Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

dinâmica na natureza

Exercício 1. Resolva o problema colocado por Leonardo Pisano (mais conhecido como Fibonacci) no seu Liber Abaci em 1202:

"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Exercício 2. Em 1860, Thomas Austin introduziu 24 coelhos Europeus na Austrália. Determine a população de coelhos na Austrália em 1870 e em 1880, usando o modelo de Fibonacci.

Exercício 3. O outro efeito borboleta.[1] Determine a população de mariposas beija-flor nos próximos anos na Costa Rica, supondo que existem atualmente P_0 mariposas beija-flor e que a taxa relativa de crescimento anual é 1.06.

Exercício 4. Competição: o modelo logístico.[2] Dada uma população inicial de borboletas P_0, designemos por P_n a população de borboletas no ano n. Suponhamos que a evolução da população de borboletas é dada por uma lei do tipo

$$P_{n+1} = \lambda P_n(1 - P_n), \quad \lambda \in [0, 4].$$

1. Moste que o caso $\lambda = 1$ conduz à extinção da população de borboletas.
2. Atribua valores a P_0 e a λ e observe o comportamento da trajetória de P_0. Consegue fazer previsões sobre o comportamento assimptótico de P_n?

Exercício 5. **Esforços heróicos com raízes babilónicas.** Um problema prático, natural nas sociedades baseadas na agricultura, como os Babilónios ou os Egípcios, é:

construir um quadrado dada a sua área.

"Construir" um quadrado quer dizer determinar a medida do seu lado. Assim, se A denota a área do quadrado, o lado ℓ será o comprimento tal que $\ell \times \ell = A$, ou seja, a raiz quadrada de A.

[1] Esta é uma referência à afirmação de Edward Lorenz de que o bater das asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas.

[2] Foi introduzido em 1845 pelo matemático belga Pierre François Verhulst. Foi tornado popular por Robert May no seu famoso artigo *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261 (1976) 459-467.

Provavelmente o algoritmo mais antigo de que há registo histórico é o algoritmo babilónico ($\sim$ 2000 a.C.) para calcular raízes quadradas: se desejamos encontrar a raiz quadrada de um número positivo A, começamos com alguma aproximação $x_0 > 0$ e definimos recursivamente

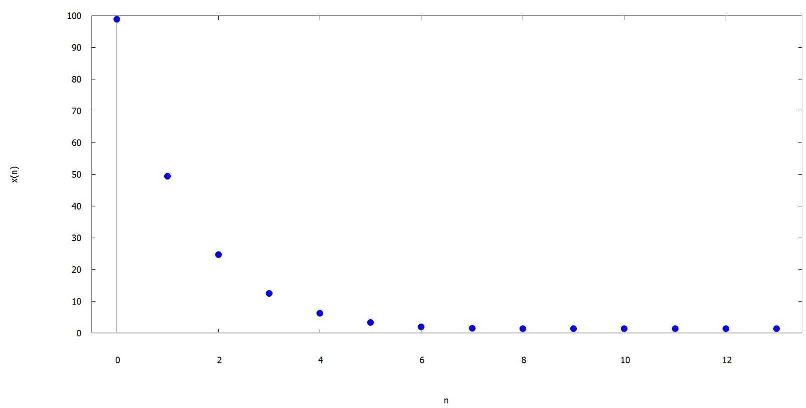
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right). \tag{1}$$

Este é um algoritmo muito eficiente que converge de modo extremamente rápido.

Aproxime $\sqrt{2}$ usando o "algoritmo" dos Babilónios.

Experiências. Suponhamos que queremos encontrar a raiz quadrada de 2 e que começamos com uma aproximação verdadeiramente "ingénua" $x_0 = 99$. Aplicando o "algoritmo" dos Babilónios, poucas iterações são suficientes para que o resultado estabilize:

99.00000000000000
49.51010101010101
24.77524840365297
12.42798706655775
6.29445708659966
3.30609848017316
1.95552056875300
1.48913306969968
1.41609819333465
1.41421481646475
1.41421356237365
1.41421356237309
1.41421356237309



