Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

sistemas dinâmicos discretos

Consulte o ficheiro 'Folha13.wxm'.

Exercício 1. As aplicações lineares em dimensão 1 são da forma

$$f(x) = \lambda x,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$f^n(x_0) = \lambda^n x_0.$$

Para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, o ponto 0 é um ponto fixo. Além disso, se $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ então o ponto 0 é o único ponto fixo. Se $\lambda = 1$ então todos os pontos da reta real são fixos.

1. Se $|\lambda| < 1$ temos que, para todo o $x_0 \in \mathbb{R}$,

   $$\lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} \lambda^n x_0 = 0.$$

   Consequentemente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ converge para a origem. Então, $W^s(0) = \mathbb{R}$.

2. Se $\lambda = 1$ a transformação é a identidade e, portanto, todos os pontos são fixos. Consequentemente, $W^s(0) = \{0\}$.

3. Se $\lambda = -1$ temos que: o ponto 0 é um ponto fixo e todos os pontos da reta real diferentes de zero são pontos periódicos de período 2. Consequentemente, $W^s(0) = \{0\}$.

4. Se $|\lambda| > 1$ temos que, para todo o $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

   $$\lim_{n\to+\infty} |f^n(x_0)| = +\infty.$$

   Consequentemente, $W^s(0) = \{0\}$.

Exercício 2.

(a) $W^s(0) =]-1,1[$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

(b) $\omega(x) = \{1\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \end{aligned}$$

(c) $\omega(x) = \varnothing$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

(d) $\omega(2) = \{-2, 2\}$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

(e) O conjunto $[-1,1]$ não contém pontos periódicos.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$

(f) $\sqrt{3}$ é um ponto periódico de período 2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x \end{aligned}$$

(g) f tem um único ponto fixo x e $W^s(x) = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x/2 \end{aligned}$$

(h) Todo o ponto da reta é periódico.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

(i) Todo o ponto da reta é recorrente.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

(j) Todo o ponto da reta é não-errante.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

(k) Nenhum ponto da reta é periódico.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$$

(l) Nenhum ponto da reta é recorrente.

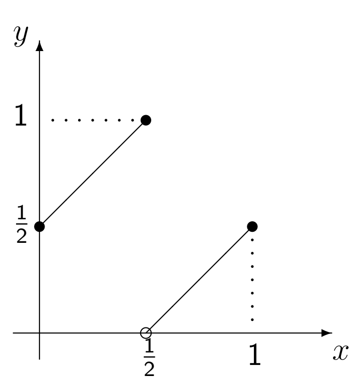
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+3 \end{array}$$

(m) O conjunto dos pontos recorrentes é $[0,2]$.

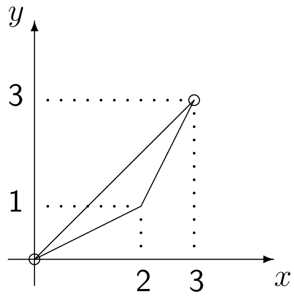
$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x<0 \\ x & \text{se} \quad 0\le x\le 2 \\ 2x-2 & \text{se} \quad x>2 \end{cases} \end{array}$$

Exercício 3. Dê exemplo de, ou justifique por que não existe:

1. Uma transformação $f:[0,1]\to[0,1]$ que não tenha pontos fixos.



2. Uma transformação contínua $f :]0,3[\to]0,3[$ que não tenha pontos fixos.



3. Um homeomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não tenha pontos fixos.

$$
\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+1 \end{array}
$$

Exercício 4.

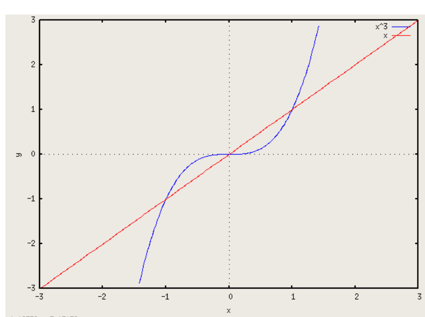
$$
\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \to & [0,1[\\ x & \mapsto & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{array}
$$

Note que o conjunto $[0,1[$ não é fechado!

Exercício 5. Utilize o software Maxima.

Exercício 6. Utilize o software Maxima para simular a evolução da dinâmica de cada um dos sistemas.

