Mestrado Integrado em Engenharia Informática | Universidade do Minho

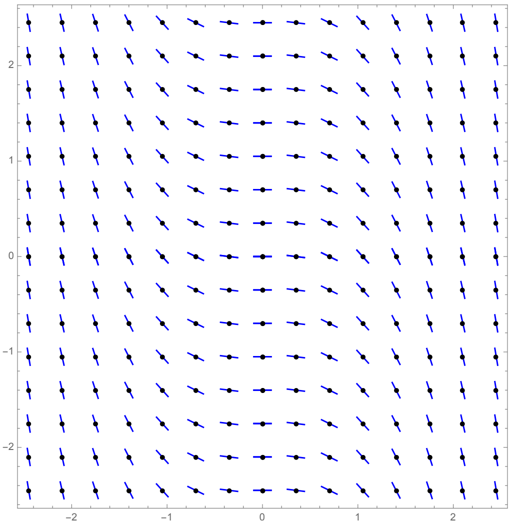
Introdução aos Sistemas Dinâmicos

Outubro 2019 | Teste 1 | Duração: 2h

Nome: Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2 valores) Indique, justificando, a qual das equações indicadas em baixo corresponde o seguinte campo de direções tangentes (apresente a resposta na folha de resolução do teste):



☐ $y' = -y^2$ ☐ $y' = x^2$ ☐ $y' = -x^2$

Exercício 2.

1. (4 valores) Determine as soluções maximais da equação diferencial $y' = -2x\,(y-1)^2$ que passam em cada um dos pontos $P = (1,1)$ e $Q = \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2. (3 valores) Determine a solução maximal da equação diferencial $x\,\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$ que passa no ponto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

3. (3 valores) Responda a **<u>uma e uma só</u>** das duas **Questões** seguintes:

   Questão 1. Determine a solução maximal da equação diferencial $y' = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$ que passa no ponto $(1, -2)$.

   Questão 2. Determine a solução maximal da equação diferencial $y' - \dfrac{y}{x} = -2xy^3$ que passa no ponto $(1, \frac{1}{3})$.

v.s.f.f.

Exercício 3. (3.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas **Questões** seguintes:

Questão 1.

(a) Estabeleça uma equação diferencial ordinária linear e homogénea cuja solução geral seja dada por

$$\varphi(x) = e^{x}(c_1 + c_2\, x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) A partir da alínea anterior, construa uma equação diferencial ordinária cuja solução geral seja dada por

$$y(x) = e^{x}(c_1 + c_2\, x + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x) + x^2 + 1, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Questão 2. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$y'' - 2y' - 3y = 2 \operatorname{sen} x + x\, e^{-x}.$$

Exercício 4.

1. (2.5 valores) Considere a equação diferencial planar $X' = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcule a solução do seguinte PVI: $X' = AX$ com $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

   (b) Esboce o retrato de fase.

2. (2 valores) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x' = x(9 - 3x - 6y) \\ \\ y' = y(4 - 2x - 2y) \end{cases}$$

   Justifique que $X^* = (1, 1)$ é um ponto de equilíbrio e estude a sua estabilidade.

FIM

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tem-se que: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$, onde $\operatorname{tr}(A) = a + d$ é o traço da matriz A. Consequentemente, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{2}\right)^2 - \det(A)}$.

Se A é invertível, então a matriz inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.