Tópicos de Matemática Discreta

folha 6

2. Teoria elementar de conjuntos

2.1. Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

(a) $\left\{a \in A \,|\, a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\left\{a^2 \in \mathbb{R} \,|\, a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$

(c) $\left\{b \in \mathbb{Z} \,|\, \exists_{a \in A} \quad b = a^2\right\}$

(d) $\{a \in A \,|\, a \geq 0 \wedge \sqrt{a} \in A\}$

(e) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a \in A} \quad (a^2 \in A \wedge a \geq 0 \wedge x = \sqrt{a})\right\}$

(f) $\left\{b \in \mathbb{R} \,|\, \exists_{a \in A} \quad b^2 = a\right\}$

2.2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

(a) $A = \{-1, 1\}$

(b) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

(c) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

2.3. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} \,|\, 0 < n^2 \leq 4\right\}$

(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$

(c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$

(d) $\{1, \{-1\}\}$, $\{1, -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$

2.4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) $5 \in A$ (b) $\{5\} \in A$ (c) $\{5, 11\} \in A$ (d) $A \subseteq \mathbb{R}$

(e) $\{5, 11\} \subseteq A$ (f) $0 \in A$ (g) $\emptyset \in A$ (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

2.5. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $1 \in \{1\}$ (c) $\{1\} \in \{1\}$ (e) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ (g) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

(b) $1 \in \{\{1\}\}$ (d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ (f) $\{1\} \subseteq \{1\}$ (h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$

2.6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (c) $\emptyset \notin \emptyset$ (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

2.7. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

(a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $d \in B$ (d) $c \notin A$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

2.8. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

(a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$

(b) $A \nsubseteq B$ e $A \in B$

(c) $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$

(d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 7

2.9. Sejam $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, \exists_{y\in\mathbb{N}}\ x = 2y\}$ e $C = \{x^2 \,|\, x \in A\}$. Determine:

(a) $A \cup C$ (b) $A \cup B$ (c) $C \cup B$, (d) $A \cup A$, (e) $A \cap B$

(f) $B \cap B$ (g) $B \cup C \cup A$ (h) $C \backslash A$ (i) $A \backslash B$ (j) $B \backslash A$

2.10. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup A = A$ (c) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ (e) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$

(b) $A \backslash B \subseteq A$ (d) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$ (f) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

2.11. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

2.12. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respetivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ (b) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

2.13. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$. (c) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$.

(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$. (d) Se $C \subseteq (A \cap B)$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

2.14. Sejam $A = \{1,5,7\}$ e $B = \{\emptyset, 7, \{1,5,7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

2.15. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

2.16. Sejam A, B e C conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes: (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2.17. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ e $C = \{5\}$. Determine $A \times C$, $C \times A$, $(A \times C) \setminus (C \times A)$, $A \times B \times C$, $A \times \emptyset \times C$, C^3 e $C^3 \times B$.

2.18. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

2.19. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

2.20. Dê exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de conjuntos A, B e C tais que:

(a) $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$ (d) $B = C$ e $A \cap B \neq A \cap C$ (g) $A \times (B \backslash C) = A \times C$ com $B, C \neq \emptyset$

(b) $A \cap \emptyset = A$ (e) $A \times B \subseteq B \times C$ e $A \nsubseteq B$ (h) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ com $A, B \neq \emptyset$

(c) $A \cap B = A \cap C$ e $B \neq C$ (f) $A \cup B = A \cup C$ e $B \neq C$ (i) $\mathcal{P}(A) \cap A \neq \emptyset$

2.21. Seja A um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?