计算理论

高春晓

计算理论

- 教材:

[S] 唐常杰等译, Sipser著, 计算理论导引(第3版), 机械工业.

- 参考资料:

[L] Lewis等著, 计算理论基础, 清华大学.

计算理论

- 第一部分 计算模型
  - 第1章 有限自动机
  - 第3章 图灵机
- 第二部分 可计算性
  - 第4章 存在没有算法的问题
- 第三部分 计算复杂性
  - 第7章 P, NP 与NP完全性

计算机的基本能力和局限性是什么?

第1章 有限自动机

第1章 有限自动机

- **0. 引论--语言--什么是问题**
- **1. 确定性有限自动机**
- **2. 非确定性有限自动机**
- **3. 正则表达式**
- **4. 正则语言的泵引理**

如何表示全体问题?
如何表示算法?
问题与算法哪个多?

问题与决定性问题

- 判定性问题(Decision Prob): 只需回答是与否的问题
  - "一数是否是偶数", "串长度是否是2的幂次"
  - "图是否连通", "图是否有k团", "一个数是否素数"
- 功能问题:
  - 排序, 最大流, 最大团问题

- 本书只研究判定性问题:
- 1. 判定性问题能统一描述
- 2. 功能问题总能转化为判定性问题
  - 例: 最大团问题如何转化为判定性问题?

“最大团”与“图是否有k团”

- 团: 完全子图, 即所有节点对都有边相连的子图.
- 两个问题目前都没有快速算法
- 若“最大团”有快速算法, 则“图是否有k团”也有:
  - 对图G运行最大团算法, 得最大团的节点数m
  - 若m≥k, 则有k团; 否则没有k团.
- 若“图是否有k团”有快速算法, 则“最大团”也有:
  - 利用“图是否有k团”，二分搜索最大团节点数m.
  - 1. left=0; right=n;
  - 2.令k=(r-l)/2，执行“G是否有k团”.
  - 有则令left=k+1;没有则令right=k-1继续第2步.
  - 直到left>right

判定性问题与字符串集合

- 判定性问题(Decision Prob): 只需回答是与否的问题
  - “一数是否是偶数” -----------{ 以0结尾的01串 }
  - “串长度是否是2的幂次” ---{ 0^{2^n} : $n\geq 0$ }
  - “图是否连通” ----------------{ <G> | G是连通图 }

    其中<G>是图G编码成的字符串.
  - “图是否有k团”----------------{<G> | 图G有k团}
- 给定有限字母表Σ, 例如{0,1}
- 每个输入是一个01串, 任意01串都可以是输入
- “判定性问题”一一对应“字符串集合”

字符串与语言

- 字母表: 任意一个有限集. 常用记号Σ, Γ. 符号: 字母表中的元素
  - Σ={0, 1}
  - Γ={a, b, c, d, …, z, 空格}
- 字符串: 字母表中符号组成的有限序列

  如：x=0011, y=love, z=math通俗地说即单词
- 串的长度：序列的长度, 例: |x|=|y|=4
- 串的连接, 例: $y \circ z$=lovemath
- 串的反转R, 例: $(z)^R$=htam
- 空词(空串): 记为ε, |ε|=0，长度为0
- 子串：th是math的子串

语言与Σ^*

- 语言：给定字母表Σ，称Σ上一些字符串的集合为Σ上的语言.
  - 例. 令字母表 $\Sigma = \{0,1\}$, Σ上的语言举例
  - $A = \{0,00,0000\}$, $B = \{0,1,01,000,001,\ldots\}$
- $\Sigma^*=\{x \mid x$是Σ上全体有限长度的字符串$\}$
- Σ上的任意语言A都是Σ^*的子集，及$A \subseteq \Sigma^*$.
  - 空语言：$\varnothing$
  - 空串语言：$\{\varepsilon\}$
- 判定性问题与{0,1}上的语言一一对应
  - P(A)集合A的幂集. 例: $P(\{a,b\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$
  - $P(\Sigma^*)=P(\{0,1\}^*)$: 全体判定性问题

Σ^*的标准序

- Σ^*的标准序:长度按从小到大, 同长度按数从小到大排列
- 例1： $\Sigma_1 = \{0,1\}$

  $\Sigma_1^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$
- 例2： $\Sigma_2 = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$

  $\Sigma_2^* = \{\varepsilon, a, b, \ldots, z, aa, ab, \ldots, az, ba, bb, \ldots, bz, \ldots, zz, aaa, \ldots, zzz, \ldots, aaaa, \ldots\}$
- 因此Σ^*是可数集合，与N等势，其基数为$\aleph_0$。

$\{0,1\}^{\mathrm{N}}$

- $\Sigma=\{0, 1\}$
- Σ^{N}：Σ上所有无限长度串记为Σ^{N}, 即$\{(x_i)_{i=1}^{\infty}: x_i\in\Sigma\}$
  - 例: 0001100…, 010111…,
- Σ^{N}中任一串$(x_i)_{i=1}^{\infty}$可以看做一个映射f:N→Σ, 其中N是自然数集, $f(i) = x_i$.

串0001100…的映射

N	0	1	2	3	4	5	6	…
f	0	0	0	1	1	0	0	

定理 $\{0,1\}^N$不可数

- $\{0,1\}^N$是全体无限长的01串

证明: 假设$\{0,1\}^N$可数, 即可以排成一列$(f(i))$

按下面方法在$\{0,1\}^N$中取一点 x ,

x的第i位与$f(i)$的第i位相反

n	f(n)
1	1 1 1 0 1 …
2	0 0 0 0 0 …
3	0 1 1 1 1 …
4	1 1 1 0 0 …
…	…
x	0 1 0 1 …

x与列表每个数不同

x不在列表中

所以$\{0,1\}^N$不可数.

Σ^N与R等势

其基数为$\aleph_1$

$\{0,1\}$上的语言与$\{0,1\}^N$一一对应

- 任取Σ上的语言A（Σ^*的一个子集），如下表示：
  - 对Σ^*字典序下第i个字符串w,
  - 若 $w \in A$ 令 $x_i = 1$; 若 $w \notin A$ 令 $x_i = 0$,
  - $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \Sigma^N$.
- 所以，Σ上的语言与Σ^N一一对应.
- 全体语言$P(\Sigma^*)$与Σ^N是等势的。

Σ^*	ε	0	1	00	01	10	11	000	001	…
A	×	0	×	00	01	×	×	000	001	…
g(A)	0	1	0	1	1	0	0	1	1	…

计算理论研究对象:语言

- 全体程序是$\{0,1\}^*$ 的子集, 至多可数
- 全体判定性问题与$\{0,1\}^N$ 等势, 不可数
- 程序可数, 问题不可数

- 数学的研究对象有数, 函数, 函数空间等
- 计算理论的研究对象: 问题 即 语言 即 字符串集合

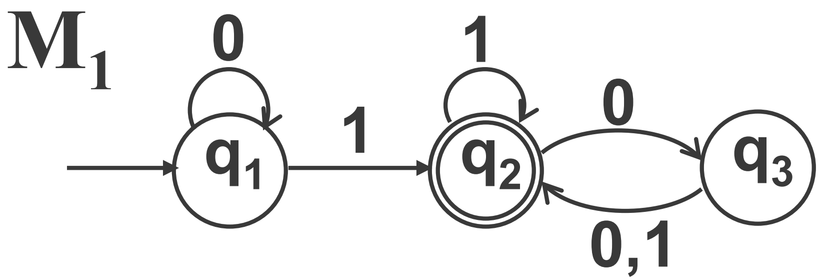
第1章 有限自动机

- 0. 引论--语言--什么是问题
- 1. 确定有限自动机
- 2. 非确定有限自动机
- 3. 正则表达式
- 4. 正则语言的泵引理

第1章 有限自动机

- 0. 引论--语言--什么是问题
- 1. 确定有限自动机
  - 有限自动机定义
  - 有限自动机举例
  - 有限自动机的设计
  - 正则运算
- 2. 非确定有限自动机
- 3. 正则表达式
- 4. 正则语言的泵引理

有限自动机(Finite Automaton)



◆ 状态图

状态: q_1,q_2,q_3

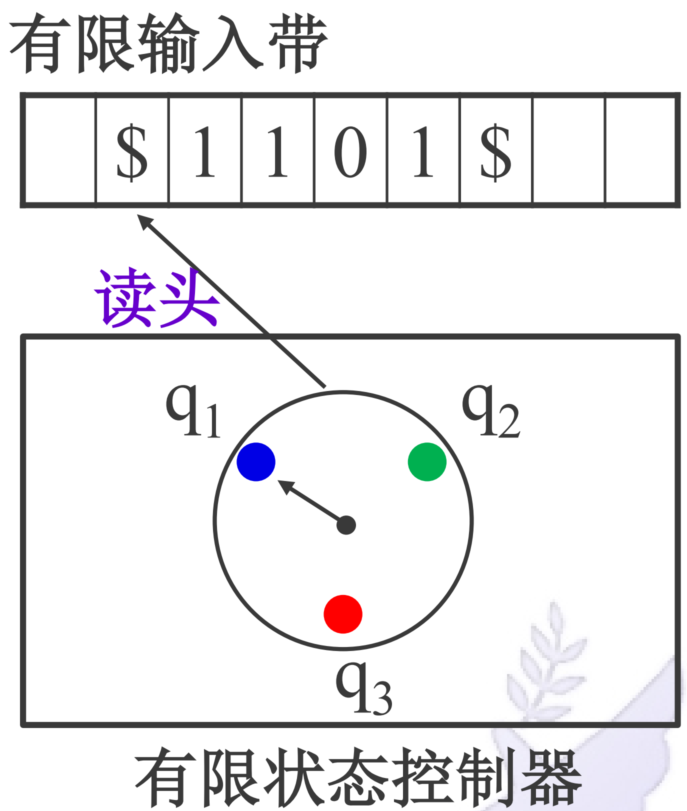
起始状态q_1

接受状态q_2

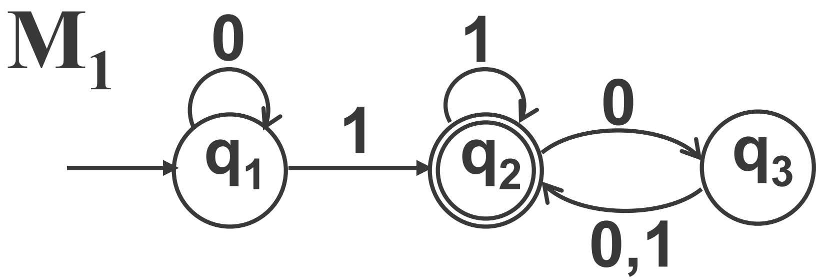
转移: 箭头

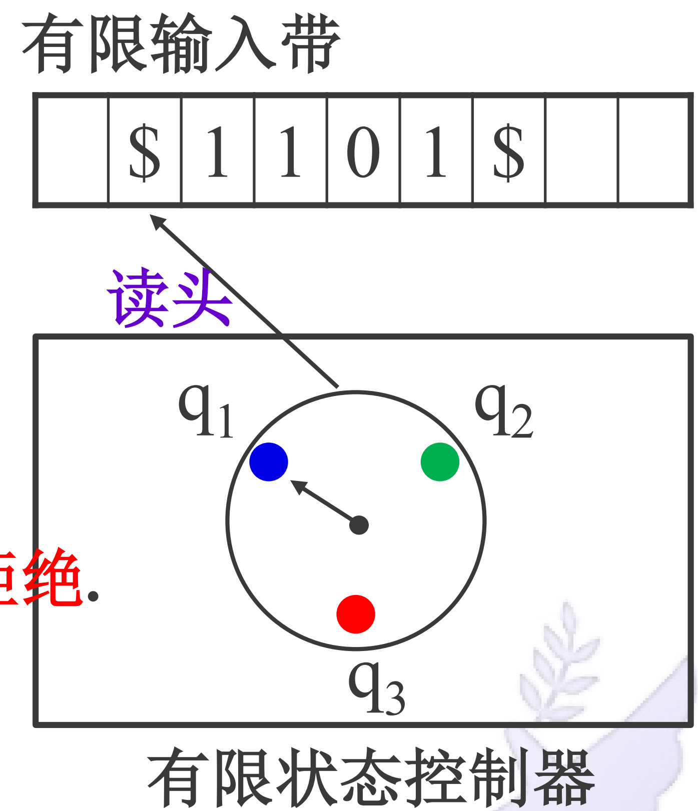
δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

读头不能改写, 且只能右移



有限自动机(Finite Automaton)





- **运行**:

  从起始状态开始沿转移箭头进行.

- **输出**:

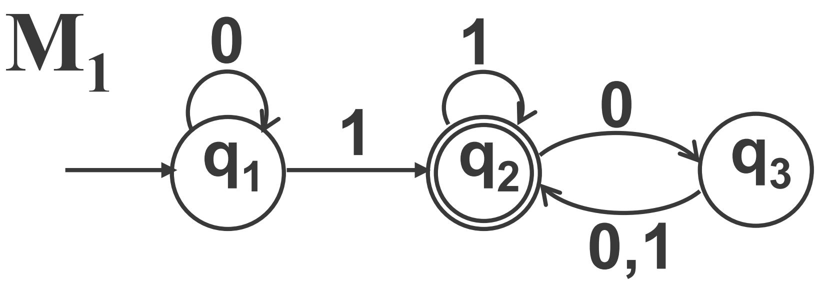
  输入读完处于接受状态则**接受**, 否则**拒绝**.

- 接受: 1, 11, 100, 101, 1101, …
- 拒绝: ε, 0, 10, 110, 1010, …

有限自动机

定义: 有限自动机(Finite Automaton)是一个5元组(Q,Σ,δ,s,F),

1) Q是有限集, 称为状态集;
2) Σ是有限集, 称为字母表;
3) δ: $Q\times\Sigma\rightarrow Q$是转移函数;
4) $s\in Q$是起始状态;
5) $F\subseteq Q$是接受状态集;



• 状态图等价于形式定义

$Q=\{q_1,q_2,q_3\}$, 状态集

$\Sigma=\{0,1\}$, 字母表

$s=q_1$, 起始状态

$F=\{q_2\}$接受状态集

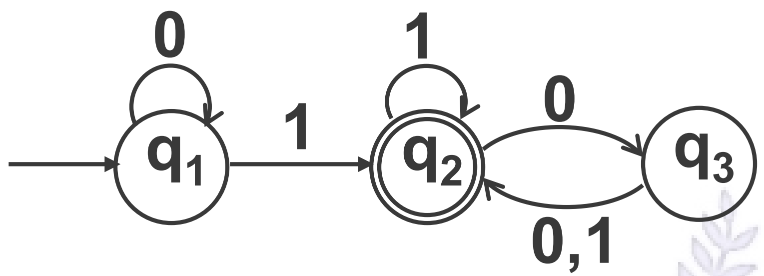
δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

DFA计算的形式定义

- 设$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$是一个DFA,
  $w=w_1w_2\ldots w_n$是字母表Σ上的一个字符串.
  若存在Q中的状态序列$r_0,r_1,\ldots,r_n$, 满足
  1) $r_0 = s$;
  2) $r_{i+1}=\delta(r_i, w_{i+1})$ ；
  3) $r_n \in F$

  则M接受w，记为
  $\delta(r_0,w)\in F$

M_1



$$s \xrightarrow{w_1} r_1 \xrightarrow{w_2} r_2 \cdots\cdots r_{n-1} \xrightarrow{w_n} r_n$$

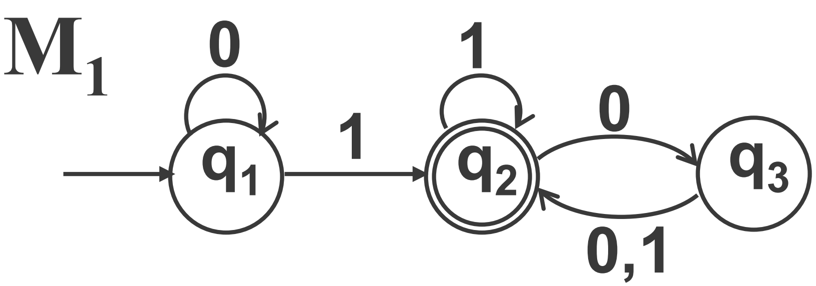
有限自动机的语言:正则语言

- 对有限自动机M, 若 $A = \{ w\in\Sigma^* \mid M接受w \}$,

  即A是有限自动机**M的语言**, 记为**L(M)=A**, 也称**M识别A**.

  注: **M的语言唯一. M不识别任何其它语言**.

- **正则语言：** 若存在DFA识别语言A, 则称A是**正则语言**.
- **等价：** 若两个有限自动机的语言相同，则称它们**等价**.

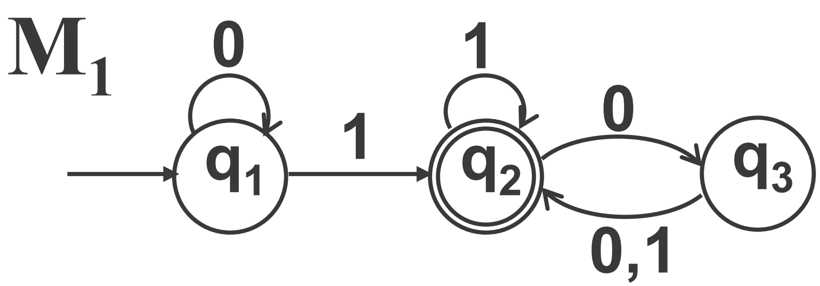


有限自动机的语言:正则语言

- 分析M_1:
  - 在任何状态, 读到1后一定会进入接受状态q_2.
  - 在q_3状态下，读入0或1都进入接受状态
- 因此$L(M_1)=\{w \mid w\in\{0,1\}^*$, w至少含一个1,

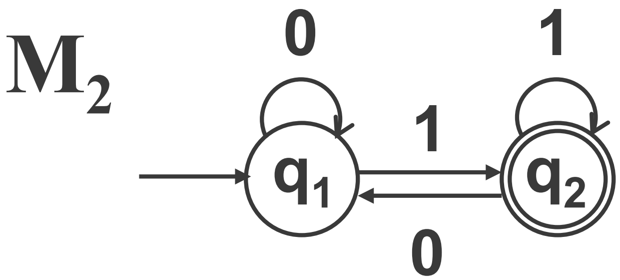
  且最后一个1后面含有偶数个0 $\}$

注: 任何其它语言都不是M_1的语言.



