Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

séries de Fourier e edp's

Exercício 1. Indique a ordem e linearidade de cada uma das seguintes edp's:

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(b) $x^2\,\dfrac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^3\,\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}$

(c) $u\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r\,s\,t$

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(e) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$

Exercício 2. Indique o tipo de cada uma das seguintes edp's:

(a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(b) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4$

(e) $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3y^2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

Exercício 3. Mostre que $u(x,t) = e^{-8t}\,\text{sen}\,(2x)$ é solução do seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = \text{sen}\,(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Exercício 4. Mostre que

$$u(x,t) = \cos(6t)\,\text{sen}\,(3x) + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,(8t)\,\text{sen}\,(4x) + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,(12t)\,\text{sen}\,(6x) - 4\cos(20t)\,\text{sen}\,(10x)$$

é solução do seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = \text{sen}\,(3x) - 4\,\text{sen}\,(10x), \quad 0 \leq x \leq \pi \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\,\text{sen}\,(4x) + \text{sen}\,(6x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

separação de variáveis

Exercício 5. Use o método de separação de variáveis para resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u, \quad 0 < x < 10,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(10,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = 3\,\text{sen}\,(2\pi x) - 7\,\text{sen}\,(4\pi x), \quad 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Exercício 6. Use o método de separação de variáveis para resolver os seguintes problemas:

(a) $u_t = u_y, \quad u(0,t) = e^{-3t} + e^{2t}$

(a) $u_t = u_y - u, \quad u(0,t) = e^{-5t} + 2\,e^{-7t} - 14\,e^{13t}$

séries de Fourier

Exercício 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2 definida, em $[-1, 1[$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)\pi x\right)}{2n+1}.$$

(b) Seja S a função para a qual a série anterior converge. Esboce o gráfico de S, para $x \in [-3, 3]$.

(c) Fazendo uso da série referida na alínea (a), mostre que se tem:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Calcule, então, uma aproximação para π, usando quatro termos da série anterior.

Exercício 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida, em $[-\pi, \pi[$, por $f(x) = x$.

(a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(nx).$$

(b) Seja S a função para a qual a série anterior converge. Esboce o gráfico de S, para $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

Exercício 9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida, em $[-\pi, \pi]$, por $f(x) = x^2$.

(a) Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(b) Fazendo uso da série referida na alínea anterior, mostre que se tem:

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Exercício 10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função periódica de período 2π definida, em $[-\pi, \pi[$, por $f(x) = e^x$. Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$f(x) \sim \frac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} + 2\,\frac{\operatorname{sh}(\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2+1} \cos(nx) + \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+1} \operatorname{sen}(nx) \right).$$

Exercício 11. Mostre que, para $x \in [-1, 1]$, é válida a igualdade

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos((2k+1)\pi x).$$

séries de Fourier de senos
séries de Fourier de cossenos

Exercício 12. Considere a seguinte função f, definida no intervalo $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1/2, \\ 1 - x, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

(a) Mostre que a série de Fourier de senos de f é dada por

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \operatorname{sen}((2k-1)\pi x).$$

(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série anterior converge, no intervalo $[-2, 2]$.

(c) Para que valor converge a série quando $x = \frac{11}{2}$?

Exercício 13. Considere a função definida no intervalo $[0, 2\pi]$ por $f(x) = 4x$.

(a) Mostre que a série de Fourier de cossenos de f é dada por

$$4\pi - \frac{32}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)x}{2}\right).$$

(b) Esboce o gráfico da função definida por essa série, no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

Exercício 14. Determine a série de Fourier de senos de cada uma das seguintes funções e, em cada caso, esboce o gráfico da função para o qual a série converge (relativo a dois períodos):

(a) $f(x) = 1, \quad x \in [0, \pi]$

(b) $f(x) = 1 - x, \quad x \in [0, 1]$

(c) $f(x) = x - x^2, \quad x \in [0, 1]$

(d) $f(x) = 1 - \cos(2x), \quad x \in [0, \pi]$

Exercício 15. Determine a série de Fourier de cossenos de cada uma das seguintes funções e, em cada caso, esboce o gráfico da função para o qual a série converge (relativo a dois períodos):

(a) $f(x) = 2x, \quad x \in [0, \pi]$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2, \\ 0, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$

(c) $f(x) = \text{sen}\,(2x), \quad x \in [0, \pi]$

(d) $f(x) = 2x - \text{sen}\,(2x), \quad x \in [0, \pi]$

problemas de condução do calor e de corda vibrante

Exercício 16. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 3\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema, em cada um dos casos seguintes:

(a) $f(x) = \text{sen}\,(\pi x) + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(4\pi x) - \text{sen}\,(5\pi x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1/2 \\ 1-x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = x - x^2$

Exercício 17. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 5\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \\[2ex] u(x,0) = 1 - \cos(2x), \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema.

Exercício 18. Estude a aplicação do método de separação de variáveis à resolução dum problema de condução do calor do seguinte tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \sigma\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t \ge 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le L \end{cases}$$

Exercício 19. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema, em cada um dos casos seguintes:

(a) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}\cos(3x) + 5\cos(6x)$

(b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$

(c) $f(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x)$

Exercício 20. Estude a aplicação do método de separação de variáveis à resolução do problema da corda vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\, t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Exercício 21. Considere o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\, t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Determine a solução formal do problema, em cada um dos seguintes casos:

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(3\pi x) + \operatorname{sen}(5\pi x), \quad g(x) = 0$

(b) $f(x) = 0, \quad g(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + 2\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(5\pi x)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(3\pi x) + \operatorname{sen}(5\pi x), \quad g(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3\pi x) + 4\operatorname{sen}(5\pi x)$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = 2\operatorname{sen}(3\pi x) + 5\operatorname{sen}(4\pi x)$

(e) $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) - 2\operatorname{sen}(2\pi x) + 3\operatorname{sen}(3\pi x), \quad g(x) = x - x^2$

(f) $f(x) = x - x^2, \quad g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$