



---

teoria qualitativa de edo's

---

Exercício 1. Esboce os retratos de fase das seguintes equações diferenciais ordinárias e classifique os pontos de equilíbrio.

(a)  $x' = -x + 1$

(b)  $x' = x(2 - x)$

(c)  $x' = -x(1 - x)(2 - x)$

(d)  $x' = x^2 - x^4$

Exercício 2. Comece por recordar o seguinte:

**Teorema (Forma normal de Jordan):** Dada uma matriz  $A$  de dimensão  $2 \times 2$ , existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $J = P^{-1}AP$  é uma forma normal de Jordan.

Determine  $P$  e a correspondente forma normal de Jordan para as seguintes matrizes.

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(d)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(f)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Exercício 3. Determine a solução do seguinte PVI:  $X' = AX$  com  $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  para cada uma das seguintes matrizes:

(a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(e)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercício 4. Considere a edo planar  $X' = AX$ , onde:

(a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

(c)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcule a solução do seguinte PVI:  $X' = AX$  com  $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ .
2. Estude a estabilidade da solução de equilíbrio.
3. Esboce o retrato de fase.

Exercício 5 (**Modelos ecológicos: competição de espécies**). Considere os seguintes sistemas de edo's:

(a) 
$$\begin{cases} x' = x(8 - 4x - y) \\ y' = y(3 - 3x - y) \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} x' = x(4 - 2x - 2y) \\ y' = y(9 - 6x - 3y) \end{cases}$$

(c) 
$$\begin{cases} x' = x(4 - 2x - y) \\ y' = y(9 - 3x - 3y) \end{cases}$$

1. Estude a estabilidade das soluções de equilíbrio.
2. Esboce o retrato de fase.