Tópicos de Matemática Discreta

exame de recurso — 21 de janeiro de 2019 — duração: 2 horas

1. (a) Sejam φ e ψ as fórmulas proposicionais

$$\varphi = p_1 \vee (p_2 \to p_1) \quad \text{e} \quad \psi = \neg p_1 \wedge p_2.$$

Diga, justificando, se a fórmula $\varphi \wedge \psi$ é uma contradição. O argumento representado por

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \psi \\ \hline \therefore \gamma \end{array}$$

é um argumento válido qualquer que seja a fórmula proposicional γ? Justifique a sua resposta.

(b) Seja A um subconjunto de $\mathbb{Z}$. Considere que p representa a proposição a seguir indicada

$$p : \exists_{x,y\in A}(x \neq y \to x < y) \to \exists_{x,y\in A}(x \neq y \wedge x < y).$$

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Qualquer que seja o subconjunto A de $\mathbb{Z}$, a proposição p é verdadeira.

2. Sejam A, B, C e D conjuntos. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(a) $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset \Rightarrow (A \cap C = \emptyset) \vee (B \cap D = \emptyset)$;

(b) $A \in B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$.

3. Prove, por indução nos naturais, que $9^n - 1$ é um múltiplo de 8, para todo o natural n.

4. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ a função definida por $f_n(x) = \begin{cases} -nx & \text{se } x < 0 \\ 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Considere $n = 3$.

i. Determine $f_n(\{-5, -2, 7\})$ e $f_n^{\leftarrow}(\{4, 5\})$.

ii. Diga, justificando, se a função f_n é injetiva e se é sobrejetiva.

(b) Dê exemplo de $n \in \mathbb{N}$ tal que f_n seja invertível e determine a função inversa de f_n.

5. Seja R a relação binária em $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, |x| \leq 5\}$ definida por

$$a\,R\,b \text{ se e só se } a - b = 4k, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

(a) Sabendo que R é reflexiva e simétrica, justifique que a relação R é uma relação de equivalência em A.

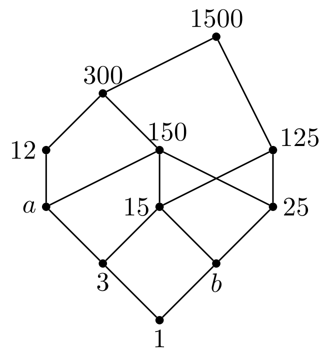
(b) Determine $[0]_R$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte: Se a, b são inteiros tais que $[ab]_R = [0]_R$, então $[a]_R = [0]_R$ ou $[b]_R = [0]_R$.

(c) Determine A/R.

6. Sejam a, b dois números naturais e seja $A = \{1, 3, 12, 15, 25, 125, 150, 300, 1500, a, b\}$. Seja $|$ a relação "divide" definida em A por

$$x \,|\, y \text{ sse } \exists k \in \mathbb{N} : y = kx \ \ (x, y \in A).$$

O diagrama de Hasse associado a $(A, |)$ é o que se encontra representado ao lado.

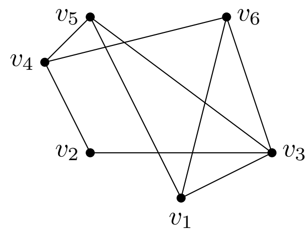


(a) Indique, justificando, os valores de a e b.

(b) Seja X = {15,25}. Indique, justificando, os majorantes e os minorantes de X em A e, caso existam, o supremo e o ínfimo de X.

(c) Diga, justificando, se o c.p.o. é um reticulado.

7. Considere o grafo G representado ao lado.



(a) Justifique que o grafo não é uma árvore.

(b) Indique, justificando, o número de arestas que é necessário remover de G para se obter um grafo euleriano.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
	1,5 + 1,25	1,5 + 1,25	1,5	1,5 + 1,0 + 1,0	1,25 + 1,25 + 1,25	1,0 + 1,5 + 1,0	1,0 + 1,25