

# Exercício 6 - Problemas de Valor no Contorno - 2D

Lorena B. Bassani

2021

## Abstract

Este documento relata os resultados do sexto exercício da disciplina de Algoritmos Numéricos II, no semestre 2021/01 EARTE. O objetivo é observar o comportamento Método das Diferenças Finitas para aproximar problemas de valor no contorno bidimensionais em domínios retangulares.

## 1 Introdução

Este exercício visa observar o comportamento do método das diferenças finitas para resolver problemas bidimensionais de valor no contorno considerando condições de contorno de valor prescrito, fluxo prescrito e do tipo mista. Este exercício foi feito em três partes: na primeira parte foi realizado um teste de validação e uma análise de convergência do método, descrito no tópico 2, a segunda parte foi a aplicação em um problema de resfriamento, descrito no tópico 3, e a terceira parte foi a aplicação em um problema de escoamento em águas subterrâneas, descrito em 4.

## 2 Primeira parte – Teste de Validação e Análise de Convergência

Para este exercício, foi desenvolvido um código para resolver problemas de valor de contorno do tipo:

$$\begin{aligned} -k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \beta_x(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta_y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u &= f(x, y) & em \quad \Omega \\ u &= g & em \quad \Gamma_g \\ -k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & & em \quad \Gamma_h \end{aligned} \quad (1)$$

em um domínio retangular  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$  com condições de contorno do tipo valor prescrito, fluxo prescrito ou do tipo mista. Em cada contorno as condições são independentes e podem ser do mesmo ou de outro tipo que nos demais. Por se tratar de um domínio retangular, os contornos são: esquerda, com  $x = a$ , direita com  $x = b$ , superior com  $y = d$  e inferior com  $y = c$ .

Para validar a solução implementada, foi utilizado um problema com solução conhecida.

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} + 20 * y \frac{\partial u}{\partial y} + 1 &= f(x, y) \quad \text{em } \Omega \\
 f(x, y) \text{ calculada tal que } u(x, y) &= 10xy(1-x)(1-y)e^{x^{4.5}} \\
 \Omega &= (0, 1) \times (0, 1)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Foram realizados três testes com este problema: um com todas as condições do tipo valor prescrito, uma com todas as condições do tipo fluxo prescrito, e uma com todas as condições do tipo mista. Para cada teste, foram utilizados diversos valores de N e M, analisando o tempo de processamento de cada um, tanto com método direto quanto com o método das diferenças finitas.

## 2.1 Primeiro teste - Valor Prescrito

Os resultados do primeiro teste podem ser vistos na figura 1 para  $n = 50$  com o método GMRES.

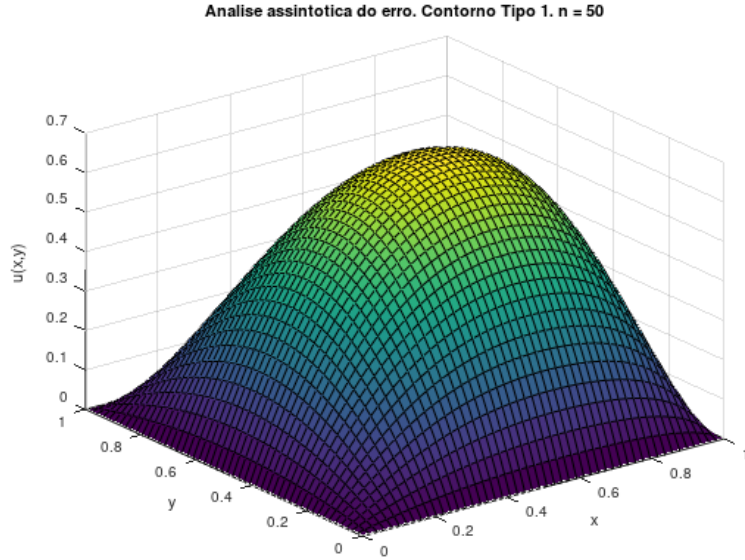


Figure 1: Resultado com condições do tipo valor prescrito.  $n = 50$

Na tabela 1, os resultados para todos os  $n$  testados com o método GMRES são mostrados, enquanto os resultados com o método direto são mostrados na tabela 2. Como é possível notar, Os erros ficaram muito próximos em todos os casos, com

o método direto tendo tempo mais vantajoso que o GMRES para as configurações utilizadas.

