# QUANTUM COMPUTING CENTER LATIN AMERICA





## **K** · **U** · **A** · **T** · **0** · **M** · **U**

SIMULADOR QUÂNTICO

 $\frac{||\mathbf{P}||}{2m}$ 





- ▶ QAOA é acrônimo de *Quantum Approximate Optimization Algorithm*.
- ► Foi proposto em 2014 por Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, Sam Gutmann, pesquisadores do MIT na referência principal: https://arxiv.org/abs/1411.4028
- É um algoritmo híbrido clássico-quântico.
- ➤ Visa achar uma solução aproximada de um problema de otimização baseado em uma função objetivo com o auxílio de um algoritmo clássico de otimização.
- Na referência principal, os autores aplicaram o algoritmo para o problema MAXCUT da teoria de grafos.





### Algoritmo Quântico de Otimização Aproximada - QAOA

SENAI CIMATEC

QUANTUM COMPUTING CENTER

LATIN AMERICA

Em uma publicação posterior dos mesmos autores:

A Quantum Approximate Optimization Algorithm Applied to a Bounded Occurrence Constraint Problem https://arxiv.org/abs/1412.6062

foi mostrado que o QAOA superava qualquer algoritmo clássico para resolver o problema combinatorial Max E3LIN2, que visa achar uma solução aproximada para um sistema de equações com n variáveis binárias tal que cada equação tem exatamente 3 variáveis.

Em 2015, a referência

B. Barak, et al. Beating the random assignment on constraint satisfaction problems of bounded degree.

https://arxiv.org/abs/1505.03424

conseguir superar o QAOA para o problema Max E3LIN2 usando algoritmos clássicos





- ▶ O QAOA tem relação com os algoritmos quânticos adiabáticos, que foram propostos em 2000 na referência:
  - E. Farhi, J. Goldstone, S. Gutmann, M. Sipser. *Quantum Computation by Adiabatic Evolution* https://arxiv.org/abs/quant-ph/0001106
- ▶ O QAOA pode ser visto como um passeio quântico a tempo contínuo, como foi mostrado na referência:
  - S. Marsh, J. B. Wang. (2020-06-08). Combinatorial optimization via highly efficient quantum walks.
  - https://arxiv.org/abs/1912.07353
- Até o momento, o QAOA não supera nenhum algoritmo clássico de otimização equivalente.





#### Sumário desta Apresentação

SENAI CIMATEC

QUANTUM COMPUTING CENTER

LATIN AMERICA

- ▶ Problema da partição como exemplo
- ► Algoritmo QAOA
- Análise do QAOA
- Como implementar o QAOA







► Separe uma lista *L* de números em duas sub-listas *L*1 e *L*2 tal que

$$\sum_{i} L1_{i} = \sum_{i} L2_{i}$$

- ▶ Exemplo: L = [2, 1, 1]. Solução: L1 = [2] e L2 = [1, 1].
- O problema de decisão associado é NP-completo
- O problema de otimização associado é NP-hard
- É considerado o problema NP-completo mais fácil
- ▶ É relacionado com o problema da soma dos sub-conjuntos



Seja a seguinte função objetivo:

$$f(\vec{s}) = \left(\sum_{i} s_{i} L_{i}\right)^{2},$$

onde  $s_i \in \{+1, -1\}$ . Ache  $\min_{\vec{s}} f(\vec{s})$ 

► Note que

$$f(\vec{s}) = \sum_{i} s_i L_i \sum_{j} s_j L_j = \sum_{i,j} s_i s_j L_i L_j.$$

ightharpoonup Exemplo: L = [2, 1, 1]

$$f(1,1,1) = 16, f(+1,1,-1) = 4, f(+1,-1,1) = 4, f(+1,-1,-1) = 0,$$

$$f(-1,1,1) = 0$$
,  $f(-1,1,-1) = 4$ ,  $f(-1,-1,1) = 4$ ,  $f(-1,-1,-1) = 16$ .





- ▶ Use o Hamiltoniano C (operador Hermitiano ou Observável)
- Os autovalores de C são energias

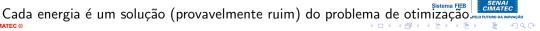
$$C|\vec{s}\rangle = E_{\vec{s}}|\vec{s}\rangle,$$

onde  $|\vec{s}\rangle$  é um autovetor de C

▶ Defina C tal que a solução do problema de otimização clássico min $_{\vec{s}} f(\vec{s})$  seja o menor autovalor de C.

$$C = \left[ egin{array}{cccc} f(+1,...,+1) & 0 & 0 & 0 \ 0 & f(+1,...,-1) & 0 & \ & & \ddots & \ 0 & 0 & f(-1,...,-1) \end{array} 
ight]$$





