Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

Mestrado Integrado em Engenharia Informática
2018/2019

Tópicos de Matemática Discreta

$2.^o$ teste — 3 de janeiro de 2019 — duração: 2 horas

1. Sejam $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ as funções definidas por

$$f((x,y)) = x + y \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} (0,x) & \text{se } x \geq 0 \\ (x,0) & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

   (a) Determine, justificando:
      i. $g(\{-1,0,1\}))$;   ii. $f^{\leftarrow}(\{0\})$.

   (b) Diga, justificando, se a aplicação f é injetiva e/ou sobrejetiva.

   (c) Justifique que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

   (d) Sem determinar $g \circ f$, justifique que $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

2. Sejam R e S as relações binárias em $\mathbb{N}$ definidas por

$$x\,R\,y \text{ se e só se } 2 \leq y - x, \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{N},$$

$$S = \{(1,4),(2,1),(3,1),(2,3),(4,2)\}.$$

   (a) Determine $\mathrm{Dom(S)} \cap \mathrm{Im(R)}$.

   (b) Justifique que a relação R é transitiva. Diga se $R \circ R \subseteq R$.

   (c) Diga se a relação $S \circ S$ é simétrica e se é antissimétrica. Justifique.

3. Sejam R, S e $R \cap S$ as relações de equivalência em $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < |x| \leq 3\}$ tais que, para quaisquer $x, y \in A$,

$$(x,y) \in R \text{ se e só se } xy > 0 \qquad \text{e} \qquad (x,y) \in S \text{ se e só se } x + y \text{ é par }.$$

   (a) Diga, justificando, se $[-1]_R \cap [-1]_S = [-1]_{R\cap S}$.

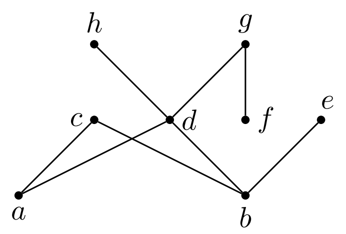
   (b) Determine o conjunto quociente $A/(R \cap S)$.

   (c) Diga se $R \cup S$ é uma relação de equivalência em A. Justifique.

4. Sejam $(A, \leq_1)$ e $(A, \leq_2)$ os c.p.o.s onde $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$,

$$\leq_1 = \mathrm{id}_A \cup \{(a,c),(a,d),(a,g),(a,h),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),(b,h),(d,g),(d,h),(f,g)\}$$

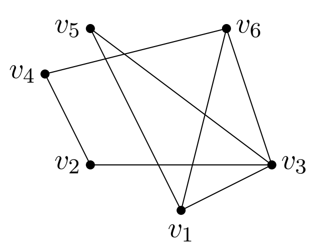
   e $\leq_2$ é a ordem parcial representada pelo diagrama de Hasse



   (a) Diga, justificando, se $\leq_1 = \leq_2$.

   (b) Relativamente ao c.p.o $(A, \leq_2)$, indique, caso, exista(m)
      i. os elementos maximais e os elementos minimais de A.
      ii. os majorantes de $\{a,b\}$ e os minorantes de $\{h,g\}$.
      iii. o supremo de $\{a,b\}$ e o ínfimo de $\{h,g\}$.

5. Considere o grafo G representado ao lado.



   (a) Justifique que o grafo G não é bipartido.

   (b) Indique, justificando, o número de arestas que é necessário remover de G para se obter uma árvore.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.
	1,0+1,0+1,5+1,0+1,0	1,25+1,25+1,25	1,25+1,25+1,25	1,0+1,0+1,0+1,0	1,5+1,5