Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

Matemática para o mundo real

Consulte o ficheiro 'Folha1.nb'.

1. **Rei Artur e os Cavaleiros da Távola Redonda**.

   (a) Tem-se que $N(t) = N_0 e^{-kt}$, onde $N_0$ é o número de átomos radioativos no tempo inicial $t = 0$, uma vez que:

   i. para $t = 0$ temos que $N(0) = N_0 e^0 = N_0$. Assim, a função $N$ satisfaz a condição inicial $N(0) = N_0$;

   ii. derivando a função $N$, obtém-se que $N'(t) = -kN_0 e^{-kt} = -kN(t)$, para todo o $t$. Assim, a função $N$ é solução da equação diferencial $N'(t) = -kN(t)$.

   (b) Por um lado temos que
   $$N(t_{\text{meia-vida}}) = \frac{N_0}{2}\,.$$
   Por outro lado, como $N(t) = N_0 e^{-kt}$, temos que
   $$N(t_{\text{meia-vida}}) = N_0 e^{-k\,t_{\text{meia-vida}}}\,.$$
   Consequentemente,
   $$N_0 e^{-k\,t_{\text{meia-vida}}} = \frac{N_0}{2}\,,$$
   e, portanto, $t_{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{k}$.

   (c) Comecemos por observar o seguinte: supondo, mais geralmente, que $N_s$ é o número de átomos radioativos no tempo $s$, tem-se que $N(t) = N_s e^{-k(t-s)}$. Com efeito, de modo análogo a (a), tem-se que:

   i. para $t = s$ temos que $N(s) = N_s e^0 = N_s$. Assim, a função $N$ satisfaz a condição inicial $N(s) = N_s$;

   ii. derivando a função $N$, obtém-se que $N'(t) = -kN_s e^{-k(t-s)} = -kN(t)$, para todo o $t$. Assim, a função $N$ é solução da equação diferencial $N'(t) = -kN(t)$

   Vamos agora usar a informação de que o tempo de meia-vida do carbono-14 é aproximadamente 5700 anos para calcular a constante $k$.

   Como $t_{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{k}$, então
   $$k = \frac{\ln 2}{5700} \sim 1.216 * 10^{-4}\,.$$

Podemos agora responder às questões colocadas.

- Tomando $s = 500$, temos que

$$N(t) = N(500)e^{-k(t-500)}.$$

Consequentemente, em 2018 teríamos que

$$N(2018) = N(500)e^{-k.1518}.$$

Assim, se a mesa datasse de 500 DC, a proporção de carbono-14 em 2018 seria $e^{-k.1518} \sim e^{-(1.216*10^{-4}).1518} \sim 83\%$.

- Como foi encontrada $91,6\%$ da quantidade original de carbono-14, temos que:

$$N(1976) = 0.916 N_s = N_s e^{-k(1976-s)}.$$

Consequentemente,

$$s = 1976 + \frac{\ln 0.916}{1.216 * 10^{-4}} \sim 1255.$$

Portanto, a Távola Redonda data aproximadamente do ano de 1255, no reinado do rei Eduardo I.

2. **Lei do arrefecimento de Newton**.

   (a) Tem-se que $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, onde $T_0$ é a temperatura inicial do corpo, uma vez que:

      i. para $t = 0$ temos que $T(0) = T_m + (T_0 - T_m)e^0 = T_0$. Assim, a função $T$ satisfaz a condição inicial $T(0) = T_0$;

      ii. derivando a função $T$, obtém-se que $T'(t) = -k(T_0 - T_m)e^{-kt} = -k(T(t) - T_m)$, para todo o $t$. Assim, a função $T$ é solução da equação $T'(t) = -k(T(t) - T_m)$.

   (b) Consulte o ficheiro do *Mathematica*: 'Folha1.nb'.

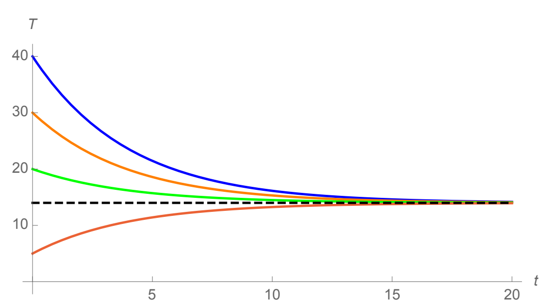


Figura 1: Variação da temperatura, para diferentes temperaturas $T_0$, tomando $T_m = 14$ e $k = 0.25$.

3. Recorde que a função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}\,, \tag{1}$$

onde $T_0$ é a temperatura inicial do corpo, descreve a evolução temporal da temperatura, satisfazendo a lei do arrefecimento de Newton.

Pelos dados do problema temos que:

$$T_0 = 100,\ T_m = 25,\ T(5) = 90\,.$$

Tendo em conta (1) para $t = 5$, tem-se que:

$$90 = 25 + (100 - 25)e^{-k.5}\,.$$

Consequentemente, podemos determinar o valor da constante $k$:

$$k = -\tfrac{1}{5}\ln(\tfrac{65}{75}) \sim 0.0286202\,.$$

O corpo estará a 50° para o valor de $t$ que for solução da seguinte equação:

$$50 = 25 + (100 - 25)e^{-k.t}\,,$$

onde $k$ tem o valor determinado acima. Resolvendo a equação em ordem a $t$, obtemos que $t \sim 38,3859$ minutos.