#### Como construir C?

- C é muito grande para ser processado no computador clássico
- ▶ Como construir *C* com menos recursos? Resposta: Use um computador quântico.
- Para o problema da partição, a função objetivo é

$$f(\vec{s}) = \sum_{i,j} s_i s_j L_i L_j.$$

▶ Seja  $s_i$  um autovalor de  $Z_i$  associado ao autovetor  $|s_i\rangle$ . Então

$$C = \sum_{i,j} Z_i Z_j L_i L_j.$$

Note que

$$C|\vec{s}\rangle = f(\vec{s})|\vec{s}\rangle.$$





▶ Definição de Z (x é um bit,  $|x\rangle$  é um qubit):

$$Z|x\rangle = (-1)^x|x\rangle$$

▶ Definição de Z<sub>i</sub>:

$$Z_i|x_1,...,x_n\rangle = I \otimes ... \otimes Z \otimes ... \otimes I|x_1,...,x_n\rangle$$
  
=  $(-1)^{x_i}|x_1,...,x_n\rangle$ 

► Então

$$Z_i Z_j | x_1, ..., x_n \rangle = (-1)^{x_i} (-1)^{x_j} | x_1, ..., x_n \rangle$$

▶ Conversão spin ←→ bit:



Comece com o computador quântico na superposição uniforme

$$|\psi_0
angle=rac{1}{\sqrt{\||\psi_0
angle\|}}(|0...0
angle+|0...1
angle+...+|1...1
angle)$$

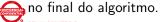
e obtenha o estado final

$$|\psi_f\rangle = ... + 0.9999 e^{i\theta} |\text{sol}\rangle + ...$$

onde sol é a solução ideal. Se houver mais do que uma solução ideal,  $|\psi_f\rangle$  deve ser uma superposição das soluções ideais.

Importante: Queremos achar  $|\psi_f\rangle$  que minimiza a energia média

$$\langle \psi_f | C | \psi_f \rangle$$





- lsto vem do postulado da medição.
- C é Hermitiano logo é um observável que tem a decomposição espectral

$$C=\sum_{\lambda}E_{\lambda}P_{\lambda}.$$

Fazendo o sanduíche:

$$\langle \psi_f | C | \psi_f \rangle = \sum_i E_i \langle \psi_f | P_i | \psi_f \rangle = \sum_i E_i p_i.$$

Note que se  $|\psi_f\rangle$  for o autovetor de menor energia, então

$$\langle \psi_f | C | \psi_f \rangle = 0$$

pois a energia mínima no problema da partição é zero.





Passo 1. Escolha os ângulos  $\gamma_1$  and  $\beta_1$ . QAOA sugere um método determinístico por divisão de  $[0,2\pi] \times [0,\pi]$  e repetição dos passos.

Passo 2. Inicialize o CQ na superposição uniforme:  $|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_j|j\rangle$ 

Passo 3. Aplique

$$U(C, \gamma_1) = \exp(-i\gamma_1 C) = \operatorname{diag}_j \{ \exp(-i\gamma_1 C_{j,j}) \}$$

Passo 4. Aplique o mixer  $B = \sum_{j} X_{j}$ :

$$U(B, \beta_1) = \exp(-i\beta_1 B) = \prod_j \exp(-i\beta_1 X_j) = \prod_j R_x^{(j)}(2\beta_1)$$

Passo 5. Repita p vezes os passos 3 e 4 escolhendo novos ângulos  $\gamma_2,...,\gamma_p$  and  $\beta_2...\beta_p$  em cada rodada e faça no final a medição dos qubits na base computacional.





O estado final é

$$|\psi_f\rangle = \exp(-i\beta_p B) \exp(-i\gamma_p C)... \exp(-i\beta_1 B) \exp(-i\gamma_1 C) |\psi_0\rangle$$

onde

$$B=\sum_{i}X_{i}$$
.

Após a medição quando o estado é  $|\psi_f\rangle$ , obtemos uma cadeia de n bits, que é a solução-candidato.

Devemos analisar a qualidade do resultado usando

$$F(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \left\langle \psi_f(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \middle| C \middle| \psi_f(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \right\rangle$$

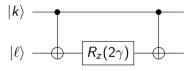




ightharpoonup Circuito para  $\exp(-i\gamma Z_j)$ 

$$--R_z(2\gamma)$$

ightharpoonup Circuito para  $\exp(-i\gamma Z_k Z_\ell)$ 



Note que  $e^{-i\gamma Z_k Z_\ell} |k\ell\rangle = e^{-i\gamma (-1)^{k\oplus \ell}} |k\ell\rangle$ 



► Por Definicão

$$U(B, \beta_1) = \exp(-i\beta_1 B) = \prod_{i=1}^n \exp(-i\beta_1 X_i)$$

ightharpoonup Circuito para  $\exp(-i\beta X_j)$ 

$$\operatorname{qubit}_{j} - R_{x}(2\beta)$$