Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
07 de Janeiro de 2019
[duração 2h]

Cálculo – Teste 2

Nome completo:: Proposta de Resolução | Número::

Grupo I
(9 valores)
Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (3 valores)

Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos

(a) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx$ (b) $\int \ln(3x+1)\,dx$.

a) Note que $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{1+(2x)^2}\left(\operatorname{arctg}(2x)\right)^{1/2} dx = \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{arctg}(2x)\right]' \left(\operatorname{arctg}(2x)\right)^{1/2} dx$

Usando a regra de primitivação imediata $\int u' u^\alpha\,dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ tomando $u(x) = \operatorname{arctg}(2x)$ e $\alpha = 1/2$ vem

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(\operatorname{arctg}(2x))^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{3}(\operatorname{arctg}(2x))^{3/2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

b) Note que $\int \ln(3x+1)\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx$ onde $f'(x) = 1$ e $g(x) = \ln(3x+1)$.

Usando a regra de primitivação por partes $\int f'(x) g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

vem $\int \ln(3x+1)\,dx = x\ln(3x+1) - \int \frac{3x}{3x+1}\,dx = x\ln(3x+1) - \int\left(\frac{3x+1}{3x+1} - \frac{1}{3x+1}\right)dx$

$= x\ln(3x+1) - \int dx + \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\,dx$

$= x\ln(3x+1) - x + \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}$

$= x\ln(3x+1) - x + \frac{1}{3}\ln(3x+1) + C,\ C \in \mathbb{R}$ se considerarmos que $3x+1 > 0$.

2. (4 valores)

Considere a função $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt.$$

(a) Calcule a derivada de f.

(b) Obtenha o polinómio de Taylor de f, de ordem 3, em torno do ponto zero.

a) Como a função g definida por $g(t) = e^{t^2}$, $t \geq 0$, é contínua, então g é integrável e, atendendo ao Teorema fundamental do cálculo, $f(x) = \int_0^{2x} g(t)\,dt = G(2x) - G(0)$, onde G denota uma primitiva da função g.

Assim, e atendendo ao Teorema da derivada de uma função composta, vem

$f'(x) = [2x]'\,G'(2x) = 2\,g(2x) = 2\,e^{(2x)^2} = 2e^{4x^2},\ x \geq 0.$

(v.s.f.f)

2.b) Atendendo a que $f(0)=\int_0^0 e^{t^2}\,dt=0$, $f'(x)=2e^{4x^2}$, $f'(0)=2$, $f''(x)=16xe^{4x^2}$, $f''(0)=0$, $f'''(x)=16e^{4x^2}+128x^2e^{4x^2}$ e $f'''(0)=16$, vem

$$P_{3,0}(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$=0+2x+0+\frac{16}{6}x^3$$

$$=2x+\frac{8}{3}x^3.$$

3. (2 valores)

Calcule o seguinte integral definido

$$\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx\,.$$

$$\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2x}{4-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{[4-x^2]'}{4-x^2}\,dx$$

$$(*)\quad =-\frac{1}{2}\left[\ln(4-x^2)\right]_0^1 \qquad \text{(Fórmula de Barrow)}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\ln(4-1)-\ln(4-0)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{4}$$

$$=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$=\ln\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(*) Note que $4-x^2>0$ p/ $0\leq x\leq 1$.

Nome completo:: Proposta de Resolução

Número::

Grupo II

(7 valores)

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (2 valores)

Recorrendo à substituição $x = \operatorname{sen}^2 t$ calcule o integral definido

$$\int_0^{1/2} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Recorde que $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} = \operatorname{sen}^2\alpha$.

C.A : $x = \operatorname{sen}^2 t$

$x=0 \Leftrightarrow 0 = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \operatorname{sen} t = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1/2 \Leftrightarrow 1/2 = \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow \operatorname{sen} t = \sqrt{2}/2 \Rightarrow t = \pi/4$

Sejam $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ e $g : [0, \pi/4] \to [0, 1/2]$ definida por $g(t) = \operatorname{sen}^2 t$.

