# Nyttige formler - Mekanikk

## Vektorregning i fysikk

Vektorer brukes til å beskrive størrelser som har både en tallverdi og en retning. Eksempler på dette er posisjon, hastighet, akselerasjon, krefter,

Vi kan legge sammen vektorer ved å summere komponent for komponent:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\,\hat{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\hat{\jmath}$$

Om vi kjenner en vektor på komponentform så kan vi finne lengden og retningen til denne:

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Obs: Hvis $A_x$ er negativ må vi kompensere med å legge til 180°, tilsvarende som vi gjør med komplekse tall.

Om vi kjenner lengden og retningen til en vektor så kan vi finne komponentverdiene:

$$A_x = \left|\vec{A}\right|\cos(\theta)$$
$$A_y = \left|\vec{A}\right|\sin(\theta)$$
$$\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\left(\cos(\theta)\ \hat{\imath} + \sin(\theta)\ \hat{\jmath}\right)$$

## Kinematikk

Objekter i prosjektilbevegelse opplever samme akselerasjon som ved fritt fall, bare at de samtidig beveger seg i x- eller y-retning. Vi kan da behandle retningene uavhengig av hverandre.

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{0x}t)\hat{\imath} + (y_0 + v_{0y}t)\hat{\jmath} + \left(z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{k}$$
$$\vec{v}(t) = v_{0x}\,\hat{\imath} + v_{0y}\,\hat{\jmath} + (v_{0z} - gt)\hat{k}$$
$$\vec{a}(t) = 0\,\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} - g\,\hat{k}$$

I tillegg kan en bruke tidløs formel som en får ved å kombinere to av likningene ovenfor:

$$|\vec{v}(t)|^2 - |\vec{v}(t_0)|^2 = 2\vec{a} \cdot \Delta\vec{r}$$

## Krefter og Newtons lover

Newtons lover lyder:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Jorden trekker på et objekt med kraften **G** = -m**g**

Friksjonskraft:

$$\left|\vec{F}_F\right| = \mu N_z, \qquad \vec{F}_F = -\mu N_z \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Der μ er en friksjonskoeffisient som er avhengig av materialene som er i kontakt med hverandre.

## Krefter avhengig av posisjon/hastighet/akselerasjon.

Luftmotstanden som oppstår mellom et objekt og omgivelsene er avhengig av hvor fort luftstrømmen passerer rundt objektet, eller med andre ord farten til objektet.

En modell for motstanden er at denne er proporsjonal med farten, i motsatt retning av bevegelsen.

$$\left|\vec{F}_L\right| = k|\vec{v}|$$
$$\vec{F}_L = -k|\vec{v}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -k\,\vec{v}$$

Det finnes ulike modeller for luftmotstand/Fluidmotstand avhengig av friksjonstypen. En annen (mer reell) modell der luftmotstanden er proporsjonal med hastigheten kvadrert:

$$\left|\vec{F}_L\right| = D \cdot |\vec{v}|^2$$
$$\vec{F}_L = -D \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -D\,|\vec{v}|\,\vec{v}$$

Koeffisientene (k, D) kalles drag-koeffisienter, og relaterer hastigheten til hvilken motkraft som oppstår.

En annen type kraft som indirekte er avhengig av tiden er fjærkraft.

$$\vec{F}(x) = -k\vec{x}$$

## Rotasjonskinematikk

$\theta$: Vinkelutslag fra x − akse $[rad]$ $\qquad \theta R = s_{tan}$

$\omega$: Vinkelhastighet omkring origo $\left[\frac{rad}{s}\right]$ $\qquad \omega R = v_{tan}$

$\alpha$: Vinkelakselerasjon omkring origo $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ $\qquad \alpha R = a_{tan}$

Med disse begrepene så gjelder sammenhenger som vi er kjent med fra tidligere:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega(t) = \frac{dr}{dt}, \qquad \omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\, dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\, dt$$

## Arbeid og energi

En energibalanse er gitt som:

$$E(t) = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)dt = E(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{Q}(t)dt + \int_{t_0}^{t} \vec{\mathrm{F}}(t) \cdot \vec{v}(t)dt$$

Eller på differensiell form:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \Phi(t) = Q(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

Der

$E$: Energimengden i kontrollvolumet $= U + \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}I\omega^2$

$Q$: Varmefluks ut av randflaten $\left[\frac{J}{s}\right]$

$\int_{t_0}^{t} \mathrm{Q}(\mathrm{t})dt$ : Total Varme tilført/avgitt kontrollvolum [J]

$\vec{F} \cdot \vec{v}$: Mekanisk effekt gjennom randflaten av kontrollvolumet $\left[\frac{J}{s}\right]$

$\int_{t_0}^{t} \vec{\mathrm{F}}(t) \cdot \vec{v}(t)dt$ : Mekanisk arbeid utført/tilført av/på kontrollvolum $[J]$

Mekanisk arbeid kan også beskrives som kraft utført på et objekt over en distanse $\Delta x$:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{\mathrm{F}}(t) \cdot \vec{v}(t)dt = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$$

## Ideelle gasser og varmetransport

Tilstandslikningen

$$pV = nRT \qquad \left(-\mu \frac{dV}{dt}\right)$$
$$R \approx 8.314 \quad \left[\frac{J}{mol\ K}\right]$$

Trykk:

$$p = \frac{|\vec{F}|}{A}$$

Indre energi:

$$U = CNT$$
$$C: \text{Varmekapasitet}$$
$$N: \text{Mengde (Mol eller masse)}$$
$$T: \text{Temperatur } [K]$$

Varmetransport gjennom en vegg i fra sted a til sted b

$$Q_{a \to b} = Ah\,(T_a - T_b) \quad : \text{Varmefluks } [W]$$

Der A er veggarealet og h er en varmeledningskoeffisient.

## Bevegelsesmengde (Momentum)

Bevegelsesmengden til et objekt er avhengig av massen og hastigheten til objektet.

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$

Bevegelsesmengde er en av de størrelsene vi kan sette opp en balanselov for, gitt et kontrollvolum. Balanseloven lyder som:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}(t) + \sum \vec{G}(t)$$
$$\vec{P}(t_2) = \vec{P}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{G}(t)\,dt$$

For situasjoner der et kontrollvolum ikke er utsatt for ytre krefter kan vi si at bevegelsesmengden er bevart:

$$\vec{P}(t_2) = \vec{P}(t_1)$$

## Rotasjonsdynamikk

Kontakt-moment (**M**) og volum-moment ($\boldsymbol{\tau}$) er gitt på vektorform som:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{G}$$

Angulært momentum/bevegelsesmengde (spinn) er et mål på et objekts bevegelsesmengde omkring et rotasjonspunkt.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

Endring i angulært momentum er tilsvarende som for bevegelsesmengde lik summen av kraftmomentene:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(t) + \vec{\tau}(t), \qquad \vec{L}(t_2) = \vec{L}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}(t)\,dt$$

For statiske situasjoner (ingen translatorisk bevegelse – Ingen rotasjonsbevegelse) så er kravet at $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ Det gir oss:

$$\vec{M}(t) + \vec{\tau}(t) = 0$$

Fra bevaring av spinn kan vi komme frem til Newtons 2. lov for roterende systemer:

$$L = I\omega$$
$$\frac{dL}{dt} = I\,\alpha$$
$$\sum \tau(t) + \sum M(t) = I\,\alpha$$