Universidade do Minho

MIEInf
DMA

Cálculo

folha 4 — 2018'19

Funções trigonométricas diretas e inversas.

1. Expresse, usando o conceito de função composta, a diferença entre $\operatorname{sen} x^2$, $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

Nota: observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$.

2. Estabeleça as seguintes igualdades, válidas para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ (b) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ (c) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

3. Resolva as equações seguintes recorrendo, se necessário, às igualdades estabelecidas no exercício anterior:

(a) $\operatorname{sen}(2x) = \dfrac{1}{2}$ (b) $\sqrt{3}\operatorname{sen}(3x) + \cos(3x) = 2$ (c) $4\cos^3 x - 3\cos x = \dfrac{1}{2}$

4. A baía de Fundy, no Canadá, tem as maiores marés do mundo. Aí a diferença entre o **nível máximo e o mínimo das águas** é igual a $15\,m$. Num local particular da baía a profundidade da água (y, em metros) define-se em função do tempo (t, medido em horas a partir da meia-noite) por

$$y(t) = D + A\cos\left[B(t - C)\right].$$

(a) Qual o significado físico do parâmetro D?

(b) Qual o valor de A?

(c) Admitindo que o tempo decorrido entre duas marés consecutivas é de 12.4 horas, qual o valor de B?

(d) Qual o significado físico de C?

5. Calcule

(a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(-\frac{1}{2}))$ (e) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ (i) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}))$

(b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(7\frac{\pi}{6}))$ (f) $\cos(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$ (j) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-1))$

(c) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{11\pi}{4}\right)$ (g) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$ (k) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}\right)$

(d) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{6})\right)$ (h) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ (l) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi)$

6. Deduza as seguintes igualdades em domínios que deverá especificar:

(a) $\begin{cases} \operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \\ \operatorname{tg}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \operatorname{sen}(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2} \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$

7. Calcule

(a) $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (d) $\operatorname{sen}(\pi - \operatorname{arcsen} 1)$

(b) $\operatorname{cotg}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$ (e) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

(c) $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\right)$ (f) $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

(g) $\cos\left(-2\,\text{arcsen}\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$

(h) $\text{sen}\,(\text{arctg}\,(-1))$

(i) $\text{tg}\left(-\,\text{arcsen}\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(j) $\text{arctg}\left(-2+\text{tg}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

(k) $\text{arcsen}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)+4\,\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)+2\,\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(l) $\cos^2\left(\dfrac{1}{2}\,\text{arccos}\,\dfrac{1}{3}\right)-\text{sen}^2\left(\dfrac{1}{2}\,\text{arccos}\,\dfrac{1}{3}\right)$

(m) $\text{tg}^2\left(\text{arcsen}\,\dfrac{3}{5}\right)-\text{cotg}^2\left(\text{arccos}\,\dfrac{4}{5}\right)$

8. Considere a função real de variável real definida por $g(x)=\dfrac{\pi}{3}+2\,\text{arcsen}\,\dfrac{1}{x}$.

(a) Calcule $g(1)+g(-2)$.

(b) Determine o domínio e o contradomínio de g.

(c) Determine o conjunto de soluções da inequação $g(x)\leq 2\pi/3$.

(d) Caraterize a função inversa de g.

9. Considere a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\leq -1\\ \text{arcsen}\,x, & -1<x<1\\ \dfrac{\pi}{2}\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & x\geq 1.\end{cases}$$

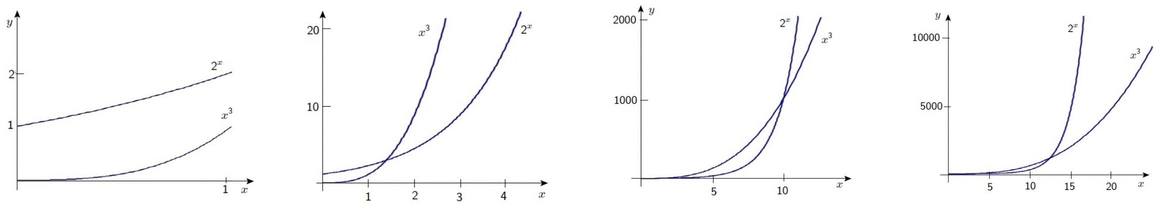
(a) Indique o contradomínio de f.

(b) Determine, caso existam, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Estude a continuidade da função f.

Funções exponenciais e logarítmicas.

10. Em linguagem corrente usa-se a expressão "crescimento exponencial" como sinónimo de um crescimento muito rápido. Analise as seguintes representações gráficas e reflita sobre o que se pode dizer quando comparando uma função exponencial com uma função potência.



11. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

(a) $e^x=e^{1-x}$

(b) $e^{2x}+2e^x-3=0$

(c) $e^{3x}-2e^{-x}=0$

(d) $\ln(x^2-1)+2\ln 2=\ln(4x-1)$

Funções hiperbólicas diretas e inversas.

12. Demonstre as seguintes igualdades:

(a) $\text{ch}^2\,x-\text{sh}^2\,x=1$

(b) $\text{ch}\;x+\text{sh}\;x=e^x$

(c) $\text{sh}(-x)=-\,\text{sh}\;x$

(d) $\text{ch}(-x)=\text{ch}\;x$

(e) $\text{sh}(x+y)=\text{sh}\;x\;\text{ch}\;y+\text{ch}\;x\;\text{sh}\;y$

(f) $\text{ch}(x+y)=\text{ch}\;x\;\text{ch}\;y+\text{sh}\;x\;\text{sh}\;y$

(g) $\text{th}^2\,x+\dfrac{1}{\text{ch}^2\,x}=1$

(h) $\text{coth}^2\,x-\dfrac{1}{\text{sh}^2\,x}=1,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

(i) $\text{argsh}\;x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$

(j) $\text{argch}\;x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\quad x\in[1,+\infty[$

(k) $\text{argth}\;x=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}},\quad x\in]-1,1[$

(l) $\text{argcoth}\;x=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}},\quad x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$