Universidade do Minho

Dep. de Matemática e Aplicações

sistemas dinâmicos caóticos

Exercício 1. [Sistema dinâmico *tenda*] Considere a transformação *tenda* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x \leq 1/2 \\ 2-2x & \text{se} \quad x > 1/2 \end{cases} .$$

(a) Mostre que $|\mathsf{Fix}(T^n)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

(c) Mostre que T é topologicamente transitiva.

(d) Mostre que T é topologicamente misturadora.

(e) A transformação tenda é caótica?

Exercício 2. [Sistema dinâmico *shift*] Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \colon\, s_j = 0 \,\text{ou}\, 1\}$ e seja $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ a transformação *shift* definida por

$$(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \longmapsto (s_1\, s_2\, s_3\, \cdots)$$

onde $(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \in \Sigma_2$. Considere a métrica d em Σ_2 definida por $d(s,t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$.

(a) Em cada alínea determine $d(s,t)$ onde:

   (i) $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$ e $t = (1111\cdots) = (\overline{1})$,
   (ii) $s = (0000\cdots) = (\overline{0})$ e $t = (010101\cdots) = (\overline{01})$,
   (iii) $s = (011011011\cdots) = (\overline{011})$ e $t = (010101\cdots) = (\overline{01})$.

(b) Mostre que $d(s,t) \leq 2$ para quaisquer $s,t \in \Sigma_2$.

(c) Dê um exemplo de um ponto periódico de período 4.

(d) Mostre que $|\mathsf{Fix}(\sigma^n)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(e) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em σ_2.

(f) Mostre que existe um ponto $s \in \Sigma_2$ cuja órbita $\mathcal{O}^+_\sigma(s)$ é densa em Σ_2.

(g) A transformação shift é caótica?

(h) Mostre, a partir da definição, que a transformação shift tem dependência sensível das condições iniciais.