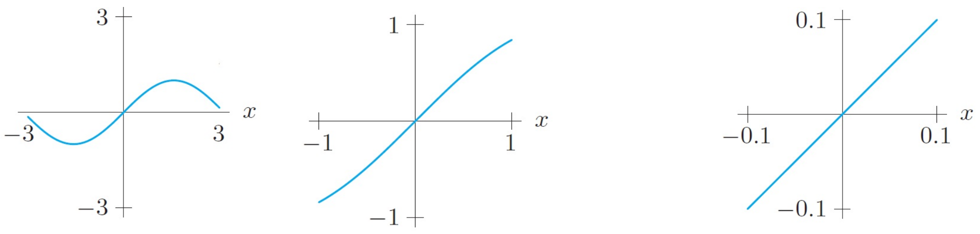
Cálculo

folha 5 — 2018'19

Derivada de uma função num ponto.

1. Na figura seguinte representa-se graficamente a função definida por $y = \text{sen}\, x, x \in \mathbb{R}$, em domínios/ escalas cada vez menores (análogo ao efeito de ampliação em torno do ponto de coordenadas $(0,0)$).



(a) Explique porque é que, partindo destas imagens, se pode conjeturar que $\text{sen}'(0) = 1$.

(b) Recorrendo à definição de função derivada num ponto, verifique que $\text{sen}'(0) = 1$.

(c) Consultando o formulário das derivadas, constate que $(\text{sen}\, x)'\big|_{x=0} = 1$.

(d) Recorrendo à primeira imagem, o que se pode dizer sobre o sinal de $\text{sen}'(-\frac{5}{6}\pi)$, $\text{sen}'(\frac{\pi}{4})$ e $\text{sen}'(\frac{\pi}{2})$.

2. Verifique se é derivável em $x = 1$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2 - x, & x > 1 \end{cases}.$$

3. Estude a derivabilidade da função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \text{ racional} \\ 1, & x \text{ irracional} \end{cases}.$$

4. Seja $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

(b) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

5. Considere a função $f(x) = 1 - e^x, x \in \mathbb{R}$.

(a) Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo Ox.

(b) Determine uma equação da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

6. Sabendo que $f(2) = 3$ e $f'(2) = 1$ calcule $f(-2)$ e $f'(-2)$ quando f é par e quando f é ímpar.

7. Considere a função $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 + x^2}{\text{sen}\, x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que g é uma função contínua.

(b) Calcule $g'(0)$.

(c) Defina a função g'.

8. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções (definidas no maior domínio possível):

(a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$;

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$;

(c) $f(x) = x \ln x$;

(d) $f(x) = x^3$;

(e) $f(x) = 3^x$;

(f) $f(x) = x^x$;

(g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

(i) $f(x) = x^3 e^x$;

(j) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - 3 + 5x$;

(k) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

(l) $f(x) = \sqrt{x} + x^\pi$;

(m) $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x}}$;

(n) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;

(o) $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 1}$;

(p) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

9. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções (definidas no maior domínio possível):

(a) $f(x) = x \ln(x^2 + x + 1)$;

(b) $f(x) = \arccos x + \operatorname{argsh} x$;

(c) $f(x) = \cos(\ln x)$;

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(e^{x^2})$;

(e) $f(x) = \operatorname{ch}(3x)$;

(f) $f(x) = \operatorname{sh}(x^2 + 1)$;

(g) $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$;

(h) $f(x) = \ln(\operatorname{ch}(x + 1))$;

(i) $f(x) = \ln \sqrt{1 + \cos^2 x}$;

(j) $f(x) = \arccos(\operatorname{sh} x)$;

(k) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$;

(l) $f(x) = \operatorname{argsh}(\cos x)$

(m) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

(n) $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)$;

(o) $f(x) = \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{\ln x}$;

(p) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;

(q) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

(r) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} e^x \operatorname{sen} x$.

10. Seja $u : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Usando a regra da cadeia, mostre que

(a) $[e^{u(x)}]' = u'(x)\, e^{u(x)}$;

(b) $[u^\alpha(x)]' = \alpha\, u'(x) u^{\alpha-1}(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $[\ln u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, se $u > 0$;

(d) $[\cos u(x)]' = -u'(x) \operatorname{sen} u(x)$;

(e) $[\operatorname{sen} u(x)]' = u'(x) \cos u(x)$;

(f) $[\operatorname{tg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$;

(g) $[\operatorname{ch} u(x)]' = u'(x) \operatorname{sh} u(x)$;

(h) $[\operatorname{sh} u(x)]' = u'(x) \operatorname{ch} u(x)$;

(i) $[\arccos u(x)]' = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - u^2(x)}}$;

(j) $[\operatorname{arctg} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u^2(x) + 1}$;

(k) $[\operatorname{argsh} u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + 1}}$.

11. Determine duas funções u e g deriváveis tais que a derivada da função composta $h = g \circ u$ seja dada por

(a) $h'(x) = 2xe^{x^2+1}$;

(b) $h'(x) = -3 \operatorname{sen} x (\cos x)^2$.