有限自动机举例

- $M_2=(\{q_1,q_2\},\{0,1\}, \delta,s=q_1,F=\{q_2\})$

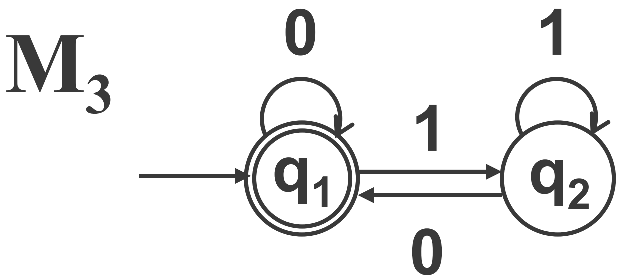


δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- $L(M_2)=\{w \mid w\in\{0,1\}^*$, w是以1结束的非空串 $\}$

有限自动机举例

- $M_3=(\{q_1,q_2\},\{0,1\}, \delta, s=q_1, F=\{q_1\})$

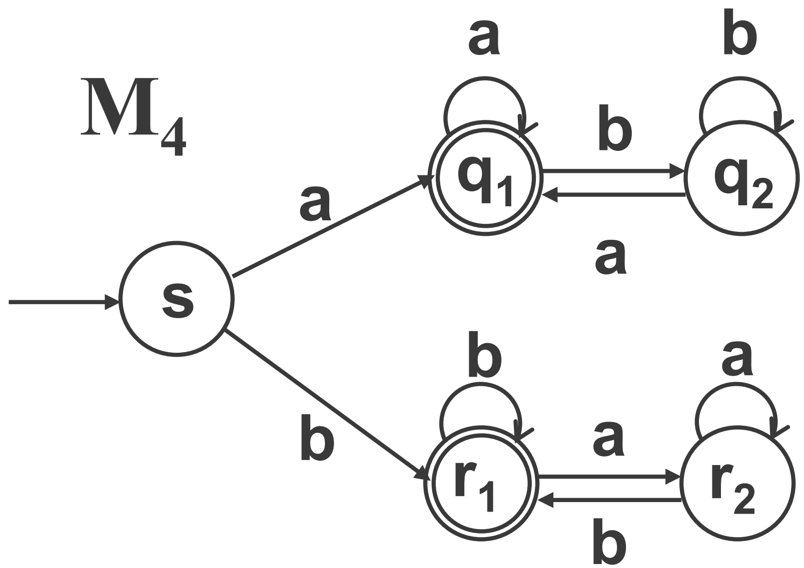


δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

$L(M_3)=\{w \mid w\in\{0,1\}^*$, w为空或以0结束 $\}$

有限自动机举例

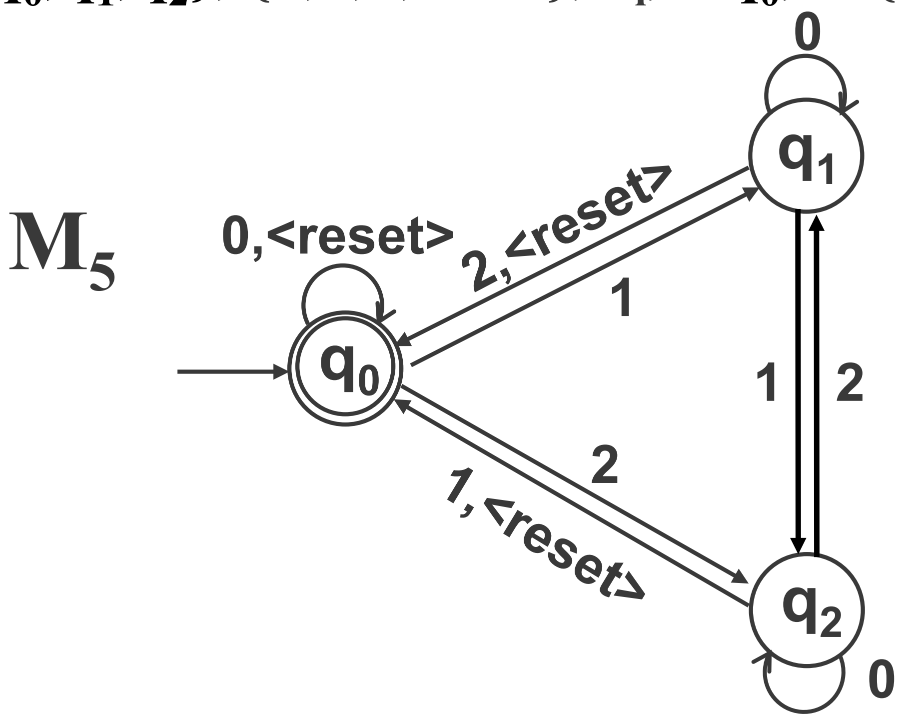
- $M_4=(\{q_1,q_2,r_1,r_2\},\{a,b\}, \delta,s,F=\{q_1,r_1\})$



$L(M_4)=\{w \mid w\in\{a,b\}^*$, w首尾字母相同的非空串 $\}$

有限自动机举例

- M_5=($\{q_0,q_1,q_2\}$, {0,1,2,reset}, δ_i,s=q_0,F=$\{q_0\}$)



L(M_5)={w | w满足在最后一个reset之后的所有数字之和为3的倍数 }

有限自动机举例

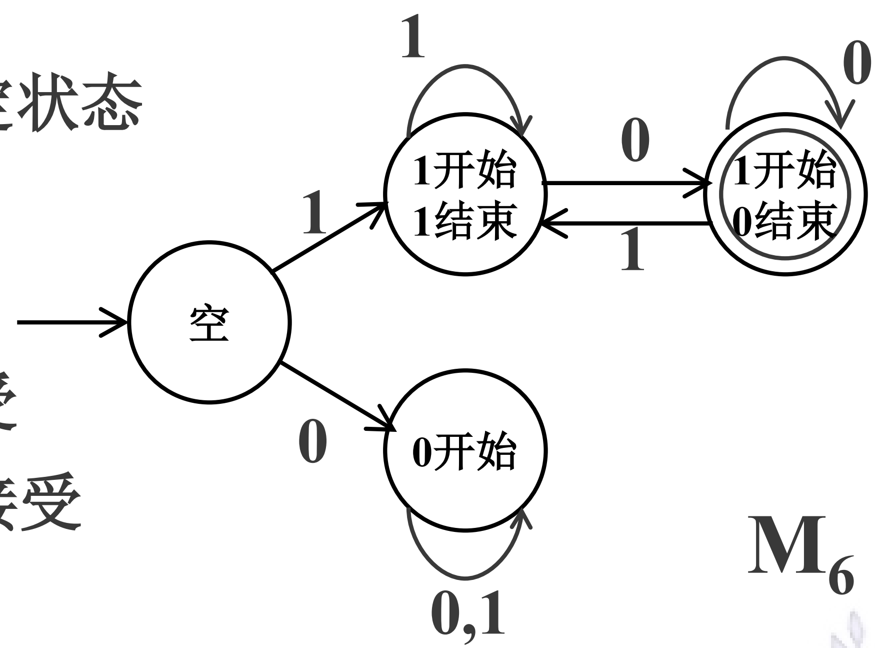
- Σ={0,1,2,reset}
- A_i={w |w满足在最后一个reset之后的所有数字之和为i的倍数 }
- $L(B_i)=A_i$. 设计自动机B_i。
  - $B_i=(Q_i, \Sigma, \delta_i, s=q_0, F=\{q_0\})$
  - $Q_i=\{q_0,q_1,q_2,\cdots q_{n-1}\}$
  - $\delta_i(q_k,0)= q_k$.
  - $\delta_i(q_k,1)= q_{(k+1) \bmod i}$.
  - $\delta_i(q_k,2)= q_{(k+2) \bmod i}$.
  - $\delta_i(q_k,reset)= q_0$.

有限自动机的设计(难点)

- 原则：自己即自动机
- 寻找需要记录的关键信息：
  - 步骤1：确定状态
  - 步骤2：确定转移
- 设计识别下列语言的DFA:
  - 例1：$\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$从1开始, 以0结束 $\}$
  - 例2：$\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$含有子串1010 $\}$
  - 例3：$\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$的倒数第2个符号是1 $\}$
  - 例4：$\{ 0^k \mid k$是2或3的倍数 $\}$

有限自动机的设计

- 例1：{ w∈{0,1}* | w从1开始, 以0结束 }
- Σ={0,1}
- 步骤1：根据关键信息确定状态
  - 空-->不接受
  - 以0开始-->不接受
  - 以1开始以0结束-->接受
  - 以1开始以1结束-->不接受
- 步骤2：确定转移函数



M_6

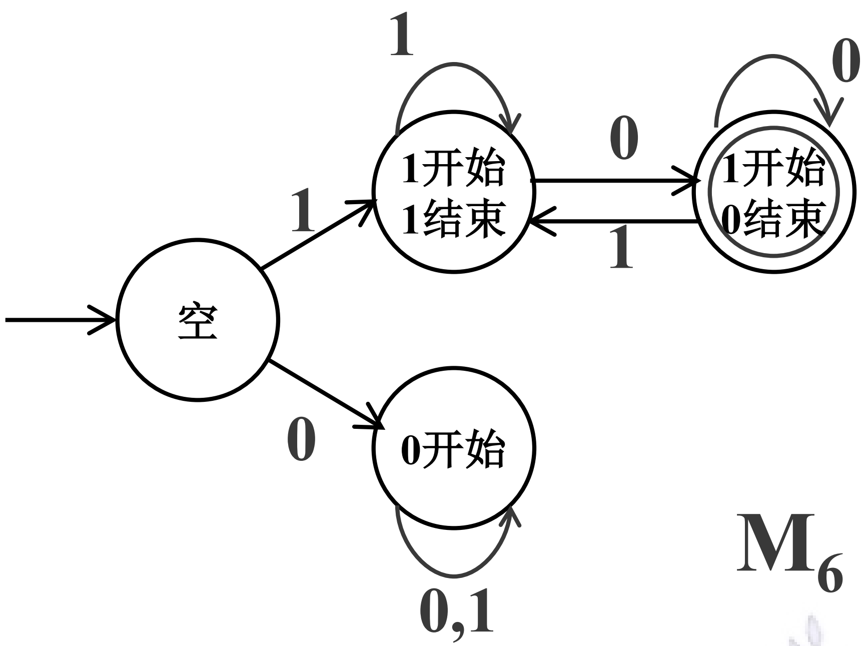
有限自动机的设计

- 例1：{ $w \in \{0,1\}^*$ | w从1开始, 以0结束 }

运行举例: 1100, 101

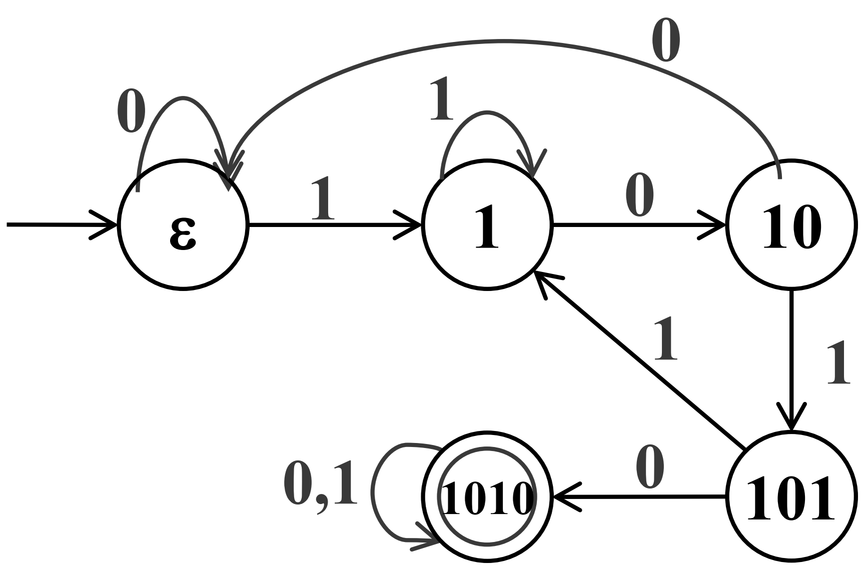
对应自动机算法:

1. 当前为初始状态
2. 当有输入, 根据转移函数转移当前状态
3. 若当前处于接受状态, 返回真, 否则返回假



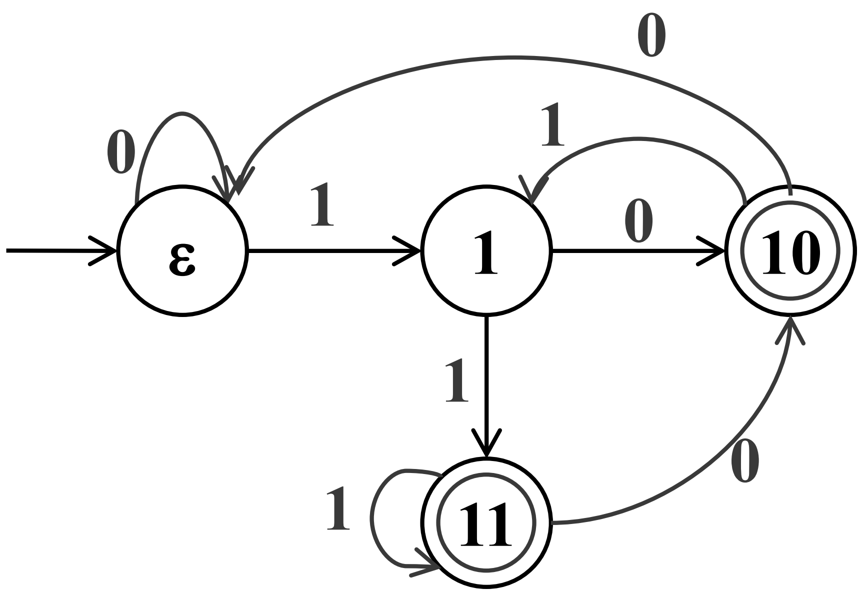
有限自动机的设计

- 例2：{ w∈{0,1}* | w含有子串1010 }
- Σ={0,1}
- 关键信息: ε, 1, 10, 101, 1010



有限自动机的设计

- 例3：{ w∈{0,1}* | w倒数第2个符号是1 }
- 只需关注最后两个符号
- Σ={0,1}, 关键信息: ε, 0, 1, 00, 01, 10, 11
- 关键信息改进: ε, 1, 10, 11

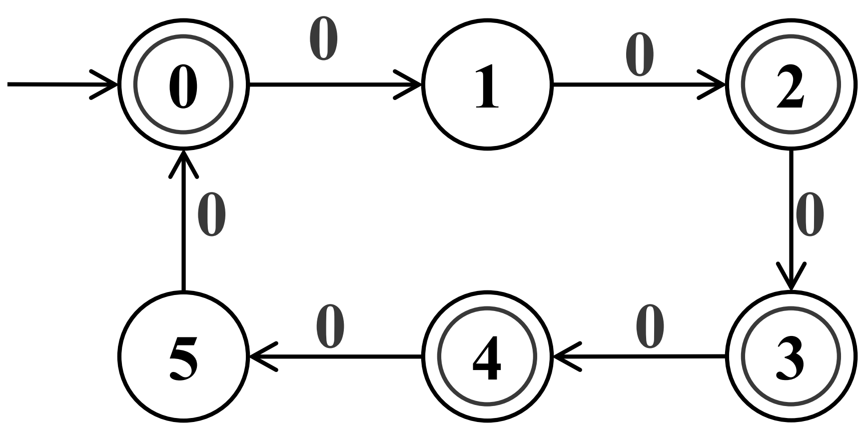


字符串匹配算法

算法	预处理时间	匹配时间
朴素	0	$O(nm)$
自动机	$O(m\|\Sigma\|)$	$\Theta(n)$
Knuth-Morris-Pratt	$\Theta(m)$	$\Theta(n)$

有限自动机的设计

- **例4：{ 0^k | k是2或3的倍数 }**
- Σ={0}
- 关键信息: $\varepsilon, 0^1, 0^2, 0^3, 0^4, 0^5$.
- 记为: 0,1,2,3,4,5

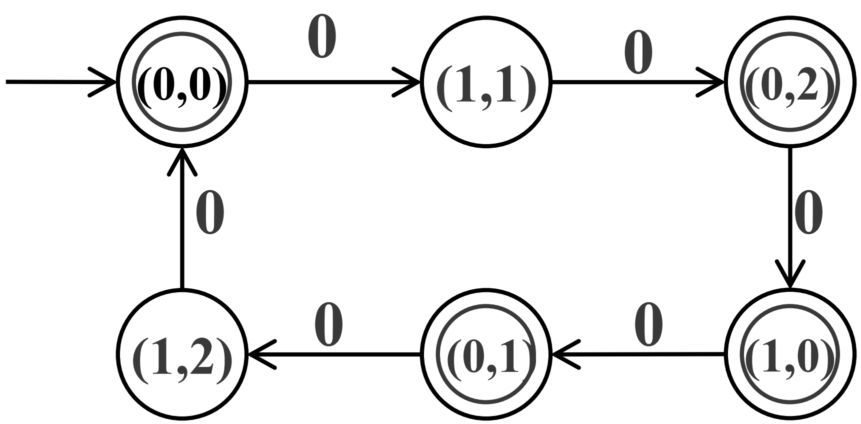


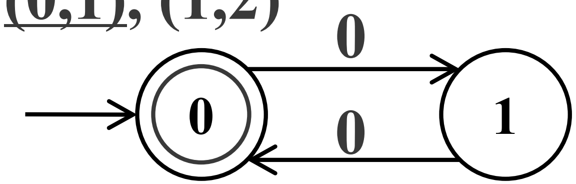
有限自动机的设计

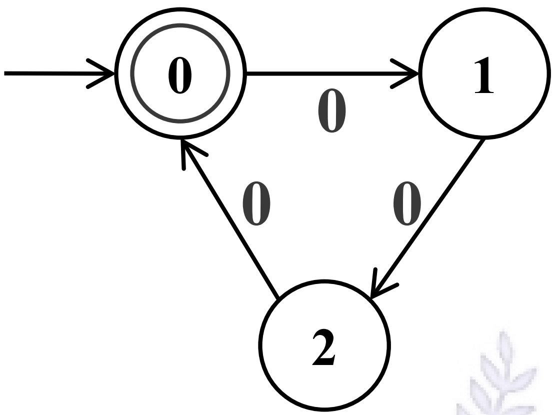
例4：{ 0^k | k是2或3的倍数 }

$\Sigma=\{0\}$, 关键信息: $\varepsilon, 0^1, 0^2, 0^3, 0^4, 0^5$,

记为: 0,1,2,3,4,5 或 (0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)







$\{0^k|k$是2或3的倍数$\} = \{0^k|k$是2倍数$\} \cup \{0^k|k$是3的倍数$\}$

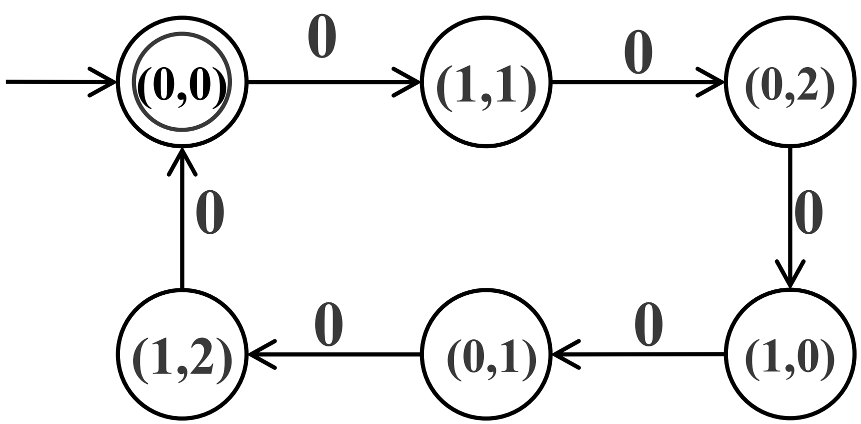
$\{0^k|k$是2和3的倍数$\} = \{0^k|k$是2倍数$\} \cap \{0^k|k$是3的倍数$\}$?

