

Resolución numérica de la ecuación de ondas en 1+1 dimensiones

Pablo Villanueva Domingo

28 de Marzo de 2016

1. Introducción

En esta práctica se ha escrito y ejecutado un código con el fin de resolver la ecuación de ondas en una dimensión espacial y una temporal (1+1). Para ello se ha implementado un método de resolución por diferencias finitas, empleando el lenguaje de programación Fortran. Se ha ejecutado para varias elecciones de la métrica y se han analizado los resultados. Se ha seguido como guía la referencia [1].

2. Planteamiento del problema

En 1+1 dimensiones, podemos escribir el elemento de línea de forma general como:

$$ds^2 = -(\alpha^2 + \beta^2)dt^2 + 2\beta dt dx + dx^2, \quad (1)$$

con α y β funciones que caracterizan la métrica. Con esta forma de la métrica, la ecuación de ondas para un campo escalar se escribe como

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) = 0. \quad (2)$$

Podemos reescribir esta ecuación de segundo orden en derivadas parciales como un sistema de ecuaciones de primer orden definiendo las variables siguientes:

$$\pi = \frac{1}{\alpha}(\partial_t\phi - \beta\partial_x\phi); \quad (3)$$

$$\psi = \partial_x\phi. \quad (4)$$

Con estas nuevas variables dinámicas, las ecuaciones a resolver son:

$$\partial_t\pi = \partial_x(\alpha\psi + \beta\pi); \quad (5)$$

$$\partial_t\psi = \partial_x(\alpha\pi + \beta\psi); \quad (6)$$

$$\partial_t\phi = (\alpha\pi + \beta\psi). \quad (7)$$

Vemos que las tres ecuaciones son de evolución: la derivada temporal de una variable (en el lado izquierdo) viene determinada por las variables y sus derivadas espaciales (en el lado derecho). Las condiciones iniciales escogidas han sido:

$$\phi(x, 0) = \exp(-(x - x_0)^2); \quad (8)$$

$$\psi(x, 0) = -2(x - x_0)\exp(-(x - x_0)^2); \quad (9)$$

$$\pi = 0. \quad (10)$$

3. Descripción del método

El método numérico de resolución de las ecuaciones diferenciales escogido ha sido el método de diferencias finitas, concretamente con el esquema FCTS. Esto consiste en que las variables en un tiempo $n + 1$ y posición espacial i son determinadas por variables en el instante anterior n , y posiciones i , $i + 1$, $i - 1$, las cuales son conocidas. Como ejemplo, en este esquema, la ecuación 5 con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ se escribe de la siguiente manera:

$$\pi_i^{n+1} = \pi_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\psi_{i+1}^n - \psi_{i-1}^n), \quad (11)$$

procediendo con las otras ecuaciones análogamente. Estas ecuaciones se han escrito en un código de Fortran, empleando como condiciones de contorno, por simplicidad, que todos los campos sean nulos en los contornos (condiciones de Dirichlet).

Por otra parte, los incrementos Δt y Δx deben ser escogidos de forma que $\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, para facilitar la convergencia numérica de la resolución.

4. Resultados

Procedemos a comentar los resultados de la práctica. Se ha ejecutado el código para varias configuraciones de los parámetros y de la métrica. Se han elegido inicialmente unos pasos de $\Delta t = 0.01$ y $\Delta x = 0.2$. Se ha dividido la cuadrícula espacial en $X_{num} = 40$ celdas, por lo que la variable espacial va de 0 a 8. En la figura 1 se muestran los resultados obtenidos para la métrica de Minkowski, teniendo por tanto la ecuación de ondas estándar. Podemos observar que aparece el comportamiento esperado para una onda con las condiciones iniciales que hemos fijado: de la gaussiana inicial surgen dos paquetes de ondas que se propagan en sentido contrario, uno a la izquierda y el otro a la derecha, a la velocidad de la luz $c = 1$.

En la figura 2 vemos una configuración distinta de la métrica, con $\beta = 1$. Esta elección corresponde a que las coordenadas se mueven junto con uno de los paquetes de ondas, a su misma velocidad, por lo que este paquete se encuentra en la misma posición durante toda la evolución en este sistema de referencia.

Podemos probar con métricas no constantes, que dependan del espacio por ejemplo. Este es el caso de la figura 3, en el cual $\beta = 0.25(x - 4)$. Se ha escogido esta métrica de forma que, en los contornos, se cumpla $\beta = \pm 1$. Esto significa que las coordenadas viajan a la velocidad de la onda en los bordes, y por tanto no podrán atravesarlos, actuando éstos a modo de horizonte.

