Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
Introdução aos Sistemas Dinâmicos
2019/20

Matemática para o mundo real

Use um sistema computacional para simular os seguintes modelos.

1. **Rei Artur e os Cavaleiros da Távola Redonda**. Os materiais radioativos desintegram-se proporcionalmente à quantidade de átomos radioativos presente, segundo uma constante de desintegração $k > 0$ que depende do material ([2, 4]).

   Seja $N(t)$ o número de átomos radioativos no tempo t num dado material. Tem-se que:

   $$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t).$$

   (a) Justifique que $N(t) = N_0 e^{-kt}$ sendo N_0 o número de átomos radioativos no tempo inicial.

   (b) Verifique que o *tempo de meia-vida*, i.e., o tempo necessário para o número de átomos radioativos se reduzir a metade do número inicial é

   $$t_{\text{meia-vida}} = \frac{\ln 2}{k}.$$

   (c) Numa parede do Castelo de Winchester está pendurada uma mesa redonda. Muitos gostariam de acreditar que esta é a Távola Redonda do Rei Artur, que estaria no auge dos seus poderes por volta de 500 DC. Se a mesa fosse desta altura, que proporção de carbono-14 restaria? Em 1976 a mesa foi datada usando a técnica do carbono radioativo: foi encontrada $91,6\%$ da quantidade original de carbono-14 ([1]). Sabendo que o tempo de meia-vida do carbono-14 é aproximadamente 5700 anos, de quando data a Távola Redonda?

2. **Lei do arrefecimento de Newton**. A seguinte lei (chamada *lei do arrefecimento de Newton*) foi considerada por Newton (1643-1727) para estudar o fenómeno da variação da temperatura de uma bola de metal aquecida por perda de calor para o meio ambiente ([3]):

   o fluxo de calor através das paredes de um corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente.

   A lei do arrefecimento de Newton fornece um modelo simplificado para o fenómeno da variação da temperatura de um corpo por perda de calor para o meio ambiente, em que são consideradas as seguintes hipóteses:

   - a temperatura $T(t)$ é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;

- a temperatura T_m do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
- o fluxo de calor através das paredes do corpo, dado por dT/dt, é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m),$$

onde k é uma constante positiva que depende das propriedades físicas do corpo.

(a) Justifique que $T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$, sendo T_0 a temperatura inicial do corpo.

(b) Esboce os gráficos da variação da temperatura para vários valores da temperatura inicial T_0.

3. Um corpo a 100°C é colocado numa sala, onde a temperatura ambiente se mantém constante a 25°C. Após 5 minutos a temperatura do corpo decresceu para 90°C. Decorrido quanto tempo estará o corpo a 50°C?

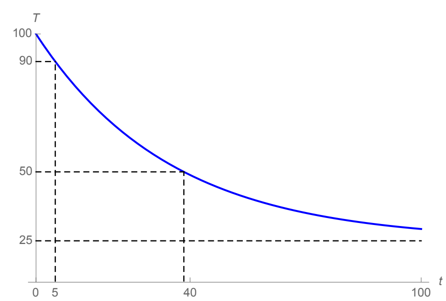

Figura 1: Ilustração da variação da temperatura (t em minutos).

4. Um corpo a 100°C é colocado numa sala de temperatutura desconhecida, mas que é mantida constante. Sabendo que após 10 minutos o corpo está a 90°C e após 20 minutos a 82°C, calcule a temperatura da sala.

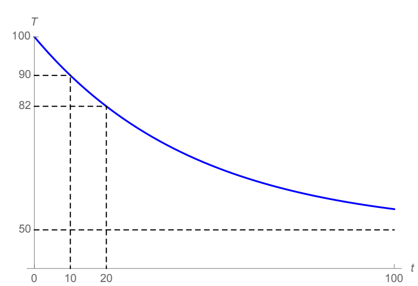

Figura 2: Ilustração da variação da temperatura (t em minutos).

5. **Lei de Hooke: vibrações de molas**. Robert Hooke (1638−1703) foi o físico e matemático britânico que primeiro enunciou a lei do movimento de uma mola ([4, 5]):

   a força exercida pela mola é proporcional à diferença entre o elongamento ℓ da mola e a sua posição de equilíbrio ℓ_0.