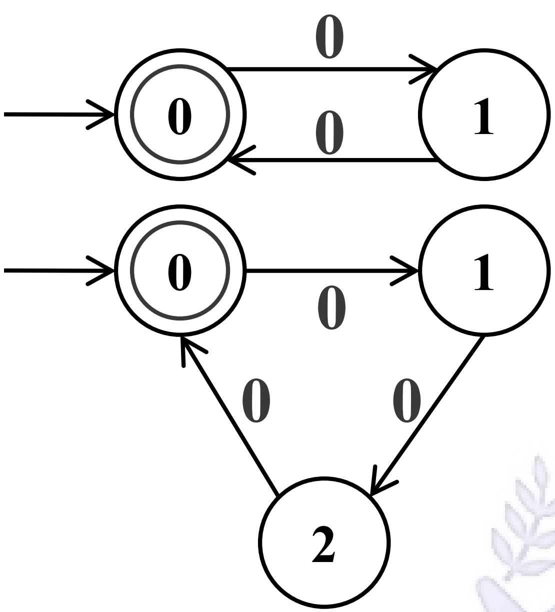
有限自动机的设计

{ 0^k | k是2和3的倍数 }

Σ={0}, 关键信息: $\varepsilon, 0^1, 0^2, 0^3, 0^4, 0^5$,

记为: 0,1,2,3,4,5 或 (0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)





$\{0^k|k是2和3的倍数\} = \{0^k|k是2倍数\} \cap \{0^k|k是3的倍数\}$

正则运算

- 设A, B都是Σ上的正则语言, 正则运算:

  并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

  连接 $AB = \{xy \mid x \in A, y \in B\}$

  星号 $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \ldots$

  $= \{\varepsilon\} \cup A \cup AA \cup AAA \cup \ldots$

  $= \{x_1 x_2 \ldots x_k \mid k \geq 0 \text{ 且每一个 } x_i \in A\}$

  补 $A^c = \{x \mid x \in \Sigma^* - A\}$

- 定理：正则语言对于正则运算是封闭的。

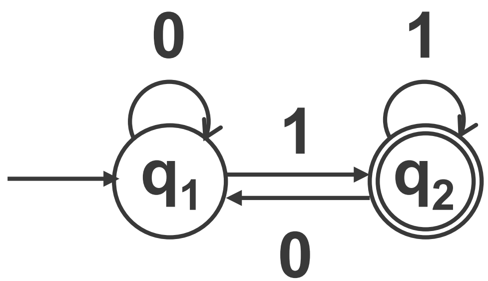
正则运算举例

- 设字母表Σ由标准的26个字母组成
- A={good, bad}, B={boy, girl}, 则
  - $A \cup B$={ good, bad, boy, girl }
  - $A \circ B$={ goodboy, goodgirl, badboy, badgirl }
  - A^*={ε, good, bad, goodgood, goodbad, … }

正则语言对补运算封闭

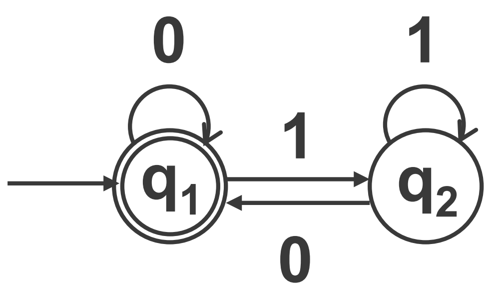
- 定理：正则语言对补运算封闭
- 证明思路：

M_2



$L(M_2)=\{w \mid w\in\{0,1\}^*$, w是以1结束的非空串 $\}$

M_3



$L(M_3)=\{w \mid w\in\{0,1\}^*$, w为空或以0结束 $\}$

正则语言对补运算封闭

- **定理：正则语言对补运算封闭**
- 证明：构造性证明

  假设正则语言L=L(M);

  $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$

  $M' = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F')$，令$F'=Q-F$

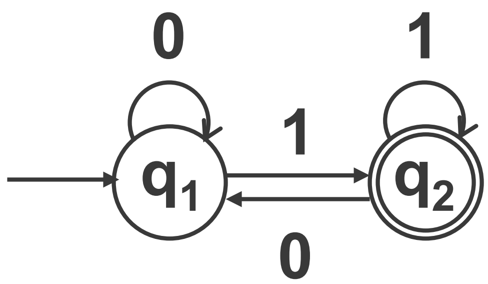
  $\forall x,\ x \in L(M) \Leftrightarrow \delta(q_0,x) \in F$

  $\Leftrightarrow \delta(q_0,x) \notin F' \Leftrightarrow x \notin L(M')$

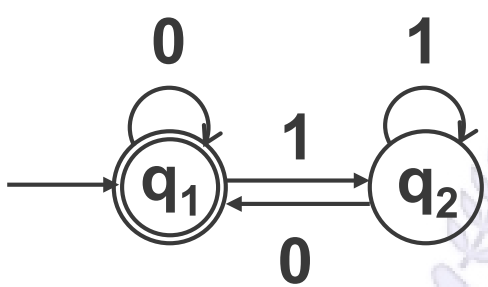
  所以$L(M') = \Sigma^* - L(M) = L(M)^C$.

  证毕.

M_2

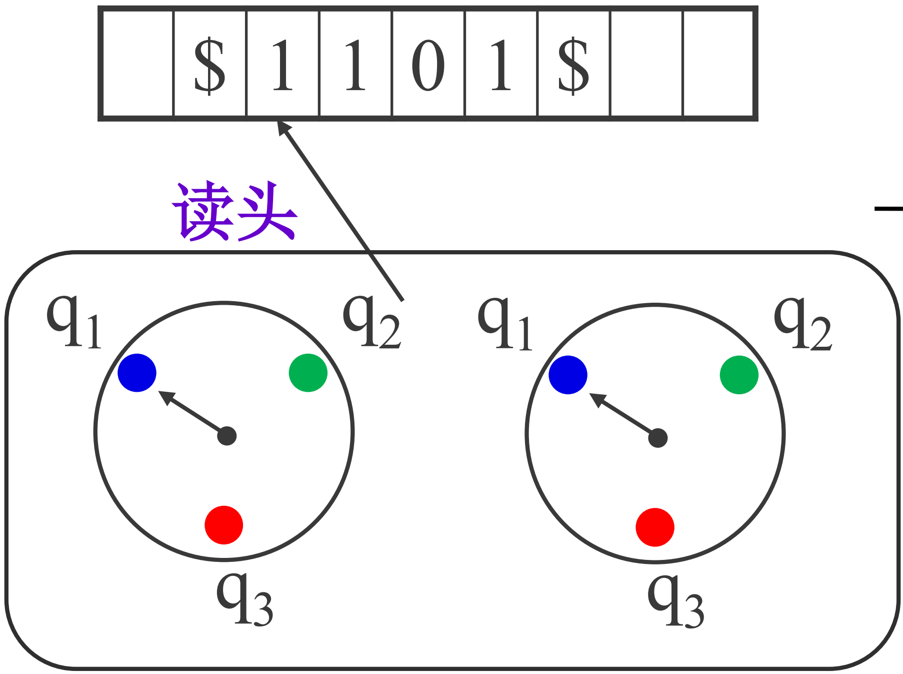


M_3

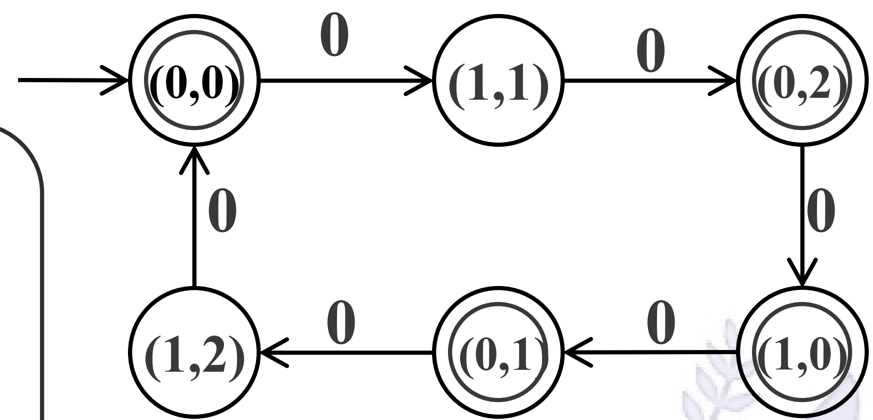


正则语言对并运算封闭

- **定理: 设A, B都是Σ上的正则语言, 则A∪B也是正则语言.**
- 证明思路：构造性证明
- 构造一个有限自动机，同步更新两个有限自动机



有限状态控制器



$\{\, 0^k \mid k$是2和3的倍数 $\}$

正则语言的并是正则语言

- 定理: 设A, B都是Σ上的正则语言, 则A∪B也是正则语言.
- 证明: 设$M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$和$M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$是有限自动机,

    且 $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$.

    令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$

    其中 $Q=Q_1\times Q_2$, $s=(s_1,s_2)$, $F = F_1\times Q_2 \cup Q_1\times F_2$,

    δ: $Q\times\Sigma\rightarrow Q$, $\forall a\in\Sigma$, $r_1\in Q_1$, $r_2\in Q_2$,

    $$\delta((r_1,r_2)\ ,\ a\ ) = (\ \delta_1(r_1,a),\ \delta(r_2,a)\ ),$$

    即第1个分量按M_1的转移函数变化，第2个分量按M_2的转移函数变化.

    则 $\forall x\ (\ x\in L(M) \leftrightarrow x\in A \cup B\ )$

    即 $L(M) = A \cup B$. 证毕

正则语言的交是正则语言

◆ **定理: 设A,B都是Σ上的正则语言, 则A∩B也是正则语言.**

证明: 设$M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$和$M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$是有限自动机,

且 $L(M_1)=A$, $L(M_2)=B$,

令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$,

其中$Q=Q_1\times Q_2$, $s=(s_1,s_2)$, $F=F_1\times F_2$,

δ: $Q\times\Sigma\to Q$, $\forall a\in\Sigma$, $r_1\in Q_1$, $r_2\in Q_2$,

$$\delta(\ (r_1,r_2)\ ,\ a\ ) = (\ \delta_1(r_1,a),\ \delta(r_2,a)\ ),$$

则 $\forall x\ (\ x\in L(M) \leftrightarrow x\in A\cap B\ )$

即 $L(M) = A\cap B$. 证毕

正则语言对相对补和对称差运算封闭

- 定理：正则语言对补运算封闭
- 定理: 设A, B都是Σ上的正则语言, 则A∪B也是正则语言.
- 定理: 设A,B都是Σ上的正则语言, 则A∩B也是正则语言.

- 推论：正则语言对相对补和对称差运算封闭。

相对补 $A-B = A \cap \sim B$

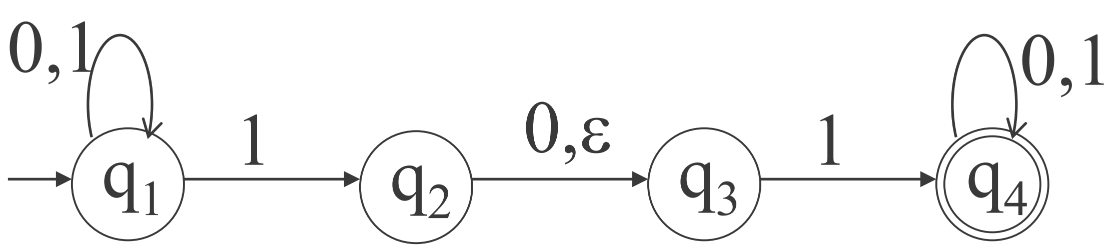
对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

第1章 有限自动机

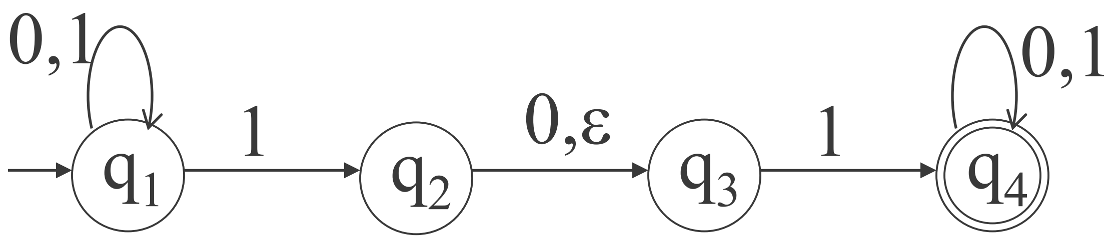
- 0. 引论--语言--什么是问题
- 1. 确定有限自动机
- 2. 非确定有限自动机
  - 非确定型机器
  - NFA的形式定义
  - NFA计算的形式定义
  - NFA举例
  - NFA设计
  - NFA和DFA等价
- 3. 正则表达式
- 4. 正则语言的泵引理

非确定型机器

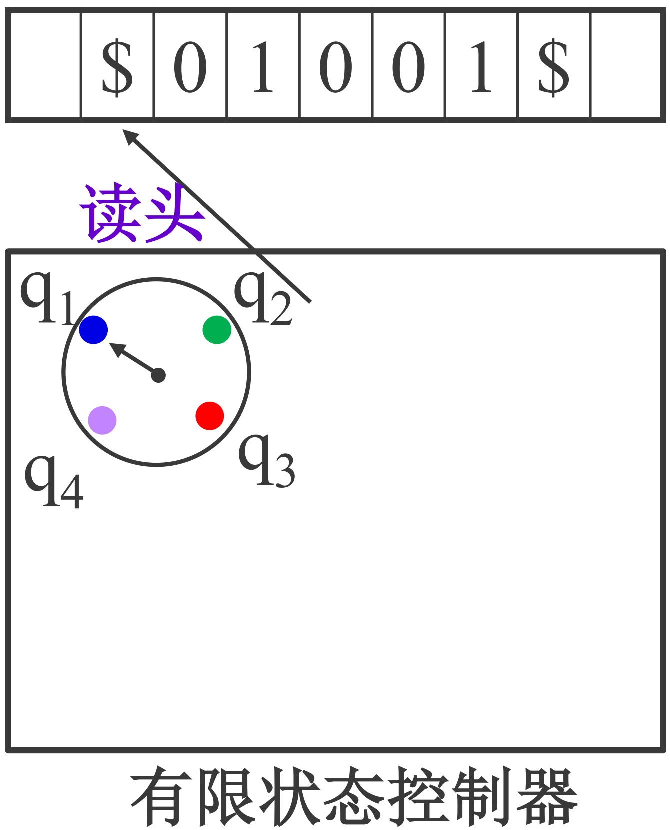
- 确定型有限自动机(DFA)：deterministic finite automaton
  - $\delta: Q\times \Sigma \rightarrow Q$, 下一个状态是唯一确定的
- 非确定型有限自动机(NFA)：nondeterministic finite automaton
  - 每步可以**0至多种**方式进入下一步
  - 转移箭头上的符号可以是**空串ε**,表示不读任何输入就可以转移过去



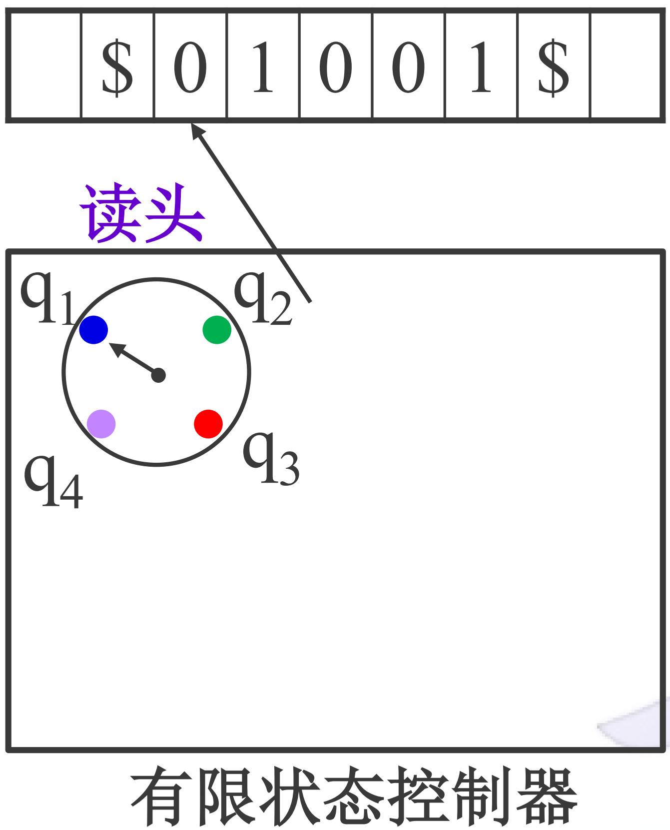
非确定型机器计算示例



0,1
1
0,ε
1
0,1
q_1
q_2
q_3
q_4

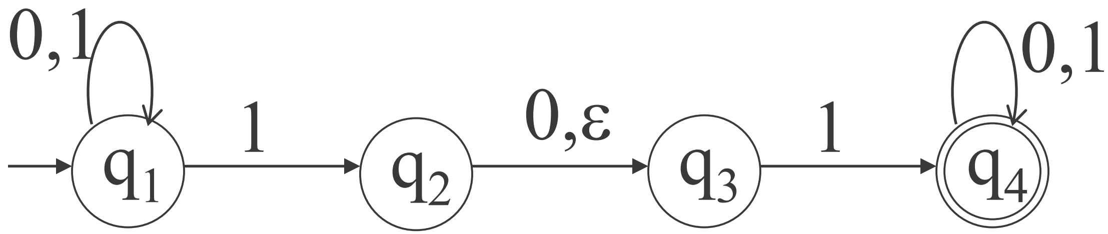


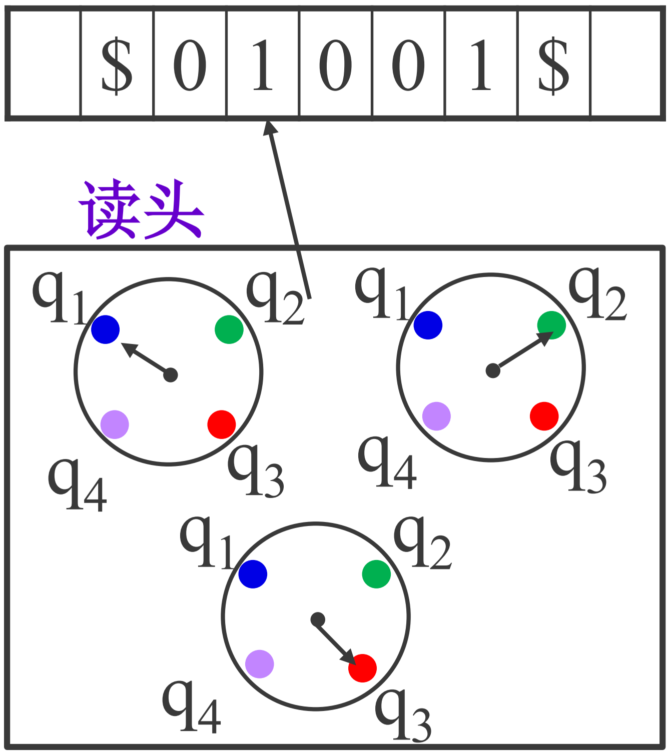
$ 0 1 0 0 1 $
读头
q_1
q_2
q_3
q_4
有限状态控制器



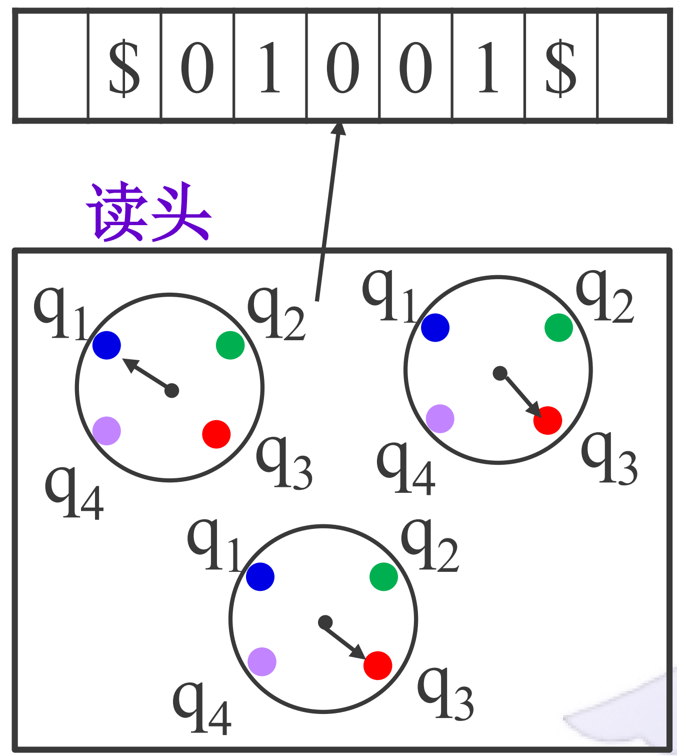
$ 0 1 0 0 1 $
读头
q_1
q_2
q_3
q_4
有限状态控制器

