Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2018/2019

Tópicos de Matemática Discreta

1.º teste — 2 de novembro de 2018 - proposta de resolução — duração: 2 horas

1. Sejam p_1, p_2 e p_3 variáveis proposicionais. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

   (a) A fórmula $((p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \wedge (\neg p_3)) \to (\neg p_1)$ é uma tautologia.

   A afirmação não é verdadeira. Se p_1 e p_2 tiverem valor lógico 1 e p_3 tiver valor lógico 0, a fórmula tem valor lógico 0. De facto, nestas condições, a fórmula $p_2 \vee p_3$ tem valor lógico 1 e, por isso, a fórmula $p_1 \to (p_2 \vee p_3)$ tem valor lógico 1. Assim, tem também valor lógico 1 a fórmula $(p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \wedge (\neg p_3)$. Logo, a fórmula dada é uma implicação onde o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso, pelo que a fórmula tem o valor lógico 0. Como não é verdadeira para qualquer valor lógico das variáveis proposicionais, concluímos que a fórmula não é uma tautologia.

   (b) O argumento representado por

   $$\begin{array}{c} p_1 \to (p_2 \vee p_3) \\ \neg p_3 \\ \hline \therefore \neg p_1 \end{array}$$

   é um argumento válido.

   A afirmação não é verdadeira. O argumento apresentado é válido se e só se a fórmula $((p_1 \to (p_2 \vee p_3)) \wedge (\neg p_3)) \to \neg p_1$ é uma tautologia. Como já justificamos em (a), a fórmula não é uma tautologia.

2. Considere que A é um subconjunto de $\mathbb{Z}$ e que p representa a proposição

   $$\forall_{x \in A}(x < 4 \to \exists_{y \in A}\,(y \leq x \to y^2 < 16)).$$

   (a) Dê exemplo de um conjunto A não vazio onde:

   (i) p seja verdadeira;

   Seja $A = \{7, 8, 9\}$. Como $x < 4$ nunca se verifica para qualquer elemento de A, podemos afirmar que do predicado $x < 4 \to \exists_{y \in A}\,(y \leq x \to y^2 < 16)$, por ser uma implicação, se obtém uma proposição verdadeira se substituirmos x por qualquer valor possível. Assim, a proposição dada é verdadeira.

   (ii) p seja falsa.

   Seja $A = \{-5\}$. Para $x = -5$, como $-5 < 4$, para a proposição p ser verdadeira, teria de existir y nas condições dadas, ou seja, teria de existir um elemento y pertencente a A tal que $y \leq x \to y^2 < 16$ seja uma proposição verdadeira. Mas, $y = -5$ é o único elemento de A e, embora seja verdadeiro que $y \leq x$, $y^2 = 25 < 16$ é falso. Logo, a proposição é falsa.

   (b) Indique, sem recorrer ao conetivo *negação*, uma proposição equivalente a $\neg p$.

   Temos

   $$\neg(\forall_{x \in A}(x < 4 \to \exists_{y \in A}\,(y \leq x \to y^2 < 16))) \Leftrightarrow$$
   $$\exists_{x \in A}\,(x < 4 \wedge \neg(\exists_{y \in A}\,(y \leq x \to y^2 < 16))) \Leftrightarrow$$

$$\exists_{x\in A}\,(x<4\wedge(\forall_{y\in A}\,\neg(y\leq x\to y^2<16)))\Leftrightarrow$$
$$\exists_{x\in A}\,(x<4\wedge(\forall_{y\in A}\,(y\leq x\wedge y^2\geq 16)))$$

3. Mostre que, para quaisquer inteiros m e n, se mn e $m+n$ são pares, então m e n são ambos pares.

   Queremos provar que

   $$mn \text{ par} \wedge m+n \text{ par} \to m \text{ par} \wedge n \text{ par},$$

   o que, pela lei do contrarrecíproco, é o mesmo que provar que

   $$m \text{ ímpar} \vee n \text{ ímpar} \to mn \text{ ímpar} \vee m+n \text{ ímpar}.$$

   Como o consequente desta implicação é uma disjunção, podemos prová-la provando que

   $$(m \text{ ímpar} \vee n \text{ ímpar}) \wedge m+n \text{ par} \to mn \text{ ímpar}.$$

   Suponhamos que m é ímpar. Como $m+n$ é par, podemos concluir que $n=(m+n)-m$ é ímpar (porque é a diferença entre um número par e um número ímpar). Logo, mn é ímpar, pois é o produto de dois números ímpares. Suponhamos agora que n é ímpar. De modo análogo ao anterior, concluimos que m é ímpar e, por isso, mn é ímpar.

