Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

Equações diferenciais "triviais"

Consulte o ficheiro 'Folha2.nb'.

1. **Solução geral e condições iniciais**. Consideremos a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x + 10\,\text{sen}\,x\,.$$

   (a) Temos que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \int (x + 10\,\text{sen}\,x)\,dx = \frac{x^2}{2} - 10\cos x + c,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

   Então, a expressão geral (explícita) da solução da equação diferencial é

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - 10\cos x + c,\ \ c \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Encontrada a solução geral, queremos agora determinar a solução particular que passa no ponto $P = (\pi, 0)$. Isto é, queremos determinar para que escolha da cosntante c se obtém $y(\pi) = 0$. Temos que

$$y(\pi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2} - 10\cos\pi + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{\pi^2}{2} - 10\,.$$

   Assim, a solução particular que passa no ponto $P = (\pi, 0)$ é a função

$$\begin{array}{rccl} y\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\,. \\ & x & \mapsto & \frac{x^2}{2} - 10\cos x - \frac{\pi^2}{2} - 10 \end{array}$$

   (c) Consulte o ficheiro 'Folha2.nb'.

2. **Velocidade, aceleração e segunda lei de Newton do movimento**. Um carro de massa m desloca-se a uma velocidade constante v_0 quando subitamente tem de travar. Os travões aplicam uma força k até o carro parar.

   Valores realistas de m e k são: $m = 1000\,kg$ e $k = 6500\,N$ $(1N = 1Kg\,m/s^2)$.

(a) Usando a segunda lei de Newton temos que

$$m\frac{dv}{dt} = -k\,,$$

uma vez que a força atua no sentido contrário ao do movimento do carro. Podemos reescrever esta equação como

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}\,.$$

Integrando ambos os membros obtemos

$$v(t) = -\frac{k}{m}t + c\,,$$

onde a constante c pode ser determinada fazendo-se $t = 0$: $c = v(0)$, ou seja, c é a velocidade inicial (i.e., no instante $t = 0$), que designaremos por v_0.

Assim, a expressão da solução particular que satisfaz $v(0) = v_0$ é: $v(t) = v_0 - \frac{k}{m}t$.

O carro pára para $t = t_p$ tal que $v(t_p) = 0$. Então, o carro pára quando $t_p = \frac{mv_0}{k}$.

Consulte o ficheiro 'Folha2.nb' para efetuar simulações com diferentes valores da velocidade inicial.

(b) Uma vez que

$$\frac{dx}{dt} = v(t)\,,$$

temos que

$$\frac{dx}{dt} = v_0 - \frac{k}{m}t\,.$$

Integrando ambos os membros entre $t = 0$ e $t = t_p$ obtemos

$$x(t_p) - x(0) = \int_0^{t_p}\left(v_0 - \frac{k}{m}t\right)\,dt = \left(v_0 t - \frac{kt^2}{2m}\right)\Bigg]_{t=0}^{t=t_p} = v_0 t_p - \frac{kt_p^2}{2m}\,.$$

Consequentemente,

$$x(t_p) = x_0 + v_0 t_p - \frac{kt_p^2}{2m}\,.$$

Como $t_p = \dfrac{mv_0}{k}$, substituindo na equação anterior, obtemos que

$$x(t_p) = x_0 + \frac{mv_0^2}{2k}\,.$$

Consulte o ficheiro 'Folha2.nb' para efectuar simulações com diferentes valores da velocidade inicial.

3. **Queda livre de corpos**. Seja h a altura acima do solo da qual cai a maçã. Pela segunda lei do movimento de Newton temos que

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\,,$$

isto é,

$$\frac{dv}{dt} = -g\,.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$v(t) = -gt + c\,,$$

onde a constante c pode ser determinada fazendo-se $t = 0$: $c = v(0)$, ou seja, c é a velocidade inicial que neste caso é 0. Assim, obtemos que

$$v(t) = -gt\,.$$

Integrando mais uma vez, obtemos

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1\,,$$

onde a constante c_1 pode ser determinada tendo em conta que quando $t = 0$, a posição da partícula é $x(0) = h$. Obtemos então que:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h\,.$$

De modo claro, a maçã atinge o solo no tempo $t = t_s$ em que $x(t_s) = 0$. Então

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$