非确定型机器计算示例





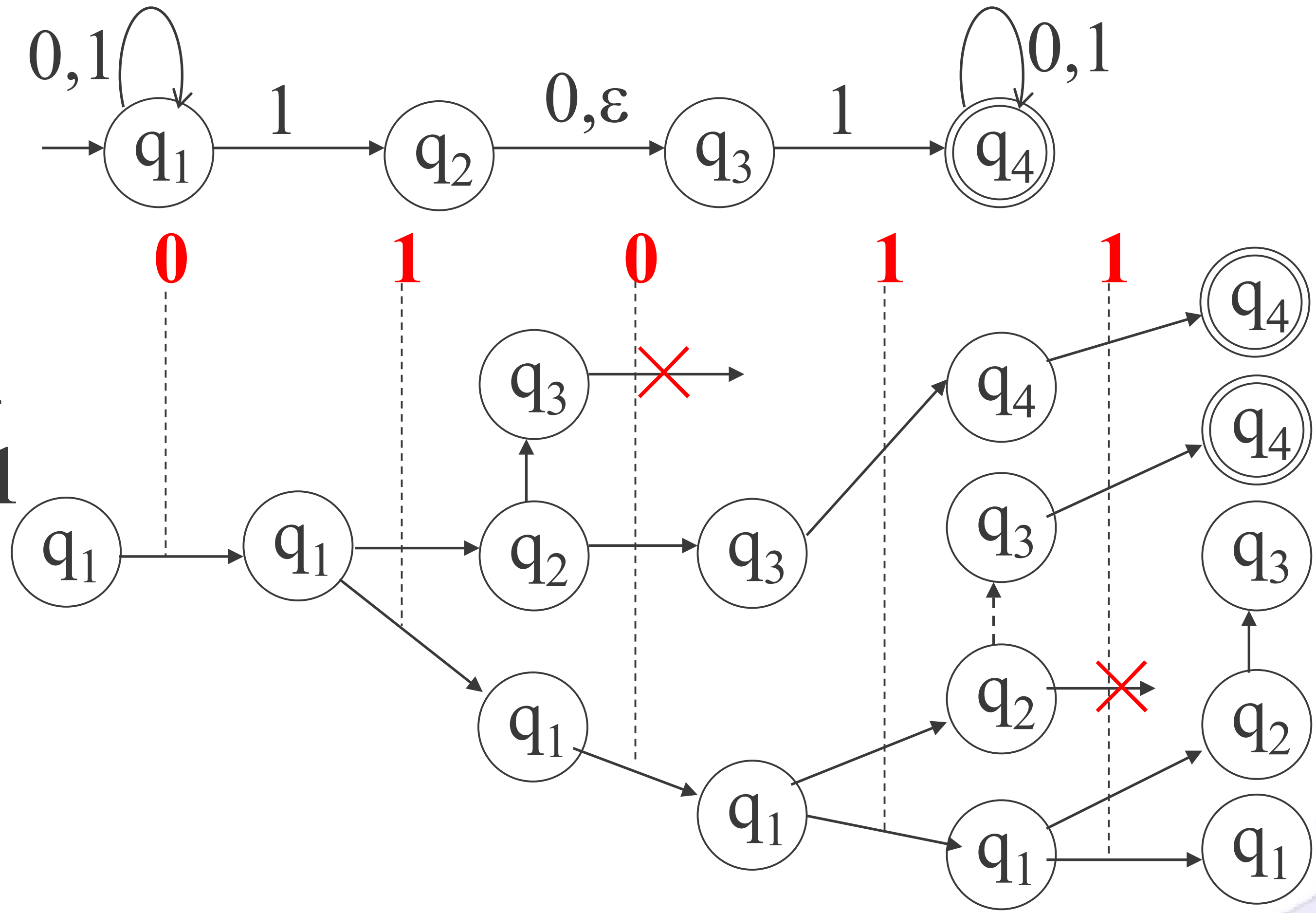
有限状态控制器



有限状态控制器

非确定型计算

输入
01011



NFA的计算方式

- 1.设读到符号s, 对(每个副本)机器状态q,若q有多个射出s箭头, 则机器把自己复制为成多个副本.
- 2. 对每个副本的状态,若其上有射出标ε的箭头, 则不读任何输入, 机器复制出相应副本.
- 3. 读下一个输入符号, 若有符号则转1.

  若无输入符号, 计算结束, 并且,

  若此时有一个副本处于接受状态,则接受,

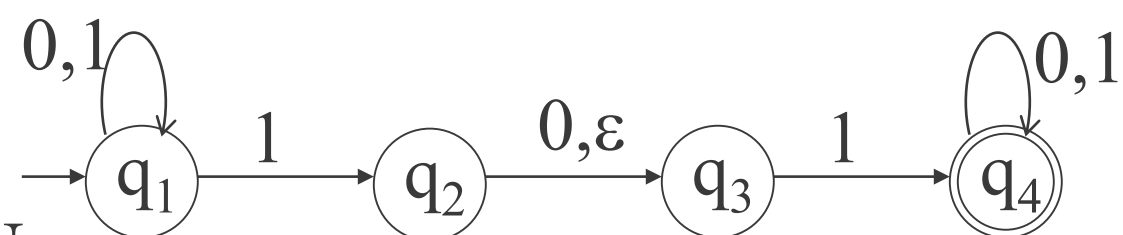
  否则拒绝.

NFA的形式定义

- 定义: NFA是一个5元组(Q,Σ,δ,s,F),
  - ¶ Q是状态集;
  - ¶ Σ是字母表;
  - ¶ $\delta: Q\times \Sigma_\varepsilon \rightarrow P(Q)$是转移函数;
    其中 $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
  - ¶ $s\in Q$是起始状态;
  - ¶ $F\subseteq Q$是接受状态集;

状态图
与
形式定义
包含
相同信息

试写出该状态图对应的形式定义



N_1

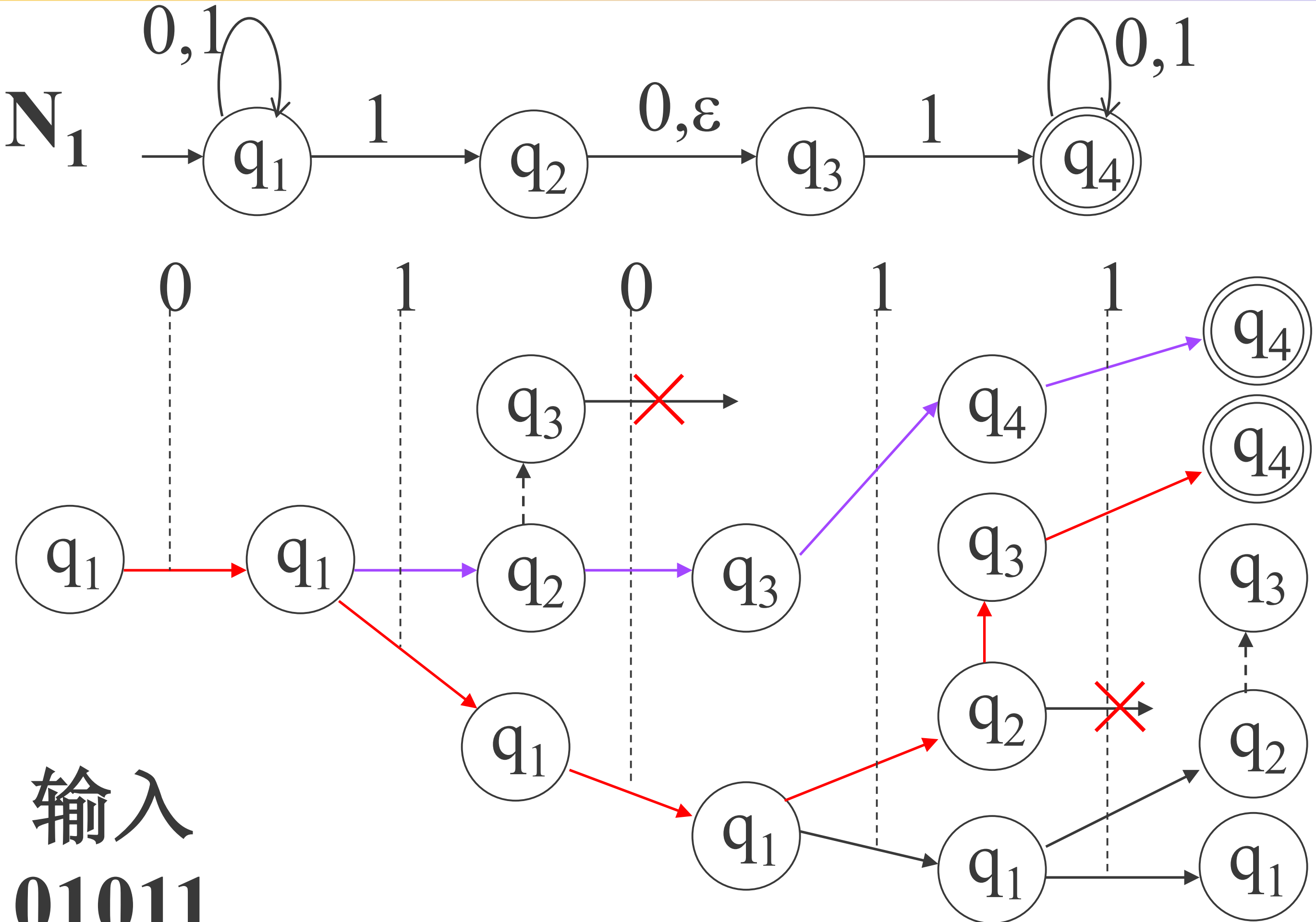
$\delta(q_1,1) = \{q_1,q_2\}$

$\delta(q_2,\varepsilon) = \{q_3\}$

$\delta(q_2,1) = \varnothing$

$\delta(q_1,\varepsilon) = \varnothing$

如何定义NFA的计算



输入
01011

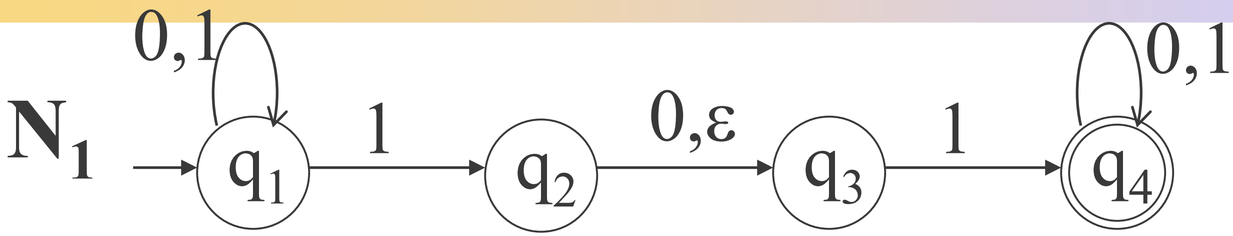
NFA计算的形式定义

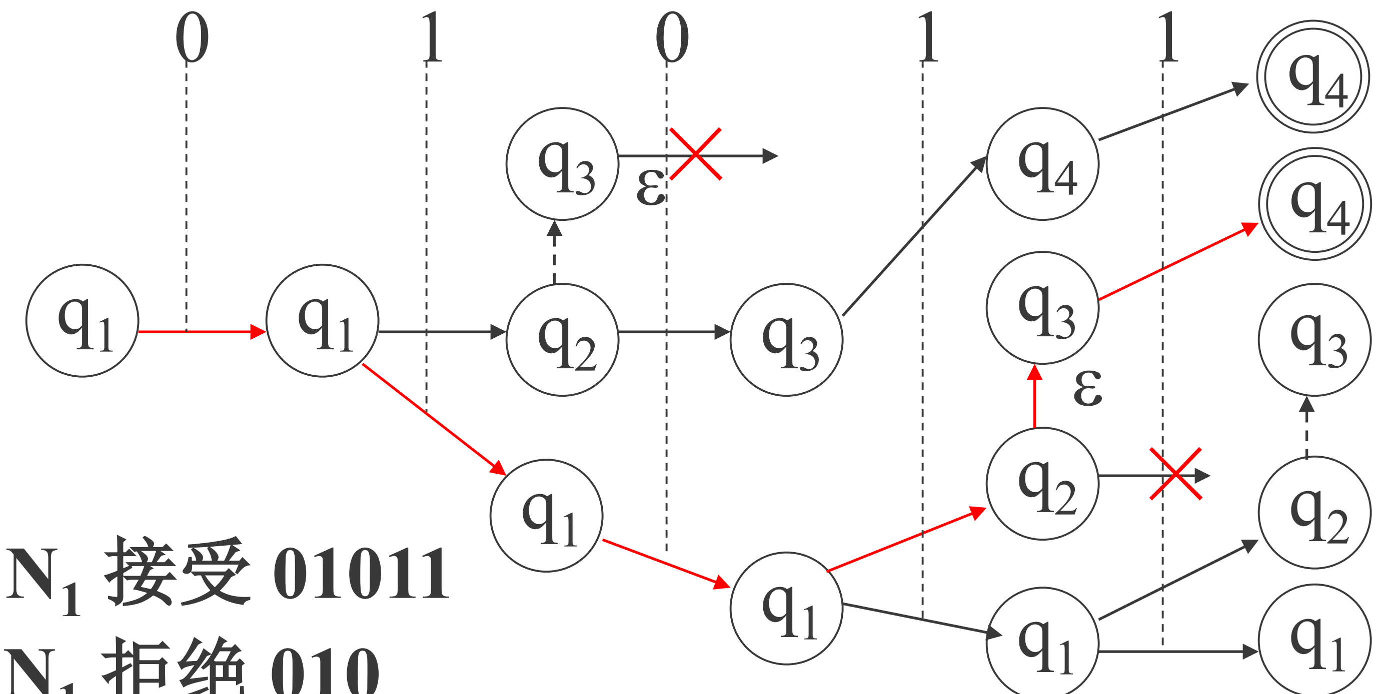
- 设$N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$是一台NFA, w是Σ上字符串
  称 N接受w,
  若 w能写作$w=w_1w_2\ldots w_n$, $w_i\in\Sigma_\varepsilon$,且
  存在Q中的状态序列$r_0,r_1,\ldots,r_n$, 满足
  1) $r_0 = q_0$;
  2) $r_{i+1}\in\delta(r_i, w_{i+1})$;
  3) $r_n \in F$

$$r_0 \xrightarrow{w_1} r_1 \xrightarrow{w_2} r_2 \overset{\cdots}{\dashrightarrow} r_{n-1} \xrightarrow{w_n} r_n$$

对于输入, NFA计算的路径可能不唯一.

NFA计算形式定义举例





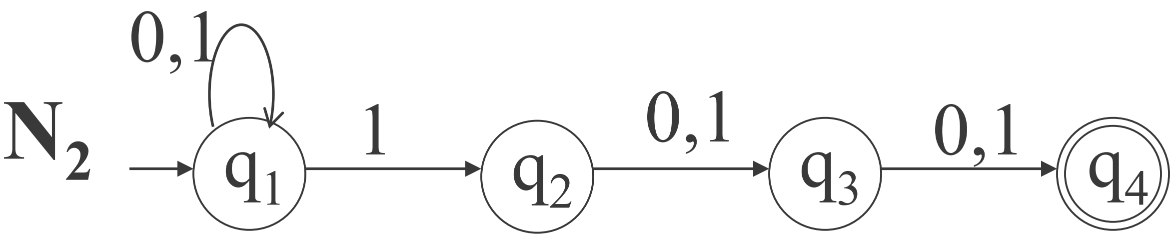
N_1 接受 01011

N_1 拒绝 010

N_1 接受所有包含11或者101子串的字符串。

NFA举例

- $L(N_2)=\{w \mid w$的倒数第三个字符是$1\}$
- $\Sigma=\{0, 1\}$
- NFA：猜测能力

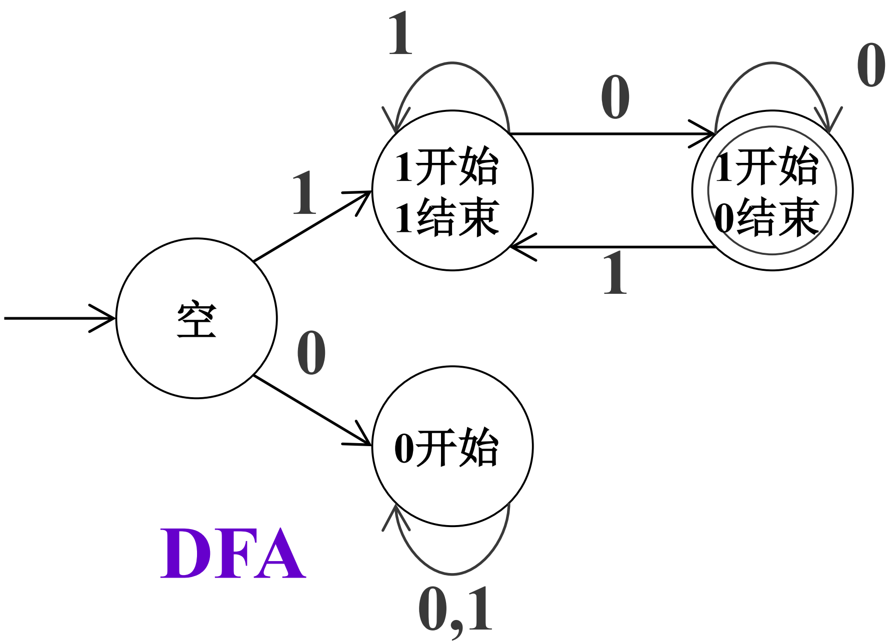


NFA的设计(难点)

- 自己即自动机
- 寻找需要记录的关键信息
- 设计识别{0,1}上以下语言的NFA:
  - 例1: $\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$从1开始, 以0结束 $\}$
  - 例2: $\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$含有子串1010 $\}$
  - 例3: $\{ w \in \{0,1\}^* \mid w$是倒数第2位是1 $\}$
  - 例4: $\{ 0^k \mid k$是2或3的倍数 $\}$

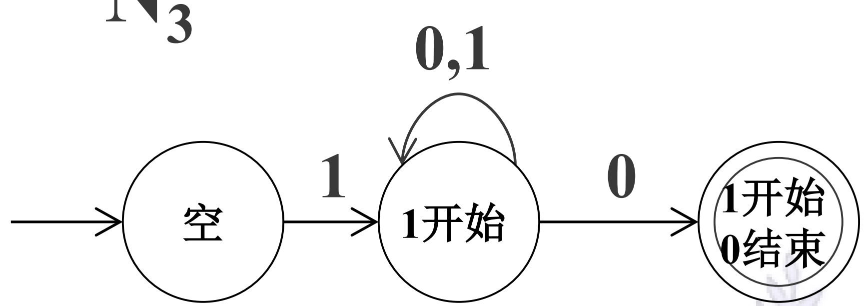
NFA的设计

- 例1：{ w∈{0,1}* | w从1开始, 以0结束 }
- Σ={0,1}, 根据关键信息设计状态,
- 空, 以0开始, 以1开始以1结束, 以1开始以0结束



