Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

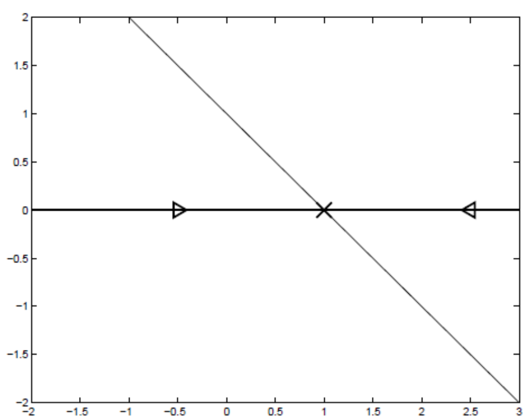
Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

teoria qualitativa de edo's

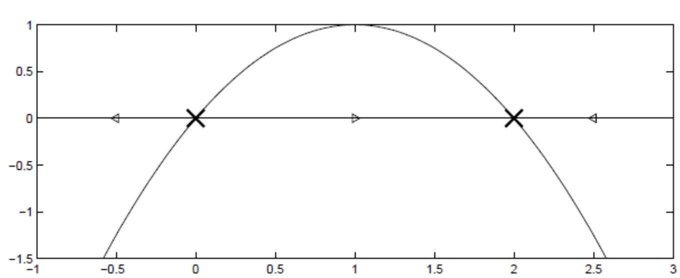
Consulte o ficheiro 'Folha10.nb'.

Exercício 1. As figuras mostram o retrato de fase e o gráfico da função f no lado direito da equação. Os pontos de equilíbrio e a respetiva estabilidade são:

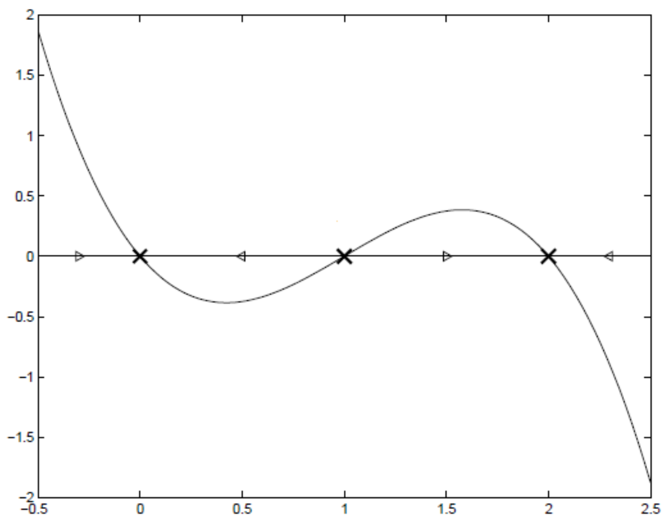
(a)
- $x = 1$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



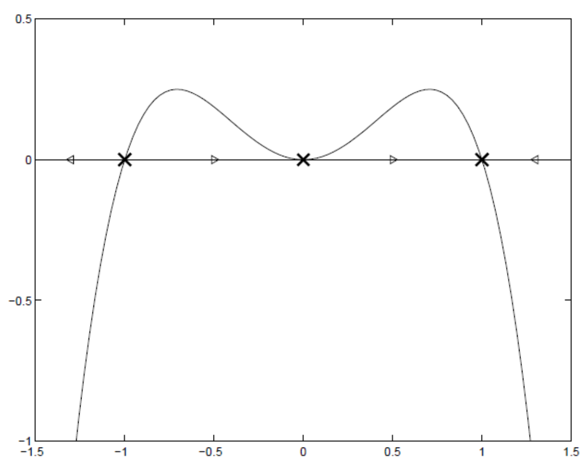
(b)
- $x = 0$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 2$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



(c)
- $x = 0$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.
- $x = 1$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 2$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



(d)
- $x = -1$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 0$; ponto de equilíbrio instável.
- $x = 1$; ponto de equilíbrio assimptoticamente estável.



Exercício 2.

(a) $P = \begin{pmatrix} 1/2+\sqrt{5}/2 & 1/2-\sqrt{5}/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 1/2+\sqrt{5}/2 & 0 \\ 0 & 1/2-\sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$

(b) A matrix A é uma forma normal de Jordan.

