概率计数

刘正阳
zhengyang@bit.edu.cn

概率方法

证明事件的存在性

- 想法：构造概率空间，证明事件发生的概率非零
- 与平均值原理类似
- 关注简单例子，看上去可以等同于计数问题

概率论复习

离散概率

- 概率空间，概率分布 $\Pr : \Omega \to [0,1]$，满足 $\sum_{x \in \Omega} \Pr[x] = 1$
- 事件 $A \subseteq \Omega$, $\Pr[A] := \sum_{x \in A} \Pr[x]$

1. $\Pr[\Omega] = 1$, $\Pr[\emptyset] = 0$ and $\Pr[A] \geq 0$ for all $A \subseteq \Omega$;
2. $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] \leq \Pr[A] + \Pr[B]$;
3. $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$ if A and B are disjoint;
4. $\Pr[\overline{A}] = 1 - \Pr[A]$;
5. $\Pr[A \setminus B] = \Pr[A] - \Pr[A \cap B]$;
6. $\Pr[A \cap B] \geq \Pr[A] - \Pr[\overline{B}]$;
7. If $B_1, \ldots, B_m$ is a partition of Ω then $\Pr[A] = \sum_{i=1}^{m} \Pr[A \cap B_i]$.

离散概率II

- 条件概率 $\Pr[A|B] := \dfrac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$
- 独立事件 $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
- 随机变量 $X : \Omega \to \mathbb{R}$，特例：示性变量（indicator）
- 期望 $\mathrm{E}[X] := \sum_{i=1}^{m} s_i \cdot \Pr[X = s_i] = \sum_{x \in \Omega} X(x) \cdot \Pr[x]$

$$\mathrm{E}[a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n] = a_1 \mathrm{E}[X_1] + \cdots + a_n \mathrm{E}[X_n]$$

- 联合界（union bound）

$$\Pr[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n] \leq \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \cdots + \Pr[A_n]$$

如果 A_i 都是坏事件且 $\sum \Pr[A_i] < 1$，所有坏事件可能均不发生。

Ex 3.2 $\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] \geq \Pr[A_1] + \cdots + \Pr[A_n] - n + 1$

概率方法的一般框架

- 集合 M 和函数 $f: M \to \mathbb{R}$
  - E.g. M是满足特定性质的图的集合，$f(x)$ 表示图中最大团的大小。然后证明 $\max_{x \in M} f(x) \geq t$

概率方法的一般框架

- 集合 M 和函数 $f : M \to \mathbb{R}$
  - E.g. M是满足特定性质的图的集合，$f(x)$ 表示图中最大团的大小。然后证明 $\max_{x \in M} f(x) \geq t$
- 概率空间 $\Pr : M \to [0,1]$，此时 f 是随机变量

概率方法的一般框架

- 集合 M 和函数 $f: M \to \mathbb{R}$
  - E.g. M是满足特定性质的图的集合，$f(x)$ 表示图中最大团的大小。然后证明 $\max_{x \in M} f(x) \geq t$
- 概率空间 $\Pr : M \to [0,1]$，此时 f 是随机变量
- 证明 $\mathbb{E}[f] \geq t$ 或 $\Pr[f(x) \geq t] \neq 0$

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛
- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛
- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

Theorem 3.1 (Erdős 1963a). *If $n \geq k^2 2^{k+1}$, then there is a tournament of n players that has the property P_k.*

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛
- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

Theorem 3.1 (Erdős 1963a). *If $n \geq k^2 2^{k+1}$, then there is a tournament of n players that has the property P_k.*

- 建立概率分布?

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛
- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

Theorem 3.1 (Erdős 1963a). *If $n \geq k^2 2^{k+1}$, then there is a tournament of n players that has the property P_k.*

- 建立概率分布？等概率朝向
- 令 A_S 记对集合 S 不满足 P_k，所以 $\Pr[A_S] = ?$

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛
- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

Theorem 3.1 (Erdős 1963a). *If $n \geq k^2 2^{k+1}$, then there is a tournament of n players that has the property P_k.*

- 建立概率分布？等概率朝向
- 令 A_S 记对集合 S 不满足 P_k，所以 $\Pr[A_S] = (1 - 2^{-k})^{n-k}$

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛
- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

Theorem 3.1 (Erdős 1963a). *If $n \geq k^2 2^{k+1}$, then there is a tournament of n players that has the property P_k.*

- 建立概率分布？等概率朝向
- 令 A_S 记对集合 S 不满足 P_k，所以 $\Pr[A_S] = (1 - 2^{-k})^{n-k}$

$$\Pr\left[\bigcup A_S\right] \leq \binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-(n-k)/2^k} \leq n^k \mathrm{e}^{-n/2^k}$$