DFA

N_3

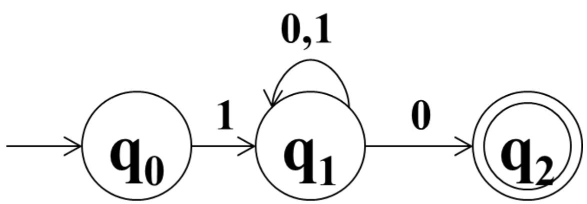


NFA

NFA计算举例

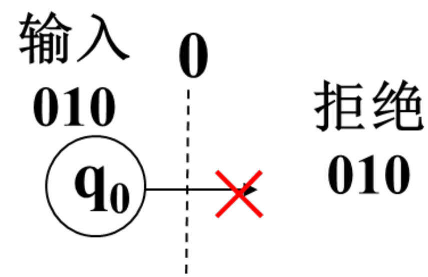
$A = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w$ 从1开始, 以0结束 $\}$

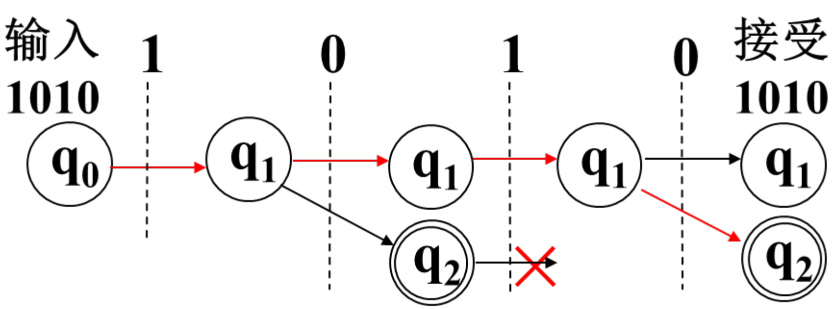
状态: (q_0, q_1, q_2)

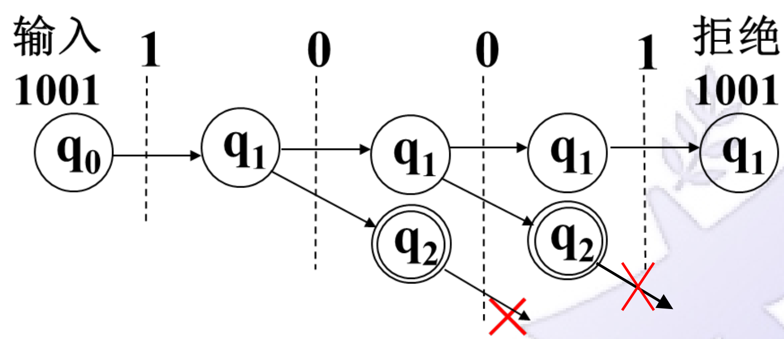


NFA

1010
1001
010

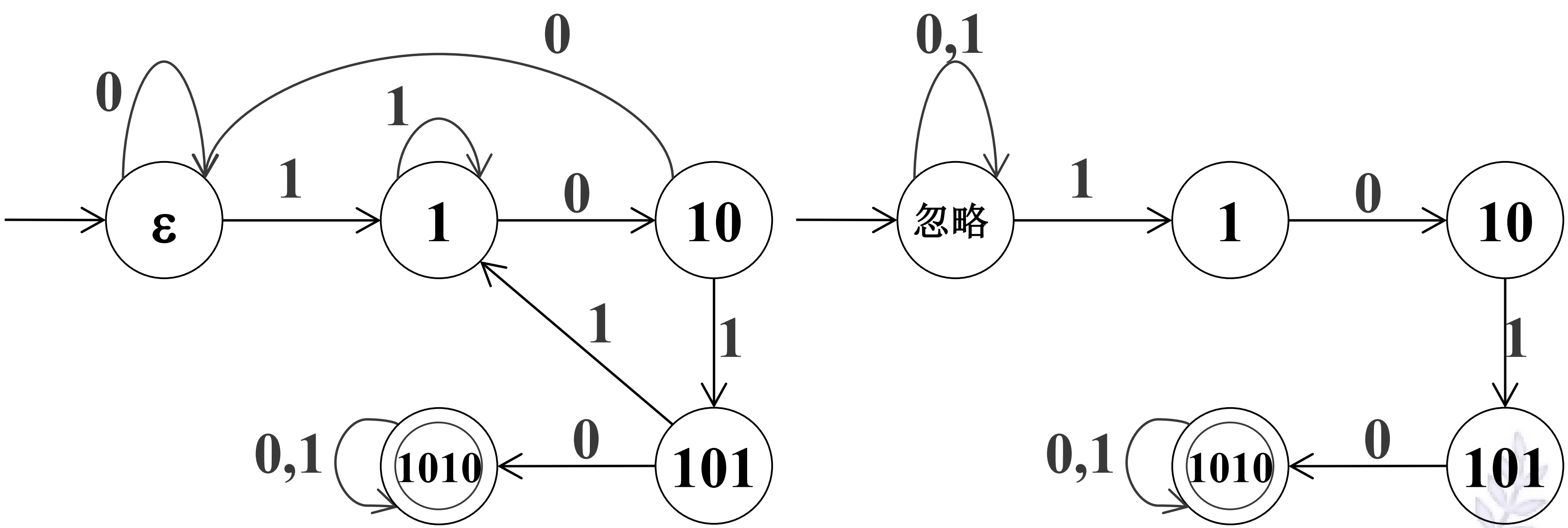






NFA的设计

- { w∈{0,1}* | w含有子串1010 }
- Σ={0,1}，关键信息: 忽略(ε), 1, 10, 101, 1010



DFA

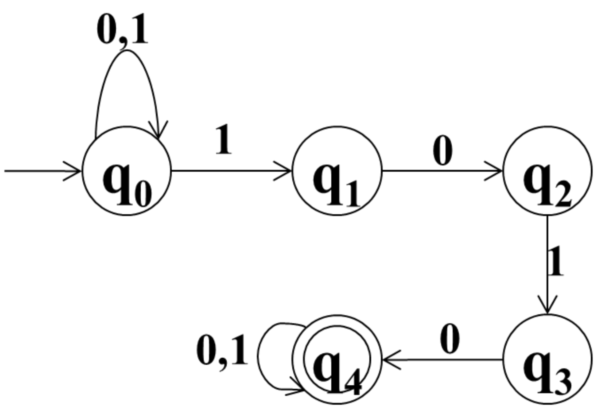
N_4

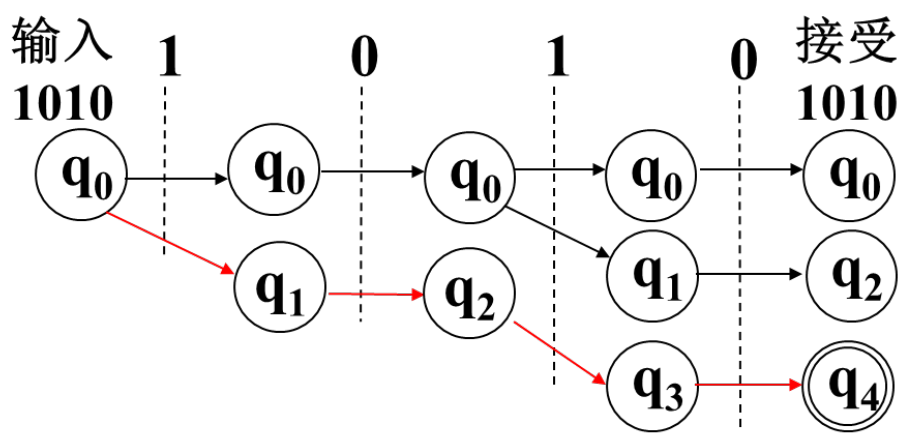
NFA

NFA计算举例

$B = \{\, w \in \{0,1\}^* \mid w$含有子串$1010 \,\}$

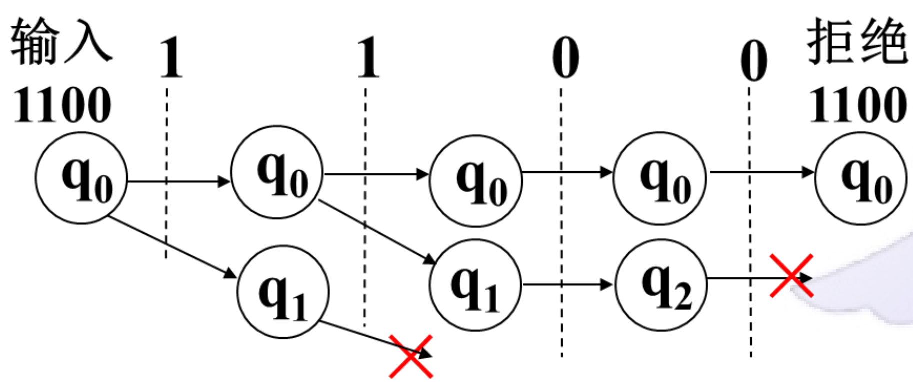
状态: $(q_0,q_1,q_2,q_3,q_4) = ($ Ignore(ε), 1, 10, 101, 1010 $)$





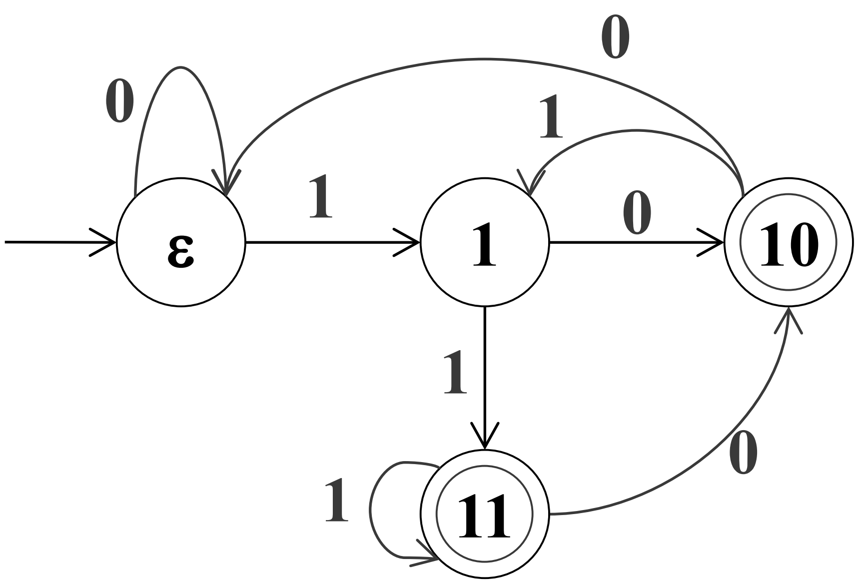
1010

1100

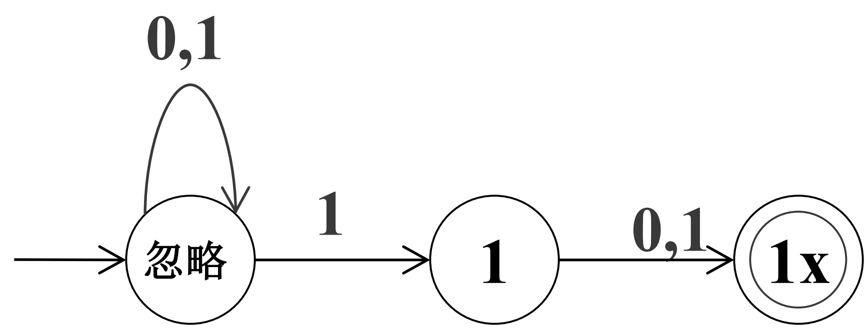


NFA的设计

- { w∈{0,1}* | w倒数第2个符号是1 }
- Σ={0,1}, 关键信息: 忽略(ε), 1, 1x,



DFA

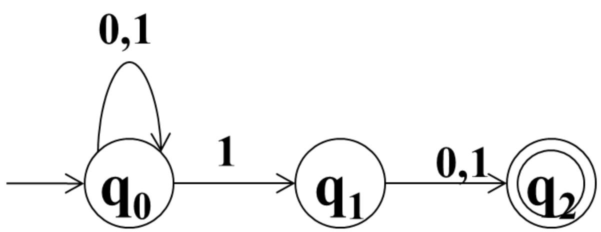


N_5 NFA

NFA计算举例

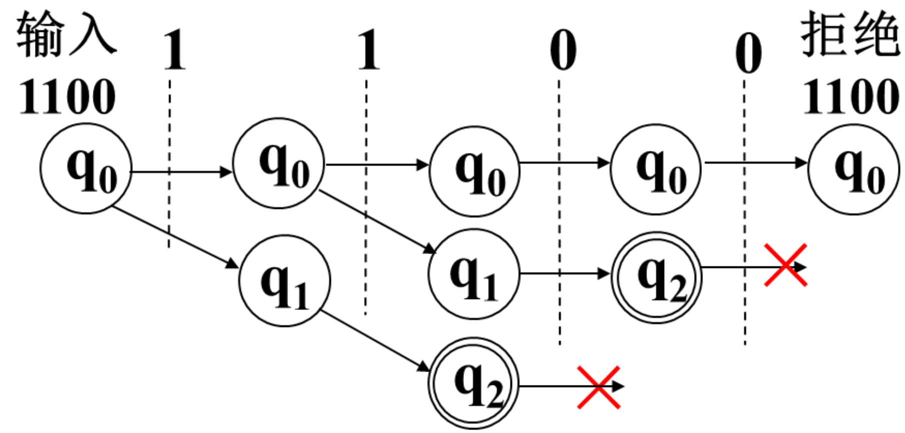
C = { w∈{0,1}* | w的倒数第2个符号是1 }

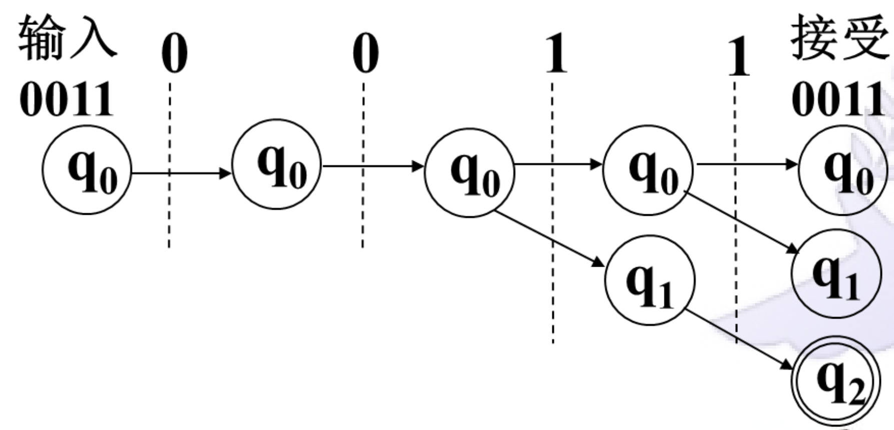
状态: (q_0,q_1,q_2) = (忽略(ε), 1, 1x)



NFA

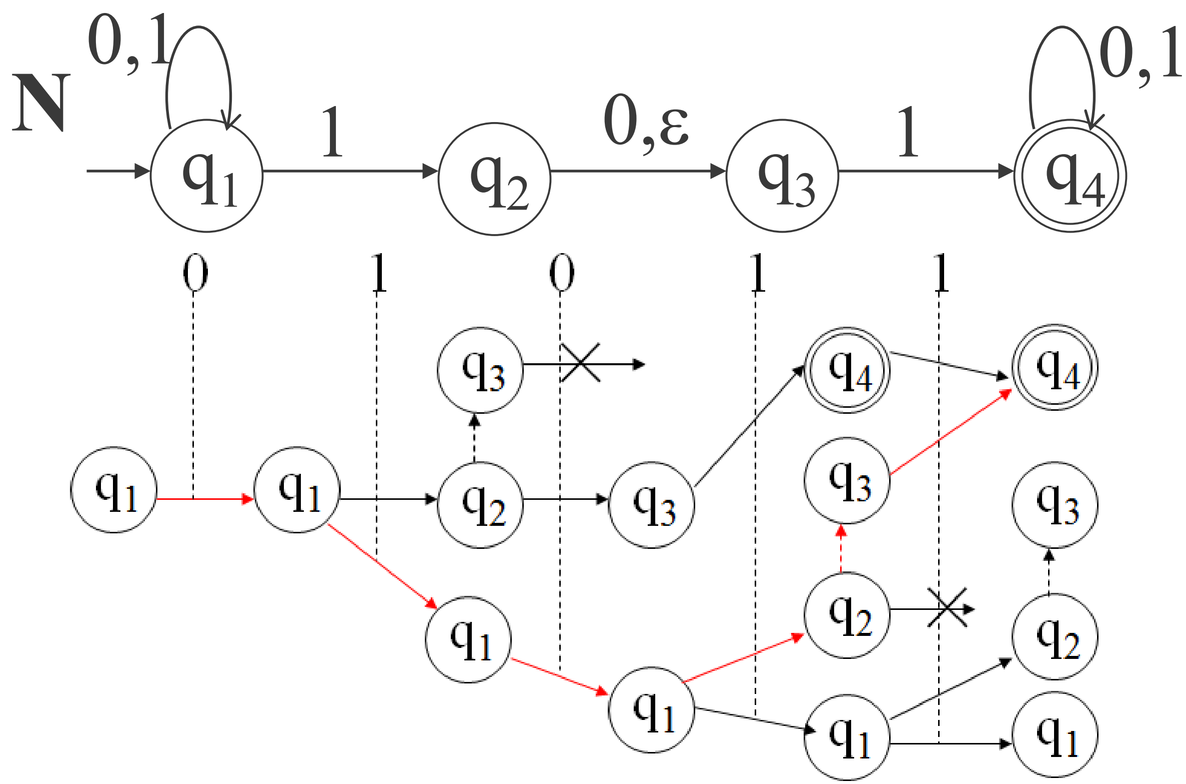
1100
0011





NFA与DFA等价

定理: 每个NFA都有一台等价的DFA.



<u>不确定</u>:
在状态q读到a,
进入哪个状态?
<u>确定</u>:
在状态q读到a,
进入哪些状态?
<u>进一步确定</u>:
给定副本状态集,
读到符号a,
得到的副本状态集

构造DFA关键信息: 副本状态的集合.
起始? 接受状态集?转移?