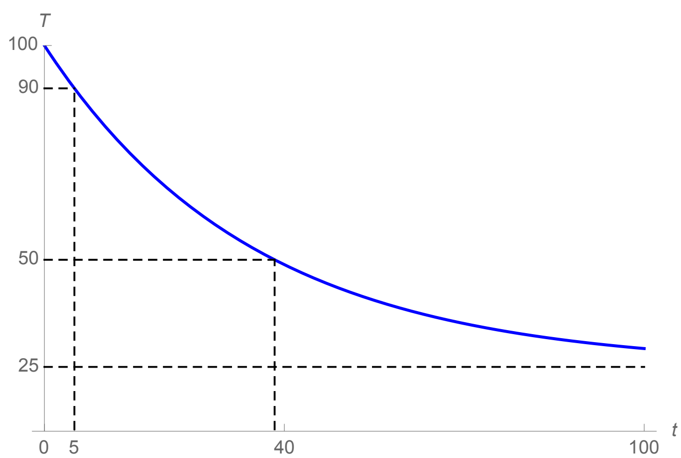


Figura 2: Ilustração da variação da temperatura ($t$ em minutos).

4. Recorde que a função

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}\,, \tag{2}$$

onde $T_0$ é a temperatura inicial do corpo, descreve a evolução temporal da temperatura, satisfazendo a lei do arrefecimento de Newton.

Tendo em conta os dados do problema temos que:

$$T_0 = 100,\ T(10) = 90 \text{ e } T(20) = 82\ .$$

Tendo em conta (2) para $t = 10$ e $t = 20$, respetivamente, tem-se que :

$$\begin{cases} 90 = T_m + (100 - T_m)\, e^{-k.10} \\ \\ 82 = T_m + (100 - T_m)\, e^{-k.20} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $T_m = 50°C$.

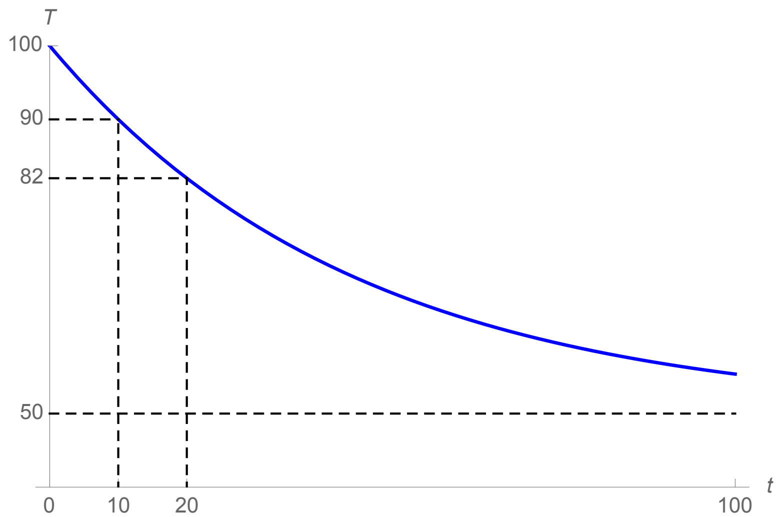


Figura 3: Ilustração da variação da temperatura ($t$ em minutos).

5. **Lei de Hooke: vibrações de molas**. Ver slides das aulas.

6. **Dinâmica de uma população: modelo Malthusiano ou modelo exponencial**.

   Recorde que a função
   $$P(t) = P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}\,, \tag{3}$$
   onde $P(t_0)$ é a população no instante inicial $t_0$, descreve a evolução temporal da população, satisfazendo o modelo exponencial.

   Podemos usar os dados de 1801 e 1851 para calcular $\lambda$. Tendo em conta (3), para $t = 1851$ e $t_0 = 1801$, tem-se que
   $$P(1851) = P(1801)e^{\lambda.50}\,.$$

   Consequentemente,
   $$\lambda \sim 0.01\,.$$

Podemos agora calcular os valores de $P(1901)$ e $P(2011)$. Temos que:

$$P(1901) = P(1801)e^{\lambda.100} \sim 46 \,\text{milhões}\,,$$

e

$$P(2011) = P(1801)e^{\lambda.210} \sim 146 \,\text{milhões}\,.$$

Consequentemente, o modelo exponencial sobreestimou a população em 2011.

7. **Um modelo populacional mais realista: modelo de Verhulst ou modelo logístico**.

   Recorde que a função

$$P(t) = M \left[ \frac{P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}{M - P(t_0) + P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}} \right] , \tag{4}$$

   onde $P(t_0)$ é a população no instante inicial $t_0$, descreve a evolução temporal da população satisfazendo o modelo logístico.

   Usando os dados de 1801, 1851 e 1901 podemos determinar os valores de $M$ e $\lambda$. Com efeito temos que (após alguns calculos):

$$M = 83.1 \;\text{ e }\; \lambda \sim 0.014\,.$$

   Consequentemente,

$$P(2011) \sim 68.6 \,\text{milhões}\,.$$