Mestrado Integrado em Engenharia Informática | Universidade do Minho

Introdução aos Sistemas Dinâmicos

22 de janeiro de 2020 | Exame | Duração: 2h

Nome: | Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1.

1. (2 valores) Determine a solução maximal da equação diferencial

$$\cos(x)\,\frac{dy}{dx} - y\,\operatorname{sen}(x) = \cos(x)\,e^{\operatorname{sen}(x)}$$

que passa no ponto $(0, 2)$.

2. (2 valores) Determine a solução maximal da equação diferencial

$$y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

que passa no ponto $(1, -2)$.

Exercício 2. (2.5 valores) Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12. \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

Exercício 3.

1. (2 valores) Considere a equação diferencial planar $X' = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcule a solução do seguinte PVI: $X' = AX$ com $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

   (b) Esboce o retrato de fase.

2. (1.5 valores) Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} x' = x(4 - 2x - 2y) \\ y' = y(9 - 6x - 3y) \end{cases}$$

Justifique que $X^* = (1, 1)$ é um ponto de equilíbrio e estude a sua estabilidade.

v.s.f.f.

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tem-se que: $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A)$, onde $\operatorname{tr}(A) = a + d$ é o traço da matriz A. Consequentemente, $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{2}\right)^2 - \det(A)}$.

Se A é invertível, então a matriz inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercício 4. (4 valores) Considere a função f definida, no intervalo $[0, L]$, por $f(x) = L - x$.

(a) Mostre que a série de Fourier de cossenos de f é dada por

$$\frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{L}\right).$$

(b) Fazendo uso da série referida na alínea anterior, mostre que se tem:

$$L = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Justifique <u>convenientemente</u> a sua resposta.

(c) Determine a solução formal do seguinte problema de condução do calor:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0 \\[2ex] u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

onde f é a função definida anteriormente, com $L = \pi$.

Exercício 5. (2 valores) Considere a família parametrizada de sistemas dinâmicos

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x),$$

com $x \in \mathbb{R}$, para valores do parâmetro $\underline{\lambda \in \mathbb{R}^+}$.

(a) Relativamente aos pontos fixos de f_λ, encontre os valores do parâmetro para os quais ocorrem bifurcações.

(b) Desenhe o diagrama de bifurcações dos pontos fixos de f_λ.

Exercício 6. (4 valores) [Sistema dinâmico *shift*] Seja $\Sigma_2 = \{s = (s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) :\ s_j = 0 \,\text{ou}\, 1\}$ e seja $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ a transformação *shift* definida por

$$(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \longmapsto (s_1\, s_2\, s_3\, \cdots)$$

onde $(s_0\, s_1\, s_2\, \cdots) \in \Sigma_2$. Considere a métrica d em Σ_2 definida por

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

(a) Mostre que o conjunto dos pontos periódicos de σ é denso em Σ_2.

(b) Mostre que existe um ponto $s \in \Sigma_2$ cuja órbita $\mathcal{O}_\sigma^+(s)$ é densa em Σ_2.

(c) Apresente, justificando, um exemplo de um ponto $s \in \Sigma_2$ tal que s é não-errante e não é recorrente.

(d) Mostre, a partir da definição, que a transformação shift tem dependência sensível das condições iniciais.

FIM