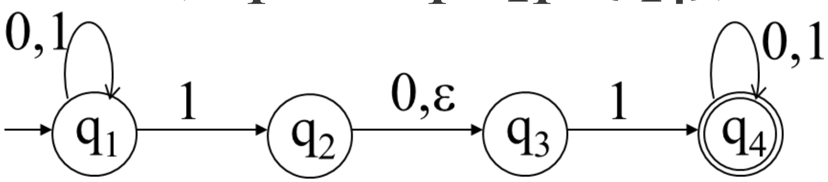
每个NFA都有等价的DFA

NFA的确定化:子集法

- (1)确定起始状态S′:将从 NFA N的起始状态S出发经过任意条ε弧所能到达的状态组成的集合作为确定化后的 DFA M的起始状态S′。
- (2)确定其它状态：从S′出发，经过对任意输入符号a∈∑的状态转移所能到达的状态（包括读入输入符号a之后所有可能的ε转移所能到达的状态）所组成的集合作为M的新状态。
- (3)如此重复，直到不再有新的状态出现为止。
- (4)确定接受状态：在所产生的状态中，含有原NFA接受态的子集作为DFA的接受态。

构造和N等价的DFA M

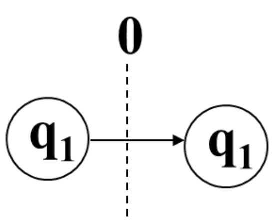
$N=(Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, \{q_4\})$

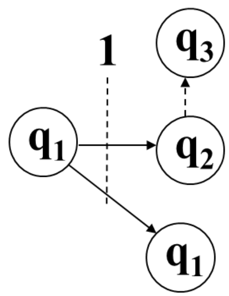


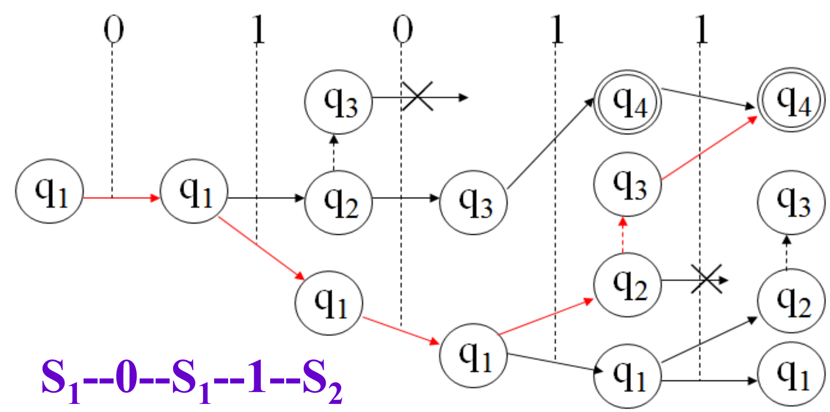
$\delta(A, a) = E(\cup_{r\in A}\delta_1(r,a))$

$M=(Q, \Sigma, \delta, s, F)$

$Q=P(Q_1)$, 令$s = S_1 = \{q_1\}$







令 $S_2=\{q_1,q_2,q_3\}$. 则有

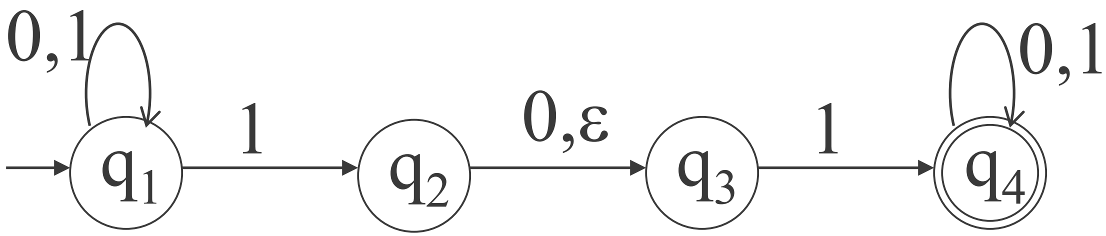
$\delta(S_1,0) = S_1$, $\delta(S_1,1) = S_2$,

$Q = \{ S_1,S_2, \ldots \}$,

$s = S_1$,

$\delta(S_1,0) = S_1$, $\delta(S_1,1) = S_2$,

每个NFA都有等价的DFA

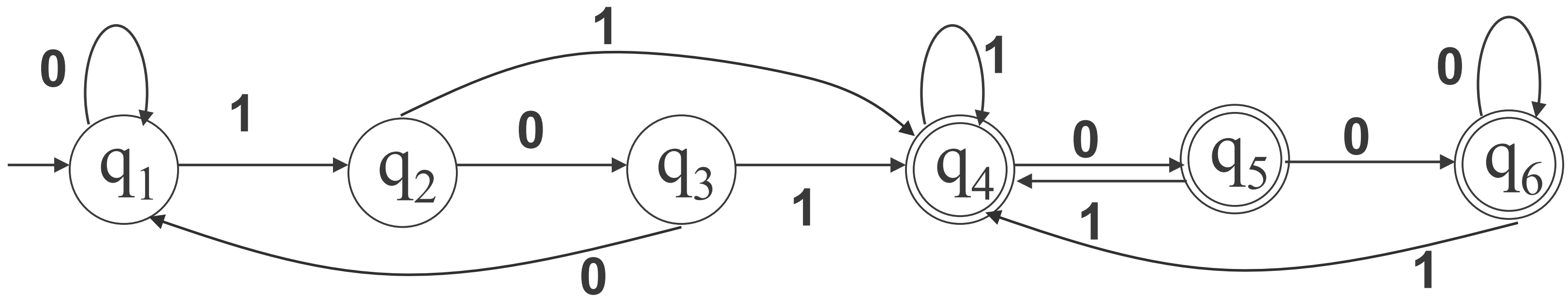


以原状态的子集为新机器的状态

编号	δ	0	1
1	$\{q_1\}$ 1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$2
2	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$3	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$4
3	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
4*	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$5	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
5*	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$6	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
6*	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

N_1：包含11或者101子串的字符串

每个NFA都有等价的DFA



编号	δ	0	1
1	$\{q_1\}$ 1	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$2
2	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$3	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$4
3	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
4*	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$5	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
5*	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$6	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
6*	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

N_1：包含11或者101子串的字符串

每个NFA都有等价的DFA

- 证明: 设$N=(Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$是NFA,//构造一个DFA $M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$

  令 $Q = P(Q_1)$,　　//Q1的幂集

  $F = \{ A\in Q : F_1 \cap A \neq \varnothing \}$,

  $s = E(\{s_1\})$, $E(A) = \{ q : \exists r\in A$, r经0到多个ε箭头可达q $\}$

  $\delta: Q\times\Sigma\to Q$,　$\forall a\in\Sigma, \forall A\in Q$,

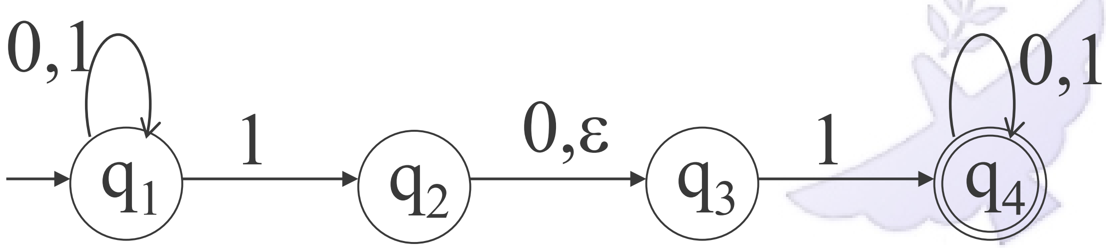
  $$\delta(A, a) = E(\cup_{r\in A} \delta_1(r, a))$$

  $M = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$,

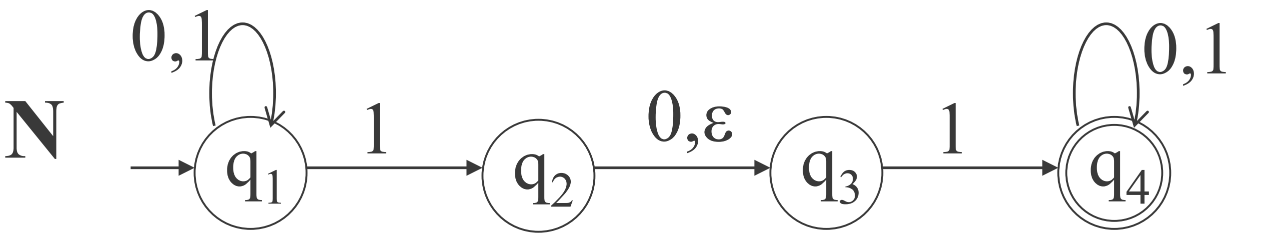
  则 $\forall x\,(x\in L(M) \leftrightarrow x\in L(N))$,

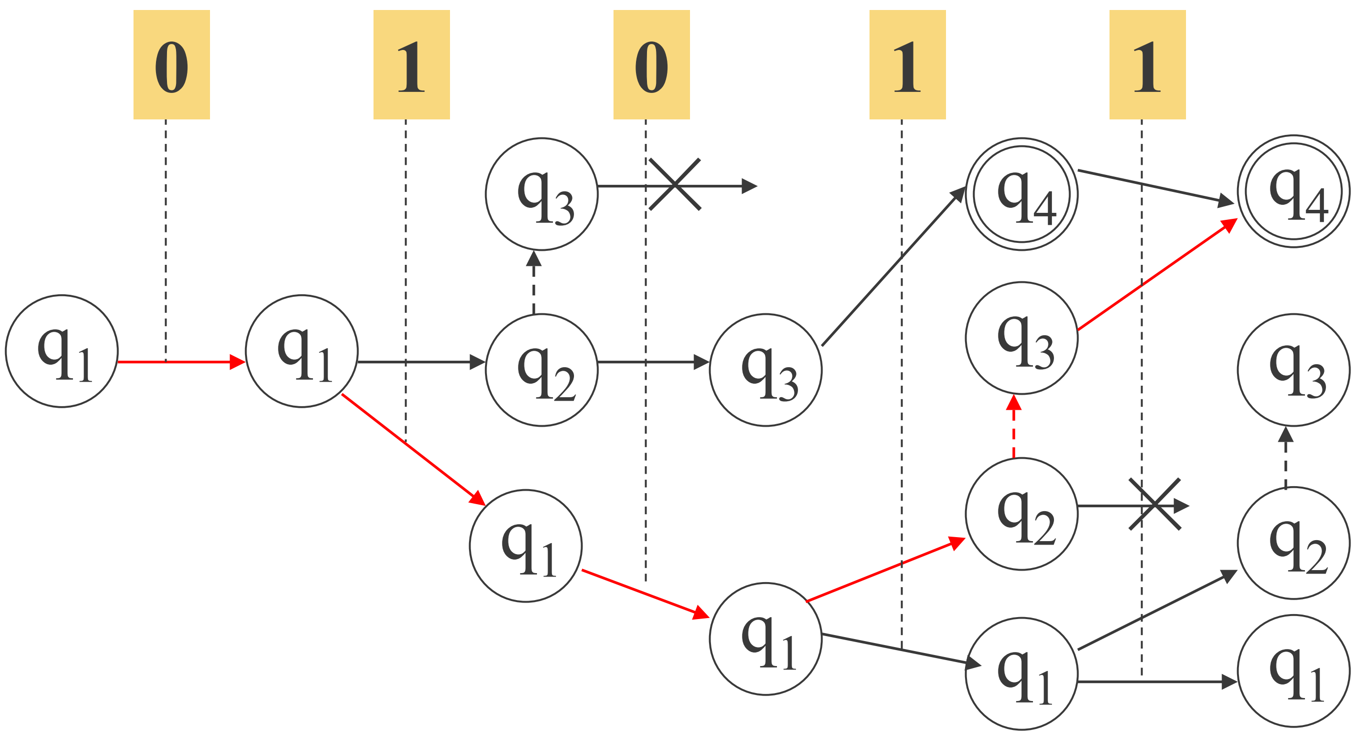
  即 $L(M) = L(N)$.

  证毕.



$\forall x\,(\,x\in L(M) \leftrightarrow x\in L(N)\,)$





N接受w:

w=0101ε1

q_1-0-q_1-1-

q_1-0-q_1-1-

q_2-ε-q_3-1-

$q_4 \in F_1$

S_1--0--S_1--1--S_2--0--S_3--1--S_4--1--S_4 M接受w

正则运算的封闭性

定理：每个NFA都有等价的DFA。

推论：一个语言是正则的，当且仅当有一个NFA识别它。

定理: 正则语言对并运算封闭.

定理: 正则语言对连接运算封闭.

定理: 正则语言对星号运算封闭.

证明方法: 构造一个NFA，画状态图.

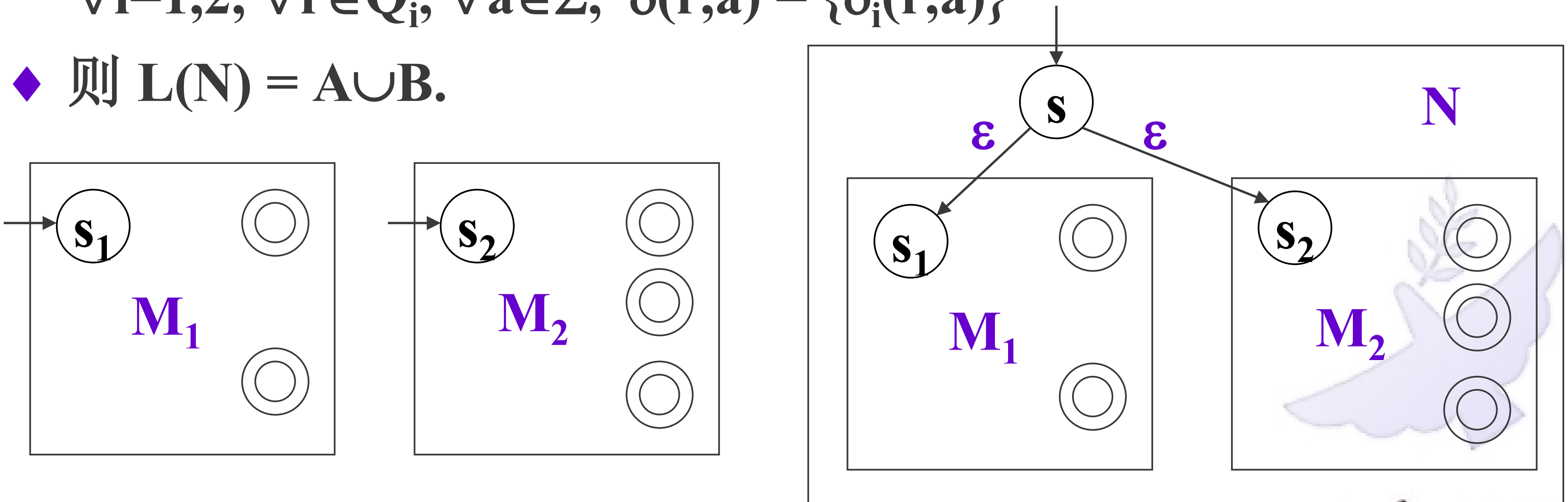
证明：若A, B正则, 则A∪B正则

- 设DFA: $M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$, $L(M_1)=A$;

  DFA: $M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$, $L(M_2)=B$,
- 构造识别A∪B的NFA，$N=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$。
- 令 $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$, $F = F_1 \cup F_2$ ， s是N的初始状态；

  $\delta(s,\varepsilon) = \{s_1,s_2\}$

  $\forall i=1,2,\ \forall r\in Q_i,\ \forall a\in\Sigma,\ \delta(r,a) = \{\delta_i(r,a)\}$
- 则 $L(N) = A\cup B$.



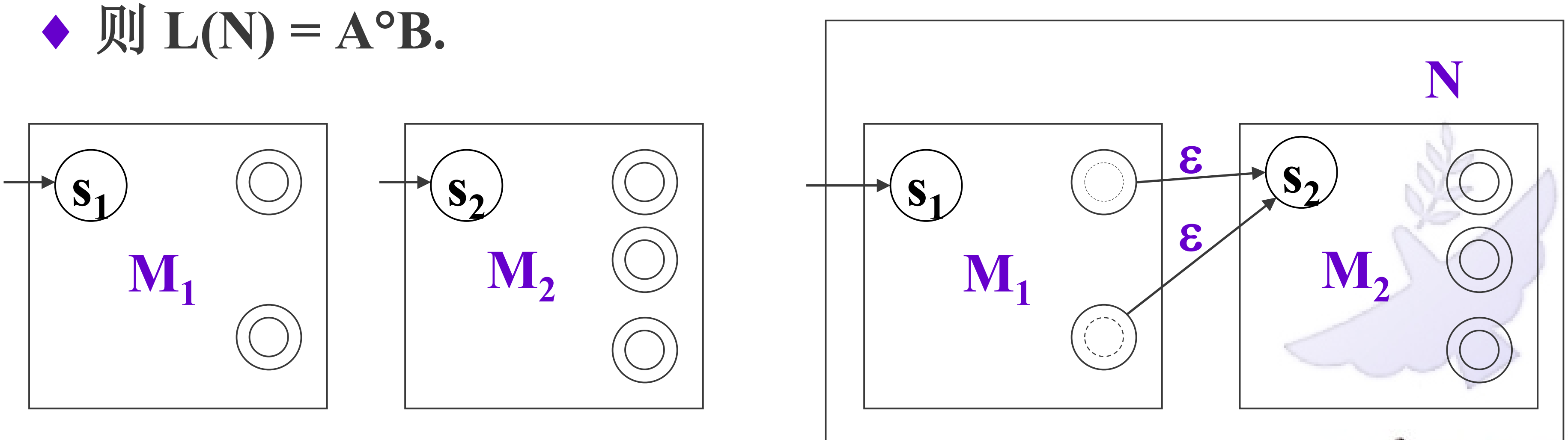
证明：若A, B正则, 则A°B正则

- DFA: $M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$, $L(M_1)=A$,

  $M_2=(Q_2,\Sigma,\delta_2,s_2,F_2)$, $L(M_2)=B$。
- 构造识别A°B的NFA，$N=(Q,\Sigma,\delta,s_1,F)$。
- 令 $Q = Q_1 \cup Q_2$ 不交并, $F = F_2$, s_1是N的初始状态;

  $\forall r \in F_1,\ \delta(r,\varepsilon) = \{s_2\}$

  $\forall i=1,2,\ \forall r \in Q_i,\ \forall a \in \Sigma,\ \delta(r,a) = \{\delta_i(r,a)\}$
- 则 $L(N) = A°B$.



证明若A正则, 则A^*正则

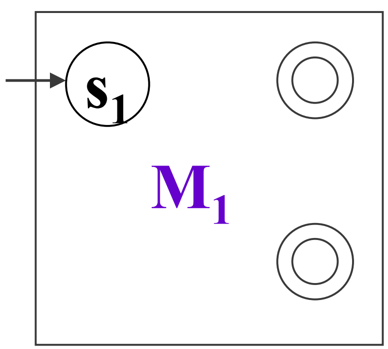
- DFA: $M_1=(Q_1,\Sigma,\delta_1,s_1,F_1)$, $L(M_1)=A$,
- 构造识别A*的NFA，$N=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$。

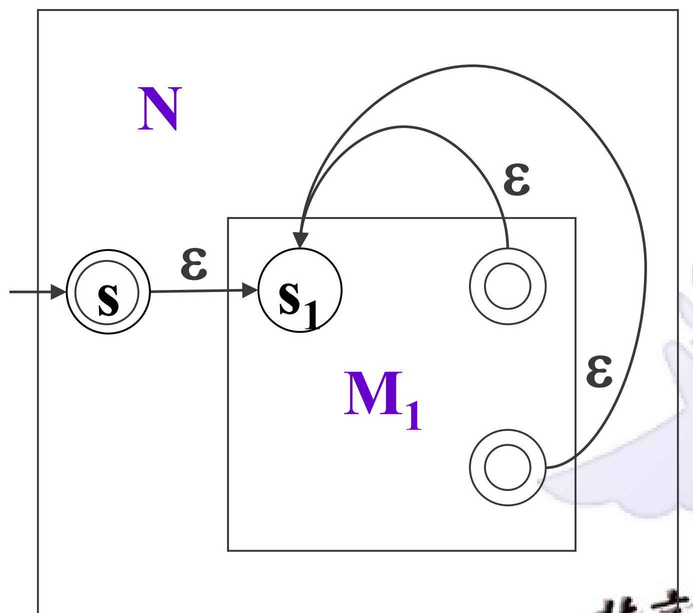
  令 $Q = Q_1 \cup \{s\}$, $F = F_1 \cup \{s\}$

  $\forall r\in Q_1, \forall a\in\Sigma,\ \delta(r,a) = \{\delta_1(r,a)\}$

  $\forall r\in F_1, \delta(r,\varepsilon) = \{s_1\}$,

  $\delta(s,\varepsilon) = \{s_1\}$,
- 则 $L(N) = A^*$.