Los tres casos anteriores aparecen como ejemplos en la referencia [1], con resultados muy similares. En los tres se ha mostrado la resolución para tiempos tales que la onda aún no ha llegado a los bordes espaciales. Pero, ¿qué ocurre cuando los alcanza? Si ejecutamos el código para un tiempo mayor, por ejemplo $t_{max} = 12$, la onda llega hasta el borde, y por las condiciones de contorno elegidas, a continuación se refleja y comienza a propagarse en sentido inverso, como podemos ver en la figura 4. No obstante, aunque cualitativamente confirmamos el comportamiento esperado, vemos que la resolución numérica se torna muy inestable tras la reflexión. Esto puede deberse a que, o bien el método de resolución, o bien las condiciones de contorno, no han sido implementadas de la manera más adecuada en el código.

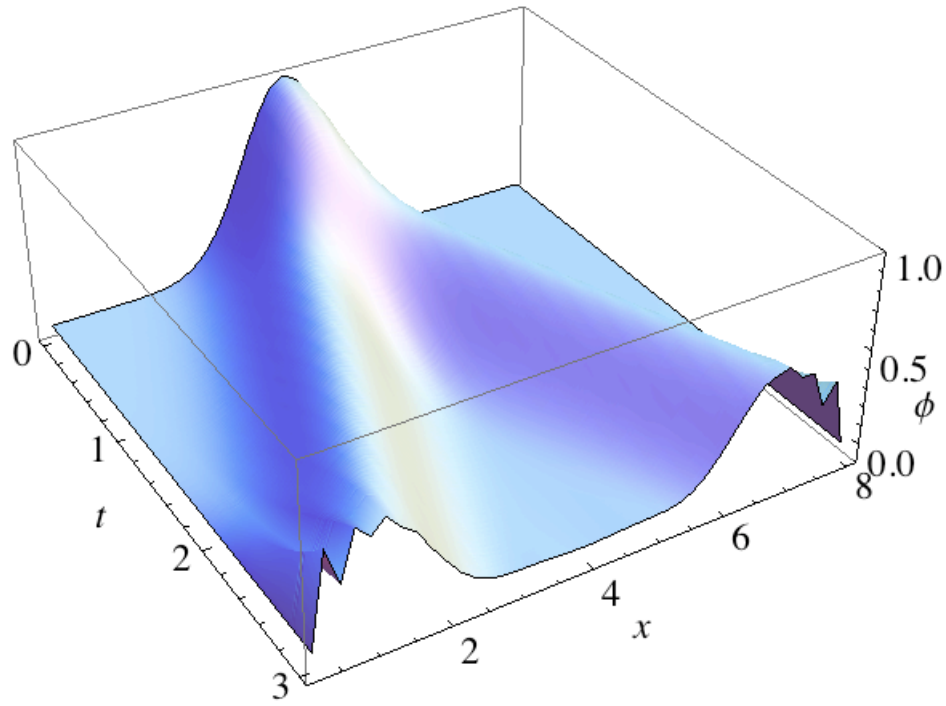


Figura 1: Resultados para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$

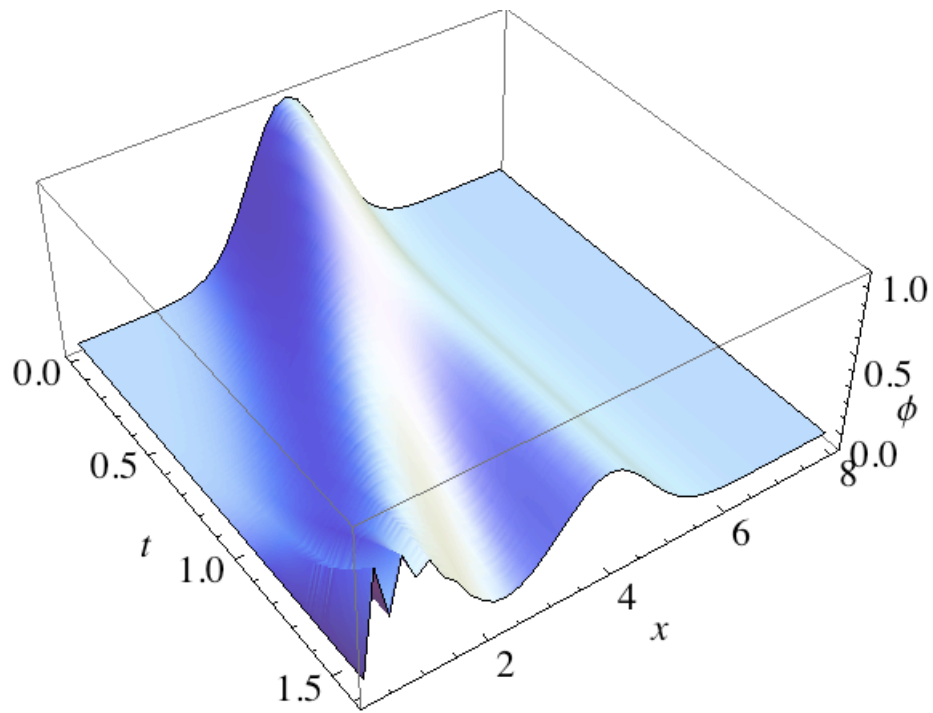


Figura 2: Resultados para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

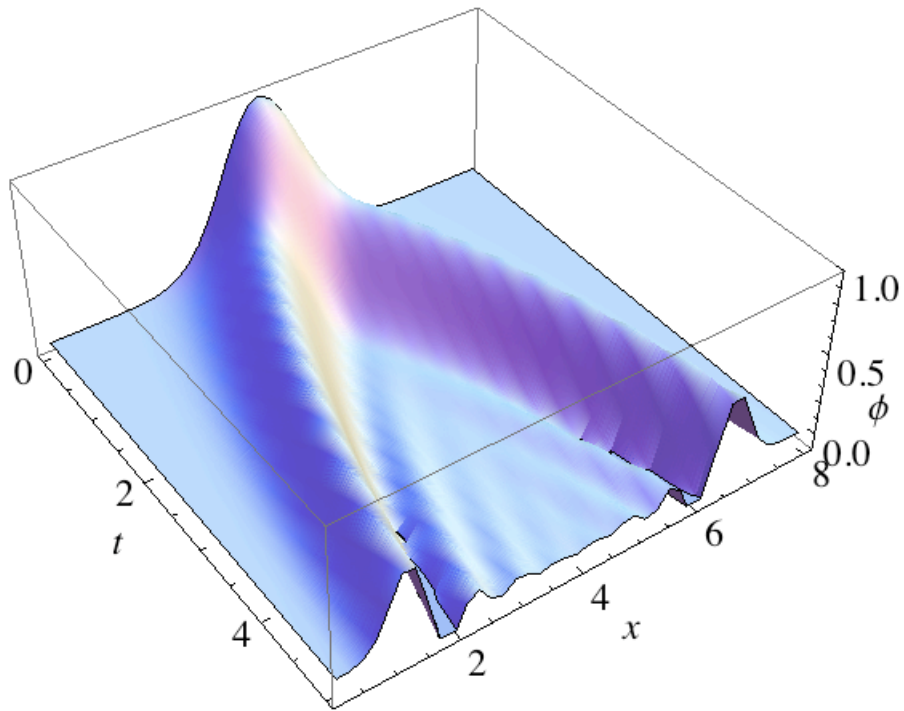


Figura 3: Resultados para $\alpha = 1$ y $\beta = 0.25(x - 4)$

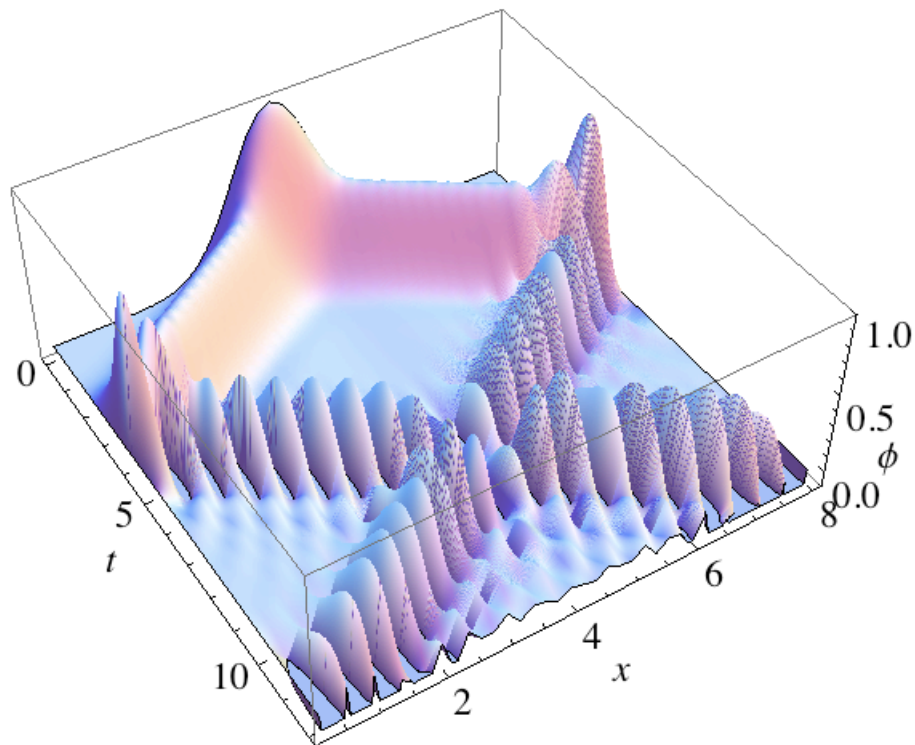


Figura 4: Reflexión de la onda para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$.

Podemos ejecutar el código modificando los incrementos de paso para ver como cambian los resultados. Esto debe hacerse de forma que el cociente $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ siga siendo menor que 1, para facilitar la convergencia. Hemos escogido $\Delta t = 0.005$ y $\Delta x = 0.1$ (la mitad de los valores del caso anterior), cambiando a su vez el número de celdillas al doble, $X_{num} = 80$, de forma que la variable x siga yendo de 0 a 8, para poder comparar mejor con los casos anteriores. El resultado, con $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, se muestra en la figura 5. Vemos que hay una cierta mejora en la precisión con respecto al caso anterior, pero la solución sigue haciéndose inestable tras la reflexión con los bordes.

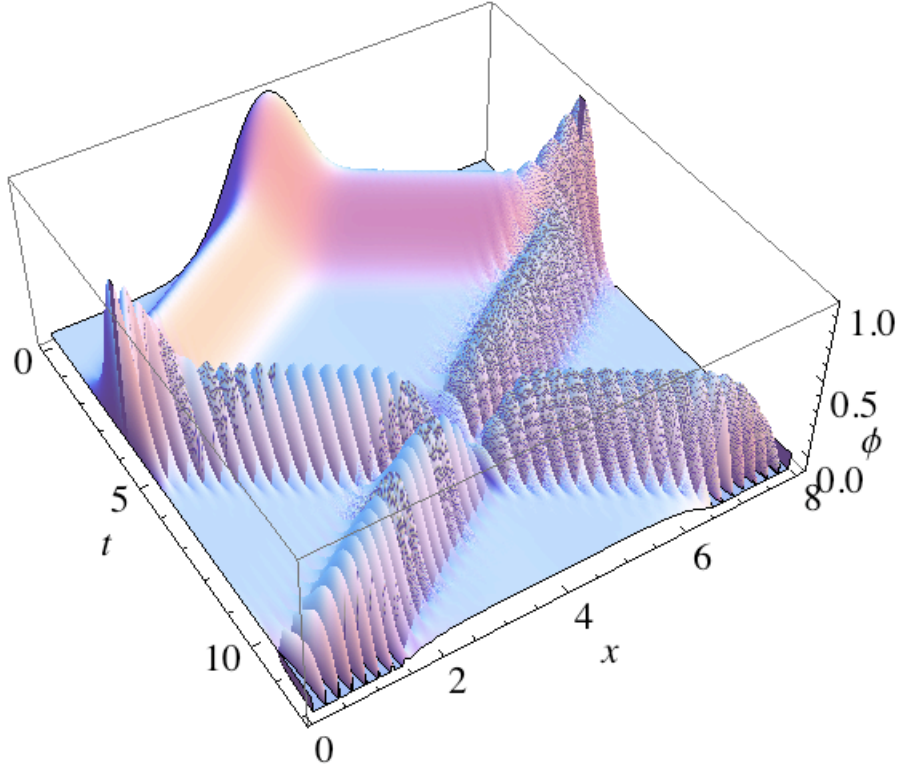


Figura 5: Reflexión de la onda para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, con $\Delta t = 0.005$ y $\Delta x = 0.1$.

Bibliografía

- [1] F.S. Guzmán. "Introduction to numerical relativity through examples". Revista mexicana de física S 53 (4) 78–93 (2007)