Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

bifurcações

Exercício 1. Considere a família de transformações $f_c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + c \end{array}$, $c \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_c são as soluções da equação $f_c(x) = x$. Temos que:

$$f_c(x) = x \Leftrightarrow x^2 + c = x \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Sejam

$$p_+(c) = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \quad \text{e} \quad p_-(c) = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Atendendo ao sinal de $1 - 4c$, podemos concluir que:

- f_c não tem pontos fixos se $c > \frac{1}{4}$.
- f_c tem um único ponto fixo $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ quando $c = \frac{1}{4}$.
- f_c tem dois pontos fixos distintos $p_+(c) > p_-(c)$ quando $c < \frac{1}{4}$.

(b) Ocorre uma bifurcação sela-nó para $c_0 = \frac{1}{4}$.

Temos que $f_c'(x) = 2x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f'_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}) = 1$ e $f''_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2}) = 2 \neq 0$.

Para $c > c_0$ não existem pontos fixos, para $c = c_0$ existe exatamente um ponto fixo e para $c < c_0$ existem exatamente dois pontos fixos.

(c) Quando $c > \frac{1}{4}$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$, para todo o $x_0 \in \mathbb{R}$.

Comecemos por recordar que não existem pontos fixos. Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a trajectória $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é majorada. Porque $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo, o que é absurdo uma vez que não existem pontos fixos. O absurdo resultou de termos suposto que a trajectória $\left(f^n(x_0)\right)_n$ era majorada. Concluímos assim que $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

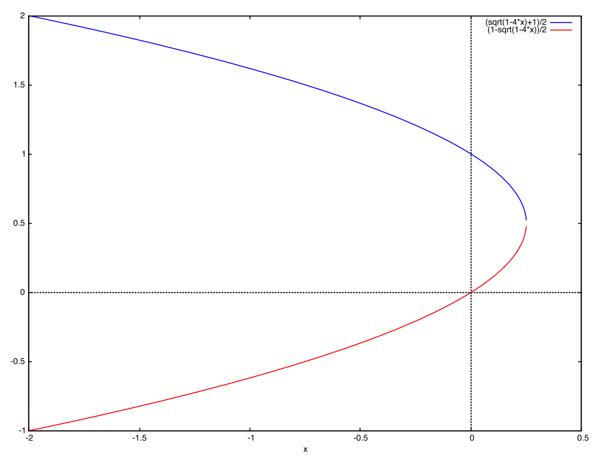
(d) Ver a resolução do exercício 6.f) da folha de exercícios 13. Tem-se que $W^s(\frac{1}{2}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(e) Ocorre uma bifurcação de duplicação do período para $c_1 = -\frac{3}{4}$.

Temos que $f_c'(x) = 2x$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -1$ (note que $f_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$). Além disso, tem-se que:

- para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, f_c tem um ponto fixo atrativo em $p_-(c)$ e não tem ciclos de período 2;
- para $c = -\frac{3}{4}$, $f_{-\frac{3}{4}}$ tem um ponto fixo em $p_{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$ tal que $|f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2})| = 1$ $(f'_{-\frac{3}{4}}(-\frac{1}{2}) = -1)$ e não tem ciclos de período 2;
- para $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, f_c tem pontos fixos repulsivos em $p_-(c)$ e $p_+(c)$ e um ciclo atrativo de período 2 em $q_\pm(c) = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4c-3})$ (que pode ser obtido resolvendo a equação $f_c^2(x) = x$).

(f) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 2. Considere a família de transformações $f_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda\, x(1-x) \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_λ são as soluções da equação $f_\lambda(x) = x$. Temos que:

$$f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow \lambda\, x(1-x) = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = p_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}.$$

Consequentemente,

- f_λ tem um único ponto fixo, o ponto 0, se $\lambda = 1$.
- f_λ tem dois pontos fixos: $x = 0$ e $x = p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, se $\lambda \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$.