A análise assintótica do erro pode ser vista na Figura 2.

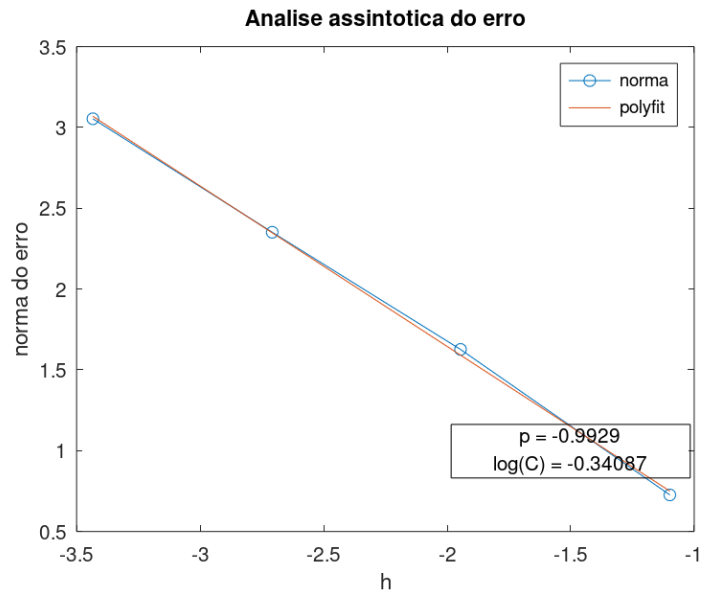


Figure 2: Análise assintótica do erro

## 2.2 Segundo teste - Fluxo Prescrito

Os resultados do segundo teste podem ser vistos na figura 3 para  $n = 50$  com o método GMRES.

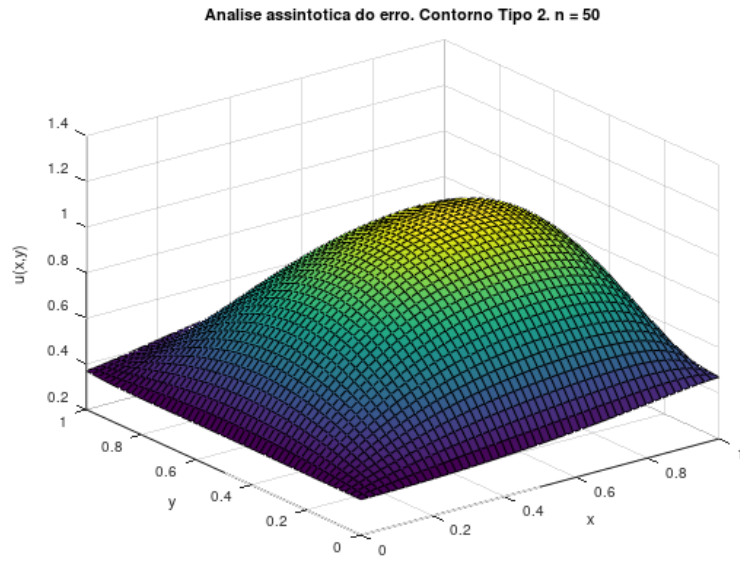


Figure 3: Resultado com condições do tipo valor prescrito.  $n = 50$

Na tabela 1, os resultados para todos os  $n$  testados com o método GMRES são mostrados, enquanto os resultados com o método direto são mostrados na tabela 2. Como é possível notar, Os erros ficaram muito próximos em todos os casos, com o método direto tendo tempo mais vantajoso que o GMRES para as configurações utilizadas, ainda mais do que os vistos no primeiro teste.

A análise assintótica do erro pode ser vista na Figura 4.

