Universidade do Minho — Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Dep. Matemática e Aplicações — 2018/2019

Tópicos de Matemática Discreta

$2.^o$ teste — 3 de janeiro de 2019 — duração: 2 horas

1. Sejam $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as funções definidas por

$$f((x,y)) = x + y \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} (0,x) & \text{se } x \geq 0 \\ (x,0) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(a) Determine, justificando:

i. $g(\{-1,0,1\})$;

Uma vez que $g(\{-1,0,1\}) = \{g(-1), g(0), g(1)\}$ e

$$g(-1) = (-1,0), \quad g(0) = (0,0), \quad g(1) = (0,1),$$

tem-se $g(\{-1,0,1\}) = \{(-1,0),(0,0),(0,1)\}$.

ii. $f^{\leftarrow}(\{0\})$.

Tem-se

$$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \,|\, f((x,y)) \in \{0\}\}.$$

Então, atendendo a que

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x,$$

segue que

$$f^{\leftarrow}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y = -x\} = \{(x,-x) \,|\, x \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Diga, justificando, se a aplicação f é injetiva e/ou sobrejetiva.

A aplicação f é injetiva se, para quaisquer $(x,y),(z,w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$f((x,y)) = f((z,w)) \Rightarrow (x,y) = (z,w).$$

Ora, atendendo a que

$$f((-1,1)) = f((1,-1)) \text{ e } (-1,1) \neq (1,-1),$$

a aplicação f não é injetiva.

A aplicação f é sobrejetiva se, para qualquer $z \in \mathbb{Z}$, existe $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f((x,y)) = z$. Uma vez que, para todo $z \in \mathbb{Z}$, $(0,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é tal que $f((0,z)) = z$, concluímos que a aplicação f é sobrejetiva.

(c) Justifique que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

Uma vez que o codomínio de g coincide com o domínio de f, a composta de f com g está definida e $f \circ g$ é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$. Além disso, para qualquer $x \in \mathbb{Z}$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f((0,x)) & \text{se } x \geq 0 \\ f((x,0)) & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

pelo que, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $(f \circ g)(x) = x$.

A função $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ é definida por

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Uma vez que as funções $f \circ g$ e $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in \mathbb{Z}$, $(f \circ g)(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}(x)$, então $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

(d) Sem determinar $g \circ f$, justifique que $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

Se admitirmos que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, então, pela alínea anterior, segue que f é uma função invertível e, portanto, bijetiva. Ora, pela alínea (b) sabe-se que a função f não é bijetiva, pois não é injetiva. Logo $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

2. Sejam R e S as relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por

$$x\,R\,y \text{ se e só se } 2 \leq y - x, \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{N},$$

$$S = \{(1,4), (2,1), (3,1), (2,3), (4,2)\}.$$

(a) Determine $\mathrm{Dom(S)} \cap \mathrm{Im(R)}$.

Tem-se $\mathrm{Dom(S)} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{N} \,|\, \exists_{\mathrm{y}\in\mathbb{N}}\,(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{S}\} = \{1,2,3,4\}$.

Uma vez que $\mathrm{Im(R)} = \{\mathrm{y} \in \mathbb{N} \,|\, \exists_{\mathrm{x}\in\mathbb{N}}\,(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}\}$, tem-se $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathbb{N}$. Além disso,

- $1, 2 \notin \mathrm{Im}(R)$, pois, para todo $x \in \mathbb{N}$, $2 \not\leq 1 - x$ e $2 \not\leq 2 - x$;
- para todo $y \geq 3$, existe $x = y - 2 \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq y - x$.

Logo $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.

Assim, $\mathrm{Dom(S)} \cap \mathrm{Im(R)} = \{3,4\}$.

(b) Justifique que a relação R é transitiva. Diga se $R \circ R \subseteq R$.

A relação R é transitiva se, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$a\,R\,b \text{ e } b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c.$$

Atendendo a que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a\,R\,b \text{ e } b\,R\,c &\Rightarrow 2 \leq b - a \text{ e } 2 \leq c - b \\ &\Rightarrow 4 \leq (b-a) + (c-b) \\ &\Rightarrow 4 \leq c - a \\ &\Rightarrow 2 \leq c - a \\ &\Rightarrow aRc, \end{aligned}$$

conclui-se que a relaçao R é transitiva.