(c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $P = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(e) A matrix A é uma forma normal de Jordan.

(d) $P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 3.

(a) $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) x_0 + \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) y_0 \\ y(t) = \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) x_0 + \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{t}}{2}\right) y_0 \end{cases}$$

(b) $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t/2} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t/2) & \operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2) \\ -\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2) & \cos(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3} e^{t/2} \left(3\, x_0 \cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3}(x_0 + 2y_0)\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)\right) \\ y(t) = \frac{1}{3} e^{t/2} \left(3\, y_0 \cos(\sqrt{3}t/2) - \sqrt{3}(2x_0 + y_0)\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)\right) \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} x(t) = e^{-t} x_0 \\ y(t) = e^{-t} y_0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x(t) = e^{2t} x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$

(e) $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^{2t} - te^{2t})x_0 + te^{2t}y_0 \\ y(t) = -te^{2t}x_0 + (te^{2t} + e^{2t})y_0 \end{cases}$$

Exercício 4.

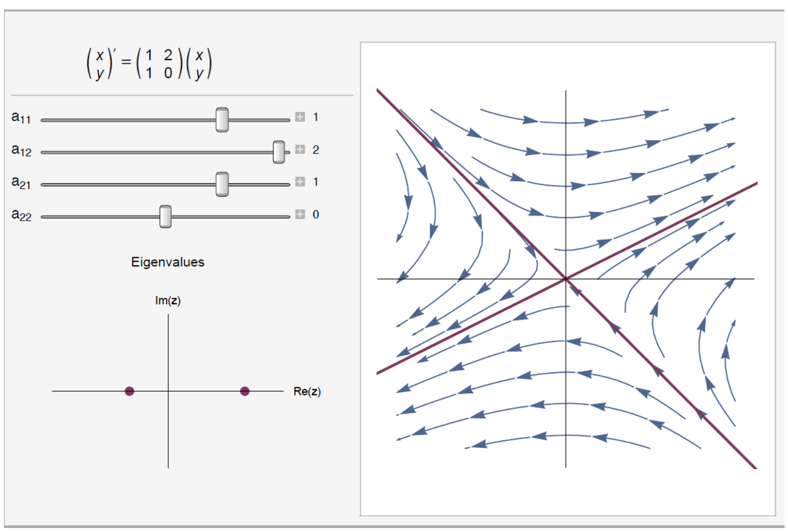
(a) 1. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3}\right) x_0 + \left(\frac{-2e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3}\right) y_0 \\ y(t) = \left(-\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}\right) x_0 + \left(\frac{2e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3}\right) y_0 \end{cases}$$

2. A origem é uma sela.

3.



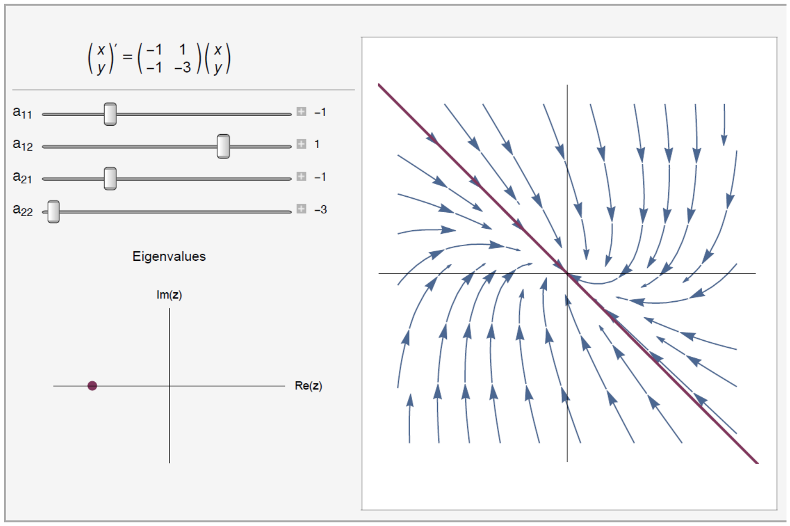
(b) 1. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^{-2t} + te^{-2t})x_0 + te^{-2t}y_0 \\ y(t) = -te^{-2t}x_0 + (e^{-2t} - te^{-2t})y_0 \end{cases}$$

2. A origem é um nó assimptoticamente estável.

3.