竞赛图（Tournament）

有向图，任意两点间有边

- 来源：循环赛

- 性质 P_k：对任意 k-元素子集 $S \subseteq V$，存在 $y \notin S$，使得对于任意 $x \in S$，有 $(y, x) \in E$。

Theorem 3.1 (Erdős 1963a). *If $n \geq k^2 2^{k+1}$, then there is a tournament of n players that has the property P_k.*

- 建立概率分布？等概率朝向

- 令 A_S 记对集合 S 不满足 P_k，所以 $\Pr[A_S] = (1 - 2^{-k})^{n-k}$

$$\Pr\left[\bigcup A_S\right] \leq \binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-(n-k)/2^k} \leq n^k \mathrm{e}^{-n/2^k}$$

联合界　　　　组合数上界

普遍集（Universal sets）

A set of 0-1 strings of length n is (n,k)-*universal* if, for any subset of k coordinates $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, the projection

$$A\restriction_S := \{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \ : \ (a_1, \ldots, a_n) \in A\}$$

of A onto the coordinates in S contains all possible 2^k configurations.

普遍集（Universal sets）

A set of 0-1 strings of length n is (n,k)-*universal* if, for any subset of k coordinates $S = \{i_1, \ldots, i_k\}$, the projection

$$A\restriction_S := \{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) : (a_1, \ldots, a_n) \in A\}$$

of A onto the coordinates in S contains all possible 2^k configurations.

- {1010} 是 (4,2)-universal，{101, 010} 是 (3,2)-universal

普遍集（Universal sets）

A set of 0-1 strings of length n is (n,k)-*universal* if, for any subset of k coordinates $S=\{i_1,\ldots,i_k\}$, the projection

$$A\restriction_S := \{(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) \;:\; (a_1,\ldots,a_n)\in A\}$$

of A onto the coordinates in S contains all possible 2^k configurations.

- {1010} 是 (4,2)-universal，{101, 010} 是 (3,2)-universal

Theorem 3.2 (Kleitman–Spencer 1973). *If* $\binom{n}{k}2^k(1-2^{-k})^r<1$, *then there is an* (n,k)*-universal set of size* r.

普遍集（Universal sets）

A set of 0-1 strings of length n is (n,k)-*universal* if, for any subset of k coordinates $S=\{i_1,\ldots,i_k\}$, the projection

$$A\restriction_S := \{(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) \, : \, (a_1,\ldots,a_n)\in A\}$$

of A onto the coordinates in S contains all possible 2^k configurations.

- {1010} 是 (4,2)-universal，{101, 010} 是 (3,2)-universal

Theorem 3.2 (Kleitman–Spencer 1973). *If* $\binom{n}{k}2^k(1-2^{-k})^r<1$, *then there is an* (n,k)*-universal set of size* r.

固定 k-元素的集合 S 和某个 $v\in\{0,1\}^k$，我们有

普遍集（Universal sets）

A set of 0-1 strings of length n is (n,k)-*universal* if, for any subset of k coordinates $S=\{i_1,\dots,i_k\}$, the projection

$$A\restriction_S := \{(a_{i_1},\dots,a_{i_k}) : (a_1,\dots,a_n)\in A\}$$

of A onto the coordinates in S contains all possible 2^k configurations.

- {1010} 是 (4,2)-universal，{101, 010} 是 (3,2)-universal

Theorem 3.2 (Kleitman–Spencer 1973). *If* $\binom{n}{k}2^k(1-2^{-k})^r<1$, *then there is an* (n,k)*-universal set of size* r.

固定 k-元素的集合 S 和某个 $v\in\{0,1\}^k$，我们有

$$\Pr[v\notin \boldsymbol{A}\restriction_S]=\prod_{a\in\boldsymbol{A}}\Pr[v\neq a\restriction_S]=\prod_{a\in\boldsymbol{A}}\left(1-2^{-|S|}\right)=\left(1-2^{-k}\right)^r$$

二分团覆盖（Biclique Covering）

- 二分团，也称二分完全图，即任意两个不同边的点均有边相连。
- 图G的一个二分团覆盖：一组二分团 $H_1, \ldots, H_t$，使得G中所有边均属于某一个二分团 H_i
  - 一个覆盖的权重：$\sum_{i=1}^{t} |V(H_i)|$
  - $\mathrm{bc}(G)$:= G的二分图覆盖中的权重最小值

