Cálculo

folha 8 — 2018'19

Integral de Riemann.

1. Considere $\alpha,\ a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a > 0$. Nestas condições, prove que

(a) $\displaystyle\int_a^b \alpha\, dx = \alpha\,(b-a)$

(b) $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2)\,.$

2. Nas somas –esquerda, direita e média– de Riemann, as "alturas" dos retângulos calculam-se usando, respetivamente, o extremo esquerdo, o direito e o ponto médio de cada subintervalo. Nestas condições,

(a) estime o valor de $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$, usando as somas esquerda, direita e média e dois subintervalos de $[1,2]$.

(b) compare os resultados obtidos na alínea anterior com o valor exato do integral.

(c) esboce, numa representação gráfica apropriada, as quatro quantidades obtidas anteriormente.

3. Mostre, geometricamente, que

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,.$$

4. Sem efetuar cálculos, identifique o sinal de cada um dos seguintes integrais definidos

(a) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi x\,\cos x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\,.$

5. Sem efetuar cálculos, em cada alínea identifique o maior dos dois integrais definidos

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^1 x\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\operatorname{sen}^2 x\, dx$ e $\displaystyle\int_0^1 x\,\operatorname{sen}^2 x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2}\, dx$ e $\displaystyle\int_0^2 e^{x}\, dx\,.$

6. Seja $a > 0$ e $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Justifique que

(a) se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

(b) se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx.$

7. Dados $a < b \in \mathbb{R}$, mostre que se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = 0$, então existe $c \in\,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

8. Em cada uma das alíneas, identifique as funções primitiváveis e/ou integráveis. No caso das funções integráveis defina uma "função área" adequada e calcule o integral.

(a) $f(x) = 1,\ x \in [0,2]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}[\, \cup\,]\frac{1}{2}, 2] \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1[\\ 1, & x \in\,]1, 2] \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1[\\ x-1, & x \in\,]1, 2] \end{cases}$

9. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida em $\mathbb{R}$ por:

(a) $\displaystyle F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\, dt$

(b) $\displaystyle F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\, dt$

(c) $\displaystyle F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\, dt.$

10. Sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para $x \geq 0$, calcule f em cada um dos seguintes casos:

(a) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$

(b) $\displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3e^x - x^4$.

11. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau 2 tal que $P(0) = F(0)$, $P'(0) = F'(0)$, $P''(0) = F''(0)$.

12. Calcule os integrais seguintes

(a) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - 2x^5)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^4 (\sqrt{x}+2)^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\operatorname{sen}(x^2)\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x}\,dx$

(g) $\displaystyle\int_0^\pi x\operatorname{sen} x\,dx$

(h) $\displaystyle\int_0^\pi (x+2)\cos x\,dx$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x\operatorname{sen} x\,dx$

(j) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,e^{x^2}\,dx$

(k) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\,dx$

(m) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx,$ com $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

(n) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

(o) $\displaystyle\int_{-3}^5 |x-1|\,dx$

(p) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx,$ com $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2, \\ -x & \text{se } 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$

(q) $\displaystyle\int_{-3}^2 \sqrt{|x|}\,dx.$

13. Usando a substituição indicada, calcule os seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{arcsen} x\,dx, \quad x = \operatorname{sen} t$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx, \quad x = \operatorname{sen} t$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad t = \operatorname{sen} t$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx, \quad x = 3\operatorname{sen} t$

(e) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx, \quad x = \operatorname{sh} t$

(f) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx, \quad t^2 = x-1$

(g) $\displaystyle\int_0^{3/2} 2^{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad x = \frac{t^2-1}{2}$

(h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^{2x}}\,dx, \quad t = e^x.$

14. Sabendo que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 3$, calcule

(a) $\displaystyle\int_0^{0.5} f(2t)\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^1 f(1-t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_1^{1.5} f(3-2t)\,dt.$

15. [Mudança de variável universal]

(a) Mostre que, se $x = 2\operatorname{arctg} t$, então $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

(b) Usando a substituição $x = 2\operatorname{arctg} t$, calcule

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx.$$

16. Considere a seguinte definição de função logaritmo (em termos de uma função algébrica):

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Nestas condições, usando a substituição $s = x\,t$, mostre que $\ln x + \ln y = \ln(xy)$