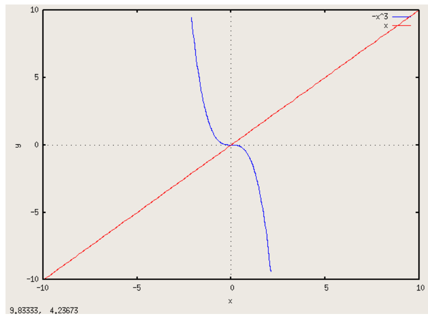
(a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$



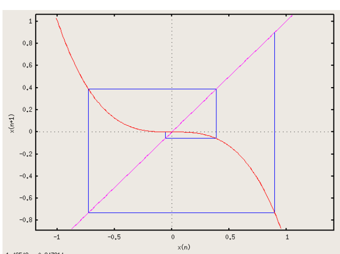
Para cada $n \in \mathbb{N}$, a iterada de ordem n é a transformação $\begin{array}{rccc} f^n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & x^{3^n} \end{array}$

- Os pontos fixos são os pontos $-1, 0$ e 1.
- Se $x_0 > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_0)^{3^n} = +\infty$.
- Se $x_0 < -1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_0)^{3^n} = -\infty$.
- Se $-1 < x_0 < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_0)^{3^n} = 0$.

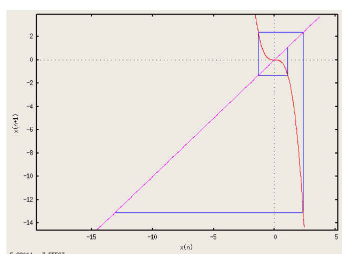
(b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -x^3 \end{array}$



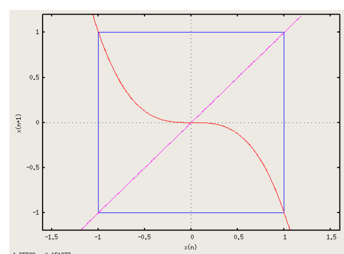
Para cada $n \in \mathbb{N}$, a iterada de ordem n é a transformação $\begin{array}{rcl} f^n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^{3^n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -x^{3^n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$



$x_0 = 0.9$



$x_0 = 1.1$



$x_0 = 1$

- O ponto 0 é o único ponto fixo.
- $\{-1, 1\}$ é uma órbita periódica de período 2.
- Se $|x_0| < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.
- Se $|x_0| > 1$ a trajetória de x_0 é divergente. No entanto, $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n(x_0)| = +\infty$.

(c) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{1/3} \end{array}$

Comece por provar o seguinte resultado (que é uma consequência do Teorema de Lagrange): Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função derivável, onde I é um intervalo da reta real, tal que

$$|f'(x)| \leq \lambda\,, \quad \forall x \in I\,.$$

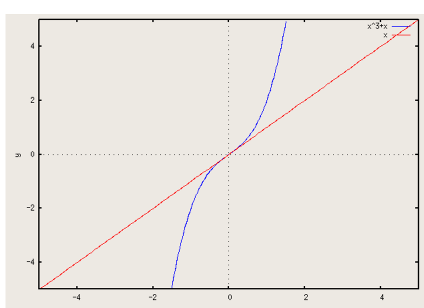
Então

$$|f(x) - f(y) \leq \lambda |x-y|,$$

para todos $x, y \in I$.

- Os pontos fixos são os pontos $-1, 0$ e 1.
- A trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}^+$ é convergente para o ponto 1.
  (i) Seja $x_0 \in]0,1[$.
  A restrição de f ao intervalo $[0,1]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([0,1]) \subseteq [0,1]$. Consequentente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é convergente (para um ponto fixo). Como a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é crescente, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1$.
  (ii) Seja $x_0 \in]1, +\infty[$.
  Consideremos a restrição de f ao intervalo $[1,+\infty[$. Temos que $f([1,+\infty[) \subseteq [1,+\infty[$. Além disso, $|f'(x)| \leq 1/3$ para todo o $x \in [1,+\infty[$. Consequentemente, a restrição considerada é uma contração do conjunto fechado $[1,+\infty[$ e o Princípio das Contrações garante que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ converge para o único ponto fixo 1 em $[1,+\infty[$.
- A trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}^-$ é convergente para o ponto -1.
  (iii) Seja $x_0 \in]-\infty, 0[$.
  É suficiente notar que, porque f é ímpar, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\lim_{n\to\infty} f^n(-x_0) = -1$.