二分团覆盖（Biclique Covering）

- 二分团，也称二分完全图，即任意两个不同边的点均有边相连。
- 图G的一个二分团覆盖：一组二分团 $H_1, \ldots, H_t$，使得G中所有边均属于某一个二分团 H_i
    - 一个覆盖的权重： $\sum_{i=1}^{t} |V(H_i)|$
    - $\mathrm{bc}(G)$:= G的二分图覆盖中的权重最小值

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(\boxed{K_n}) = n \log_2 n$.

n个点的团（完全图）

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n \log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n \log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值
- 令一个覆盖为 $A_1 \times B_1, \ldots, A_t \times B_t$，因此 $\sum_{i=1}^{t}(|A_i| + |B_i|) = \sum_{v=1}^{n} m_v$
    - 其中 m_v 表示包含点 v 的二分团个数

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n\log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值
- 令一个覆盖为 $A_1 \times B_1, \ldots, A_t \times B_t$，因此 $\sum_{i=1}^{t}(|A_i| + |B_i|) = \sum_{v=1}^{n} m_v$
  - 其中 m_v 表示包含点 v 的二分团个数
- 根据定义，每条边均属于某个二分团 $A_i \times B_i$，如果删掉 A_i 或 B_i，该边就不存在了。

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n \log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值
- 令一个覆盖为 $A_1 \times B_1, \ldots, A_t \times B_t$，因此 $\sum_{i=1}^{t}(|A_i| + |B_i|) = \sum_{v=1}^{n} m_v$
  - 其中 m_v 表示包含点 v 的二分团个数
- 根据定义，每条边均属于某个二分团 $A_i \times B_i$，如果删掉 A_i 或 B_i，该边就不存在了。
  - 对 $i \in [t]$，等概率删掉 A_i 或 B_i!

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n\log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值
- 令一个覆盖为 $A_1 \times B_1, \ldots, A_t \times B_t$，因此 $\sum_{i=1}^{t}(|A_i| + |B_i|) = \sum_{v=1}^{n} m_v$
    - 其中 m_v 表示包含点 v 的二分团个数
- 根据定义，每条边均属于某个二分团 $A_i \times B_i$，如果删掉 A_i 或 B_i，该边就不存在了。
    - 对 $i \in [t]$，等概率删掉 A_i 或 B_i!
- 考虑 $X = \sum X_i$，$\mathbb{E}[X] \leq 1$，X_i 为 i 最终存活的示性变量

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n\log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值
- 令一个覆盖为 $A_1 \times B_1, \ldots, A_t \times B_t$，因此 $\sum_{i=1}^{t}(|A_i| + |B_i|) = \sum_{v=1}^{n} m_v$
  - 其中 m_v 表示包含点 v 的二分团个数
- 根据定义，每条边均属于某个二分团 $A_i \times B_i$，如果删掉 A_i 或 B_i，该边就不存在了。
  - 对 $i \in [t]$，等概率删掉 A_i 或 B_i!
- 考虑 $X = \sum X_i$，$\mathbb{E}[X] \le 1$，X_i 为 i 最终存活的示性变量
- 另一方面，如何利用 m_v 表示 $\mathbb{E}[X]$?

Theorem 3.3. *If n is a power of two, then* $\mathrm{bc}(K_n) = n \log_2 n$.

- 组合极值：证明分两部分，证明极值&构造极值
- 令一个覆盖为 $A_1 \times B_1, \ldots, A_t \times B_t$，因此 $\sum_{i=1}^{t}(|A_i| + |B_i|) = \sum_{v=1}^{n} m_v$
    - 其中 m_v 表示包含点 v 的二分团个数
- 根据定义，每条边均属于某个二分团 $A_i \times B_i$，如果删掉 A_i 或 B_i，该边就不存在了。
    - 对 $i \in [t]$，等概率删掉 A_i 或 B_i!
- 考虑 $X = \sum X_i$，$\mathbb{E}[X] \leq 1$，X_i 为 i 最终存活的示性变量
- 另一方面，如何利用 m_v 表示 $\mathbb{E}[X]$?

$$\sum_{v=1}^{n} 2^{-m_v} = \sum_{v=1}^{n} \Pr[v \text{ survives}] = \sum_{v=1}^{n} \mathrm{E}[X_v] = \mathrm{E}[X] \leq 1$$

族（family）的2-染色

- 族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$，对 X 的元素进行**2-染色**，使得 $\mathscr{F}$ 中的成员（即 X 的一个子集）均不同色！
- 一个族是k-均匀（uniform），如果$\mathscr{F}$中的每个成员包含k个元素。

Theorem 3.4 (Erdős 1963b). *Every k-uniform family with fewer than 2^{k-1} members is 2-colorable.*

族（family）的2-染色

- 族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$，对 X 的元素进行**2-染色**，使得 $\mathscr{F}$ 中的成员（即 X 的一个子集）均不同色！

- 一个族是k-均匀（uniform），如果$\mathscr{F}$中的每个成员包含k个元素。

  Theorem 3.4 (Erdős 1963b). *Every k-uniform family with fewer than 2^{k-1} members is 2-colorable.*

- 概率空间?