(b) Temos que

$$f'_\lambda(x) = \lambda - 2\lambda x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $x = 0$. Temos que

$$|f'_\lambda(0)| = |\lambda|.$$

Consequentemente,

- se $\lambda \in]0,1[$, então $|f'_\lambda(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;
- se $\lambda > 1$, então $|f'_\lambda(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo;
- se $\lambda = 1$, o ponto fixo 0 não é atrativo nem repulsivo (ver o exercício 8.h) da folha de exercícios 13).

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Temos que

$$|f'_\lambda(p_\lambda)| = |2 - \lambda|.$$

Consequentemente,

- se $\lambda \in]1,3[$, então $|f'_\lambda(p_\lambda)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_λ é atrativo;
- se $\lambda \in]0,1[\cup]3,+\infty[$, então $|f'_\lambda(p_\lambda)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_λ é repulsivo;
- se $\lambda = 3$, então $p_3 = \frac{2}{3}$. Estude a dinâmica da transformação $f_3(x) = 3x(1-x)$ e conclua que o ponto fixo $\frac{2}{3}$ é atrativo.

(c) Queremos procurar os pontos fixos de f^2_λ, isto é, resolver a equação

$$f^2_\lambda(x) = \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) = x$$

a qual pode ser escrita como

$$\lambda^3 x^4 - 2\lambda^3 x^3 + \lambda^2(1+\lambda)x^2 + (1-\lambda^2)x = 0.$$

Como qualquer ponto fixo de f_λ é também um ponto fixo de f^2_λ, sabemos que $x(\lambda x + 1 - \lambda)$ é um fator do polinómio de grau 4 anterior. Consequentemente, podemos fatorizar a equação anterior e obter

$$x(\lambda x + 1 - \lambda)(\lambda^2 x^2 - \lambda(1+\lambda)x + 1 + \lambda) = 0.$$

Então, para encontrarmos uma órbita periódica de período 2 precisamos de resolver a equação

$$\lambda^2 x^2 - \lambda(1+\lambda)x + 1 + \lambda = 0.$$

As raízes desta equação são:

$$s_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{3}{\lambda}\right)}\right).$$

Consequentemente, quando $\lambda > 3$, a transformação f_λ tem um ciclo de período 2.

(d) Consideremos primeiro a bifurcação que ocorre quando $\lambda = 1$. Temos que:

(i) ao atravessar o parâmetro $\lambda = 1$, a transformação f_λ muda o número de pontos fixos:

- quando $\lambda = 1$, a transformação f_λ tem um único ponto fixo, o ponto 0.
- quando $\lambda \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, a transformação f_λ tem dois pontos fixos: $x = 0$ e $p_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

(ii) ao atravessar o parâmetro $\lambda = 1$, a natureza dos pontos fixos da transformação f_λ é alterada. Relativamente ao ponto fixo 0 tem-se que:

- quando $\lambda > 1$, o ponto fixo 0 é repulsivo.
- quando $\lambda < 1$, o ponto fixo 0 é atrativo.

A justificação encontra-se na alínea (b).

Relativamente ao ponto fixo p_λ tem-se que:

- quando $\lambda \in]1, 3[$, o ponto fixo p_λ é atrativo.
- quando $\lambda \in]0, 1[\cup]3, +\infty[$, o ponto fixo p_λ é repulsivo.

A justificação encontra-se na alínea (b).

Vamos agora considerar a bifurcação que ocorre quando $\lambda = 3$. Comecemos por observar que a transformação $f_3 = 3x(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$, tem dois pontos fixos: o ponto fixo 0 e o ponto fixo $p_3 = \frac{2}{3}$. Além disso,

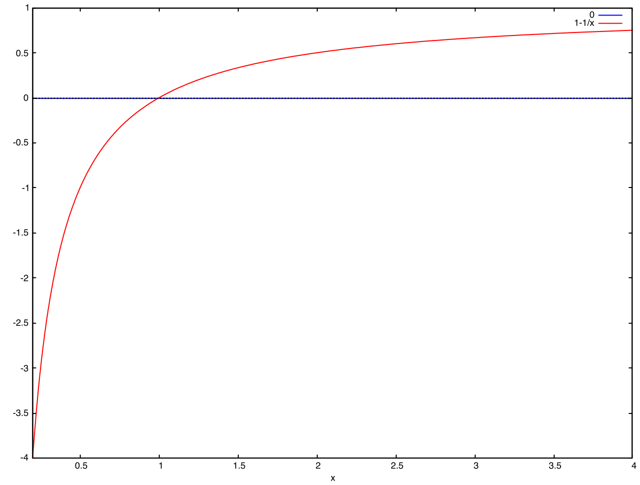
$$f_3'\left(\frac{2}{3}\right) = -1, \quad f_3''\left(\frac{2}{3}\right) = -6 \neq 0.$$

