0** · **M** · **U**

SIMULADOR QUÂNTICO

 $\frac{||\mathbf{P}||}{2m}$





Algoritmo VQLS

SENAI CIMATEC QUANTUM COMPUTING CENTER LATIN AMERICA

Introdução

Panorama Geral do Algoritmo

Complexidade de Execução do Algoritmo

Função de Custo e Ansatz

Operadores no Circuito

Vamos para a prática?





Introdução



• O Algoritmo VQLS foi proposto em 2020 por Bravo *et al.* como uma alternativa ao HHL para a resolução de sistemas lineares:

Bravo-Prieto, C., LaRose, R., Cerezo, M., Subasi, Y., Cincio, L., Coles, P. J. (2019). Variational quantum linear: solver; arXiv preprint arXiv:1909.05820.

- A estratégia do algoritmo é permitir a implementação de uma função de custo por meio de parâmetros quânticos, otimizando-a classicamente (algoritmo híbrido);
- Isso permitiria uma maior redução do erro associado ao ruído nos computadores quânticos atuais (NISQ).





Entrada: O algoritmo recebe como entrada um operador U que prepara o estado $|b\rangle$, de modo que $U|0\rangle = |b\rangle$, assim como uma matriz A decomposta em uma combinação linear de matrizes unitárias A_I , tal que:

$$A = \sum_{l=1}^{L} c_l A_l,$$

onde c_l é um número complexo.

Supomos alguma condições iniciais para o problema:

- I. b é um vetor normalizado;
- II. A é uma matriz esparsa, Hermitiana e com a condição de $||A|| \le 1$;
- III. O operador U e a matriz A podem ser eficientemente implementados em um circuito quântico de *n* qubits.





Panorama Geral do Algoritmo

Saída: O algoritmo terá como saída o estado $|x\rangle$, que é aproximadamente proporcional à solução do sistema Ax = b. Para tanto, são feitas as seguintes etapas:

- 1. Um ansatz (α) é implementado para o cálculo de $|x\rangle$, tal que $|x(\alpha)\rangle = V(\alpha)|0\rangle$, onde α é um conjunto de parâmetros calculados na função para a obtenção do resultado;
- 2. Uma função de custo $C(\alpha)$ é estimada e encaminhada para o processo de minimização ocorrido classicamente para encontrar α_{opt} ;
- 3. Portanto, $V(\alpha_{opt})$ prepara o estado $x/||x||_2$.

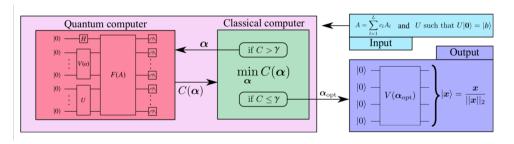




Panorama Geral do Algoritmo



Segue abaixo um esquema gráfico representando as sequências do algoritmo descritas anteriormente.



O parâmetro γ utilizado no processamento clássico do se relaciona com a tolerância de erro ϵ , que é o traço entre a solução exata $(|x_0\rangle)$ e a solução aproximada $(|x(\alpha_{opt})\rangle)$.





- Classicamente. algoritmos para resolução de sistemas lineares costumam ser da ordem de $O(N\sqrt{k})$, sendo N o número de equações lineares e k o número condicional da matriz:
- o HHL, por exemplo, pode realizar essa mesma tarefa com uma complexidade poly (log N, k);
- Já o VQLS pode escalonar linearmente em k, logaritmicamente em $1/\epsilon$ ou polilogaritmicamente em N. sendo ϵ a tolerância a erro do algoritmo, dada por:

$$\epsilon = (1/2) Tr | |x_0\rangle \langle x_0| - |x(\alpha_{opt})\rangle \langle x(\alpha_{opt})|,$$

onde ϵ é o traço entre a solução exata $(|x_0\rangle)$ e a solução aproximada $(|x(\alpha_{opt})\rangle)$.





Função de Custo e Ansatz

Conforme dito anteriormente, o algoritmo busca um estado em que $A|x\rangle$ seja proporcional a $|b\rangle$, ou seja:

$$|\Psi\rangle := rac{A\,|x
angle}{\sqrt{\langle x|\,A^\dagger A\,|x
angle}} pprox |b
angle$$

Para tanto, um circuito unitário V (ansatz) deve ser aplicado a partir de parâmetros otimizados classicamente $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{opt})$ pela função de custo.

$$|x\rangle = V(\alpha_{opt})|0\rangle$$



Esses parâmetros devem ser aplicados para maximizar a sobreposição entre os estados $|\Psi\rangle$ e $|b\rangle$, o que nos leva a seguinte função de custo **global**:

$$C_G = 1 - |\langle b | \Psi \rangle|^2,$$

Sendo, portanto, uma função de minimização com respeito a esses parâmetros variacionais, representada na literatura como:

$$C_G = 1 - rac{\sum_{I,I'} c_I c_{I'}^* \left\langle 0 \right| V^\dagger A_{I'}^\dagger U |0
angle \left\langle 0 \right| U^\dagger A_I V \left|0
ight
angle}{\sum_{I,I'} c_I c_{I'}^* \left\langle 0 \right| V^\dagger A_{I'}^\dagger A_I V \left|0
ight
angle},$$



Para a obtenção de uma função de custo **local** eficientemente aplicada no circuito quântico, substituímos $|0\rangle\langle 0|$ da equação anterior pelo seguinte operador:

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} Z_j,$$

Tal que Z_j é a porta Z aplicada no qubit j. Tendo como função de custo local:

$$C_L = 1 - rac{\sum_{I,I'} c_I c_{I'}^* \left\langle 0
ight| V^\dagger A_{I'}^\dagger U P U^\dagger A_I V \left| 0
ight
angle}{\sum_{I,I'} c_I c_{I'}^* \left\langle 0
ight| V^\dagger A_{I'}^\dagger A_I V \left| 0
ight
angle},$$





Função de Custo e Ansatz

Note que essa função de custo local continua sendo uma boa aproximação para *CG*, uma vez que:

$$C_G \rightarrow 0 \Leftrightarrow C_I \rightarrow 0$$

Substituindo o operador P na equação, temos então:

$$C_{L} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l,l'} c_{l} c_{l'}^{*} \mu_{l,l',j}}{\sum_{l,l'} c_{l} c_{l'}^{*} \mu_{l,l',-1}},$$

Que pode ser calculado sempre que for possível medir o coeficiente:

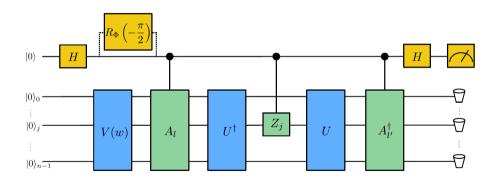
$$\mu_{I,I',j} = \langle 0 | | V^{\dagger} A_{I'}^{\dagger} U Z_{I} U^{\dagger} A_{I} V | 0 \rangle,$$



Operadores no Circuito



Vejamos o circuito novamente a um nível mais detalhado:







Vamos para a prática?



Para o exemplo de aplicação, iremos utilizar o seguinte sistema:

$$Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.35355339 \\ 0.35355339 \\ 0.35355339 \\ 0.35355339 \\ 0.35355339 \\ 0.35355339 \\ 0.35355339 \\ 0.35355339 \end{pmatrix}$$