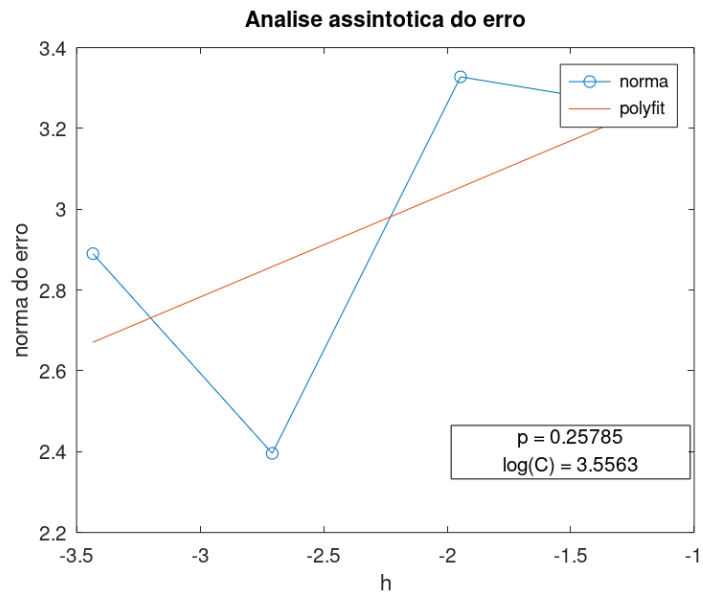


Figure 4: Análise assintótica do erro

### 2.3 Terceiro teste - Condição Mista

Para os terceiro teste, nenhuma solução foi encontrada em nenhum dos casos testados. Isso pode ser visto pelas tabelas 1 e 2, assim como na Figura 5.

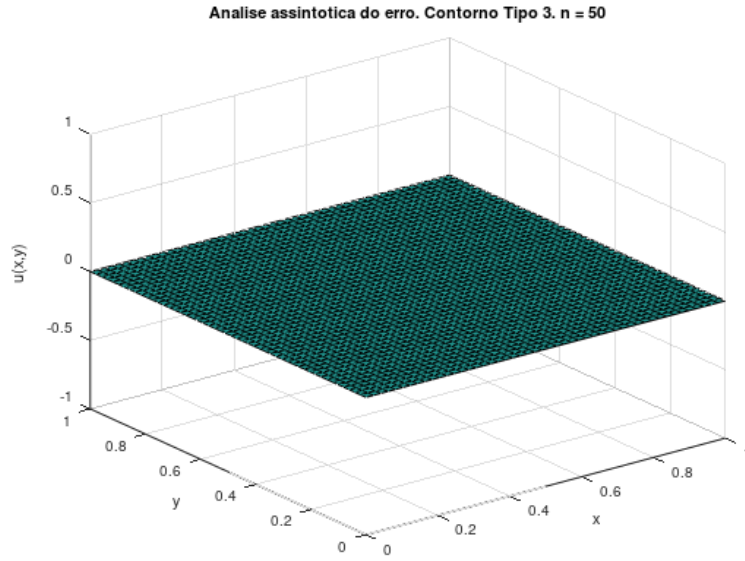


Figure 5: Resultado com condições do tipo valor prescrito.  $n = 50$

Como não houveram soluções encontradas, não foi possível realizar a análise assintótica do erro neste caso.

### 3 Resfriado Bidimensional

O problema do resfriador bidimensional é um problema com a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}
 -k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{2c}{T}u &= +\frac{2c}{T}u_{ref} \quad em \quad \Omega = (0, L) \times (0, W) \\
 T = 2; \quad L = W = 1; \quad k = 1; \quad u_{ref} = 70; \quad c = 1
 \end{aligned} \tag{3}$$

Neste modelo, foram realizados três situações diferentes. Cada uma das três situações continha diferentes condições de contorno, com a primeira contendo apenas condições de valor prescrito, a segunda tanto valor quanto fluxo prescrito, e a última contendo valor prescrito e condição mista.

### 3.1 Primeira Situação - Apenas Valor Prescrito

Nesta situação, o problema foi modelado com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 70 \\u(x, W) &= 70 \\u(L, y) &= 70 \\u(0, y) &= 200\end{aligned}$$

Quando solucionado por método direto e por GMRES, as soluções encontradas diferiram drasticamente, como é possível ver na Figura 6.

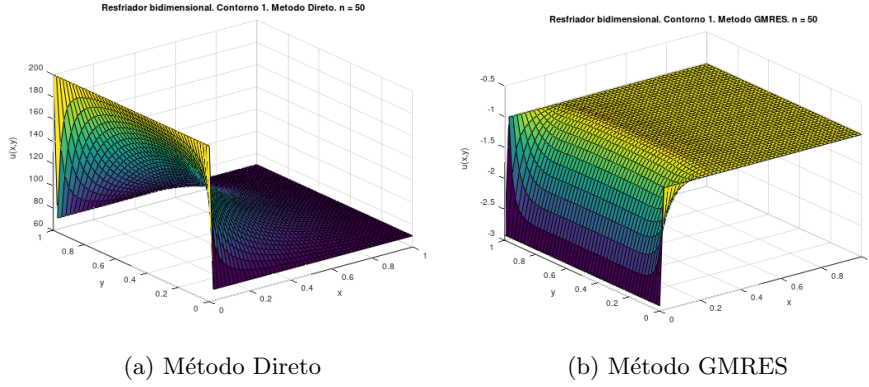


Figure 6: Soluções com  $n = 50$ .

