Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

oscilações

Oscilador harmónico simples

Comecemos por escrever a equação

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

na forma

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{1}$$

onde $\omega^2 = k/m$. A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 + \omega^2 = 0\,.$$

As raízes desta equação são $r_1 = -\omega i$ e $r_2 = \omega i$. Então a solução geral da equação diferencial (1) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

As constantes c_1 e c_2 podem ser determinadas sabendo-se a posição inicial da partícula, $x(0) = x_0$, e a sua velocidade inicial, $\dot{x}(0) = v_0$. Assim, de (2) temos que $c_1 = x_0$. Derivando (2) e fazendo $t = 0$, obtemos $c_2 = v_0/\omega$. Consequentemente, temos que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)\,. \tag{3}$$

Sejam

$$A := \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}\,, \qquad \cos\phi := \frac{x_0}{A} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\phi := \frac{v_0}{A\omega}\,,$$

com $0 \leq \phi < 2\pi$. Temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \tfrac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \\ &= A\left(\tfrac{x_0}{A}\cos(\omega t) + \tfrac{v_0}{A\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\right) \\ &= A(\cos\phi \cos(\omega t) + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(\omega t)) \\ &= A\cos(\omega t - \phi)\,. \end{aligned}$$

Temos assim um movimento oscilatório em torno da posição de equilíbrio $x = 0$. O afastamento máximo da posição de equilíbrio, A, chama-se *amplitude*. O período da função cosseno em $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, $T = 2\pi/\omega$, é o *período* do movimento, o qual significa o tempo necessário para uma oscilação completa. O inverso do período é a *frequência* $f = \omega/2\pi$. O ângulo ϕ é chamado o *ângulo de fase*.

Oscilador harmónico amortecido

Comecemos por escrever a equação

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$$

na forma

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{4}$$

onde $2\nu = \mu/m$ e $\omega^2 = k/m$.

A equação característica desta equação diferencial é

$$r^2 + 2\nu r + \omega^2 = 0\,.$$

As soluções da equação diferencial dependem das raízes da equação característica, isto é, dependem do sinal de

$$4\nu^2 - 4\omega^2 = \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{\mu^2 - 4km}{m^2}\,.$$

1. **amortecimento forte**: $\mu^2 > 4km$, ou seja, $\nu > \omega$. Neste caso as soluções da equação característica são:

   $$r_1 = -\nu - \ell \quad \text{e} \quad r_2 = -\nu + \ell, \quad \text{onde} \quad \ell = \sqrt{\nu^2 - \omega^2}\,.$$

   Consequentemente, a solução geral de (4) é:

   $$x(t) = e^{-\nu t}(c_1\, e^{-\ell t} + c_2\, e^{\ell t})\,, \quad \ell = \sqrt{\nu^2 - \omega^2}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{5}$$

2. **amortecimento crítico**: $\mu^2 = 4km$, ou seja, $\nu = \omega$. Neste caso

   $$r = -\nu\,,$$

   é uma raiz dupla da equação característica. Consequentemente, a solução geral de (4) é:

   $$x(t) = e^{-\nu t}(c_1 + c_2 t)\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

3. **amortecimento oscilatório**: $\mu^2 < 4km$, ou seja, $\nu < \omega$. Neste caso as soluções da equação característica são:

   $$r_1 = -\nu - \ell i \quad \text{e} \quad r_2 = -\nu + \ell i, \quad \text{onde} \quad \ell = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}\,.$$

   Consequentemente, a solução geral de (4) é:

   $$x(t) = e^{-\nu t}(c_1 \cos(\ell t) + c_2\, \mathrm{sen}\,(\ell t))\,, \quad \ell = \sqrt{\omega^2 - \nu^2}\,, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,. \tag{7}$$

Oscilador forçado

Vamos considerar apenas o caso em que a força externa é periódica do tipo cosseno. O caso do seno é análogo.

Comecemos por escrever a equação

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

na forma

$$\ddot{x} + 2\nu\dot{x} + \omega^2 x = E_0 \cos(\omega_0 t)\,, \tag{8}$$

onde $2\nu = \mu/m$, $\omega^2 = k/m$, $\omega_0 > 0$ e $E_0 = F_0/m > 0$. Para escrevermos a solução geral precisamos de determinar uma solução particular desta equação. Vamos considerar dois casos:

1. **caso I** ($\nu \neq 0$ e $\omega \neq \omega_0$): usando o método dos coeficientes indeterminados, obtemos uma solução particular da equação na forma:

   $$x_p(t) = C\cos(\omega_0 t) + S\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)\,,$$

   $$C = (\omega^2 - \omega_0^2)\,E_0\,\triangle^{-1}\,, \quad S = 2\,\nu\,\omega_0\,E_0\,\triangle^{-1}\,, \quad \triangle = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\,\nu^2\omega_0^2\,.$$

   Tal como fizemos anteriormente, a solução particular $x_p(t)$ pode ser escrita como

   $$x_p(t) = A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1) \tag{9}$$

   onde

   $$A_1 = \sqrt{C^2 + S^2} = \triangle^{-1/2} E_0\,, \ \ \cos\phi_1 = C/A_1\,, \ \ \mathrm{sen}\,\phi_1 = S/A_1\,.$$

   Consequentemente, a solução geral da equação diferencial é

   $$x(t) = x_h(t) + x_p(t)\,,$$

   onde x_p é a expressão dada por (9) e x_h é uma das expressões dadas por (5), (6) ou (7), dependendo dos valores de ν e ω.

2. **caso II** ($\nu = 0$ e $\omega \neq \omega_0$): neste caso obtemos a equação diferencial $\ddot{x} + \omega^2 x = E_0 \cos(\omega_0 t)$. É simples deduzir que

   $$x_p(t) = \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right) \tag{10}$$

   é uma solução particular da equação diferencial. Assim, a solução geral da equação diferencial é obtida tendo em conta a solução geral obtida no caso do oscilador harmónico simples (equação homogénea correspondente) e a solução particular (10), isto é,

   $$x(t) = A\cos(\omega t - \phi) + \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0^2}(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t))\,.$$

Referências

[1] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.