Quando $\lambda = 3$, ocorre uma bifurcação de duplicação de período:

(i) a natureza do ponto fixo $\frac{2}{3}$ é alterada: quando $\lambda \in]1, 3[$, o ponto fixo p_λ é atrativo e quando $\lambda \in]0, 1[\cup]3, +\infty[$, o ponto fixo p_λ é repulsivo.

(ii) uma órbita de período 2 "nasce" quando λ se torna maior do que 3. Mostre que esta órbita é atrativa quando $\lambda \in]3, 1+\sqrt{6}[$.

(e) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 3. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^2 + x - 2ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 2\,a\,x = x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 2a.$$

Consequentemente,

- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = 0$, se $a = 0$.
- f_a tem dois pontos fixos: $p_1 = 0$ e $p_2 = 2\,a$, se $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = 2x + 1 - 2\,a, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $x = 0$. Temos que

$$|f_a'(0)| = |1 - 2\,a|\,.$$

Consequentemente,

- se $a \in]0, 1[$, então $|f_a'(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;
- se $a \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, então $|f_a'(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo.

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = 2\,a$. Temos que

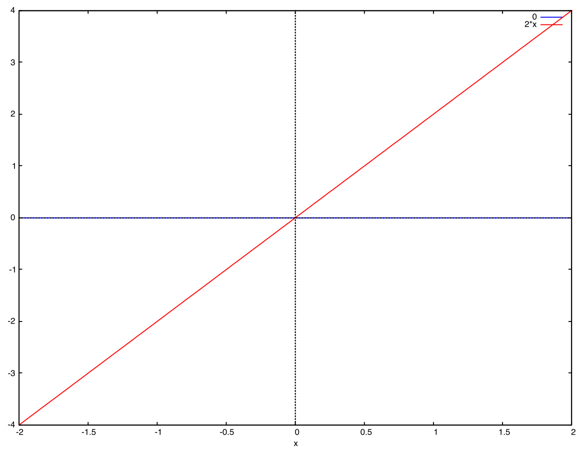
$$|f_a'(p_2)| = |2\,a + 1|\,.$$

Consequentemente,

- se $a \in]-1, 0[$, então $|f_a'(p_2)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é atrativo;

- se $a \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, então $|f_a'(p_2)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é repulsivo.

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 4. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = x^3 - ax$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \Leftrightarrow x^3 - a\,x = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\sqrt{1+a} \vee x = \sqrt{1+a}.$$

Consequentemente,

- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = 0$, se $a \leq -1$.
- f_a tem três pontos fixos: $p_1 = 0$, $p_2 = -\sqrt{1+a}$ e $p_3 = \sqrt{1+a}$, se $a > -1$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = 3x^2 - a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $p_1 = 0$. Temos que

$$|f_a'(0)| = |-a|\,.$$

Consequentemente,

- se $a \in]-1, 1[$, então $|f_a'(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;

- se $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, então $|f_a'(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo.

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = -\sqrt{1+a}$. Só existe para $a > -1$. Temos que

$$|f_a'(p_2)| = 3 + 2\,a > 1,$$

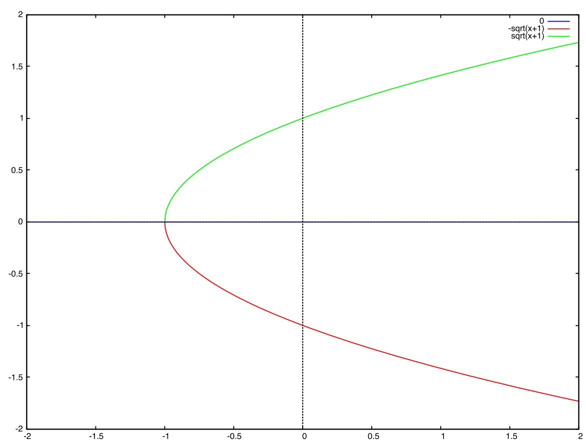
para todo o $a > -1$. Consequentemente, p_2 é sempre um ponto fixo repulsivo.