Na tabela 3 é possível ver a comparação dos tempos de execução entre os métodos Direto e GMRES. Na tabela 4 é possível ver os detalhes dos resultados do GMRES.

### 3.2 Segunda Situação - Valor e Fluxo Prescrito

Nesta situação, o problema foi modelado com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}-k \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) &= 0 \\-k \frac{\partial u}{\partial x}(x, W) &= 0 \\u(L, y) &= 70 \\u(0, y) &= 200\end{aligned}$$

Quando solucionado por método direto e por GMRES, as soluções encontradas diferiram drasticamente, como é possível ver na Figura 7. A solucionada pelo método direto também é muito diferente da encontrada na versão 1 com o mesmo método.

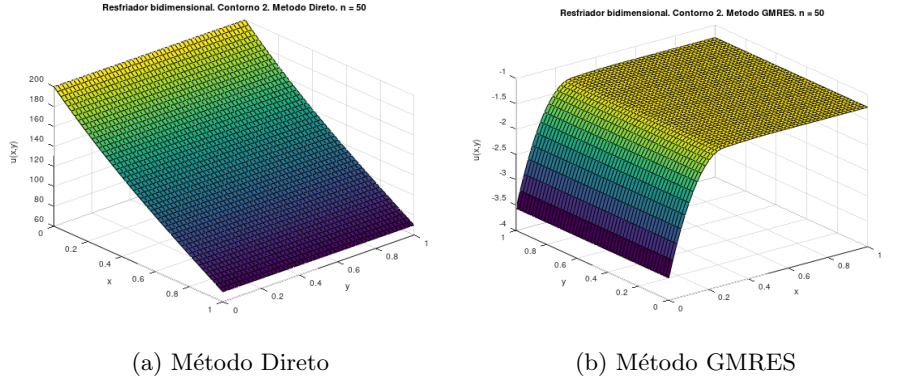


Figure 7: Soluções com  $n = 50$ .

Na tabela 3 é possível ver a comparação dos tempos de execução entre os métodos Direto e GMRES. Na tabela 4 é possível ver os detalhes dos resultados do GMRES.

### 3.3 Terceira Situação - Valor Prescrito e Condição Mista

Nesta situação, o problema foi modelado com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= 70 \\
 u(x, W) &= 70 \\
 u(L, y) &= 70 \\
 -k \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) &= c(u(0, y) - u_{ref})
 \end{aligned}$$

Quando solucionado por método direto e por GMRES, as soluções encontradas diferiram drasticamente, como é possível ver na Figura 8. A solucionada pelo método direto também é muito diferente da encontrada nas versões 1 e 2 com o mesmo método. Ainda é possível notar que a solucionada pelo método GMRES ficou parecida com a solução do método direto da versão 1. Isso provavelmente se deve ao fato de ter sido a primeira instancia de solução com GMRES a convergir, como é possível ver na tabela 4.



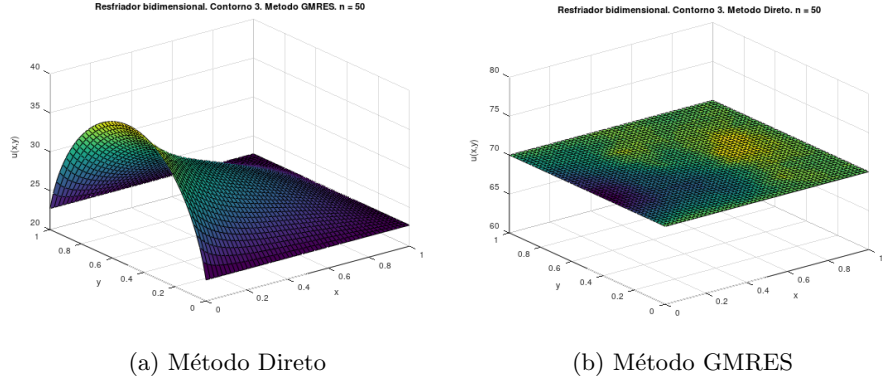


Figure 8: Soluções com  $n = 50$ .

