Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Introdução aos Sistemas Dinâmicos
MIEInformática
2019/20

Formulário séries de Fourier e EDPs

- Função periódica de período 2L

Coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

- Função definida em $[0, L]$

- *Coeficientes da série de Fourier de cossenos*

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

- *Coeficientes da série de Fourier de senos*

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

- Problema da condução do calor

- Caso 1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Solução formal

$$u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde b_n são os coeficientes da série de Fourier de senos de f.

- Caso 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Solução formal

$$u(x,t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\sigma\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde a_n são os coeficientes da série de Fourier de cossenos de f.

Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Formulário séries de Fourier e EDPs

- Problema da corda vibrante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Solução formal

$$u(x,t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi\alpha\, t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi\alpha} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\alpha\, t}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

onde b_n e c_n são os coeficientes das séries de Fourier de senos de f e g, respetivamente.

- Alguns integrais úteis

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} L, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^L x \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} L^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{-1+(-1)^n}{n^2\pi^2} L^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{(-1)^n(2-n^2\pi^2)-2}{n^3\pi^3} L^3, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} L^3, \qquad n = 1, 2, \ldots$$