(d) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 + x \end{array}$

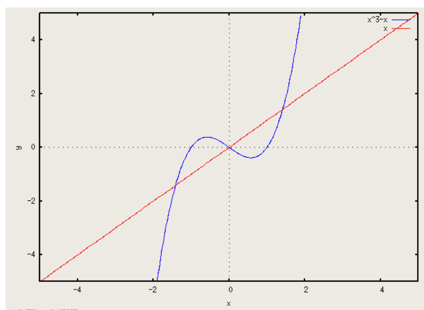


- O ponto 0 é o único ponto fixo.
- Se $x_0 > 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

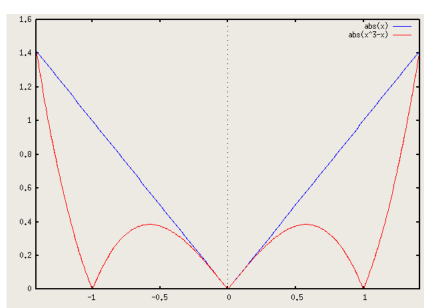
  Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]0, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que 0), o que é absurdo uma vez que 0 é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.
- Se $x_0 < 0$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

  É suficiente notar que, porque f é ímpar, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\lim\limits_{n\to\infty} f^n(-x_0) = -\infty$.

(e) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 - x \end{array}$



- Os pontos fixos são os pontos $-\sqrt{2}, 0$ e $\sqrt{2}$.
- Se $-\sqrt{2} < x_0 < \sqrt{2}$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$. Observemos que $|f(x_0)| \le |x_0|$ para todo o $x_0 \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. A figura seguinte permite verificar geometricamente a desigualdade anterior.



Consequentemente, $(|f^n(x_0)|)_n$ é decrescente. Porque $(|f^n(x_0)|)_n$ é decrescente e minorada, é convergente para (um ponto fixo de $|f|$). Como a trajetória $(|f^n(x_0)|)_n$ é decrescente, concluímos que $\lim_{n\to\infty} |f^n(x_0)| = 0$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

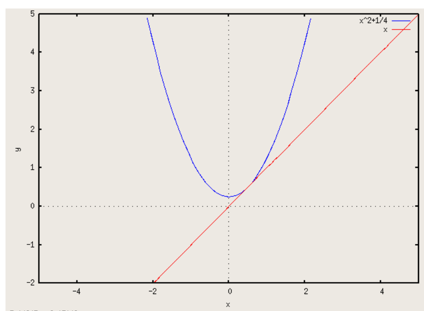
- Se $x_0 > \sqrt{2}$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

  Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]\sqrt{2}, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que $\sqrt{2}$), o que é absurdo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

- Se $x_0 < -\sqrt{2}$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

  É suficiente notar que, porque f é ímpar, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\lim_{n\to\infty} f^n(-x_0) = -\infty$.

(f) $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1/4 \end{array}$$



- O ponto $1/2$ é o único ponto fixo.

- Se $x_0 \in [-1/2, 1/2]$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1/2$.

  (i) Seja $x_0 \in [0, 1/2]$.

  A restrição de f ao intervalo $[0, 1/2]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([0, 1/2]) \subseteq [0, 1/2]$. Consequentente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é convergente (para um ponto fixo). Logo, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1/2$.

  (ii) Seja $x_0 \in [-1/2, 0[$.

  Notemos que, se $x_0 \in [-1/2, 0[$ então $f(x_0) \in]0, 1/2]$. Consequentemente, porque a trajetória de qualquer ponto em $]0, 1/2]$ converge para $1/2$, concluímos que $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 1/2$.

