Mestrado Integrado em Engenharia Informática | Universidade do Minho

Introdução aos Sistemas Dinâmicos

7 de janeiro de 2020 | Teste 2 | Duração: 2h

Nome: Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (4 valores)

(a) (2 valores) Seja f periódica de período 2π e definida, em $[-\pi, \pi[$, por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Mostre que a série de Fourier de f é dada por

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen}(kx).$$

(b) (2 valores) Fazendo uso da série referida na alínea anterior, mostre que se tem:

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Justifique convenientemente a sua resposta.

Exercício 2. (4 valores) Considere a função f definida, no intervalo $[0, 1]$, por $f(x) = 1 - x$.

(a) Mostre que a série de Fourier de senos de f é dada por

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n}.$$

(b) Seja S a função para a qual a série anterior converge. Esboce, justificando, o gráfico de S, para $x \in [-3, 3]$.

(c) Determine a solução formal do seguinte problema da corda vibrante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\, t > 0 \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

onde $\alpha = 2$, $g(x) = \operatorname{sen}(3\pi x) + 5 \operatorname{sen}(4\pi x)$ e f é a função definida anteriormente.

v.s.f.f.

Exercício 3. (4 valores) Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x),$$

com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $\underline{\lambda \in \mathbb{R}^+}$.

(a) Relativamente aos pontos fixos de f_λ, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

(b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_λ.

Exercício 4. (3 valores) [Sistema dinâmico *tenda*] Considere a transformação *tenda* $T : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq 1/2 \\ 2-2x & \text{se} \quad x > 1/2 \end{cases} .$$

(a) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

(b) Mostre que T é topologicamente transitiva.

(c) Diga, justificando, se a transformação tenda é caótica.

Exercício 5. (5 valores) [Sistema dinâmico *shift*] Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) : \ s_j = 0 \,\text{ou}\, 1\}$ e seja $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ a transformação *shift* definida por

$$(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \longmapsto (s_1\, s_2\, s_3\, \cdots)$$

onde $(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \in \Sigma_2$. Considere a métrica d em Σ_2 definida por

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

(a) Indique todos os pontos periódicos de período 3 de σ.

(b) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ_2.

(c) Mostre que existe um ponto $s \in \Sigma_2$ cuja órbita $\mathcal{O}^+_\sigma(s)$ é densa em Σ_2.

(d) Apresente, justificando, um exemplo de um ponto $s \in \Sigma_2$ tal que s é não-errante e não é periódico.

(e) Mostre, a partir da definição, que a transformação shift tem dependência sensível das condições iniciais.

FIM