O problema do mix de produção

Vamos utilizar o exemplo da página 26 do livro Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia (Belfiore e Fávero, 2013).

A empresa Venix de brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R$ 12,00 e R$ 60,00, respectivamente.

As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo produzida.

O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo produzida.

Já o processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para uma unidade de carrinho e de triciclo produzida, respectivamente.

O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente.

A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a ***maximizar o lucro líquido semanal****.*

Formulação do modelo matemático

Antes de partir para o código, é importante ter o modelo matemático bem definido.

Variáveis de decisão

Já sabemos o quanto a empresa lucra por unidades vendidas de carrinhos (R$ 12,00) e triciclos (R$ 60,00), agora precisamos saber o quanto produzir de cada um deles, para que o lucro semanal seja o maior possível. Se precisamos decidir o quanto produzir de cada produto, as quantidades a serem produzidas são, de fato, a resposta para o nosso problema. Portanto, temos aqui as variáveis de decisão do modelo:

x_1 = quantidade de carrinhos a ser fabricada por semana

x_2 = quantidade de tricilos a ser fabricada por semana

Função objetivo

O objetivo do problema é **maximizar** o lucro líquido semanal da empresa, e para que isto aconteça, precisamos decidir o quanto fabricar de carrinhos ($x1$) e triciclos ($x2$). O lucro semanal, portanto, é calculado da seguinte forma:

$$\text{Lucro semanal (R\$)} = 12x_1 + 60x_2$$

A função objetivo (z) é quem relaciona o objetivo do problema com as variáveis de decisão. Portanto, fica definida por:

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 60x_2$$

A notação abaixo, no entanto, é mais comum:

$$\max z = 12x_1 + 60x_2$$

Restrições

É necessário "informar" para o modelo todas as condições que o problema impõe, sejam limitações de recursos, requisitos de negócio e etc. Portanto, é aqui que incluímos as restrições do modelo.

Neste problema consideraremos que as matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação são ilimitados, portanto, são informações desprezadas pelo modelo. No entanto, existem limitações de recursos para os processos de usinagem, pintura e montagem. A tabela abaixo resume o tempo de mão de obra especializada necessário em cada processo, por produto:

Processo	Carrinho	Triciclo
Usinagem	15 min. (0,25 hora)	30 min. (0,5 hora)
Pintura	6 min (0,1 hora)	45 min (0,75 hora)
Montagem	6 min (0,1 hora)	24 min (0,4 hora)

Restrições de disponibilidade de mão de obra

Para o processo de usinagem, o tempo disponível é de 36 horas. Ou seja, dadas as limitações de recursos (máquinas, equipamentos, colaboradores e etc.), o processo de usinagem deve consumir no máximo 36 horas. Formulamos esta restrição da seguinte forma:

$$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 36$$

Quanto ao processo de pintura, o tempo disponível é de 22 horas. Logo:

$$0,1x_1 + 0,75x_2 \leq 22$$

Por fim, para o processo de pintura o tempo disponível é de 15 horas. Portanto, temos:

$$0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 15$$

Restrições de não negatividade

Modelamos as restrições de não negatividade para que o modelo não encontre valores negativos para as variáveis de decisão, uma vez que seria impossível fabricar quantidades negativas de carrinhos e triciclos. Portanto, são elas:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

O modelo matemático completo fica definido abaixo:

$$\max z = 12x_1 + 60x_2$$

sujeito a:

$$0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 36$$

$$0,1x_1 + 0,75x_2 \leq 22$$

$$0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$