Tem-se $f(g(t)) = \frac{1+\sqrt{\operatorname{sen}^2 t}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} = \frac{1+|\operatorname{sen} t|}{\sqrt{\cos^2 t}} = \frac{1+|\operatorname{sen} t|}{|\cos t|} = \frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}$, pois $t \in [0, \pi/4]$ e

$g'(t) = [\operatorname{sen}^2 t]' = 2\cos t \operatorname{sen} t.$

A mudança de variável definida por $x = g(t)$ conduz a

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/4} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{sen} t}{\cancel{\cos t}} (2\cancel{\cos t} \operatorname{sen} t)\,dt$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t\,dt = 2\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} t + \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \left[-2\cos t + t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right]_{t=0}^{\pi/4} = \left(-2\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi/4 - 1/2\right) - (-2 + 0 - 0)$$

$$= \pi/4 + 3/2 - \sqrt{2}.$$

2. (3 valores)

Considere a região do plano definida por

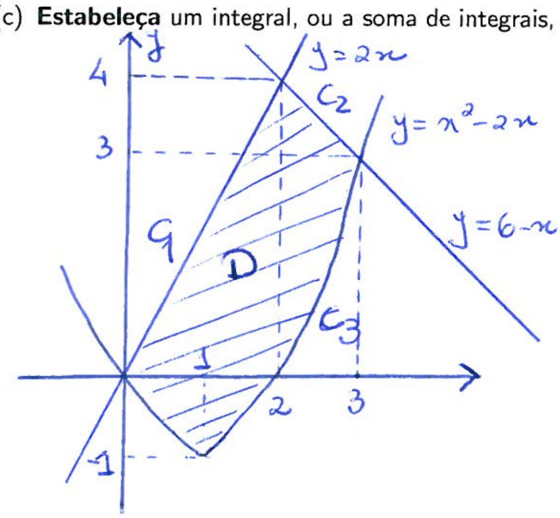
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \le y \le 2x \quad \text{e} \quad y \le 6 - x\}.$$

(a) Apresente um esboço gráfico da região D.

(b) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular a medida da área da região D.

(c) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular o perímetro da região D.

a)



- $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$
- $x^2 - 2x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$
- $2x = 6 - x \Leftrightarrow x = 2$
- $x^2 - 2x = 6 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

(v.s.f.f)

b) Note-se que $D = D_1 \cup D_2$ onde

$D_1 : 0 \leq x \leq 2$ e $x^2 - 2x \leq y \leq 2x$

$D_2 : 2 \leq x \leq 3$ e $x^2 - 2x \leq y \leq 6 - x$

Assim a área de D é dada por

$$\text{área } D = \text{área } D_1 + \text{área } D_2$$

$$= \int_0^2 2x - (x^2 - 2x)\,dx = \int_2^3 (6-x) - (x^2 - 2x)\,dx$$

c) O perímetro de D, seja $\mathcal{L}$, é dado pela soma do comprimento de C_1, C_2 e C_3 (assinaladas na figura). A medida do comprimento da curva definida por $y = f(x)$ com $x \in [a, b]$ é dado por $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$.

Assim

$$\mathcal{L} = \int_0^2 \sqrt{1 + 2^2}\,dx + \int_0^3 \sqrt{1 + (-1)^2}\,dx + \int_0^3 \sqrt{1 + (2x-2)^2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{5} + \sqrt{2} + \int_0^3 \sqrt{1 + 4(x-1)^2}\,dx.$$

3. (2 valores)

Estude a natureza da série

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n^2}.$$

Seja, $u_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2 > 0$

Esta é uma série de termos positivos e tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n = e^4 > 1.$$

Pelo critério da raiz, conclui-se que a série em estudo é convergente.

Nome completo::

Número::

Grupo III
(4 valores)
Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Se a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e $f'(0) = 0$ então f tem um extremo em $x = 0$.

Falsa. Por exemplo, a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3$ é derivável, $f'(0) = 0$ e não possui extremo em $x = 0$.

2. Se $f : [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável então f é primitivável.

Falsa. Por exemplo, a função $f : [1,6] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in [1,2[\\ 2, & x \in [2,6] \end{cases}$ é integrável mas não é primitivável.

3. Se $\lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$ então $\sum_{n \geq 1} u_n$ é divergente.

Falsa. Por exemplo, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ verifica $\lim_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$ e $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente.

4. Se $\sum_{n \geq 1} a_n$ e $\sum_{n \geq 1} b_n$ são duas séries numéricas convergentes, então a série numérica $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ é convergente.

Falsa. Por exemplo, $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

A série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente, mas

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \text{ é divergente.}$$