- Se $x_0 \in \mathbb{R} \backslash [-1/2, 1/2]$ então $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

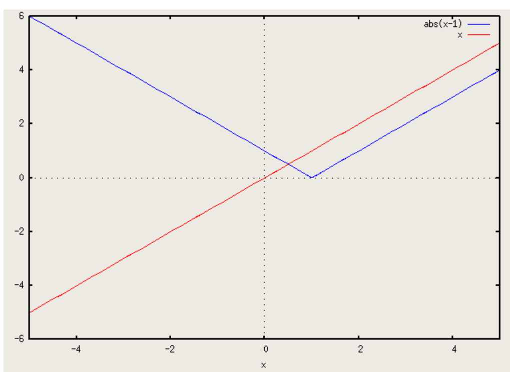
  (i) Seja $x_0 \in]1/2, +\infty[$.

  Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]1/2, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que $1/2$), o que é absurdo uma vez que $1/2$ é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não majorada e, portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

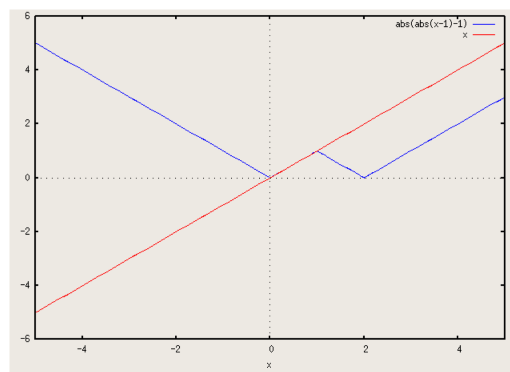
  (ii) Seja $x_0 \in] - \infty, -1/2[$.

  Observemos que, se $x_0 \in] - \infty, -1/2[$ então $f(x_0) \in]1/2, +\infty[$. Consequentemente, porque o limite da trajetória de qualquer ponto em $]1/2, +\infty[$ é $+\infty$, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

(g) $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x-1| \end{array}$$



f



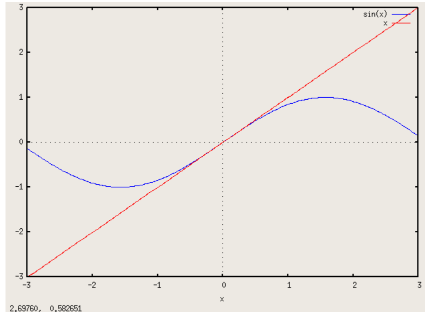
f^2

- O único ponto fixo é o ponto $1/2$. Determine $W^s(1/2)$.

- Se $x_0 \in [0, 1] \backslash \{1/2\}$ então x_0 é um ponto periódico de período 2. Com efeito, temos que $f^2(x_0) = f(f(x_0)) = f(-x_0 + 1) = -(-x_0 + 1) + 1 = x_0$.

- Se $x_0 \in] - \infty, 0[\cup]1, +\infty[$ então existe algum tempo $n \geq 1$ tal que $f^n(x_0) \in [0, 1]$ e, portanto, x_0 é um ponto pré-periódico.

(h) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$



- O único ponto fixo é o ponto 0.
- A trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ converge para 0.

  (i) Seja $x_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.

  A restrição de f ao intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([-\pi/2, \pi/2]) \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$. Consequentente, a trajetória $\left(f^n(x_0)\right)_n$ é convergente (para um ponto fixo). Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

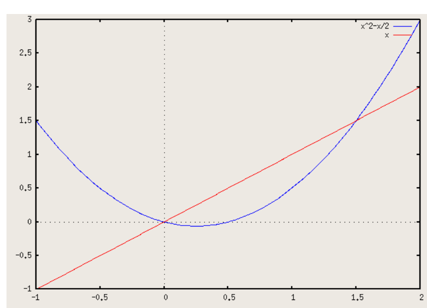
  (ii) Seja $x_0 \in \mathbb{R}\backslash[-\pi/2, \pi/2]$.

  Notemos que, se $x_0 \in \mathbb{R}\backslash[-\pi/2, \pi/2]$ então $f(x_0) \in [-\pi/2, \pi/2]$. Consequentemente, porque a trajetória de qualquer ponto em $[-\pi/2, \pi/2]$ converge para 0, concluímos que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$.

Exercício 7. A resolução deste exercício é análoga à do exercício 6.(c).

Exercício 8.

