Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

MIEInf
07 de Janeiro de 2019
[duração 2h]

Cálculo – Teste 2

Nome completo::

Número::

Grupo I
(9 valores)
Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (3 valores)

Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\text{arctg}(2x)}}{1+4x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \ln(3x+1)\,dx\,.$

2. (4 valores)

Considere a função $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt\,.$$

(a) Calcule a derivada de f.

(b) Obtenha o polinómio de Taylor de f, de ordem 3, em torno do ponto zero.

(v.s.f.f)

3. (2 valores)

Calcule o seguinte integral definido

$$\int_0^1 \frac{x}{4 - x^2} \, dx \, .$$

Nome completo::

Número::

Grupo II

(7 valores)

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. (2 valores)

Recorrendo à substituição $x = \text{sen}^2 t$ calcule o integral definido

$$\int_0^{1/2} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx\,.$$

Recorde que $\frac{1-\cos(2\alpha)}{2} = \text{sen}^2\,\alpha\,.$

2. (3 valores)

Considere a região do plano definida por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 - 2x \leq y \leq 2x \quad \text{e} \quad y \leq 6 - x\}.$$

(a) Apresente um esboço gráfico da região D.

(b) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular a medida da área da região D.

(c) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular o perímetro da região D.

(v.s.f.f)

3. (2 valores)

Estude a natureza da série

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}.$$

Nome completo::

Número::

Grupo III

(4 valores)

Indique, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é **verdadeira** ou **falsa**.

1. Se a função $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e $f'(0) = 0$ então f tem um extremo em $x = 0$.

2. Se $f : [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$ é integrável então f é primitivável.

3. Se $\lim_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = 1$ então $\sum_{n \geq 1} u_n$ é divergente.

4. Se $\sum_{n \geq 1} a_n$ e $\sum_{n \geq 1} b_n$ são duas séries numéricas convergentes, então a série numérica $\sum_{n \geq 1} a_n b_n$ é convergente.