Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
29 de Outubro de 2018
[duração 2h]

Cálculo – Teste 1

Nome completo::	Número::

JUSTIFIQUE CUIDADOSAMENTE TODAS AS SUAS RESPOSTAS.

Grupo I
(15 valores)

1. (2 valores)

Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |3 - x^2| < 2\}$. Represente A na forma de um intervalo ou de uma união de intervalos reais.

2. (3 valores)

Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ definida por $f(x) = \text{sen}(2x)$

(a) Faça um esboço do gráfico da função f.

(b) Seja g a restrição de f ao intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Justifique que g é uma função invertível.

(c) Defina a função inversa de g.

3. (3 valores)

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = \begin{cases} A - \operatorname{th} x, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x + B, & x > 0 \end{cases}$

(a) Determine as constantes reais A e B de forma a que f seja contínua.

(b) Calcule se existir, ou justifique porque não existe, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{e^x}$.

4. (3 valores)

Considere a função $\begin{array}{rcl} \operatorname{sen}\Big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$

(a) Justifique que a função inversa, arco-seno, é derivável em $]-1, 1[$.

(b) Fazendo uso da regra de derivação da função inversa, obtenha a regra de derivação

$$\operatorname{arcsen}' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \qquad \forall y \in]-1, 1[\,.$$

5. (2 valores)

Considere a função $g : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |\cos x|$.

(a) Mostre que $g(0) = g(\pi)$ mas não existe $c \in]0, \pi[$ tal que $g'(c) = 0$.

(b) Justifique porque a alínea anterior não contradiz o Teorema de Rolle.

6. (2 valores)

Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$.

Grupo II
(5 valores)
Apresente um exemplo ou **justifique porque não existe** a entidade descrita.

1. Duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f é par, g é ímpar e $f \circ g$ não é par.

2. Uma função (basta o gráfico) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{CD}_f =]-1, +\infty[\ .$$

3. Uma função real de variável real que não admite limite em nenhum ponto de $\mathbb{R}$.

4. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que exista $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|f(x)|}{f(x)}$.

5. Duas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.