Cálculo

folha 6 — 2018'19

Teoremas fundamentais sobre funções deriváveis.

1. Usando o teorema de Rolle mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{2/3}$.

(a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.

(b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $]-1, 1[$.

(c) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

3. Seja f uma função polinomial com exatamente dois máximos locais e um mínimo local.

(a) Esboce um possível gráfico de f.

(b) Qual o maior número de zeros que f poderá ter?

(c) Qual o número mínimo de zeros que f poderá ter?

(d) Qual o menor número de pontos de inflexão que f poderá ter?

(e) Qual o menor grau que f poderá ter?

(f) Defina, algebricamente, uma possível função f.

4. Recorrendo ao teorema de Lagrange, mostre que para todo o $x \neq 0$, $e^x > 1 + x$.

5. Indique se existir, ou justifique porque não existe, uma função derivável $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1, 2]$.

Aplicações do cálculo diferencial.

6. Calcule, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\operatorname{tg} x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{(x^2)}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x e^{-x^2+1}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln x \, \ln(x - 1)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x - 1)}{x^2 - 1}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

7. Estude as funções (i.e. indique domínio e contradomínio, extremos e intervalos de monotonia, pontos de inflexão e concavidade; esboce um gráfico) definidas por:

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ (b) $g(x) = \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ (c) $h(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ (d) $j(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

8. Em cada das seguintes alíneas, esboce graficamente uma função f satisfazendo os requisitos especificados

(a) as 1.ª e 2.ª derivadas são sempre positivas;

(b) a 1.ª derivada é sempre negativa mas a 2.ª derivada é positiva para alguns pontos e negativa para outros

(c) crescente, com concavidade voltada para baixo, com $f(5) = 2$ e $f'(5) = \frac{1}{2}$.

9. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{2x}$.

(a) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

(b) Determine uma equação da reta normal ao gráfico de f no ponto de abcissa zero.

10. Determine o polinómio de Taylor de ordem n da função f indicada em torno do ponto a apresentado:

(a) $f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 10, \quad a = 0$

(b) $f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 8, \quad a = 0$

(c) $f(x) = \ln x,\ x \in \mathbb{R}^+, \quad n = 7, \quad a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 7, \quad a = 1;$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x-1},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad n = 6, \quad a = 0$

(f) $f(x) = x - \cos x,\ x \in \mathbb{R}, \quad n = 4, \quad a = 0$

11. Relativamente a cada função dada no exercício anterior, compare o valor de f e do correspondente polinómio $P_{n,a}$ nos pontos b e c indicados:

(a) $b = 1,\ \ c = 3$

(b) $b = \dfrac{\pi}{3},\ \ c = \pi;$

(c) $b = \dfrac{\pi}{4},\ \ c = \pi$

(d) $b = 1.1\,,\ \ c = 2$

(e) $b = 1.1\,,\ \ c = 2;$

(f) $b = 0.1\,,\ \ c = -1$

12. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo polinómio de Taylor de ordem 6 em torno da origem é dado por

$$P_{6,0}(x) = 3x - 4x^3 + 5x^6\,.$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$ e $f^{(6)}(0)$.

13. Escreva o polinómio $-x^6 + 6\,x^5 - 9\,x^4 - 4\,x^3 + 23\,x^2 - 21\,x + 6$ em potências de $x - 1$.

14. Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivadas contínuas tal que

$$f(3) = 1,\ f'(3) = -2,\ f''(3) = 3 \ \text{ e } \ f'''(3) = -5\,.$$

Determine os polinómios de Taylor de ordens 2 e 3 da função f em torno do ponto 3. Use os dois polinómios para aproximar o valor de $f(2.9)$.

15. Use o polinómio de Taylor de ordem 4, da função definida por $f(x) = \cos x$, em torno de $a = 0$ para explicar porque razão se tem

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$