Na tabela 3 é possível ver a comparação dos tempos de execução entre os métodos Direto e GMRES. Na tabela 4 é possível ver os detalhes dos resultados do GMRES.

## 4 Escoamento em Águas Subterrâneas

O problema do escoamento em águas subterrâneas é um problema com a seguinte configuração:

$$\begin{aligned}
 -k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &= \begin{cases} 0 & \text{quando } (x, y) \text{ não for poço} \\ R_w & \text{quando } (x, y) \text{ for poço} \end{cases} & \text{em } \Omega = (a, b) \times (c, d) \\
 -k\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 & \text{em } y = c \text{ e } y = d \\
 u &= p_{ref} & \text{em } x = a \text{ e } x = b
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 a &= c = 0; \quad b = 5000; \quad d = 1000; \\
 k &= 1; \quad R_w = -250; \quad p_{ref} = 100; \\
 p_1 &= (x_1, y_1) = (1500, 600); \\
 p_2 &= (x_2, y_2) = (3200, 250);
 \end{aligned}$$

As soluções encontradas não diferiram entre a aplicação do método direto e do GMRES, sendo possível ver na Figura 9 o gráfico da solução para o GMRES com  $n = 101$ .

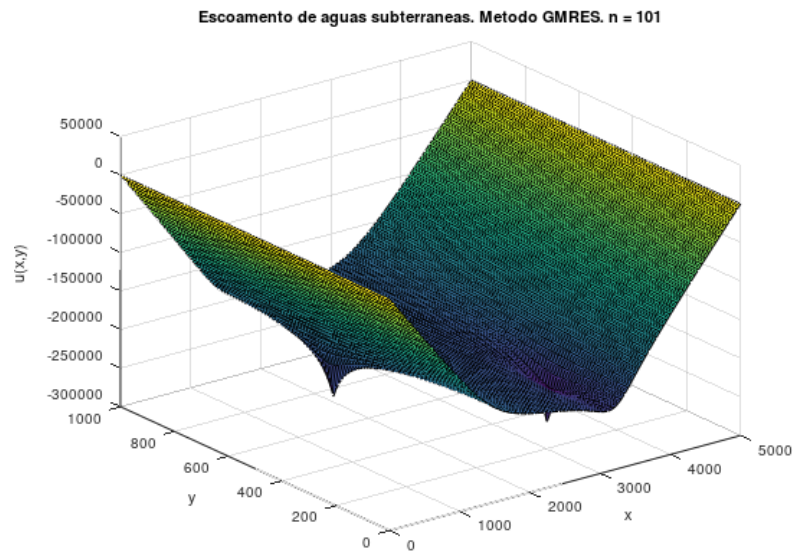


Figure 9: Gráfico da solução do escoamento de águas subterrâneas para  $n = 101$ .

Na tabela 5 é possível ver a comparação dos tempos de execução entre os métodos Direto e GMRES. Na tabela 6 é possível ver os detalhes dos resultados do GMRES.

## 5 Tabelas dos resultados observados

Tabela do Método dos Gradientes Conjugados							
Condição do Tipo 1 - Valor Prescrito							
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	E	tempo (s)
20	400	0	1	0.000000e+00	6.595594e-01	1.319119e+01	0.0871229 s
50	2500	0	1	0.000000e+00	6.630184e-01	3.315092e+01	0.822362 s
100	10000	0	525	9.838598e-09	6.636441e-01	6.636441e+01	7.95769 s
200	40000	0	952	9.963137e-09	6.637838e-01	1.327568e+02	201.558 s
Condição do Tipo 2 - Fluxo Prescrito							
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	E	tempo (s)
20	400	0	3740	9.997300e-09	1.681540e+00	3.363081e+01	1.47537 s
50	2500	3	19978	1.957993e-08	1.063115e+00	5.315575e+01	16.6895 s
100	10000	0	12597	9.849295e-09	8.634567e-01	8.634567e+01	52.0243 s
200	40000	0	6312	9.993532e-09	7.638675e-01	1.527735e+02	520.39 s
Condição do Tipo 3 - Tipo Misto							
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	E	tempo (s)
20	400	1	1	NaN	0.000000e+00	0.000000e+00	0.098444 s
50	2500	1	1	NaN	0.000000e+00	0.000000e+00	0.825819 s
100	10000	1	1	NaN	0.000000e+00	0.000000e+00	6.51944 s
200	40000	1	1	NaN	0.000000e+00	0.000000e+00	147.943 s

Table 1: Tabela do Método dos Gradientes Conjugados para problema de análise do erro.

