Universidade do Minho

MIEInf
DMA

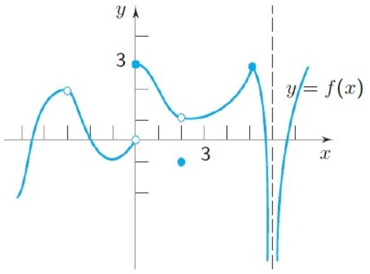
Cálculo

folha 3 — 2018'19

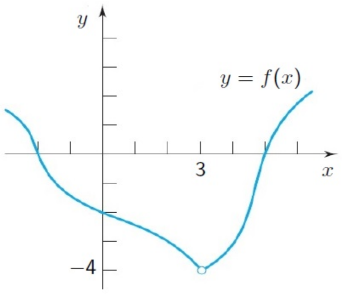
Limite.

1. Para cada uma das figuras e com o respetivo valor de c, use o gráfico de f para calcular $\lim\limits_{x\to c} f(x)$.

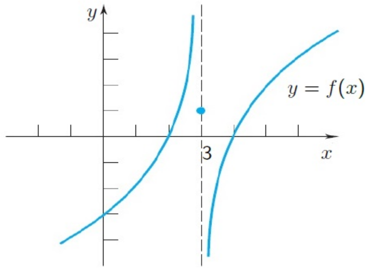
(a) $c=0$, $c=2$, $c=6$



(b) $c=3$



(c) $c=3$



2. Calcule se existir ou prove que não existe

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3}{x+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$

(f) $\lim\limits_{x\to -5^+} \dfrac{|x+5|}{x+5}$

(g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

(k) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(l) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3}$

(m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

(o) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+x\cos x)$

(p) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos x}{e^x}$

(q) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x^4}$

(t) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 4 \\ x, & x=4 \end{cases}$

(u) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\leq 1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$

(v) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, quando $f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in\mathbb{Q} \\ 2, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

3. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ sabendo que $0\leq f(x)\leq |x|$, se $0<|x|<1$.

4. Calcule $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ sabendo que $1\leq f(x)\leq (x-3)^2+1$, para $x\neq 3$.

5. Determine se a função é ou não contínua, no ponto indicado. No caso de descontinuidade, conclua se se trata de uma descontinuidade removível ou não.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ x^3, & x>2 \end{cases}$ $a=2$.

(b) $g(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ $a=0$.

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ -2, & x=-1 \end{cases}$ $a=-1$.

6. Em que pontos (se existirem) são contínuas as funções que a seguir se definem

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Z} \\ x^2, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \mathbb{Q} \\ 2, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x^2+5, & x>2 \\ x^3, & x \leq 2 \end{cases}$

(e) $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$

(f) $k(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

7. Considere a família de funções $f_{a,b}$ definida por (onde a e b são constantes reais)

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2-9, & x<a \\ b, & x=a \\ 2x-6, & x>a, \end{cases}$$

Verifique se existem valores de a e b para os quais a função $f_{a,b}$ é contínua.

8. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas

(a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua

(b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua

(c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas

Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta?

9. Considere a função contínua $f : [0,1[\cup[2,3] \longrightarrow [1,3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x < 1 \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(a) A função f é bijectiva. Justifique.

(b) Determine a função inversa de f. A função f^{-1} é contínua?

(c) O teorema da continuidade da função inversa foi posto em causa?

10. Considere a função $g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possuí máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

11. Mostre que as seguintes equações possuem soluções nos intervalos indicados:

(a) $x^3 - x + 3 = 0$, $]-2,-1[$

(b) $x = \cos x$, $[0, \pi/2]$

(c) $x - 1 = -\ln(x+1)$, $]0,1[$

(d) $2 + x = e^x$, $]0,2[$.