DI/PPGI - UFES
$4^{\underline{o}}$ **Exercício Computacional - 2021-1 EARTE**
Problemas de Valor no Contorno - 1D
Método das Diferenças Finitas

Introdução

Este exercício visa observar o comportamento do método das diferenças finitas para resolver problemas unidimensionais de valor no contorno considerando condições de contorno de valor prescrito (Condição de Dirichlet), fluxo prescrito (Condição de Neumann) e do tipo mista (Condição de Robin). Considere o problema de valor no contorno (PVC) unidimensional definido por:
Dadas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ contínuas em (a, b), encontrar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad a < x < b$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{array}{ll} u(a) = u_a \;\; ou \;\; \frac{du(a)}{dx} = \sigma_a \;\; ou & \alpha_a \dfrac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) = \gamma_a \\ u(b) = u_b \;\; ou \;\; \frac{du(b)}{dx} = \sigma_b \;\; ou & \alpha_b \dfrac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) = \gamma_b \end{array}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são constantes conhecidas do problema.

Considere as funções auxiliares:

- `pvc.m`:
  $[x, u] = pvc(a, b, n, tipo_a, u_a, \sigma_a, \alpha_a, \beta_a, \gamma_a, tipo_b, u_b, \sigma_b, \alpha_b, \beta_b, \gamma_b)$, sendo:
  - n número de incógnitas;
  - $tipo_a$ tipo de condição de contorno em $x = a$ (1: valor prescrito, 2: derivada prescrita, 3: condição mista)
  - $tipo_b$ tipo de condição de contorno em $x = b$ (1: valor prescrito, 2: derivada prescrita, 3: condição mista)
- `funcoes.m`:
  $[p, q, r] = funcoes(a, b, n)$
  definições das funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$

Validação

Defina problemas exemplos com solução conhecida para testar todas as particularidades do seu código.

Por exemplo, supondo $u(x) = x^3 - x + 1$, $p(x) = x$, $q(x) = 1$, devemos definir $f(x) = 4x^3 + 4x + 1$ de modo que $u(x)$ seja a solução exata do PVC. Considerando estas definições para os parâmetros físicos e as condições de contorno $u(0) = 1$ e $2u'(1) + u(1) = 5$, temos um PVC definido para testar a implementação.

Apresente a solução desse exemplo e de outros exemplos a serem elaborados por você para testar seu código, considerando:

- exemplos de PVC com os parâmetros físicos constantes e ir aumentando a complexidade do problema;
- uma variação do número de subdivisões, para observar se a medida que o número de subdivisões crescer seu código oferece soluções mais precisas.

Aplicações

Conservação de Calor em uma haste longa e fina

(A) A conservação de calor em uma haste longa e fina (conforme a Fig. (1)), considerando que a haste não esteja isolada e que o sistema esteja em estado estacionário, pode ser modelada pelo PVC:

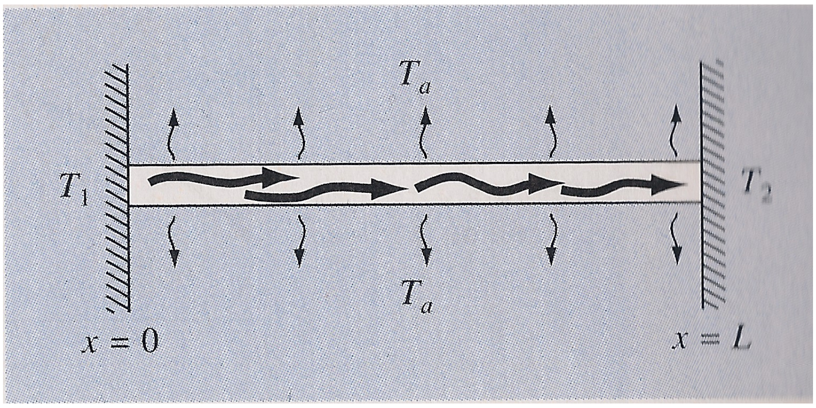

Figura 1: Geometria da haste longa e fina

$$\begin{aligned}\frac{d^2T}{dx^2} + K(T_a - T) &= 0 \text{ em } (0, L)\\ T(0) &= T_1\\ T(L) &= T_2\end{aligned}$$

onde K representa o coeficiente de transferência de calor que paramatriza as taxas de dissipação de calor para o ar (m^{-2}) e T_a é a temperatura do ar em torno da haste (^0C). Considerando $T(0) = 40^0C$, $T(10) = 200^0C$, $K = 0.01\, m^{-2}$ e $T_a = 20\, ^0C$, obtenha a distribuição da temperatura no interior do intervalo $(0, 10)$, considerando $n = 10, 50, 100$. Plote os gráfico da solução aproximada para um n e faça uma descrição do fenômeno físico descrito pelo gráfico.