第1章 有限自动机

- 0. 引论--语言--什么是问题
- 1. 确定有限自动机
- 2. 非确定有限自动机
- 3. 正则表达式
  - 正则表达式
  - 正则表达式与DFA等价
- 4. 正则语言的泵引理

正则表达式

- 定义: 称R是一个正则表达式, 若R是

  1) a, $a\in\Sigma$;

  2) ε ;

  3) $\varnothing$;

  4) $(R_1\cup R_2)$, R_1和R_2是正则表达式;

  5) $(R_1{}^\circ R_2)$, R_1和R_2是正则表达式;

  6) $(R_1{}^*)$, R_1是正则表达式;

- 每个正则表达式R表示一个语言,记为L(R).
  - 1) $L(a)=\{a\}$. 2) $L(\varepsilon)=\{\varepsilon\}$.
  - 3) $L(\varnothing)=\varnothing$
  - 4) $L((R_1\cup R_2))=L(R_1)\cup L(R_2)$.
  - 5) $L((R_1{}^\circ R_2))=L(R_1)^\circ L(R_2)$.
  - 6) $L((R_1{}^*))=(L(R_1))^*$

- 每个正则表达式R表示一个语言,记为L(R).例:
  - $0^*10^*=\{w|\ w$恰好含有一个$1\}$
  - $01\cup 10=\{01, 10\}$
  - $(\Sigma\Sigma)^*=\{w|\ w$是含有偶数个字符的字符串$\}$
  - $1^*\varnothing=\varnothing$
  - $\varnothing^*=\{\varepsilon\}$

正则表达式与DFA等价

- 定理2.3.1: 语言A是正则的⇔A可用正则表达式描述.
- (⇐) 若 语言A可用正则表达式描述,
  则 A是正则的.
  - 证明方法：数学归纳法

  即，用DFA(NFA)识别正则表达式的基本形式，然后归纳
- (⇒) 若 语言A是正则的,
  则A可用正则表达式描述.
  - 证明方法：将DFA识别的语言变换为正则表达式

A可用正则表达式描述⇒A正则

- 数学归纳法
- R是一个正则表达式, 若R是

1) a, $a \in \Sigma$

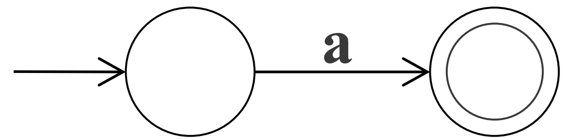
2) ε

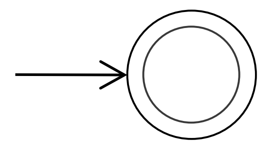
3) $\varnothing$

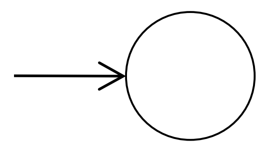
4) $(R_1 \cup R_2)$

5) $(R_1 \circ R_2)$

6) (R_1^*)







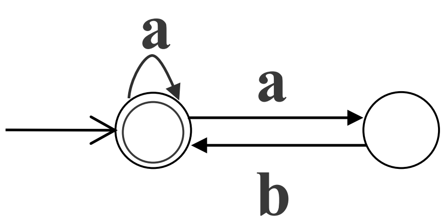
针对正则表达式进行归纳

例如：$(ab \cup a)^*$

A可用正则表达式描述⇒A正则

- 例：根据(ab∪a)*构造NFA

(ab∪a)*



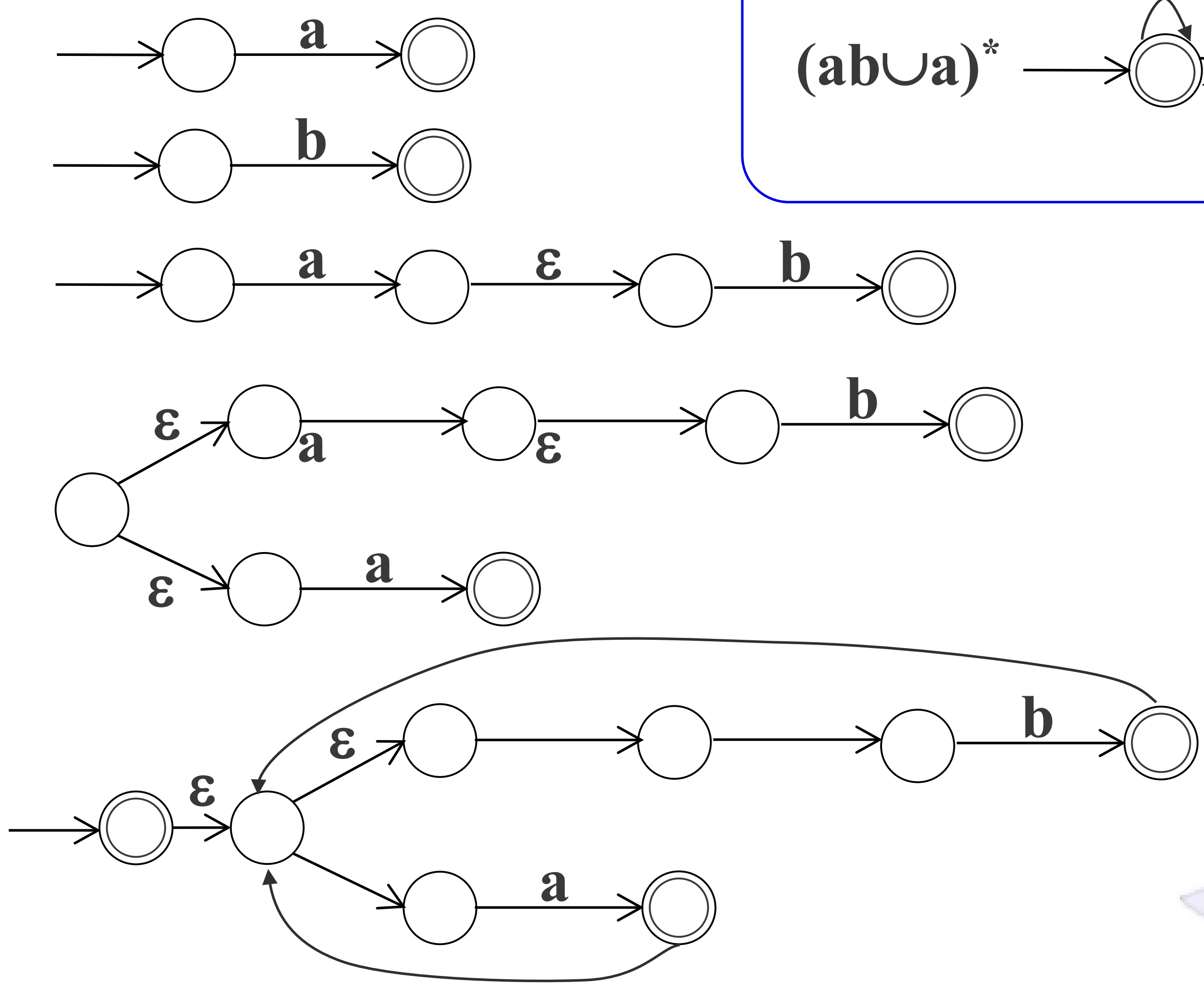
a

b

ab

ab∪a

(ab∪a)*

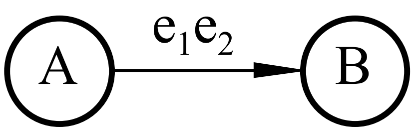


A正则⇒A可用正则表达式描述

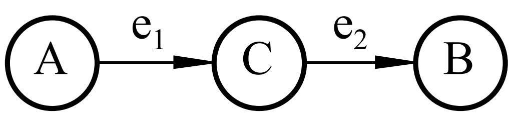
- 证明方法：将DFA转换为等价的正则表达式
- 构造性证明：构造广义非确定有限自动机(GNFA)
  - 转移箭头可以用任何正则表达式作标号，如ab^*，$ab\cup a$等。
  - GNFA读入符号段，不必一次读入一个符号
  - 证明中的特殊要求:
    - 起始状态无射入箭头.
    - 唯一接受状态(无射出箭头).
    - 其它状态到自身和其它每一个状态都有一个箭头.
- 手段: 一个一个地去掉中间状态.

正则表达式到NFA的转换

（1） 替换成

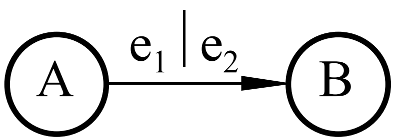


(a)

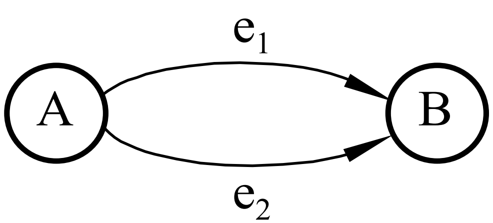


(b)

（2） 替换成

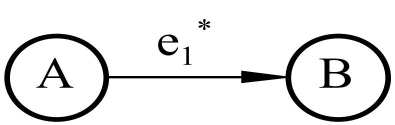


(c)

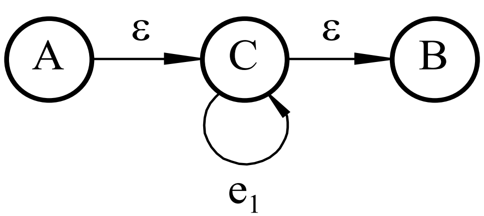


(d)

（3） 替换成

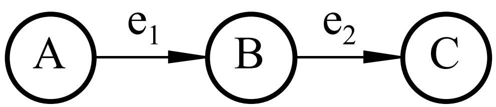


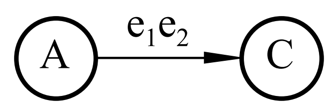
(e)

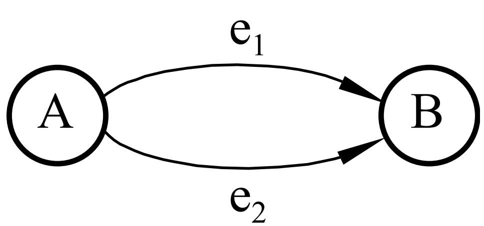


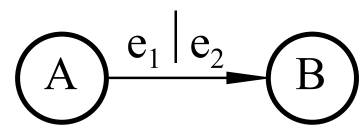
(f)

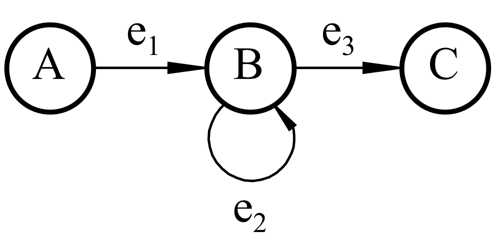
NFA到正则表达式的转换

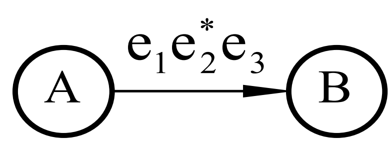
（1）

替换成 

（2）

替换成 

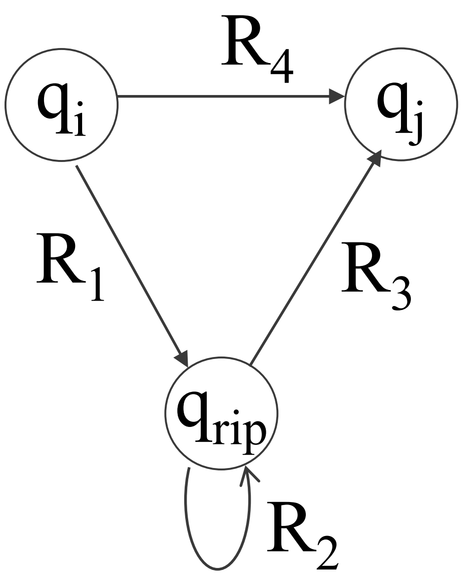
（3）

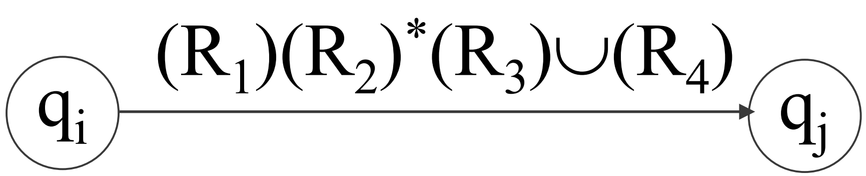
替换成 

删除一个中间状态

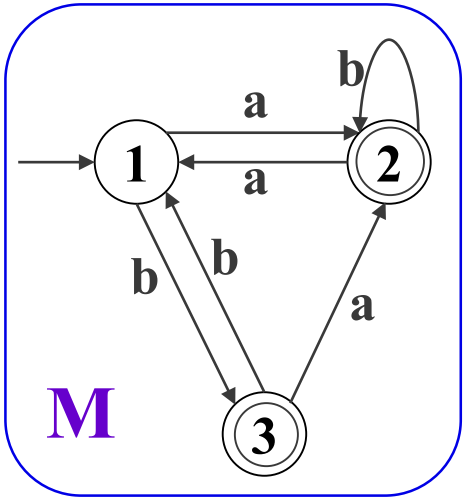
设q_{rip}为待删中间状态,

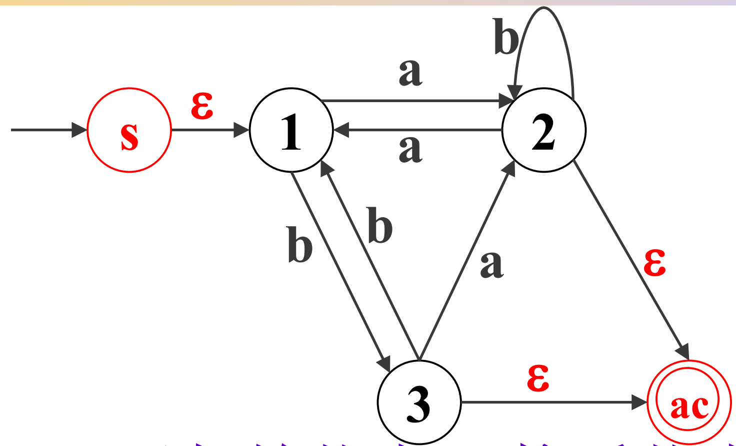
对任意两个状态q_i, q_j都需要修改箭头标号



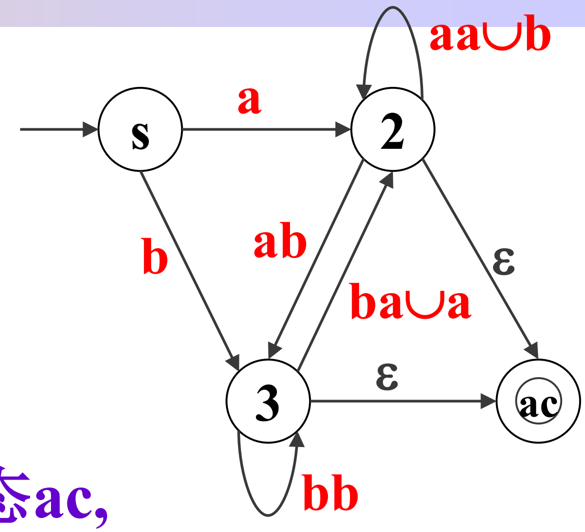


举例: A正则⇒A有正则表达式

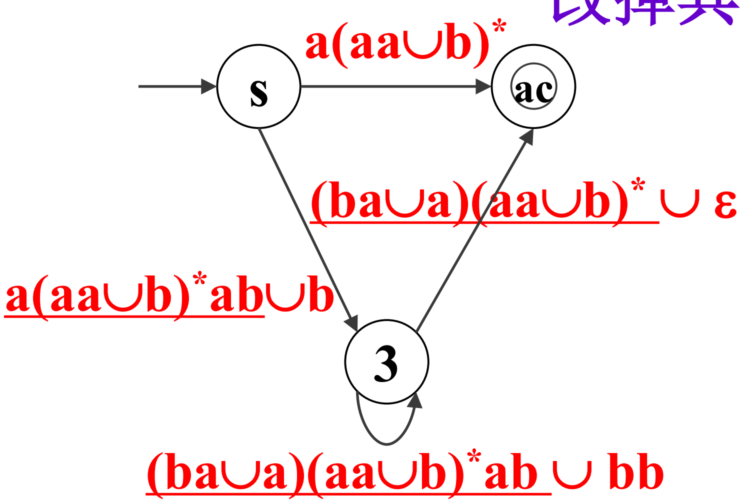




1. 添起始状态s，接受状态ac，改掉其它接受状态



2. 删状态1



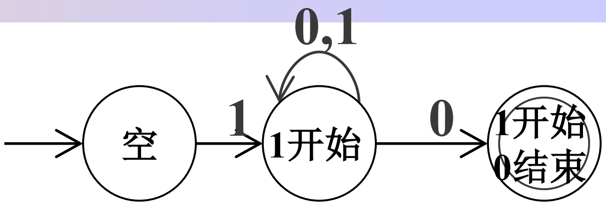
3. 删除状态2

$((a(aa\cup b)^{*}ab\cup b)((ba\cup a)(aa\cup b)^{*}ab \cup bb)^{*} ((ba\cup a)(aa\cup b)^{*}\cup\varepsilon)) \cup (a(aa\cup b)^{*})$

4. 删除状态3

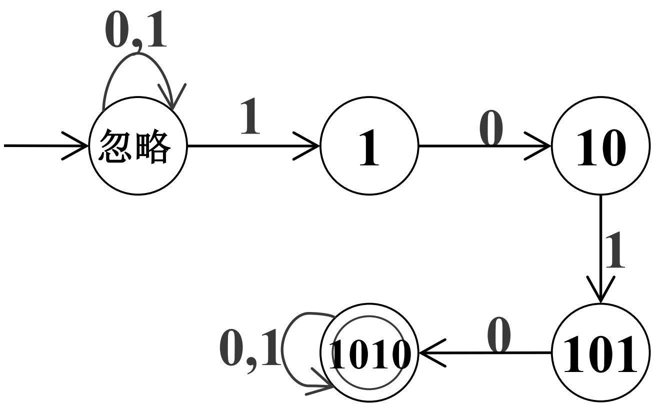
正则表达式与DFA等价举例

- 例1：{ w∈{0,1}* | w从1开始, 以0结束 }
- 例2：{ w∈{0,1}* | w含有子串1010 }
- 例3：{ w∈{0,1}* | w的倒数第2个符号是1 }
- 例4：{ 0^k | k是2或3的倍数 }

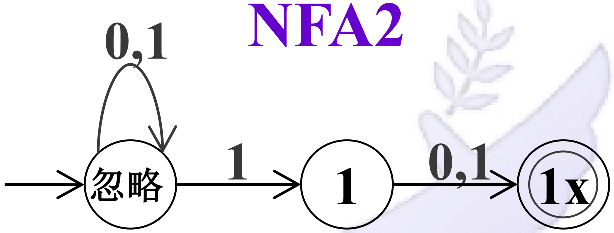


NFA1

- 例1：$1(0\cup 1)^*0$.
- 例2：$(0\cup 1)^*1010(0\cup 1)^*$.
- 例3：$(0\cup 1)^*1(0\cup 1)$.
- 例4：$(00)^*\cup(000)^*$