(iii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_3 = \sqrt{1+a}$. Só existe para $a > -1$. Temos que

$$|f_a'(p_3)| = 3 + 2\,a > 1,$$

para todo o $a > -1$. Consequentemente, p_3 é sempre um ponto fixo repulsivo.

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 5. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = ax + x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \;\Leftrightarrow\; ax + x^2 = x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 1 - a.$$

Consequentemente,

- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = 0$, se $a = 1$.
- f_a tem dois pontos fixos: $p_1 = 0$ e $p_2 = 1 - a$, se $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = a + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $x = 0$. Temos que

$$|f_a'(0)| = |a|.$$

Consequentemente,

- se $a \in]-1, 1[$, então $|f_a'(0)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é atrativo;
- se $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, então $|f_a'(0)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo 0 é repulsivo.

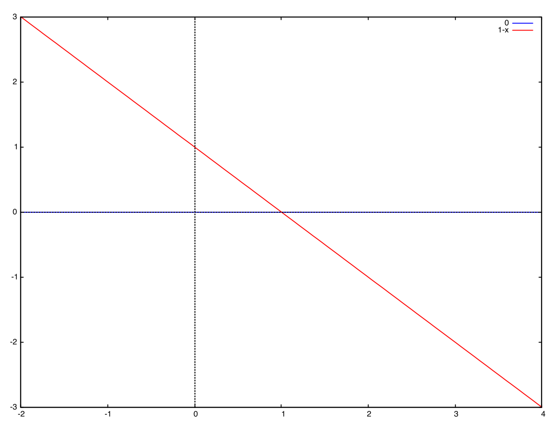
(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = 1 - a$. Temos que

$$|f_a'(p_2)| = |2 - a|.$$

Consequentemente,

- se $a \in]1, 3[$, então $|f_a'(p_2)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é atrativo;
- se $a \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$, então $|f_a'(p_2)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é repulsivo.

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.



Exercício 6. Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos $f_a(x) = a + x - x^2$, com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $a \in \mathbb{R}$.

(a) Os pontos fixos da transformação f_a são as soluções da equação $f_a(x) = x$. Temos que:

$$f_a(x) = x \Leftrightarrow a + x - x^2 = x \Leftrightarrow x = -\sqrt{a} \vee x = \sqrt{a}.$$

Consequentemente,

- f_a não tem pontos fixos se $a < 0$.
- f_a tem um único ponto fixo, o ponto $p_1 = p_2 = 0$, se $a = 0$.
- f_a tem dois pontos fixos: $p_1 = -\sqrt{a}$ e $p_2 = \sqrt{a}$, se $a > 0$.

Estudemos agora a natureza dos pontos fixos. Temos que

$$f_a'(x) = 1 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Estudemos a natureza do ponto fixo $p_1 = -\sqrt{a}$. Temos que

$$|f_a'(p_1)| = 1 + 2\sqrt{a} > 1,$$

para todo o $a > 0$. Consequentemente, o ponto fixo p_1 é sempre repulsivo.

(ii) Estudemos agora a natureza do ponto fixo $p_2 = \sqrt{a}$. Temos que

$$|f_a'(p_2)| = \left|1 - 2\sqrt{a}\right|.$$

Consequentemente,

- se $a \in]0, 1[$, então $|f_a'(p_2)| < 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é atrativo;
- se $a \in]1, +\infty[$, então $|f_a'(p_2)| > 1$ e, portanto, o ponto fixo p_2 é repulsivo.

(Usando o exercício 8.h da folha de exercícios 13) podemos concluir que para $a = 0$, o ponto fixo 0 não é atrativo nem repulsivo).

(b) Na seguinte figura, marque a tracejado, respetivamente a cheio, a natureza repulsiva, respetivamente atrativa, dos pontos fixos.