(a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 - x/2 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x/2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3/2.$$

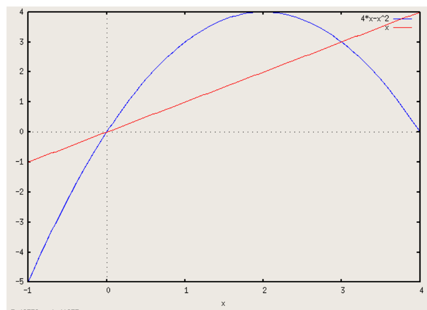
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rcl} f' : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & 2x - 1/2 \end{array}$ Em particular,

$|f'(0)| = 1/2 < 1$ e, portanto, 0 é um ponto fixo atrativo

e

$|f'(3/2)| = 5/2 > 1$ e, portanto, 3/2 é um ponto fixo repulsivo.

(b) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x - x^2 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow 4x - x^2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3.$$

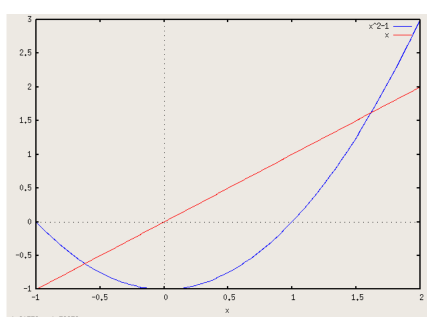
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rcl} f' : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & 4 - 2x \end{array}$ Em particular,

$|f'(0)| = 4 > 1$ e, portanto, 0 é um ponto fixo repulsivo

e

$|f'(3)| = 2 > 1$ e, portanto, 3 é um ponto fixo repulsivo.

(c) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 1 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

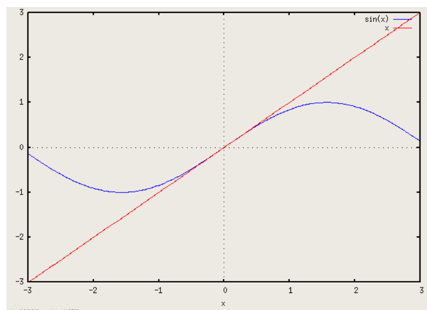
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$ Em particular,

$\left|f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right| = 1 + \sqrt{5} > 1$ e, portanto, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto fixo repulsivo

e

$\left|f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right| = \sqrt{5} - 1 > 1$ e, portanto, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

(d) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$



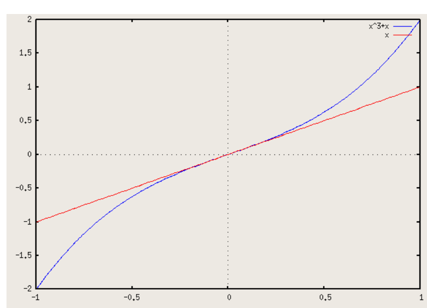
Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

No exercício 6.h) mostrámos que a trajetória de todo o ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ converge para 0. Em particular, podemos concluir que o ponto fixo 0 é atrativo.

(e) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + x^3 \end{array}$



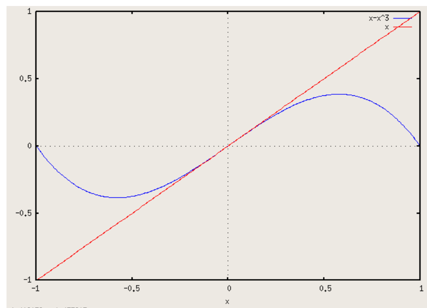
Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x^2+1 \end{array}$. Em particular, $|f'(0)| = 1$.

No exercício 6.d) mostrámos que, se $x_0 > 0$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$ e que se $x_0 < 0$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$. Em particular, podemos concluir que o ponto fixo 0 é repulsivo.

(f) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - x^3 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^3 = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1-3x^2 \end{array}$. Em particular, $|f'(0)| = 1$.

A restrição de f ao intervalo $[-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]) \subseteq [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$. Consequentente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in [-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$ é convergente para o ponto fixo 0. Em particular, podemos concluir que o ponto fixo 0 é atrativo.

