Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

equações diferenciais - noções básicas

Exercício 1. Classifique cada uma das equações diferenciais seguintes (ordinárias ou com derivadas parciais) e indique a sua ordem:

(a) $\dfrac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m)$, lei do arrefecimento de Newton (k é um parâmetro, T_m é a temperatura ambiente);

(b) $\dfrac{\partial T(t,x)}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 T(t,x)}{\partial x^2}$, equação do calor ($k$ é um parâmetro);

(c) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, lei de Hooke do movimento de uma mola, $\omega^2 = k/m$.

Exercício 2. Mostre que as seguintes funções são solução das respetivas equações diferenciais:

(a) $f(x) = x + 3e^{-x}$, $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $g(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$, $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $h(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, $\qquad x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2y, \quad x \in \mathbb{R}^+$

Exercício 3. Mostre que $y^2 + x - 3 = 0$ é uma solução implícita da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2y}$, no intervalo $I = (-\infty, 3)$.

Exercício 4. Mostre que $x^3 + 3xy^2 = 1$ é uma solução implícita da equação diferencial

$$2xyy' + x^2 + y^2 = 0,$$

no intervalo $I = (0, 1)$.

Exercício 5. Assumindo que as relações dadas definem y implicitamente como uma função diferenciável de x, verifique que são soluções implícitas das respetivas equações diferenciais:

(a) $y - \log y = x^2 + 1,\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y-1}$

(b) $e^{xy} + y = x - 1,\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x}$

(c) $x^2 - \operatorname{sen}(x+y) = 1,\qquad \dfrac{dy}{dx} = 2x\sec(x+y) - 1$

Exercício 6.

(a) Mostre que qualquer função da família de funções $f(x) = (x^3 + c)e^{-3x}$, onde c é uma constante arbitrária, é solução da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$.

(b) Encontre o valor da constante c para as soluções cujos gráficos se apresentam na figura seguinte:

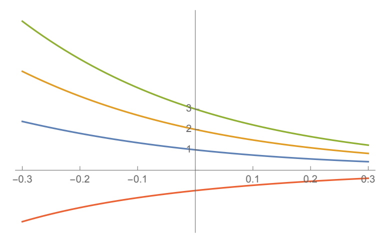

Figura 1: Família de soluções.

Exercício 7. Mostre que a função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$ é solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 6e^x + 4xe^{-2x} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

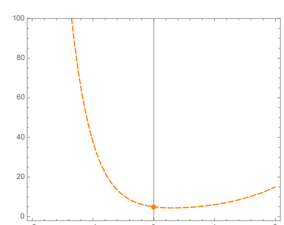

Figura 2: Gráfico da função $y(x) = (2x^2 + 2e^{3x} + 3)e^{-2x}$.

Exercício 8. Mostre que a função $y(x) = 1/(1+e^{x^2})$ é solução do seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 2xy(y-1) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

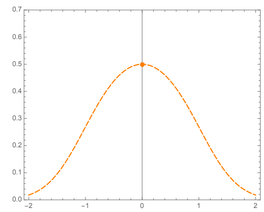

Figura 3: Gráfico da função $y(x) = 1/(1+e^{x^2})$.

Exercício 9. Mostre que a função $y(x) = \text{sen}\,(x)/\text{sen}\,(1)$ é solução do seguinte problema (dito um problema com condições de fronteira): $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

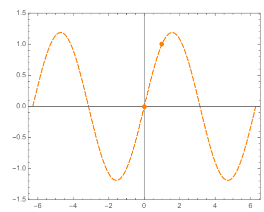

Figura 4: Gráfico da função $y(x) = \text{sen}\,(x)/\text{sen}\,(1)$.

Exercício 10. Sabendo que toda a solução da equação diferencial $y' + y = 2xe^{-x}$ pode ser escrita na forma $y(x) = (x^2 + c)e^{-x}$, com c uma constante arbitrária, resolva o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = 2xe^{-x} \\ y(-1) = e + 3 \end{cases}$$

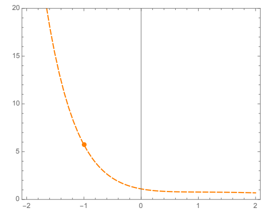

Figura 5: Gráfico da solução do PVI.