Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

equações diferenciais - noções básicas

Consulte o ficheiro 'Folha3.nb'.

Exercício 1.

(a) Equação diferencial ordinária de 1ª ordem

(b) Equação diferencial com derivadas parciais de 2ª ordem

(c) Equação diferencial ordinária de 2ª ordem

Exercício 2.

(a) Primeiro notemos que f e a sua derivada f' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 1 - 3e^{-x}.$$
Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade
$$(1 - 3e^{-x}) + (x + 3e^{-x}) = x + 1,$$
a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Primeiro notemos que g e as suas derivadas g' e g'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = 6e^{3x} - 20e^{4x}$$
e
$$g''(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x}.$$
Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade
$$(18e^{3x} - 80e^{4x}) - 7(6e^{3x} - 20e^{4x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{4x}) = 0,$$
a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) Primeiro notemos que h e as suas derivadas h' e h'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$,

$$h'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

e

$$g''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$x^2\left(2 - \frac{2}{x^3}\right) = 2\left(x^2 - \frac{1}{x}\right),$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercício 3. Devemos mostrar que a relação $y^2 + x - 3 = 0$ define pelo menos uma função real y no intervalo $]-\infty, 3[$ que é solução da equação diferencial. A relação $y^2 + x - 3 = 0$ define duas funções reais y_1 e y_2 dadas por

$$y_1(x) = \sqrt{3 - x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -\sqrt{3 - x},$$

respetivamente, para todo o $x \in]-\infty, 3[$. Averiguemos, por exemplo, se a função y_1 é solução explícita da equação diferencial.

Primeiro notemos que y_1 e a sua derivada y_1' estão definidas para todo $x \in]-\infty, 3[$. Temos que, para todo o $x \in]-\infty, 3[$,

$$y_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}}.$$

Substituindo depois y_1 e y_1' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$\frac{-1}{2\sqrt{3 - x}} = -\frac{1}{2\sqrt{3 - x}},$$

a qual é válida para todo o $x \in]-\infty, 3[$. Consequentemente, a função $y_1(x) = \sqrt{3 - x}$, $x \in]-\infty, 3[$, é uma solução explícita da equação diferencial dada.

Exercício 4. Devemos mostrar que a relação $x^3 + 3xy^2 = 1$ define pelo menos uma função real y no intervalo $]0, 1[$ que é solução da equação $2xyy' + x^2 + y^2 = 0$. A relação $x^3 + 3xy^2 = 1$ define duas funções reais y_1 e y_2 dadas por

$$y_1(x) = \sqrt{\frac{1 - x^3}{3x}} \quad \text{e} \quad y_2(x) = -\sqrt{\frac{1 - x^3}{3x}},$$

respetivamente, para todo o $x \in]0, 1[$. Averiguemos, por exemplo, se a função y_1 é solução explícita da equação diferencial.

Primeiro notemos que y_1 e a sua derivada y_1' estão definidas para todo $x \in]0,1[$. Temos que, para todo o $x \in]0,1[$,

$$y_1'(x) = \frac{\frac{-2x^3-1}{3x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}}.$$

Substituindo depois y_1 e y_1' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$2x\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}.\frac{\frac{-2x^3-1}{3x^2}}{2\sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}} + x^2 + \frac{1-x^3}{3x} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{-2x^3-1}{3x} + x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} = 0 \iff$$

$$\iff -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3x} + x^2 + \frac{1}{3x} - \frac{x^2}{3} = 0 \iff$$

$$\iff -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^2 = 0,$$

a qual é válida para todo o $x \in]0,1[$. Consequentemente, a função $y_1(x) = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$, $x \in]0,1[$, é uma solução explícita da equação diferencial dada.

Exercício 5.

(a) Derivando a relação $y - \log y = x^2 + 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x \iff \frac{dy}{dx}\left(1 - \frac{1}{y}\right) = 2x \iff \frac{dy}{dx}\left(\frac{y-1}{y}\right) = 2x \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{y-1}.$$

(b) Derivando a relação $e^{xy} + y = x - 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$ye^{xy} + xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 \iff xe^{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - ye^{xy} \iff$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{1 - ye^{xy}}{1 + xe^{xy}} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}.$$

(c) Derivando a relação $x^2 - \operatorname{sen}(x+y) = 1$ implicitamente em ordem a x obtemos:

$$2x - \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)\cos(x+y) = 0 \iff -\frac{dy}{dx}\cos(x+y) = -2x + \cos(x+y) \iff$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\cos(x+y)} - 1 \iff \frac{dy}{dx} = 2x\sec(x+y) - 1.$$

Exercício 6.

(a) Primeiro notemos que, para cada $c \in \mathbb{R}$, as funções f e f' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2e^{-3x} - 3(x^3 + c)e^{-3x}.$$

Substituindo depois f e f' na equação diferencial dada, obtemos a igualdade

$$(3x^2e^{-3x} - 3(x^3 + c)e^{-3x}) + 3(x^3 + c)e^{-3x} = 3x^2e^{-3x},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(b) Temos que $f(0) = c$. Consequentemente, $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$; $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$ e $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1$.