Tabela do Método do Direto				
Condição do Tipo 1 - Valor Prescrito				
n	N	$\ x\ _\infty$	E	tempo (s)
20	400	6.595594e-01	1.319119e+01	0.0871229 s
50	2500	6.630184e-01	3.315092e+01	0.615677 s
100	10000	6.636441e-01	6.636441e+01	6.00707 s
200	40000	6.637838e-01	1.327568e+02	145.728 s
Condição do Tipo 2 - Fluxo Prescrito				
n	N	$\ x\ _\infty$	E	tempo (s)
20	400	1.681541e+00	3.363081e+01	0.0794878 s
50	2500	1.063116e+00	5.315579e+01	0.620678 s
100	10000	8.634572e-01	8.634572e+01	6.07651 s
200	40000	7.638667e-01	1.527733e+02	146.375 s
Condição do Tipo 3 - Tipo Misto				
n	N	$\ x\ _\infty$	E	tempo (s)
20	400	NaN	NaN	0.09446 s
50	2500	NaN	NaN	0.699575 s
100	10000	NaN	NaN	7.15775 s
200	40000	NaN	NaN	167.146 s

Table 2: Tabela do Método Direto para problema de análise do erro.

Tabela dos tempos do resfriador bidimensional			
Versão 1 - Apenas Valor Prescrito			
n	N	Método	tempo (s)
20	400	Direto	0.071908 s
		GMRES	0.129661 s
50	2500	Direto	0.61017 s
		GMRES	52.8942 s
100	10000	Direto	0.61017 s
		GMRES	10119.3 s
Versão 2 - Valor e Fluxo Prescrito			
n	N	Método	tempo (s)
20	400	Direto	0.070807 s
		GMRES	0.189039 s
50	2500	Direto	0.597409 s
		GMRES	997.626 s
100	10000	Direto	5.67305 s
		GMRES	430.635 s
Versão 3 - Valor Prescrito e Mista			
n	N	Método	tempo (s)
20	400	Direto	0.045166 s
		GMRES	0.0940962 s
50	2500	Direto	0.353983 s
		GMRES	5.67305 s
100	10000	Direto	5.67305 s
		GMRES	73.8163 s

Table 3: Tabela de resultados do problema do resfriador bidimensional

Tabela do Método dos Gradientes Conjugados						
Versão 1 - Apenas Valor Prescrito						
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	tempo (s)
20	400	3	143	9.699703e-01	0.000000e+00	0.129661 s
50	2500	3	69422	9.234149e-01	0.000000e+00	52.8942 s
100	10000	1	5000001	8.698264e-01	0.000000e+00	10119.3 s
Versão 2 - Valor e Fluxo Prescrito						
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	tempo (s)
20	400	3	160	9.647217e-01	0.000000e+00	0.189039 s
50	2500	1	1300001	8.942057e-01	0.000000e+00	997.626 s
100	10000	1	400001	9.770273e-01	2.624822e-01	430.635 s
Versão 3 - Valor Prescrito e Mista						
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	tempo (s)
20	400	3	257	9.377263e-02	3.707682e+01	0.0940962 s
50	2500	0	14598	9.981631e-09	7.000000e+01	5.67305 s
100	10000	0	66635	9.999599e-09	6.999999e+01	73.8163 s

Table 4: Tabela do Método dos Gradientes Conjugados para problema do resfriador bidimensional.

Tabela dos tempos do resfriador bidimensional			
n	N	Método	tempo (s)
51x21	2601	Direto	4.98348 s
		GMRES	5.20732 s
101	10201	Direto	94.0219 s s
		GMRES	96.3122 s
201	40401	Direto	934.229 s
		GMRES	937.766 s

Table 5: Tabela de resultados do problema do escoamento de águas subterrâneas

Tabela do Método dos Gradientes Conjugados						
n	N	flag	iterações	erro relativo	$\ x\ _\infty$	tempo (s)
51x21	2601	0	11581	9.991741e-09	2.547210e+06	5.20732 s
101	10201	0	13879	9.996832e-09	2.779431e+05	96.3122 s
201	40401	0	12982	9.993612e-09	7.310659e+04	937.766 s

Table 6: Tabela do Método dos Gradientes Conjugados para problema do escoamento de águas subterrâneas.