(B) Considere que em $x = L$ o fluxo de calor seja nulo, ou seja, $\frac{du}{dx} = 0$. Resolva o problema com esta nova condição de contorno e as demais condições descritas no item (A), considerando $n = 10, 50, 100$. Plote os gráfico da solução aproximada para um n e faça uma descrição do fenômeno físico descrito pelo gráfico.

Resfriador unidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. (2). Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor na direção unidimensional x é dado pela Equação de transferência de calor abaixo. Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em ([1]), disponível na página do curso.

$$-\frac{d}{dx}\left(K\frac{du(x)}{dx}\right) + Cu(x) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{aligned}u(0) &= u_0\\ c_{ref}u(L) + K\frac{du(L)}{dx} &= c_{ref}u_{ref}\end{aligned}$$

[1] R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003

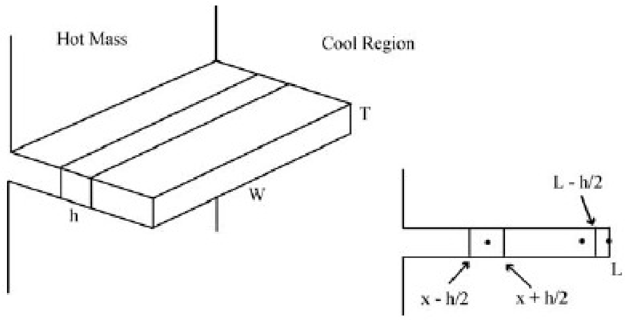

Figura 2: Geometria do Resfriador

onde K é a condutividade térmica, u_{ref} é uma temperatura de referência, u_0 é a temperatura inicial da massa e c_{ref} é a abilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região. A constante C e o termo fonte f são funções da geometria do resfriador dados por:

$$C \equiv \left(\frac{2W + 2T}{TW}\right) c_{ref} \qquad \text{e} \qquad f \equiv C u_{ref}$$

onde a temperatura inicial da massa $u_0 = 160$, a temperatura de referência $u_{ref} = 70$, $K = 0.001$, $T = 0.1$, $W = 10$ e $L = 1$. Podemos considerar diferentes possibilidades para o coeficiente c_{ref}, por exemplo, $c_{ref} = 0.0001$, $c_{ref} = 0.001$, $c_{ref} = 0.01$, $c_{ref} = 0.1$.

Considerando $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ encontre a solução aproximada para os diferentes coeficientes c_{ref}, plote gráfico da solução aproximada para um dos n e discuta o fenômeno físico encontrado

Estudo *a posteriori* da Convergência

Podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} e(x) &= u(x) - u_A(x) && (1)\\ \|e\|_\infty &= max_{a \le x \le b}|e(x)| && (2)\\ \|e\|_\infty &\le Ch^p && (3) \end{aligned}$$

sendo u a solução exata e u_A a solução aproximada, h o tamanho da subdivisão do domínio e p a ordem de aproximação teórica definida pela ordem de aproximação da diferença finita. Assim, o erro cometido E pode ser definido como uma função de h, ou seja, $E(h) = Ch^p$, portanto:

$$log(E) = plog(h) + log(C) \qquad (4)$$

onde $log(E)$ representa uma reta com inclinação igual a p.

Considerando os problemas com solução conhecida definidos no item Validação, faça uma análise de convergência para a norma do máximo ($\|.\|_\infty$), considerando na análise o número de incognitas $n = 4, 8, 16$ e 32.

Relatório

Escreva um relatório com suas conclusões sobre os objetivos listados acima. Postar os fontes `.m` e uma cópia em pdf no Classroom até 03/09/2021.