Universidade do Minho — Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Dep. Matemática e Aplicações — 2018/2019

Tópicos de Matemática Discreta

1.º teste — 2 de novembro de 2018 — duração: 2 horas

1. Sejam p_1, p_2 e p_3 variáveis proposicionais. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

   (a) A fórmula $((p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \wedge (\neg p_3)) \to (\neg p_1)$ é uma tautologia.

   (b) O argumento representado por

   $$\begin{array}{c} p_1 \to (p_2 \vee p_3) \\ \neg p_3 \\ \hline \therefore \neg p_1 \end{array}$$

   é um argumento válido.

2. Considere que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e que p representa a proposição

   $$\forall_{x\in A}(x < 4 \to \exists_{y\in A}\,(y \leq x \to y^2 < 16)).$$

   (a) Dê exemplo, justificando, de um conjunto A não vazio onde:

      (i) p seja verdadeira;

      (ii) p seja falsa.

   (b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

3. Mostre que, para quaisquer inteiros m e n, se mn e $m+n$ são pares, então m e n são ambos pares.

4. Considere os conjuntos

   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, x^2 \in B \,\wedge\, y = x + 3\}, \quad B = \{0, 4, \{9\}\}$$
   $$C = (\mathbb{Z} \setminus \{1\}) \times (\mathbb{Z} \setminus \{3\}), \quad D = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}.$$

   Justificando, determine

   (a) $A \cap C$.

   (b) $D \cap \mathcal{P}(D)$.

5. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C.

   (a) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

   (b) Se $B \cap C \subseteq A$, então $(B \setminus A) \cap (C \setminus A) = \emptyset$.

   (c) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$.

6. Sejam A e B conjuntos. Mostre que $(A \times B) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times B$.

7. Prove, por indução nos naturais, que

   $$2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + (n + 1) \times 2^n = n \times 2^{n+1},$$

   para todo o natural n.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	1,75+1,5	1,25+1,25+1,5	2,0	1,5+1,5	1,25+1,25+1,25	1,5	2,5