Universidade do Minho

MIEInf
DMA

Cálculo

Folha 1 — 2018'19

Revisões.

1. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Indique o valor lógico de cada uma das seguintes relações:

(a) $x^2 < y^2$

(b) $x^3 < y^3$

(c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ $(x, y \neq 0)$

(d) $\frac{1}{x^3} > \frac{1}{y^3}$ $(x, y \neq 0)$

2. Represente em extensão os seguintes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x+4| = 3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x+2|\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2-7)^2 = 0\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x+1} = 2x\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : |x||x+3| = 4\}$

3. Em cada uma das alíneas seguintes encontre números reais a e ε de modo a que a solução da inequação $|x-a| < \varepsilon$ seja o intervalo dado.

(a) $]-2, 2[$

(b) $]-4, 0[$

(c) $]0, 4[$

(d) $]-3, 7[$

4. Exprima cada um dos conjuntos seguintes na forma de um intervalo ou de uma reunião de intervalos de números reais.

(a) $\{x \in \mathbb{R} :\ 1 - x \leq 2\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} :\ 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 > 5\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2(x^2-1) \geq 0\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} :\ |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} :\ |3 - x| \geq 2\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} :\ |5x+2| \leq 1\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^3 \geq 4x\}$

(i) $\{x \in \mathbb{R} :\ 6x^2 - 5x \leq -1\}$

(j) $\{x \in \mathbb{R} :\ |3x-2| \leq 1\}$

(k) $\{x \in \mathbb{R} :\ 2 < |x| < 3\}$

(l) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x-1| < |x-2|\}$

(m) $\left\{x \in \mathbb{R} :\ \dfrac{1-x}{2x+3} > 0\right\}$

(n) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x+2| + |x-2| < 10\}$

(o) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x^2-1| \leq 1\}$

(p) $\{x \in \mathbb{R} :\ 2x^2 \leq 4\}$

(q) $\{x \in \mathbb{R} :\ 4 < x^2 < 9\}$

(r) $\left\{x \in \mathbb{R} :\ \dfrac{x}{x-2} \leq 0\right\}$

(s) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x-3| < 2|x|\}$

(t) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x+1| > |x-3|\}$

5. Qual o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

(a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 7 \Longrightarrow |x| > 7$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\ |1+4x| < 1 \Longrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

(c) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1 \Longrightarrow x \geq 1$

(d) $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-5| \leq 2 \Longrightarrow 3 < x < 7$

6. Assinale o que está errado na seguinte demonstração.

Sejam a e b números reais tais que $a = b$. Então

$$\begin{aligned}
a^2 = ab \quad &\Longrightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \\
&\Longrightarrow \quad (a-b)(a+b) = b(a-b) \\
&\Longrightarrow \quad a + b = b \\
&\Longrightarrow \quad 2b = b \\
&\Longrightarrow \quad 2 = 1\,.
\end{aligned}$$

7. Sejam x e y dois números reais onde as expressões façam sentido e $n \in N$. De entre as seguintes relações, identifique quais são as verdadeiras, justificando a verdade da afirmação ou apresentando um contra-exemplo quando a relação for falsa.

(a) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(b) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

(c) $(x+y)^n = x^n + y^n$

(d) $(xy)^n = x^n y^n$

(e) $\dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

(f) $|x+y| = |x| + |y|$