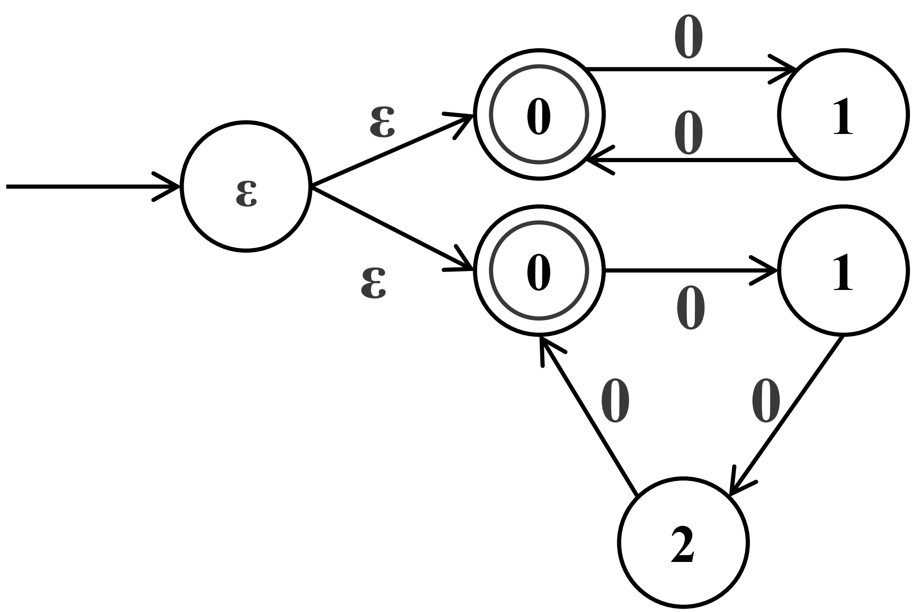
NFA2



NFA3

正则表达式与DFA等价举例

- 例4：{ 0^k | k是2或3的倍数 }
- $(00)^*\cup(000)^*$



第1章 有限自动机

- 0. 引论--语言--什么是问题
- 1. 确定有限自动机
- 2. 非确定有限自动机
- 3. 正则表达式
- 4. 正则语言的泵引理
  - 非正则语言
  - 泵引理

非正则语言

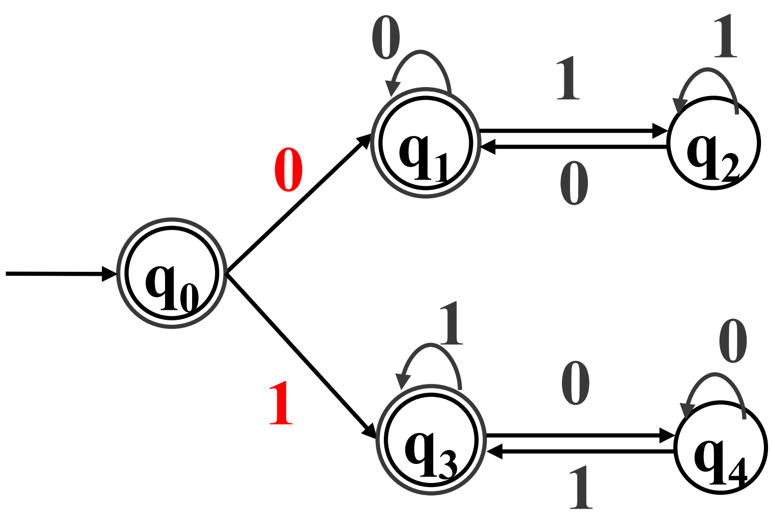
- 哪些是正则语言?
  - $B=\{ 0^n1^n \mid n\geq 0 \}$
  - $C = \{ ww \mid w\in\{0,1\}^* \}$
  - $D = \{ 1^k \mid k=2^n, n\geq 0 \}$
  - E={ w | w中0和1的个数相等 }
  - F={ w | w中01和10的个数相等 }

F

- F={ w | w中01和10的个数相等 }是正则的：
  - ε, 00, 11 ∈ F
  - 101、010、111001001、000110110 ∈ F
  - 1010、0101 ∉ F
  - 若干个1组成的子串(D_1)和若干个0组成的子串(D_2)交替出现若w以(D_1)开始则以(D_1)结束，若w以(D_2)开始则以(D_2)结束
  - $F = (0^+(1^+0^+)^*) \cup (1^+(0^+1^+)^*)$

F

- F={ w | w中01和10的个数相等 }是正则的：
- $F = (0^+(1^+0^+)^*) \cup (1^+(0^+1^+)^*)$
- 设计NFA状态：
  - 空，0，01；
  - 空，1，10



泵引理

◆ **定理(泵引理)**: 设A是正则语言,则存在$p>0$(泵长度)使得对任意$w \in A$, $|w| \geq p$, 存在分割$w=xyz$满足:

1) 对任意 $i \geq 0$, $xy^iz \in A$;
2) $|y| > 0$;
3) $|xy| \leq p$.

11011　1010

11011　: q_0-1- q_1- 101 - q_1 - 1 - q_3 -接受

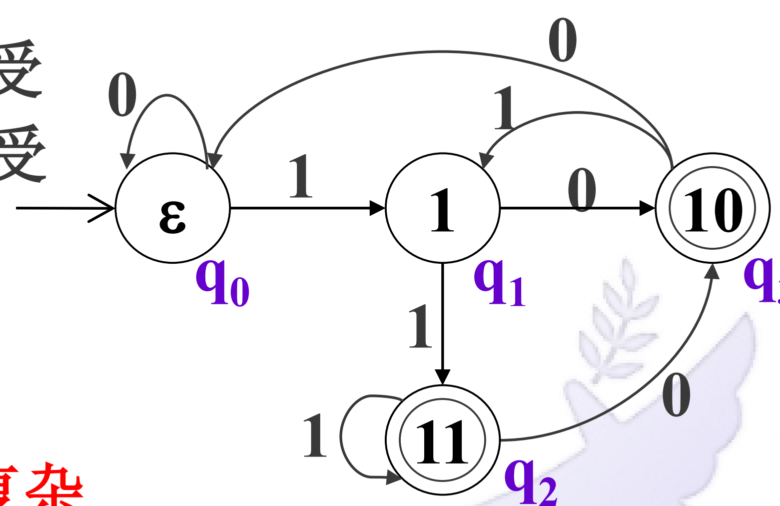
$1(101)^i1$: q_0-1- q_1- $(101)^i$ - q_1 - 1 - q_3-接受

11011=xyz

x=1, y=101, z=1. xy^iz 被接受的原因?

概略的讲，因为图中有回路，

当复杂路径长度超过顶点数p，则该复杂路径中必定有回路。



{ $w \in \{0,1\}^*$ | w倒数第2个符号是1 }

泵引理的等价描述

- 定理(泵引理): 设A是正则语言,则存在p>0(泵长度)使得对任意$w \in A$, $|w| \geq p$, 存在分割$w=xyz$满足:
  1) 对任意 $i \geq 0$, $xy^iz \in A$;
  2) $|y| > 0$;
  3) $|xy| \leq p$.

若A是正则语言,

则$\exists p>0$

$\forall w \in A(|w| \geq p)$

$\exists x,y,z(|y|>0, |xy| \leq p, w=xyz)$

$\forall i \geq 0,$

$xy^iz \in A.$

若$\forall p>0$

$\exists w \in A(|w| \geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy| \leq p, w=xyz)$

$\exists i \geq 0,$

$xy^iz \notin A.$

则A非正则语言

泵引理的应用实例1

- $B = \{ 0^n1^n \mid n \geq 0 \}$ 非正则

∵ $\forall p>0$,

令 $w=0^p1^p$,

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

因为 $|xy|\leq p$，所以y只能取k个0($1\leq k\leq p$)

即：$y=0^k$

令 $i=0$,

$xz = 0^{p-|y|}1^p \notin B$

∴ B非正则语言

若 $\forall p>0$

$\exists w\in A(|w|\geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

$\exists i\geq 0$,

$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

泵引理的应用实例2

- $C = \{ ww \mid w \in \{0,1\}^* \}$ 非正则

∵ $\forall p>0$,

令 $w=0^p10^p1$,

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\le p, w=xyz)$

则 $y=0^k$, $(1\le k\le p)$.

令 $i=0$,

$$xz = 0^{p-|y|}10^p1 \notin C$$

∴ C非正则语言

若 $\forall p>0$

$\exists w\in A(|w|\ge p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\le p, w=xyz)$

$\exists i\ge 0$,

$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

泵引理的证明

◆ 定理(泵引理): 设A是正则语言,则存在$p>0$(泵长度)使得对任意$w\in A$, $|w|\geq p$, 存在分割$w=xyz$满足

1) 对任意 $i\geq 0$, $xy^iz\in A$;

2) $|y|>0$;

3) $|xy|\leq p$.

证明: 令$M=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ 且 $L(M)=A$, 令$p=|Q|$,

设 $w=w_1w_2\ldots w_n\in A$, $w_i\in\Sigma$, 且$n\geq p$, 则有

$$s=r_0 \xrightarrow{w_1} r_1 \cdots\dashrightarrow r_{i-1} \xrightarrow{w_i} \boxed{r_i} \cdots\dashrightarrow \boxed{r_j} \xrightarrow{w_{j+1}} r_{j+1} \cdots\dashrightarrow r_{n-1} \xrightarrow{w_n} r_n\in F$$

由鸽巢原理, 存在$i<j\leq p$使得$r_i=r_j$, 令$x=w_1\ldots w_i$, $y=w_{i+1}\ldots w_j$, $z=w_{j+1}\ldots w_n$. 那么对$\forall k\geq 0$, $xy^kz\in A$.

泵引理的应用实例3

$D = \{ 1^k \mid k=2^n, n\geq 0 \}$ 非正则

∵ $\forall p>0$,

令 $w=1^{2^{p+1}}$, 显然 $p<2^{p+1}$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

则 $y=1^t(1\leq t\leq p)$

令 $i=2$,

$|xy^2z|=2^{p+1}+|y|$,

$2^{p+1}+|y| \leq 2^{p+1} + p < 2^{p+2}$

即 $xy^2z \notin D$

∴ D非正则语言

若 $\forall p>0$

$\exists w\in A(|w|\geq p)$

$\forall x,y,z(|y|>0, |xy|\leq p, w=xyz)$

$\exists i\geq 0$,

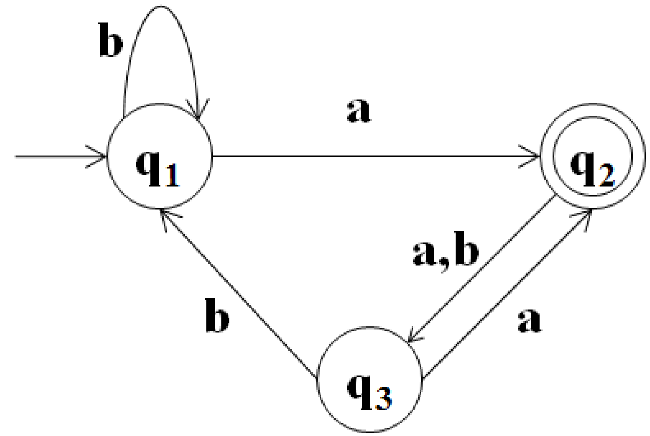
$xy^iz \notin A$.

则A非正则语言

本章作业

1.1 下图给出了两台DFA M_1和M_2的状态图。回答下述关于这两台机器的问题。

- **a. 它们的起始状态是什么?**
- **b. 它们的接受状态集是什么?**
- **c. 对输入aabb，它们经过的状态序列是什么?**
- **d. 它们接受字符串aabb吗?**
- **e.它们接受字符串ε吗?**



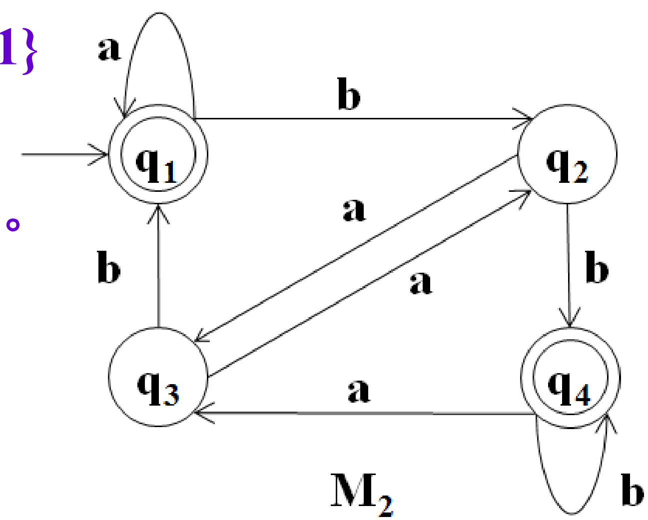
M_1

1.6 画出识别下述语言的DFA状态图。字母表为{0,1}

- **d. { w | w的长度不小于3, 并且第3个符号为0};**

1.7. 给出下述语言的NFA，并且符合规定的状态数。字母表为{0,1}

- **e. 语言$0^*1^*0^*0$, 3个状态。**



M_2

本章作业

1.16(b) 将如右图的非确定有限自动机转换成等价的确定有限自动机.

1.21(a) 将如右图的有限自动机转换成等价的正则表达式.

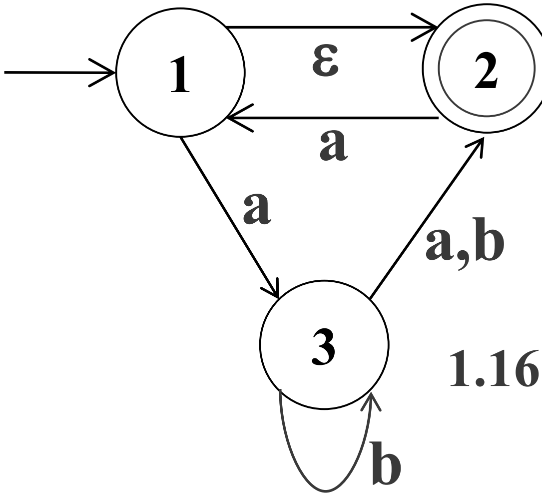
1.22 在某些程序设计语言中, 注释出现在两个分隔符之间, 如/#和#/. 设C是所有有效注释串形成的语言. C中的成员必须以/#开始, #/结束, 并且在开始和结束之间没有#/. 为简便起见, 所有注释都由符号a和b写成; 因此C的字母表Σ={a, b, /, #}.

a. 给出识别C的DFA.

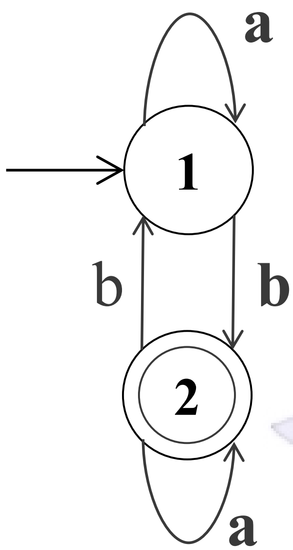
b. 给出产生C的正则表达式.

1.29 使用泵引理证明下述语言不是正则的。

b. $A = \{ www \mid w \in \{a,b\}^* \}$



1.16(b)题图



1.21(a)题图

附录

字符串匹配问题

- 输入: 两个字符串T(ext),P(attern), (|T|=n, |P|=m)
- 输出: 所有P在T中出现的起点位置
- 例: T=abaababababbababababbababaa, P=abababbababaa
- 输出13
- 直接法: 以每个位置为起点对比一遍P. 时间?
  O((n-m+1)m). 能否利用已经看到的信息?
- 动态规划: 子结构[1:i], 决策量?
  决策量设为T[1:i]的能成为P前缀的最大后缀(长度)
  这就是字符串匹配的自动机算法

字符串匹配的自动机算法

- 动态规划: 子结构[1:i], 决策量?

  决策量设为T[1:i]的能成为P前缀的最大后缀(长度)

  这就是字符串匹配的自动机算法

- 令 $P_j = p_1p_2\ldots p_j$, $1 \le j \le m$, $P_0 = \varepsilon$ //代表状态0~m
- 转移函数: $\delta(j, a) = \max\{ k \mid P_k \text{ is a suffix of } P_ja \}$

  是递推关系

definition of prefix function

- Σ, Σ^*, prefix, suffix
- $\mathrm{P} = p_1p_2\ldots p_m \in \Sigma^*$ a pattern, $\mathrm{P}_j = p_1p_2\ldots p_j, 1 \le j \le m$, $\mathrm{P}_0 = \varepsilon$
- The transition function for P, $0 \le j \le m$, $\mathrm{a} \in \Sigma$,

$$\delta(j,\mathrm{a}) = \max\{\, k \mid \mathrm{P}_k \text{ is a suffix of } \mathrm{P}_j\mathrm{a} \,\} \quad // \ge 0$$

- The prefix function for P, $1 \le j \le m$,

$$\pi(j) = \max\{\, k \mid k<j,\ \mathrm{P}_k \text{ is a suffix of } \mathrm{P}_j \,\} \ // \ge 0$$

example of prefix function

- $\Sigma = \{a,b,c\}$, P =ababaca
- $\pi(j) = \max\{ k \mid k<j, P_k \text{ is a suffix of } P_j \}$,
- $\pi(1) = ?$ $P_1 = a$,
  real suffixes of P_1: $\varepsilon = P_0$,
- $\pi(5) = ?$ $P_5 = ababa$,
  real suffixes of P_5: $\varepsilon = P_0$, $a = P_1$, ba, $aba = P_3$, baba

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	a	b	a	c	a
π[i]	0	0	1	2	3	0	1

i	…	4	5	6	7	8	9	10	…		
T[i]	…	a	b	a	b	a	a	a	…		
P_5		a	b	a	b	a	c	a			$\pi(5)=3$
P_3				a	b	a	b	a	c		$\pi(3)=1$
P_1						a	b	a	b	…	$\pi(1)=0$
P_0						ε	a	b	a	…	

computation of prefix function

Let P be a pattern with length m

$\pi(q) = \max\{ k \mid k<q, P_k \text{ is a suffix of } P_q \}$,

- ComputePF(P, Σ, m)

1. π[1]=0, k = 0
2. For q = 2 : m   // O(m)
3.   while k>0 and P[k+1] ≠ P[q], k=π[k] //totally O(m)
4.   If P[k+1] == P[q], k=k+1   //totally O(m)
5.   π[q]=k

time complexity O(m) ? //aggregate analysis

KMP matcher

Let π be the transition function for a pattern P,

T[1:n] = $t_1 t_2 \ldots t_n$ be a text

- KMPMatch(T, P, n, m) //m is the length of P

1. q = 0
2. For i = 1 : n // O(n)
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q] //totally O(n)
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1 //totally O(n)
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

// print all place that P occur

time complexity O(n) ? //aggregate analysis

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q	0														
pattern	a	b	c	d	a	b	d								
q	1														

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q	0	1													
pattern	a	b	c	d	a	b	d								
q		2													

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q	0	1	2												
pattern	a	b	c	d	a	b	d								
q			3												

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q	0	1	2	3											
pattern	a	b	c	d	a	b	d								
q				0											
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q															

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q															
pattern															
q				0											
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q				1											

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q				0	1										
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q					2										

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q				0	1	2									
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q						3									

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q				0	1	2	3								
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q							4								

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q				0	1	2	3	4							
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q								5							

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q				0	1	2	3	4	5	6					
pattern				a	b	c	d	a	b	d					
q										2					
								a	b	c	d	a	b	d	

example of KMP

$\Sigma = \{a,b,c,d,e\}$, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q															
pattern															
q										2					
pattern								a	b	c	d	a	b	d	
q										3					

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] $\neq$ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q										2	3				
pattern								a	b	c	d	a	b	d	
q											4				
pattern															
q															

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q										2	3	4			
pattern								a	b	c	d	a	b	d	
q												5			
pattern															
q															

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q										2	3	4	5		
pattern								a	b	c	d	a	b	d	
q													6		
pattern															
q															

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q										2	3	4	5	6	
pattern								a	b	c	d	a	b	d	
q														7	
q														0	
pattern															a

example of KMP

Σ = {a,b,c,d,e}, P =abcdabd, T=abcabcdabcdabde

i	1	2	3	4	5	6	7
P[i]	a	b	c	d	a	b	d
π[i]	0	0	0	0	1	2	0

1. q = 0
2. For i = 1 : n
3. while q>0 and P[q+1] ≠ T[i], q=π[q]
4. If P[q+1] == T[i], q=q+1
5. If q == m, Print(i-m); q = π[q]

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T[i]	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	d	e
q															0
pattern															a
q															0