Uma relação binária T definida num conjunto A é transitiva se e só se $T \circ T \subseteq T$. Então, como R é transitiva, tem-se $R \circ R \subseteq R$.

(c) Diga se a relação $S \circ S$ é simétrica e se é antissimétrica. Justifique.

Tem-se

$$S \circ S = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,|\, \exists_{z\in\mathbb{N}}\ (x,z) \in S \text{ e } (z,y) \in S\}.$$

Como

$$\begin{aligned} &(1,2) \in S \circ S \text{ (pois } (1,4) \in S \text{ e } (4,2) \in S), \\ &(2,4) \in S \circ S \text{ (pois } (2,1) \in S \text{ e } (1,4) \in S), \\ &(3,4) \in S \circ S \text{ (pois } (3,1) \in S \text{ e } (1,4) \in S), \\ &(2,1) \in S \circ S \text{ (pois } (2,3) \in S \text{ e } (3,1) \in S), \\ &(4,1) \in S \circ S \text{ (pois } (4,2) \in S \text{ e } (2,1) \in S), \\ &(4,3) \in S \circ S \text{ (pois } (4,2) \in S \text{ e } (2,3) \in S), \end{aligned},$$

segue que

$$S \circ S = \{(1,2), (2,4), (3,4), (2,1), (4,1), (4,3)\}.$$

Uma relação binária T definida num conjunto A é simétrica se, para quaisquer $a, b \in A$, $(a,b) \in T \Rightarrow (b,a) \in T$. Uma vez que $(1,2) \in S \circ S)$ e $(2,1) \notin S \circ S$, a relação $S \circ S$ não é simétrica.

Uma relação binária T definida num conjunto A é antissimétrica se, para quaisquer $a, b \in A$,

$$(a,b) \in T \text{ e } (b,a) \in T \Rightarrow a = b.$$

Atendendo a que $(3,4) \in S \circ S$, $(4,3) \in S \circ S$ e $3 \neq 4$, a relação $S \circ S$ não é antissimétrica.

3. Sejam R, S e $R \cap S$ as relações de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < |x| \leq 3\}$ tais que, para quaisquer $x, y \in A$,

$$(x,y) \in R \text{ se e só se } xy > 0 \qquad \text{e} \qquad (x,y) \in S \text{ se e só se } x+y \text{ é par .}$$

(a) Diga, justificando, se $[-1]_R \cap [-1]_S = [-1]_{R\cap S}$.

Tem-se

$$\begin{aligned} [-1]_R \cap [-1]_S &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1\, R\, x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid -1\, S\, x\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1x > 0\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 + x \text{ é par}\} \\ &= \{-1, -2, -3\} \cap \{-1, -3, 1, 3\} \\ &= \{-1, -3\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} [-1]_{R\cap S} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1\, (R \cap S)\, x\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -1x > 0 \text{ e } -1 + x \text{ é par}\} \\ &= \{-1, -3\}. \end{aligned}$$

Logo $[-1]_R \cap [-1]_S = [-1]_{R\cap S}$.

(b) Determine o conjunto quociente $A/(R \cap S)$.

Tem-se

$$A/(R \cap S) = \{[x]_{R\cap S} \mid x \in A\}$$

e

$$\begin{aligned} [-1]_{R\cap S} &= \{-1, -3\} = [-3]_{R\cap S}\,, \\ [-2]_{R\cap S} &= \{-2\}, \\ [1]_{R\cap S} &= \{1, 3\} = [3]_{R\cap S} \\ [2]_{R\cap S} &= \{2\}, \end{aligned}$$

pelo que

$A/(R \cap S) = \{[-1]_{R\cap S}, [-2]_{R\cap S}, [1]_{R\cap S}, [2]_{R\cap S}\} = \{\{-1, -3\}, \{-2\}, \{1, 3\}, \{2\}\}$.

