Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

edo's lineares de ordem n

Exercício 1. Considere a equação diferencial linear homogénea de segunda ordem

$$y'' - 5\,y' + 6\,y = 0\,.$$

(a) Mostre que $y_1(x) = e^{2x}$ e $y_2(x) = e^{3x}$ são soluções linearmente independentes desta equação, para $x \in \mathbb{R}$.

(b) Resolva a equação.

(c) Determine a solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$.

Exercício 2. Para as equações diferenciais que se apresentam de seguida, mostre que as funções correspondentes formam um conjunto fundamental de soluções:

(a) $y''' + 2\,y'' - 11\,y' - 12\,y = 0\,, \qquad \{\, e^{3x},\, e^{-x},\, e^{-4x} \,\}$

(b) $y''' - y'' + 4\,y' - 4\,y = 0\,, \qquad \{\, e^{x},\, \operatorname{sen}(2x),\, \cos(2x) \,\}$

(c) $x^3\,y''' - 3x^2\,y'' + 6x\,y' - 6\,y = 0\,, \quad x > 0\,, \qquad \{\, x,\, x^2,\, x^3 \,\}$

(d) $y^{(4)} - y = 0\,, \qquad \{\, e^{x},\, e^{-x},\, \operatorname{sen} x,\, \cos x \,\}$

Exercício 3. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares homogéneas:

(a) $y'' - 2\,y' - 3\,y = 0$

(b) $y''' - 3\,y'' - y' + 3\,y = 0$

(c) $y'' - 8\,y' + 16\,y = 0$

(d) $y''' - 6\,y'' + 12\,y' - 8\,y = 0$

(e) $y'' - 4\,y' + 13\,y = 0$

(f) $y''' - y'' + y' - y = 0$

(g) $y^{(iv)} + y = 0$

(h) $y^{(iv)} + 2\,y'' + y = 0$

Exercício 4. Sabendo que $y(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5\,y = 0\,,$$

resolva a equação.

Exercício 5. Resolva os seguintes dois problemas com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' - y' - 12\,y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 4y' + 29\,y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

Exercício 6. Resolva o seguinte problema (dito um problema com condições de fronteira):

$$\begin{cases} y'' = y', & x \in [0,1] \\ y'(0) + y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Exercício 7. Resolva a equação diferencial $y'' - 3\,y' + 2\,y = f(x)$, quando:

(a) $f(x) = 4x^2$

(b) $f(x) = x + e^x$

(c) $f(x) = x\,e^x$

(d) $f(x) = 2x^2 + e^x + 2x\,e^x + 4\,e^{3x}$

Exercício 8. Resolva os seguintes dois problemas com condições iniciais:

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 3x^2 - 4 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exercício 9. Resolva as seguintes equações diferenciais:

(a) $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen}(2x) + e^{2x}$

(b) $y''' - 4y' = 3x + e^x$

(c) $y'' - y' + 2y = 2x - 1 - 3\,e^x$

(d) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$

(e) $y''' + y'' - 2y = x\,e^x + 1$