(g) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x + x^2 \end{array}$

Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + x^2 = x \Leftrightarrow x = 0.$$

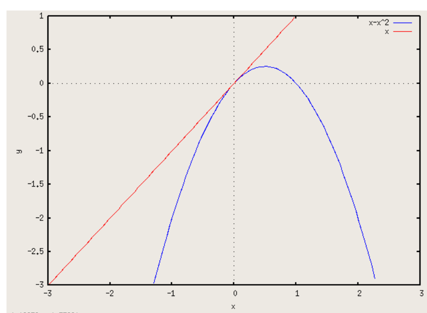
A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 1 + 2x \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

O ponto fixo 0 não é nem atrativo nem repulsivo. Com efeito, se $x_0 \in [-1/2, 0]$ então a trajetória de x_0 converge para 0 e se $x_0 \in]0, +\infty[$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$.

A restrição de f ao intervalo $[-1/2, 0]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([-1/2, 0]) \subseteq [-1/2, 0]$. Consequentente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in [-1/2, 0]$ é convergente para o ponto fixo 0.

Temos que $f(x_0) > x_0$ para todo o $x_0 \in]0, +\infty[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é majorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é majorada e estritamente crescente então é convergente para um ponto fixo maior ou igual do que x_0 (e, portanto, maior do que 0), o que é absurdo uma vez que 0 é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era majorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente crescente e não é majorada e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = +\infty$ para todo o $x_0 \in]0, +\infty[$.

(h) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - x^2 \end{array}$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - x^2 = x \Leftrightarrow x = 0.$$

A derivada de f é a transformação $\begin{array}{rccc} f' : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}. \\ & x & \mapsto & 1 - 2x \end{array}$ Em particular, $|f'(0)| = 1$.

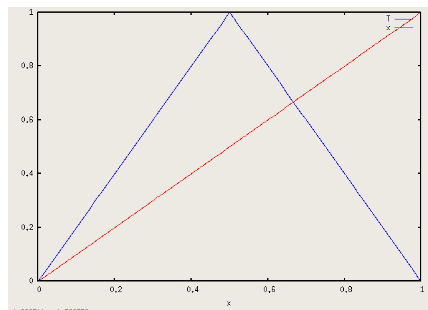
O ponto fixo 0 não é nem atrativo nem repulsivo. Com efeito, se $x_0 \in [0, 1/2]$ então a trajetória de x_0 converge para 0 e se $x_0 \in] - \infty, 0[$ então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$.

A restrição de f ao intervalo $[0, 1/2]$ é uma transformação contínua e crescente tal que $f([0, 1/2]) \subseteq [0, 1/2]$. Consequentente, a trajetória de todo o ponto $x_0 \in [0, 1/2]$ é convergente para o ponto fixo 0.

Temos que $f(x_0) < x_0$ para todo o $x_0 \in]-\infty, 0[$. Consequentemente, a trajetória $(f^n(x_0))_n$ é estritamente decrescente. Suponhamos, por absurdo, que $(f^n(x_0))_n$ é minorada. Porque $(f^n(x_0))_n$ é minorada e estritamente decrescente então é convergente para um ponto fixo menor ou igual do que x_0 (e, portanto, menor do que 0), o que é absurdo uma vez que 0 é o único ponto fixo. O absurdo resultou de termos suposto que a trajetória $(f^n(x_0))_n$ era minorada. Concluímos assim que $(f^n(x_0))_n$ é estritamente decrescente e não é minorada e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = -\infty$ para todo o $x_0 \in]-\infty, 0[$.

(i)

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{se } \ x \leq 1/2 \\ 2-2x & \text{se } \ x > 1/2 \end{cases} \end{array}$$



Os pontos fixos da transformação f são as soluções da equação $f(x) = x$. Temos que

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2/3.$$

A derivada de f é a transformação

$$\begin{array}{rcl} f' : \mathbb{R}\backslash\{1/2\} & \to & \mathbb{R}. \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2 & \text{se } \ x < 1/2 \\ -2 & \text{se } \ x > 1/2 \end{cases} \end{array}$$

Em particular,

$|f'(0)| = 2 > 1$ e, portanto, 0 é um ponto fixo repulsivo.

e

$|f'(2/3)| = 2 > 1$ e, portanto, 2/3 é um ponto fixo repulsivo.

Exercício 9.

(a) $\sqrt{2}$ é um ponto fixo repulsivo.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x-\sqrt{2} \end{array}$$

(b) $\sqrt{3}$ é um ponto fixo atrativo.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{3} \end{array}$$

(c) π e $-\pi$ são pontos fixos repulsivos.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{\pi^2} \end{array}$$