Tópicos de Matemática Discreta

folha 8

3. Indução nos naturais

3.1. Prove, por indução nos naturais, as seguintes propriedades:

(a) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$, para todo $n \geq 1$.

(b) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \geq 1$.

(c) $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$.

(d) $1 + 4 + 9 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \geq 1$.

(e) $n^2 > 2n + 1$, para todo $n \geq 3$.

(f) $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$.

(g) $n^3 - n$ é múltiplo de 3, para todo $n \geq 1$.

(h) $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo $n \geq 1$.

(i) $7n < 2^n$ para todo $n \geq 6$.

(j) $2^n > n^3$, para todo $n \geq 10$.

(k) $a^n \leq b^n$, para todo $n \geq 1$ e para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a \leq b$.

3.2. Seja $p(n)$ a seguinte afirmação:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

(a) Mostre que se $p(k)$ é verdadeira (com $k \in \mathbb{N}$), então $p(k + 1)$ também é verdadeira.

(b) Podemos concluir que $p(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$?

3.3. Seja X um conjunto tal que $X \subseteq \mathbb{N}$, $3 \in X$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$n \in X \Rightarrow n + 3 \in X.$$

Prove que $\{3n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$.

3.4. Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que

(a) Todo o número natural n pode ser representado como a soma de potências distintas de 2, i.e., na forma $n = 2^{i_1} + 2^{i_2} + \ldots + 2^{i_r}$ onde $i_1, i_2, \ldots, i_r$ são inteiros tais que $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r$.

(b) A sequência de Fibonacci (definida por F_1, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 3$) satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq (3/2)^{n-2}$.