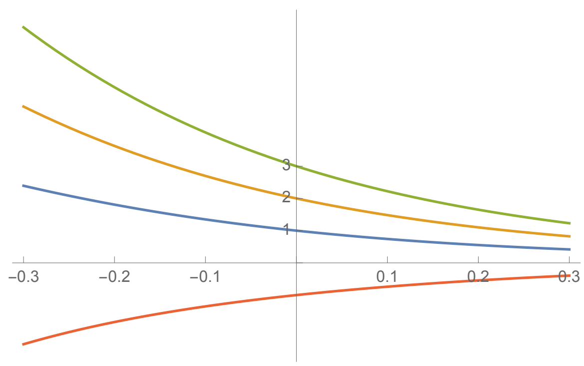

Figura 1: Família de soluções.

Exercício 7. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y'(x) + 2y(x) = 6e^x + 4xe^{-2x}$, no intervalo $\mathbb{R}$. Primeiro notemos que y e a sua derivada y' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = (4x + 6e^{3x})e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x^2 + 2e^{3x} + 3).$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$(4x + 6e^{3x})e^{-2x} - 2e^{-2x}(2x^2 + 2e^{3x} + 3) + 2((2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}) = 6e^x + 4xe^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4xe^{-2x} + 6e^x - 4e^{-2x}x^2 - 4e^x - 6e^{-2x} + 4x^2e^{-2x} + 4e^x + 6e^{-2x} = 6e^x + 4xe^{-2x},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz a condição inicial $y(0) = 5$. Temos que $y(0) = (0 + 2e^0 + 3).e^0 = 5$. Então a função y verifica a condição inicial $y(0) = 5$.

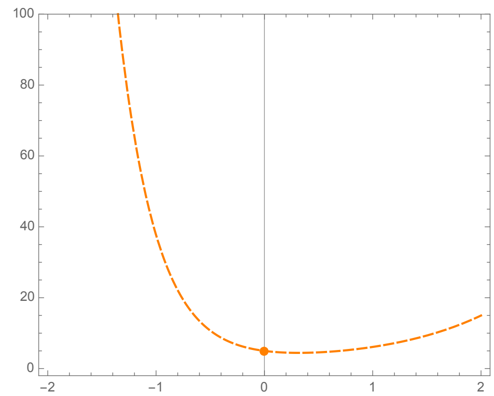

Figura 2: Gráfico da função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$.

Exercício 8. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y' = 2xy(y-1)$, no intervalo $\mathbb{R}$. Primeiro notemos que y e a sua derivada y' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$\frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x\,\frac{1}{1+e^{x^2}}\left(\frac{1}{1+e^{x^2}} - 1\right) \iff$$

$$\iff \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2} = 2x\,\frac{1}{1+e^{x^2}}\left(\frac{-e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\right),$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$. Temos que $y(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$. Então a função y verifica a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$.

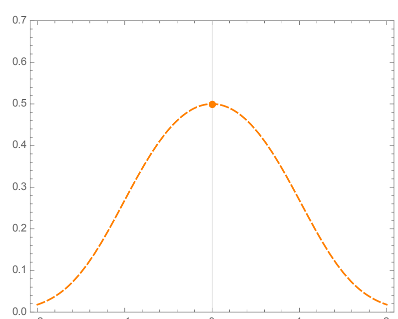

Figura 3: Gráfico da função $y(x) = 1/(1+e^{x^2})$.

Exercício 9. Vamos começar por mostrar que a função y é solução da equação diferencial $y'' = -y$, no intervalo $\mathbb{R}$. Primeiro notemos que y e as suas derivadas y' e y'' estão definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(1)} \quad \text{e} \quad y''(x) = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)}.$$

Substituindo depois na equação diferencial, obtemos a igualdade

$$-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)} = -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(1)},$$

a qual é válida para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Falta apenas verificar que a função y satisfaz as condições $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$. Temos que $y(0) = \frac{\operatorname{sen}(0)}{\operatorname{sen}(1)} = 0$ e $y(1) = \frac{\operatorname{sen}(1)}{\operatorname{sen}(1)} = 1$. Então a função y verifica as condições $y(0) = 0$ e $y(1) = 1$.

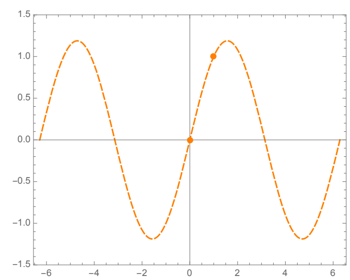

Figura 4: Gráfico da função $y(x) = \operatorname{sen}(x)/\operatorname{sen}(1)$.

Exercício 10. Queremos determinar a solução da forma $y(x) = (x^2 + c)e^{-x}$ que satisfaz $y(-1) = e + 3$. Substituindo x por -1 e y por $e + 3$, obtemos

$$e + 3 = (1 + c)\, e \;\Leftrightarrow\; c = 3\, e^{-1}.$$

Então, a expressão geral da solução procurada é $y(x) = (x^2 + 3\, e^{-1})e^{-x}$.

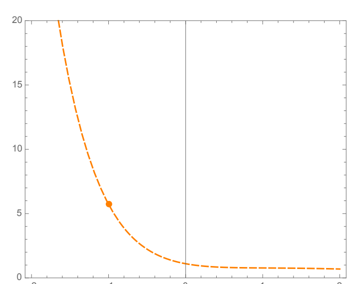

Figura 5: Gráfico da solução do PVI.