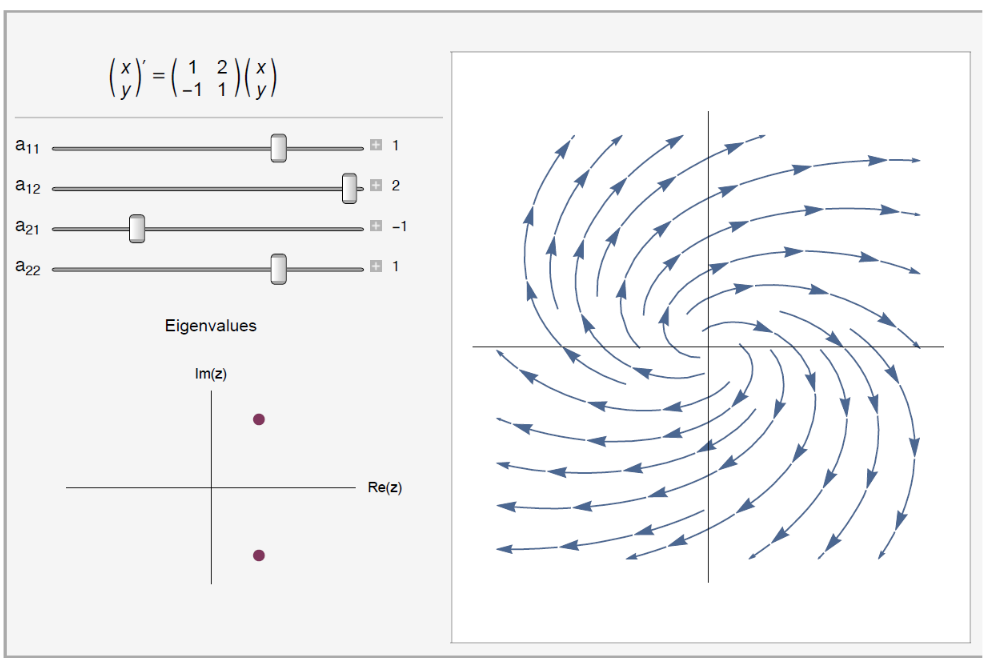
(c) 1. $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cos}\,(\sqrt{2}t) & \text{sen}\,(\sqrt{2}t) \\ -\text{sen}\,(\sqrt{2}t) & \text{cos}\,(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^t \text{cos}\,(\sqrt{2}t) x_0 + \sqrt{2} e^t \text{sen}\,(\sqrt{2}t) y_0 \\ y(t) = (e^t \text{cos}\,(\sqrt{2}t) y_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} e^t \text{sen}\,(\sqrt{2}t) x_0 \end{cases}$$

2. A origem é um foco instável.

3.



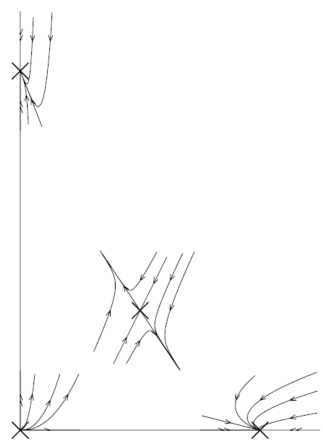
Exercício 5.

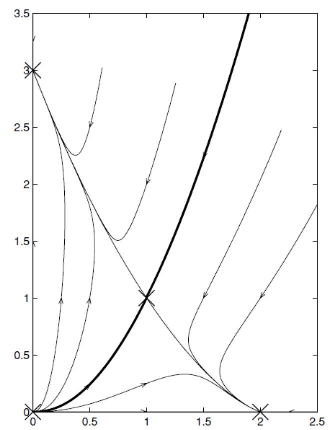
(a) Ver slides.

(b) 1. Os pontos de equilíbrio (e respectiva estabilidade) são:

- $(0,0)$; fonte (instável)
- $(0,3)$; poço (assimptoticamente estável)
- $(2,0)$; poço (assimptoticamente estável)
- $(1,1)$; ponto de sela

2.





(c) 1. Os pontos de equilíbrio (e respectiva estabilidade) são:

- $(0,0)$; fonte (instável)
- $(0,3)$; ponto de sela
- $(2,0)$; ponto de sela
- $(1,2)$; poço (assimptoticamente estável)

2.