4. Considere os conjuntos

   $$A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\,|\,x^2\in B\,\wedge\,y=x+3\},\quad B=\{0,4,\{9\}\}$$
   $$C=(\mathbb{Z}\setminus\{1\})\times(\mathbb{Z}\setminus\{3\}),\quad D=\{1,\{1\},\{1,\{1\}\}\}.$$

   Justificando, determine

   (a) $A\cap C$.

   Temos que $A=\{(0,3),(2,5),(-2,1)\}$ e $C=\{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}: m\neq 1\wedge n\neq 3\}$, pelo que $A\cap C=\{(2,5),(-2,1)\}$.

   (b) $D\cap\mathcal{P}(D)$.

   Temos $X\in D\cap\mathcal{P}(D)\leftrightarrow X\in D\wedge X\in\mathcal{P}(D)\leftrightarrow X\in D\wedge X\subseteq D$. Como $1\in D$, temos que $\{1\}\subseteq D$ e, como $1\in D$ e $\{1\}\in D$, temos que $\{1,\{1\}\}\subseteq D$. Logo, $D\cap\mathcal{P}(D)=\{\{1\},\{1,\{1\}\}\}$.

5. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira para quaisquer conjuntos A, B e C.

   (a) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$.

   A afirmação não é verdadeira. Contraexemplo: Para $A=\{1\}$, $B=\{2\}$ e $C=\{3\}$, temos $B\setminus C=B$, $A\cup B=\{1,2\}$ e $A\cup C=\{1,3\}$, pelo que $A\cup(B\setminus C)=A\setminus B=A\neq\{2\}=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$.

   (b) Se $B\cap C\subseteq A$, então $(B\setminus A)\cap(C\setminus A)=\emptyset$.

A afirmação é verdadeira. Demonstração (por contrarrecíproco): suponhamos que $(B \setminus A) \cap (C \setminus A) \neq \emptyset$, i.e., que existe $x \in (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$. Mas,

$$\begin{aligned}(x \in (B \setminus A) \wedge x \in (C \setminus A)) &\Leftrightarrow ((x \in B \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin A)) \\ &\Leftrightarrow ((x \in B \wedge x \in C) \wedge x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in B \cap C \wedge x \notin A).\end{aligned}$$

Assim, estamos em condições de concluir que $B \cap C \nsubseteq A$.

(c) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$.

A afirmação não é verdadeira. Contraexemplo: Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2\}$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, $A \setminus B = \{1\}$ e, por isso, $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{1, 2\}\} \nsubseteq \{\emptyset, \{1\}\} = \mathcal{P}(A \setminus B)$, pois $\{1, 2\}$ é elemento do primeiro conjunto e não é do segundo.

6. Sejam A e B conjuntos. Mostre que $(A \times B) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times B$.

Temos

$$\begin{aligned}(x, y) \in (A \times B) \setminus (B \times B) &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin B \times B \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin B \vee y \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge y \in B \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \setminus B) \times B\end{aligned}$$

o que prova a igualdade dos dois conjuntos.

7. Prove, por indução nos naturais, que

$$2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + (n + 1) \times 2^n = n \times 2^{n+1},$$

para todo o natural n.

i. Base de indução: Considerando $n = 1$, temos

$$2 \times 2 = 1 \times 2^2,$$

o que é uma afirmação verdadeira.

ii. Seja $k \in \mathbb{N}$. Sabendo que

$$2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + (k + 1) \times 2^k = k \times 2^{k+1},$$

queremos provar que

$$2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + (k + 1) \times 2^k + (k + 2) \times 2^{k+1} = (k + 1) \times 2^{k+2}.$$

Temos

$$\begin{aligned}2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + (k + 1) \times 2^k + (k + 2) \times 2^{k+1} &= k \times 2^{k+1} + (k + 2) \times 2^{k+1} \\ &= (2k + 2) \times 2^{k+1} \\ &= 2(k + 1) \times 2^{k+1} \\ &= (k + 1) \times 2^{k+2}.\end{aligned}$$

Por i. e ii., pelo Princípio de Indução Matemática, concluímos que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \ldots + (n + 1) \times 2^n = n \times 2^{n+1}.$$

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	1,75+1,5	1,25+1,25+1,5	2,0	1,5+1,5	1,25+1,25+1,25	1,5	2,5