"Algoritmo" dos Babilónios. A tábua YBC 7289, da Coleção da Babilónia de Yale (New Heaven) (Figura 1), é uma das tábuas matemáticas dos Babilónios (1700 a.C.) mais conhecidas. O valor $1;24,51,10$ (em notação sexagesimal) aparece nessa tábua como aproximação para a raiz quadrada de 2. É possível que os Babilónios tenham usado o seguinte procedimento iterativo. Uma primeira aproximação é $3/2 = 1;30$. Porque este número é superior ao valor desejado e é, portanto, inferior a $2/(1;30) = 1;20$, uma segunda aproximação será a média entre estes dois valores, ou seja, $1;25$. Repetindo o processo, uma terceira e melhor aproximação será a média entre $1;25$ e $2/(1;25) = 1;24,42,21$, ou seja, $1;24,51,10$.

Interpretação geométrica e algoritmo. Se b_1 é uma primeira conjetura para o lado do quadrado, construimos o retângulo de base b_1 e área A. A sua altura deve ser $a_1 = A/b_1$. Se b_1 é diferente de a_1, o retângulo não é um quadrado!, e somos obrigados a melhorar a nossa estimativa. Uma segunda e melhor conjetura pode ser uma base b_2 igual à média aritmética $(b_1 + a_1)/2$. A nova altura será então $a_2 = A/b_2$. Acontece que também estes dois números, b_2 e a_2, são diferentes, e de facto aproximam o valor desejado por excesso e por defeito, respetivamente. Iterando o procedimento, a sequência de estimativas para a base procurada é definida pela equação recursiva

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{A}{b_n}\right)$$

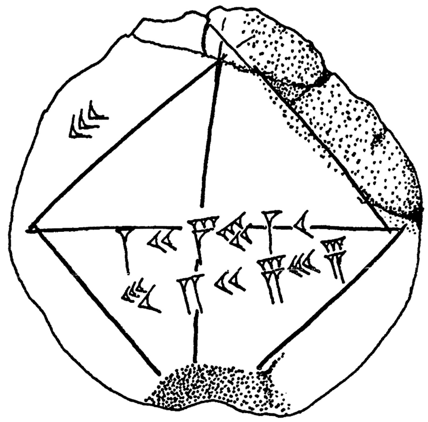


Figura 1: Tábua Babilónica YBC 7289

que supostamente fornece aproximações cada vez melhores do lado do quadrado.

O **Método de Newton** é uma generalização do "algoritmo" dos Babilónios para estimar os zeros de uma função P, e que se reduz a (1) quando $P(x) = x^2 - A$. É dado pela equação recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}. \tag{2}$$

Se tomarmos $P(x) = x^2 - A$ então $P'(x) = 2x$ e a expressão do lado direito de (2) é

$$\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

e, portanto, (2) reduz-se a (1).

Exercício 6. [**O Jogo da Vida.**] O Jogo da Vida, inventado pelo matemático John Conway no final dos anos setenta (ver www.math.com/students/wonders/life/life.html) pretende modelar uma dada população que viva em localizações fixas. Cada organismo da população é um ponto de uma rede de dimensão $n \times n$, e pode ter vários estados de vida. Na versão mais simples cada organismo só pode ter dois estados: "presente" ou "ausente". Codificamos os estados com cores: branco para ausente, preto para presente.

●				●	●
					●
	●				
	●				
	●			●	●
				●	●

A regra do jogo é que a população muda em estados de tempo discretos de uma forma particular. Por exemplo a regra do jogo pode ser a seguinte.

1. Uma célula morta com exatamente três vizinhos vivos torna-se uma célula viva (nascimento).
2. Uma célula viva com dois ou três vizinhos vivos permanece viva (sobrevivência).
3. Em todos os outros casos, uma célula morre ou permanece morta (solidão ou excesso de população).

Consequentemente o próximo estado é o seguinte:

				●	●
				●	●
●	●	●			
				●	●
				●	●

Jogo da Vida, estado seguinte

1. Jogue o próximo movimento no Jogo da Vida.
2. Num tabuleiro de dimensão 6×6, escolha um estado inicial para o Jogo da Vida, e jogue alguns movimentos. Que conclusões consegue tirar?
3. Efetue experiências com pequenas configurações de células vivas no Jogo da Vida. Descreve o tipo de comportamento assimptótico encontrado.

   Referência para um applet: www.bitstorm.org/gameoflife/