   A constante de proporcionalidade é chamada *constante de Hooke* da mola.

   Consideremos então uma mola e coloquemos um corpo de massa m na sua extremidade. De modo claro, a presença do corpo vai esticar a mola até esta atingir a sua posição de equilíbrio, com um elongamento ℓ_0.

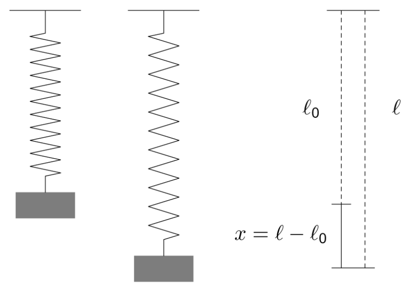

Figura 3: Movimento de uma mola.

   De seguida, vamos retirar o sistema da sua posição de equilíbrio, puxando o corpo um pouco para baixo, até uma posição correspondente a um elongamento ℓ da mola. A lei de Hooke estabelece que *a força exercida no corpo pela mola é proporcional ao deslocamento relativamente à posição de equilíbrio*, isto é, que

$$F = -k(\ell - \ell_0) = -kx.$$

   O sinal no lado direito da igualdade reflecte a ideia que a força exercida pela mola tende a levar o corpo na direcção da posição de equilíbrio, ou seja, a contrariar a sua posição.

   Aplicando a segunda lei do movimento de Newton ao corpo de massa m, obtemos que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

   Habitualmente escreve-se esta equação na forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

   onde $\omega^2 = k/m$.

   Mostre que

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t),$$

   com x_0 e v_0 a posição e a velocidade iniciais, respetivamente, do corpo.

6. **Dinâmica de uma população: modelo Malthusiano ou modelo exponencial**.

   A equação diferencial simples

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda\, P(t)\,,$$

   onde $\lambda > 0$, foi proposta pelo economista inglês Thomas Malthus $(1766 - 1834)$ como um modelo de crescimento populacional ([3, 4]). Neste modelo é assumido que uma população cresce, em cada unidade de tempo, com uma certa taxa relativa λ que depende da fertilidade da espécie. Este modelo conduz a um crescimento exponencial da população

$$P(t) = P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}\,,$$

   de forma que o seu tamanho cresce sem limite e dobra em cada d anos, onde $d = \ln 2/\lambda$.

   A população do Reino Unido e da Irlanda nos anos 1801, 1851, e 1901, de acordo com os resultados do Census, foi a seguinte:

ano	população
1801	16.345.646
1851	27.533.755
1901	41.609.091

   Use o modelo de Malthus para calcular a população do Reino Unido e da Irlanda em 2011. Compare os resultados obtidos com o modelo de Malthus com os resultados do Census 2011 (último Census realizado; o próximo será em 2021), em que a população do Reino Unido e da Irlanda era aproximadamente 68.5 milhões (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Demography_of_the_United_Kingdom e https://en.wikipedia.org/wiki/Census_of_Ireland_2011).

7. **Um modelo populacional mais realista: modelo de Verhulst ou modelo logístico**.

   O modelo proposto por Verhulst $(1804 - 1849)$ assume que existe um valor máximo M para o tamanho da população que pode ser suportado pelo meio ambiente ([3, 4]). A chamada *equação logística* é:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda\, P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)\,.$$

   A evolução da população ao longo do tempo é descrita pela equação:

$$P(t) = M\left[\frac{P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}{M - P(t_0) + P(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}}\right]\,.$$

   Use o modelo logístico para calcular a população do Reino Unido e da Irlanda em 2011.

   Compare os resultados obtidos com o modelo logístico com os resultados do Census 2011.

Referências

[1] Martin Biddle, *King Arthur's Round Table: An Archaeological Investigation*, Boydell Press, 2013.

[2] Vladimir A. Dobrushkin, *Applied Differential Equations with Boundary Value Problems*, Taylor & Francis, 2018.

[3] Djairo G. Figueiredo e Aloisio F. Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2005.

[4] James C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press, 2004.

[5] Ricardo Severino e Maria Joana Torres, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, notas de apoio à unidade curricular "Introdução aos Sistemas Dinâmicos" da Licenciatura em Engenharia Informática, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, 2011.