非周期信号的傅里叶变换对

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

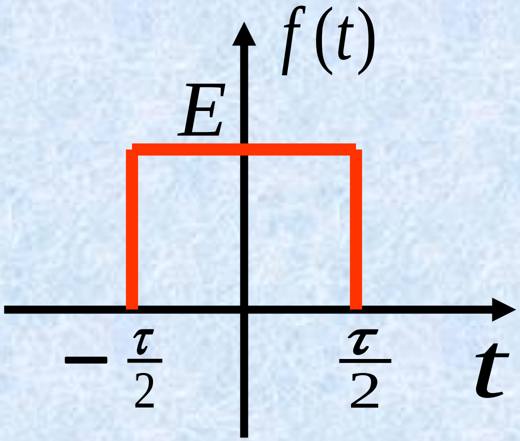
傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅里叶逆变换

矩形脉冲信号的频谱

$$f(t)=\begin{cases} E & |t|<\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

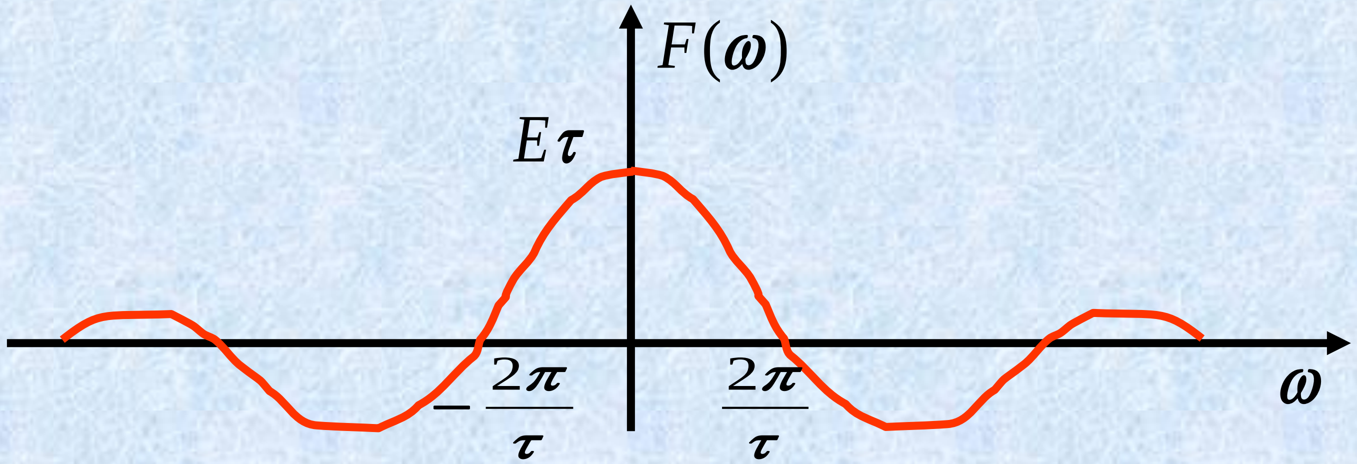
$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{-E}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\right]=\frac{E}{j\omega}\left[e^{j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right]$$

$$=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}=E\tau Sinc(\frac{\omega\tau}{2})$$

即：

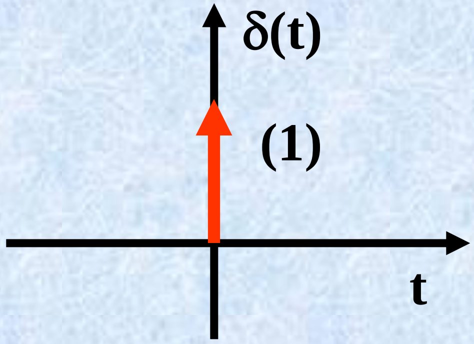
$$F(\omega)=E\tau Sinc(\frac{\omega\tau}{2})$$

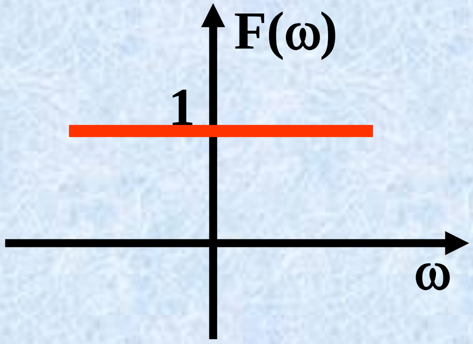


单位冲激函数δ(t)的频谱

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

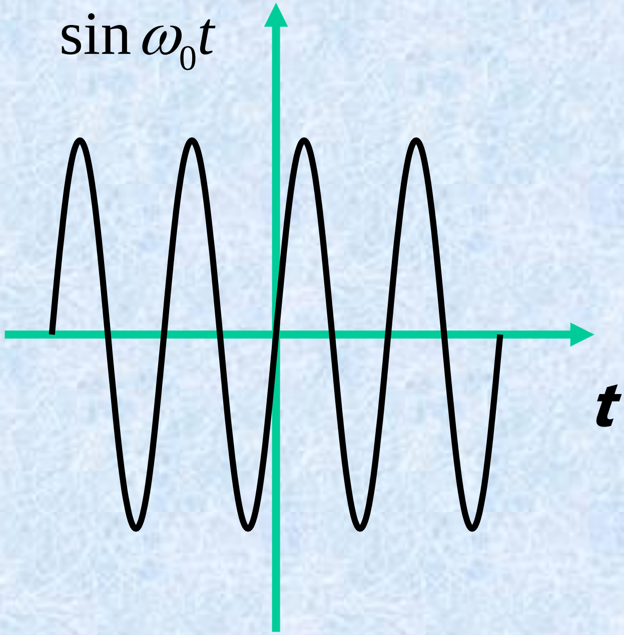




单位冲激函数的频谱在整个频率范围内均匀分布。

这种频谱常称作“均匀频谱”或“白色频谱”

正弦函数$f(t)=\sin\omega_0 t$的频谱



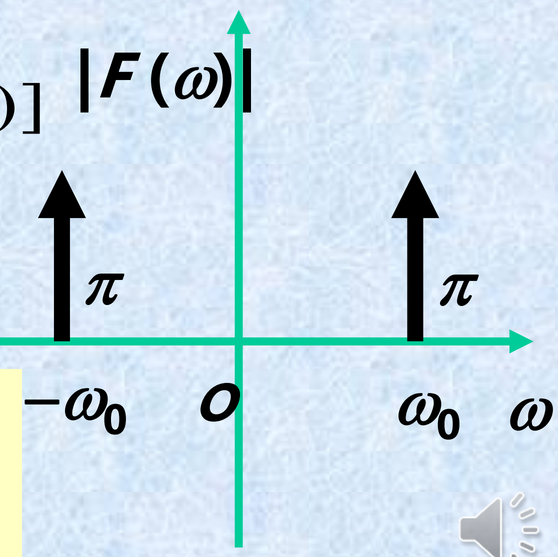
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\sin\omega_0 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{e}^{-j(\omega-\omega_0)t}-\mathrm{e}^{-j(\omega+\omega_0)t})\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\mathrm{j}}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$



余弦函数$f(t)=\cos\omega_0 t$的频谱

$$\cos\omega_0 t\leftrightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

卷积定理

1、时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则
$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)}$$

上式表明：两函数在**时域**中的**卷积**，等效于**频域**中两函数**傅立叶变换的乘积**

2、频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则
$$\boxed{f_1(t)\, f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)}$$