Cálculo

folha 9 (V2) 2018'19

Aplicações do integral de Riemann

1. Usando integrais definidos, calcule

(a) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

(b) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \right)$

2. Seja $f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$. Determine o valor médio da função e, se possível, o valor $c \in [-1, 2]$ tal que $f(c)$ é o valor médio da função.

3. Seja f uma função real contínua tal que $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx = 8$. Mostre que a função f toma o valor 4 em pelo menos um ponto do intervalo $[1, 3]$.

4. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, b]$ cujas curvas de intersetam neste intervalo. Nestas condições, qual o significado geométrico de cada um dos integrais?

(a) $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$

5. Determine a área da região limitada por $y = \sqrt{x}$, pela tangente a esta curva em $x = 4$ e pelo eixo das ordenadas.

6. Represente graficamente o conjunto A dado e calcule a sua área.

(a) A é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pela curva de $f(x) = \sqrt{x}$.

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{x} \leq y \leq -x + 2\}$.

(c) A é o conjunto do plano limitado superiormente pela parábola de equação $y = -x^2 + \frac{7}{2}$ e inferiormente pela parábola de equação $y = x^2 - 1$.

(d) A é o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$ tais que $x^2 - 1 \leq y \leq x + 1$.

7. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

(a) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4$

(b) $x = 0, \quad x = \pi/2, \quad y = \text{sen}\, x, \quad y = \cos x$

(c) $x = -1, \quad y = |x|, \quad y = 2x, \quad x = 1$

(d) $y = -x^3, \quad y = -(4x^2 - 4x)$

(e) $x = 0, \quad x = 2 - y - y^2$

(f) $y = 2 - x^2, \quad y^3 = x^2$

8. Defina a reta horizontal $(y = k)$ que divide a área da região entre $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

9. Seja A a área limitada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = b, b > 1$. Calcule A e $\lim\limits_{b \longrightarrow +\infty} A$.

10. Encontre o comprimento da curva definida por $y = 2x$ entre os pontos de coordenadas $(1, 2)$ e $(2, 4)$:

(a) usando o teorema de Pitágoras;

(b) usando um integral definido em ordem a x;

(c) usando um integral definido em ordem a y;

11. Considere a curva definida por $y = x^{2/3}$.

(a) Esboce o arco desta curva, entre $x = -1$ e $x = 8$.

(b) Explique porque razão não pode usar um integral definido em ordem a x para calcular o comprimento de arco esboçado na alínea 11a.

(c) Calcule o comprimento da curva da 11a.

12. Determine o comprimento da curva definida pelas equações apresentadas, entre os pontos A e B indicados:

(a) $y = \dfrac{2}{3}x^{2/3}$, $A = (1, \frac{2}{3})$, $B = (8, \dfrac{8}{3})$

(b) $y = 5 - \sqrt{x^3}$, $A = (1, 4)$, $B = (4, -3)$

(c) $y = 6\sqrt[3]{x^2} + 1$, $A = (-1, 7)$, $B = (-8, 25)$

(d) $y = \dfrac{1}{4x} + \dfrac{x^3}{3}$, $A = (2, \dfrac{67}{24})$, $B = (3, \dfrac{109}{12})$.

Integrais Impróprios.

13. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,e^{-x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$

(g) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

14. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ é convergente se $r > 1$ e é divergente se $r \leq 1$.

15. Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-r\,x}\,dx$ é convergente se $r > 0$ e divergente se $r \leq 0$.

(Sug.: comece por estudar o caso $r = 0$.)

16. Seja $\mathcal{D}$ a região definida por $y = e^{-x}$ com $x \geq 0$ e o eixo das abcissas.

(a) Esboce $\mathcal{D}$ e calcule, se possível, a área de $\mathcal{D}$.

(b) Determine, se possível, o comprimento da curva que limita $\mathcal{D}$ superiormente.

17. Indique, justificando, se cada um dos seguintes integrais é convergente ou divergente.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\;dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$. (Sug.: escreva o integral como soma de dois integrais.)

18. Seja f uma função tal que $\displaystyle\lim_{c\longrightarrow+\infty}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0$. O que se pode, nestas condições, dizer sobre $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$?

19. Estude a natureza dos seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$

(f) $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{1}{x^2-4}\,dx$

20. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Indique o domínio de f e estude a natureza do integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

21. Seja $f$uma função contínua em $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Sendo $a > 0$, indique, justificando, quais (se algum) dos seguintes integrais é convergente.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} a\,f(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(a\,x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(a+x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} [a+f(x)]\,dx$