



## Cálculo – Época de Exame

Nome completo::

Número::

Prova::

T2:: Teste 2

**Justifique convenientemente todas as suas respostas.**

1. (2 valores)

Considere a função polinomial  $Q(x) = 3x^4 - 5x^2 + x + 1$ .

(a) Identifique o polinómio de Taylor de  $Q$  de ordem 3 em torno do ponto zero.

(b) Escreva o polinómio  $Q$  em potências de  $(x - 1)$ .

2. (7 valores)

**Responda a esta questão na folha de teste.** Calcule cada um dos integrais.

(a)  $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 3} dx$

(c)  $\int x^2 \operatorname{sh}(2x) dx$

(b)  $\int \frac{6 - x}{x(x^2 + 3)} dx$

(d)  $\int_1^2 \frac{1}{x(1 + \ln x)^2} dx$  fazendo a substituição  $t = \ln x$ .

3. (5 valores)

Considere a região do plano definida por  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leq y \leq |x|\}$ .

(a) Apresente um esboço gráfico da região  $D$ .

(b) Calcule a medida da área da região  $D$ .

(c) Estabeleça um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular o perímetro da região  $D$ .

4. (4 valores)

Considere o seguinte integral

$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

(a) Mostre que o integral é convergente.

(b) Determine a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n^2}$ .

5. (2 valores)

Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

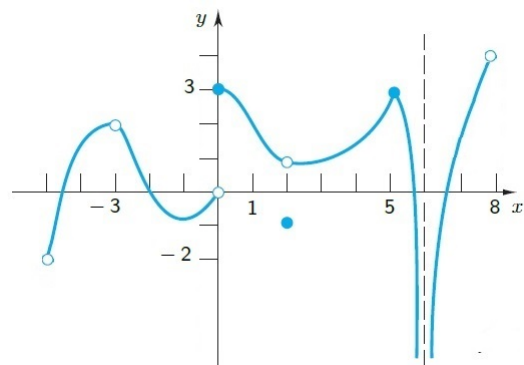
(a) Se  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  então  $F$  é uma função contínua.

(b) Se  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável tal que  $\int_0^1 f(x) dx = -1$  e  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  então  $f$  tem pelo menos um zero.

## 1. (6 valores)

Considere a função  $f : ]-5, 8[ \setminus \{-3, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico está representado na figura.

- (a) O que pode dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  quando  $a = -3, a = 0, a = 5$  e  $a = 6$ ?



- (b) Indique, caso existam, os pontos de descontinuidade de  $f$ .

- (c) Indique, se existir, um ponto onde  $f$  seja derivável e um ponto onde  $f$  não seja derivável.

- (d) O que pode dizer sobre o sinal de  $f'(a)$  e de  $f''(a)$  quando  $a = -4, a = 4$ ?

- (e) Indique uma restrição de  $f$  a  $I$ , um intervalo à sua escolha, em que a função seja integrável mas não seja primitivável.

- (f) Qual o sinal de  $\int_{-2}^1 x f(x) dx$ ?

## 2. (3 valores)

Considere a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \ln(2 + \sin^9 x)$ .

- (a) Indique o domínio  $D$  da função  $f$ .

(b) Calcule a derivada da função  $f$ .

(c) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(\pi/2, f(\pi/2))$ .

3. (2 valores)

**Responda a esta questão na folha de teste.** Calcule, ou mostre que não existe,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{1 - \cos x}$ .

4. (3 valores)

**Responda a esta questão na folha de teste.** Calcule cada um dos integrais indefinidos.

(a)  $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 3} dx$

(b)  $\int x^2 \operatorname{sh}(2x) dx$

5. (4 valores)

Considere a região do plano definida por  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leq y \leq |x|\}$ .

(a) Apresente um esboço gráfico da região  $D$ .

(b) Calcule a medida da área da região  $D$ .

6. (2 valores)

**Responda a esta questão na folha de teste.** Estude a natureza de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^6 + 6}$ .