Universidade do Minho — MIEInf

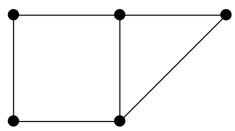
Dep. Matemática e Aplicações — 2018/2019

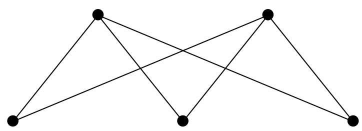
Tópicos de Matemática Discreta

folha 15

6. Grafos

6.1. Descreva formalmente cada um dos seguintes grafos e determine matrizes de incidência e de adjacência de cada um deles.



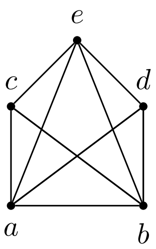


6.2. Desenhe um grafo que tenha como matriz de adjacência a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

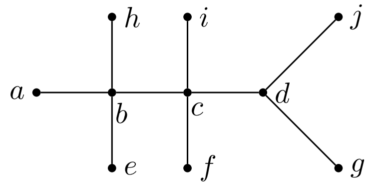
6.3. Desenhe um grafo que tenha como matriz de incidência a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6.4. Dos seguintes grafos, diga quais são bipartidos, indicando uma partição do conjunto dos seus vértices

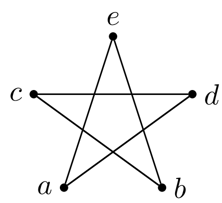
(a)



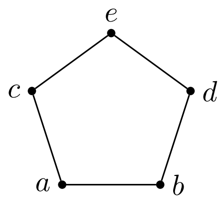
(b)



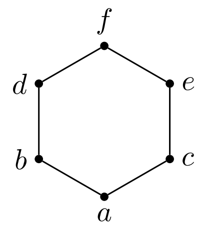
(c)



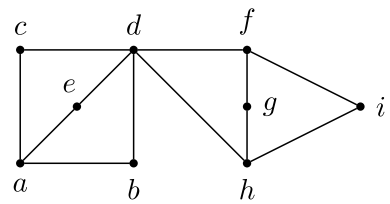
(d)



(e)



(f)



6.5. Seja $G = (V, E)$ o grafo onde $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ e

$$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, j\}, \{c, g\}, \{d, g\}, \{f, d\}, \{f, e\}, \{h, b\}, \{h, f\}, \{i, a\}, \{i, h\}\}.$$

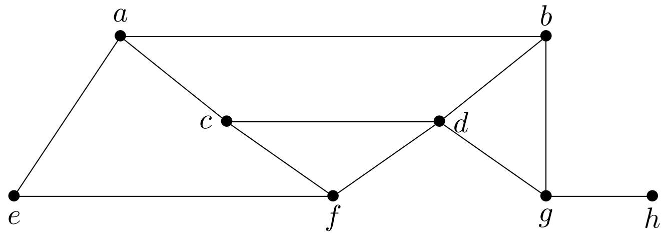
(a) Represente o grafo G.

(b) Mostre que G é bipartido, indicando uma partição dos seus vértices.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 16

6.6. Considere o seguinte grafo G.



(a) Indique o(s) caminho(s) de a a h de menor comprimento.

(b) Indique o(s) caminho(s) de a a h de maior comprimento que não têm vértices repetidos.

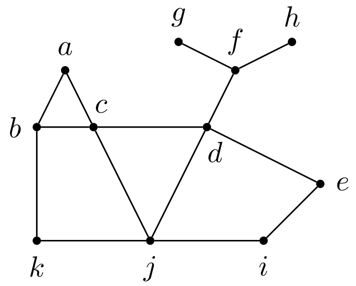
(c) Indique um caminho de a a h sem arestas repetidas, mas com vértices repetidos.

(d) Indique um ciclo de G de comprimento 7.

(e) Indique todos os ciclos de G cujo vértice inicial é a.

6.7. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $a, b \in V$. Mostre que se existe um caminho entre a e b então existe um caminho elementar entre a e b.

6.8. (a) Considere o grafo



(i) Determine dois caminhos elementares distintos de f a k.

(ii) Determine um ciclo com vértices usados na alínea anterior.

(b) Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$. Mostre que se existem dois caminhos elementares distintos entre x, y, então G admite um ciclo.

6.9. Mostre que um grafo não trivial $G = (V, E)$ é bipartido se e só se não admite ciclos de comprimento ímpar.

6.10. Dê exemplo, caso exista, de:

(a) um grafo sem vértices de grau ímpar;

(b) um grafo sem vértices de grau par;

(c) um grafo com exatamente um vértice de grau ímpar;

(d) um grafo com exatamente um vértice de grau par;

(e) um grafo com exatamente dois vértices de grau ímpar;

(f) um grafo com exatamente dois vértices de grau par.

Tópicos de Matemática Discreta

folha 17

6.11. A *sequência gradual* de um grafo é a sequência dos graus dos seus vértices ordenados do maior ao menor. Por exemplo, a sequência gradual do grafo completo K_4 é $3, 3, 3, 3$ e a sequência gradual do grafo $K_{2,3}$ é $3, 3, 2, 2, 2$. Para cada uma das sequências de números, indique as que são sequência gradual de algum grafo. Neste caso, represente o grafo em questão.

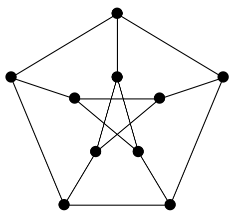
(a) $4, 4, 4, 4$;	(b) $3, 3, 3, 2, 1$;
(c) 1,1,1,1,1,1;	(d) 5,4,4,3,2,2;
(e) 4,3,3,2,2,1;	(f) 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2.

6.12. Prove o Teorema da Amizade: "Em toda a cidade com pelo menos 2 habitantes, residem 2 pessoas com o mesmo número de amigos que habitam nessa mesma cidade."

6.13. Qual o número mínimo de vértices de um grafo simples com 200 arestas? Porquê?

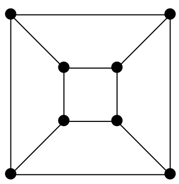
6.14. Um *conjunto de desconexão* de um grafo conexo G é um conjunto de arestas cuja remoção dá origem a um grafo desconexo.

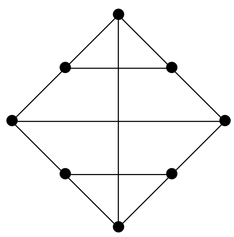
(a) Encontre conjuntos de desconexão para o grafo de Petersen



com 3, 4 e 5 arestas.

(b) Encontre conjuntos de desconexão com o menor número possível de arestas para os grafos seguintes:





6.15. Construa todas as árvores possíveis com 6 vértices.

6.16. Mostre que em qualquer árvore, a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é 1. [Sugestão: Use o Princípio de Indução Forte sobre o número de arestas.]

6.17. (a) Mostre que um grafo conexo com v vértices tem pelo menos $v - 1$ arestas.
(b) Mostre que um grafo conexo com v vértices e exatamente $v - 1$ arestas é uma árvore.

6.18. Mostre que qualquer árvore com pelo menos dois vértices é um grafo bipartido. Quais as árvores que são grafos bipartidos completos?