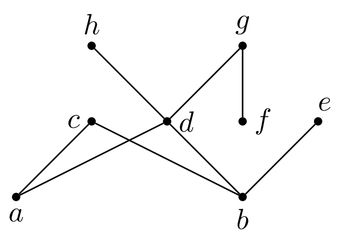
(c) Diga se $R \cup S$ é uma relação de equivalência em A. Justifique.

A relação $R \cup S$ é uma relação de equivalência em A se é reflexiva, simétrica e transitiva. No entanto, a relação $R \cup S$ não é transitiva: $(1,2) \in R \cup S$ (pois $(1,2) \in R$), $(2,-2) \in R \cup S$ (pois $(2,-2) \in S$), mas $(1,-2) \notin R \cup S$. Logo $R \cup S$ não é uma relação de equivalência.

4. Sejam $(A, \leq_1)$ e $(A, \leq_2)$ os c.p.o.s onde $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$$\leq_1 = \mathrm{id}_A \cup \{(a,c), (a,d), (a,g), (a,h), (b,c), (b,d), (b,e), (b,f), (b,g), (b,h), (d,g), (d,h), (f,g)\}$$

e $\leq_2$ é a ordem parcial representada pelo diagrama de Hasse



(a) Diga, justificando, se $\leq_1 = \leq_2$.

Do diagrama de Hasse segue que

$$\leq_2 = \mathrm{id}_A \cup \{(a,c), (a,d), (a,g), (a,h), (b,c), (b,d), (b,e), (b,g), (b,h), (d,g), (d,h), (f,g)\}.$$

Assim $\leq_1 \neq \leq_2$, pois $(b,f) \in \leq_1$, mas $(b,f) \notin \leq 2$.

(b) Relativamente ao c.p.o $(A, \leq_2)$, indique, caso, exista(m)

i. os elementos maximais e os elementos minimais de A.

Minimais de A: a,b,f.
Maximais de A: c,h,g,e.

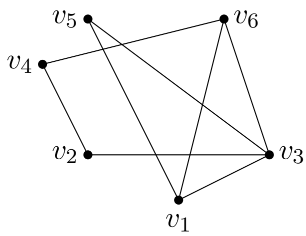
ii. os majorantes de $\{a, b\}$ e os minorantes de $\{h, g\}$.

Majorantes de $\{a, b\}$: c, d, h, g.
Minorantes de $\{h, g\}$: d, a, b.

iii. o supremo de $\{a, b\}$ e o ínfimo de $\{h, g\}$.

Não existe o supremo de $\{a, b\}$, pois o conjunto dos majorantes de $\{a, b\}$ ($\{c, d, h, g\}$) não tem elemento mínimo.
O conjunto dos minorantes de $\{h, g\}$ tem elemento máximo; $\max(\{d, a, b\}) = d$. Logo $\sup\{h, g\} = d$.

5. Considere o grafo G representado ao lado.



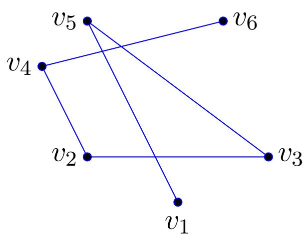
(a) Justifique que o grafo G não é bipartido.

Um grafo não trivial é bipartido se e só se não tem ciclos de comprimento ímpar. O grafo G é não trivial e tem ciclos de comprimentos ímpar (por exemplo, $< v_1, v_3, v_6, v_1 >$), logo o grafo não é bipartido.

(b) Indique, justificando, o número de arestas que é necessário remover de G para se obter uma árvore.

Um grafo conexo é uma árvore se e só se a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é igual a 1.

Uma vez que G é um grafo conexo com 6 vértices e 8 arestas, é necessário remover 3 arestas de G para se obter uma árvore. O grafo representado por



é um grafo obtido de G removendo 3 arestas e é uma árvore (pois é um grafo conexo onde a diferença entre o número de vértices e o número de arestas é igual a 1).

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,0+1,0+1,5+1,0+1,0	1,25+1,25+1,25	1,25+1,25+1,25	1,0+1,0+1,0+1,0	1,5+1,5