# Cálculo



**1.** Escreva na forma $\sum_{n=3}^{10} u_n$ e $\sum_{k=0}^{7} u_{k+3}$ as seguintes somas:

(a) $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$;

(b) $\frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots - \frac{10}{11}$.

**2.** Escreva na forma $\sum_{n\geq 1} u_n$ as séries cujos primeiros termos são:

(a) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$;

(b) $\frac{3}{5} - \frac{4}{25} + \frac{5}{125} - \frac{6}{625} + \frac{7}{3125} \cdots$.

**3.** Estude a convergência da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n - 2^n}{6^n}.$$

**4.** Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\sum_{n\geq 1} \left(1 - \frac{7}{n}\right)^n$

(b) $\sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n}$

(c) $\sum_{n\geq 1} \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

**5.** Considere a série geométrica onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $r \in \mathbb{R}$ são fixos,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a\, r^{n-1}.$$

(a) Indique a sucessão geradora da série geométrica e a respetiva sucessão das somas parciais.

(b) Mostre que a série geométrica é convergente se e só se $|r| < 1$.

**6.** Determine a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, determine a soma correspondente:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{7^{n+1}}$;

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{e^{n-1}}$;

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^n}{6^{n-1}}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{5n}}$;

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi^{n-1}}{3^{2n}}$;

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1} + 2^{2n}}{3^{n-1}}$.

**7.** Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{5}{\sqrt[3]{n^7}}$;

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{3n^3 + 2n^2}{5n^5}$;

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{5n^3 - 2}{3n^4}$.



**8.** Determine, se possível, a natureza das séries:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{n+1} n}$

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n - 1}$

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}$;

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n!}$;

(g) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{n}\right)^n$;

(h) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{2n^2 + 3}{1 + n^2}\right)^n$;

(i) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

(j) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$;

(k) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$;

(l) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

**9.** Diga se cada uma das seguintes séries converge absolutamente:

(a) $\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; (b) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$; (c) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^5+1}$; (d) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt[n]{3}}$; (e) $\sum_{n\geq 1}\frac{\operatorname{sen} 2n}{n!}$.

**10.** Diga se cada uma das seguintes séries é convergente:

(a) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$; (b) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{n}}$; (c) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; (d) $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\pi)}{\ln^n(n\pi)}$.

**11.** Verifique que o Critério de Leibnitz não é aplicável às seguintes séries e mostre que elas são divergentes:

(a) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n}{n+1}$; (b) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$.

**12.** Considere a série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$, com $a_n = \begin{cases} 1/n^2, & n \text{ par} \\ 1/n^3, & n \text{ ímpar} \end{cases}$.
Verifique que o Critério de Leibnitz não lhe é aplicável e que a série converge.

**13.** Apresente uma série convergente com soma $S = \frac{1}{\pi}$.

**14.** Estude a natureza das seguintes séries, especificando, quando possível, se a convergência é absoluta ou simples:

(a) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{3+n!}$; (e) $\sum_{n\geq 1}\cos\frac{1}{n}$; (i) $\sum_{n\geq 1}\frac{n!}{2^{2n}}$; (m) $\sum_{n\geq 1}\frac{\pi^n}{n^\pi}$;

(b) $\sum_{n\geq 1}\frac{n\operatorname{sen} n}{(2n)!}$; (f) $\sum_{n\geq 1}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$; (j) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+\sqrt[n]{e}}$; (n) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^\pi}{\pi^n}$;

(c) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+\sqrt[n]{n}}$; (g) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$; (k) $\sum_{n\geq 1}\frac{7+(-1)^n}{n^2}$; (o) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^2}{2+n^5}$.

(d) $\sum_{n\geq 1}\frac{1+2\cos n}{1+3^n}$; (h) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$; (l) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^n$; (p) $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{e^n\sqrt{n+1}}$.

**15.** Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se $(u_n)_n$ é convergente então $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente;

(b) se $(u_n)_n$ é divergente então $\sum_{n\geq 1}u_n$ é divergente;

(c) se $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente então $(u_n)_n$ é convergente;

(d) se $\sum_{n\geq 1}u_n$ é divergente então $(u_n)_n$ é divergente;

(e) se $\lim_n u_n = 0$ então $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente;

(f) se $\sum_{n\geq 1}u_n$ é divergente então $\lim_n u_n \neq 0$;

(g) se $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente então $\lim_n(u_1+u_2+\cdots+u_n) = 0$;

(h) se $\lim_n(u_1+u_2+\cdots+u_n) = 0$ então $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente;

(i) se $\lim_n(u_1+u_2+\cdots+u_n) = 1$ então $\sum_{n\geq 1}u_n$ é convergente.

**16.** Em cada uma das seguintes alíneas, apresente um exemplo nas condições indicadas, ou justifique porque não existe:

(a) uma série convergente;

(b) uma série divergente;

(c) uma série alternada divergente;

(d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n\geq 1}u_n$ seja divergente e $\sum_{n\geq 1}u_n^2$ seja convergente;

(e) uma série divergente, $\sum_{n\geq 1}u_n$, tal que $\lim_n u_n = 0$;

(f) uma série convergente, $\sum_{n\geq 1}u_n$, tal que $\lim_n u_n = 1$;

(g) duas séries divergentes, $\sum_{n\geq 1}u_n$ e $\sum_{n\geq 1}v_n$, tais que $\lim_n(u_n+v_n)$ seja convergente.