族（family）的2-染色

- 族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$，对 X 的元素进行**2-染色**，使得 $\mathscr{F}$ 中的成员（即 X 的一个子集）均不同色！

- 一个族是k-均匀（uniform），如果$\mathscr{F}$中的每个成员包含k个元素。

  Theorem 3.4 (Erdős 1963b). *Every k-uniform family with fewer than 2^{k-1} members is 2-colorable.*

- 概率空间？对每个元素随机染色！

- 坏事件？

族（family）的2-染色

- 族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$，对 X 的元素进行**2-染色**，使得 $\mathscr{F}$ 中的成员（即 X 的一个子集）均不同色！

- 一个族是k-均匀（uniform），如果$\mathscr{F}$中的每个成员包含k个元素。

  Theorem 3.4 (Erdős 1963b). *Every k-uniform family with fewer than 2^{k-1} members is 2-colorable.*

- 概率空间？对每个元素随机染色！

- 坏事件？X_A 表示集合 A 中元素同色，$X = \sum_{A \in \mathscr{F}} X_A$

- 要证明？

族（family）的2-染色

- 族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$，对 X 的元素进行**2-染色**，使得 $\mathscr{F}$ 中的成员（即 X 的一个子集）均不同色！
- 一个族是k-均匀（uniform），如果$\mathscr{F}$中的每个成员包含k个元素。

Theorem 3.4 (Erdős 1963b). *Every k-uniform family with fewer than 2^{k-1} members is 2-colorable.*

- 概率空间？对每个元素随机染色！
- 坏事件？X_A 表示集合 A 中元素同色，$X = \sum_{A \in \mathscr{F}} X_A$
- 要证明？$\mathbb{E}[X] < 1$

族（family）的2-染色

- 族 $\mathscr{F} \subseteq 2^X$，对 X 的元素进行**2-染色**，使得 $\mathscr{F}$ 中的成员（即 X 的一个子集）均不同色！
- 一个族是*k*-均匀（uniform），如果$\mathscr{F}$中的每个成员包含k个元素。

Theorem 3.4 (Erdős 1963b). *Every k-uniform family with fewer than 2^{k-1} members is 2-colorable.*

- 概率空间？对每个元素随机染色！
- 坏事件？X_A 表示集合 A 中元素同色，$X = \sum_{A \in \mathscr{F}} X_A$
- 要证明？$\mathbb{E}[X] < 1$
- $|\mathscr{F}|$ 能再大一点吗？

Theorem 3.5 (Erdős 1964a). *If k is sufficiently large, then there exists a k-uniform family $\mathcal{F}$ such that $|\mathcal{F}| \leq k^2 2^k$ and $\mathcal{F}$ is not 2-colorable.*

鸽笼原理

一个简单的事实

鸽子多，笼子少

- 反证法的应用
- 证明存在性的方法，非构造性
- 简单蕴含着不简单！
- 什么是鸽子？什么是笼子？

一些例子

- 任意图存在两个点度数相等

一些例子

- 任意图存在两个点度数相等

If G is a finite graph, the *independence number* $\alpha(G)$ is the maximum number of pairwise nonadjacent vertices of G. The *chromatic number* $\chi(G)$ of G is the minimum number of colors in a coloring of the vertices of G with the property that no two adjacent vertices have the same color.

Proposition 4.2. *In any graph G with n vertices, $n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$.*

一些例子

- 任意图存在两个点度数相等

If G is a finite graph, the *independence number* $\alpha(G)$ is the maximum number of pairwise nonadjacent vertices of G. The *chromatic number* $\chi(G)$ of G is the minimum number of colors in a coloring of the vertices of G with the property that no two adjacent vertices have the same color.

Proposition 4.2. *In any graph G with n vertices, $n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$.*

Proposition 4.3. *Let G be an n-vertex graph. If every vertex has a degree of at least $(n-1)/2$ then G is connected.*

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

$$a_i \to (x_i, y_i)$$

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

$$a_i \to (x_i, y_i)$$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度，y_i 是以 a_i 起始的最长递减序列长度。

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s+1$ terms or a decreasing subsequence of $r+1$ terms (or both).*

$$a_i \to (x_i, y_i)$$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度，y_i 是以 a_i 起始的最长递减序列长度。

所有元素的 (x_i, y_i) 均不相等

Erdős–Szekeres定理

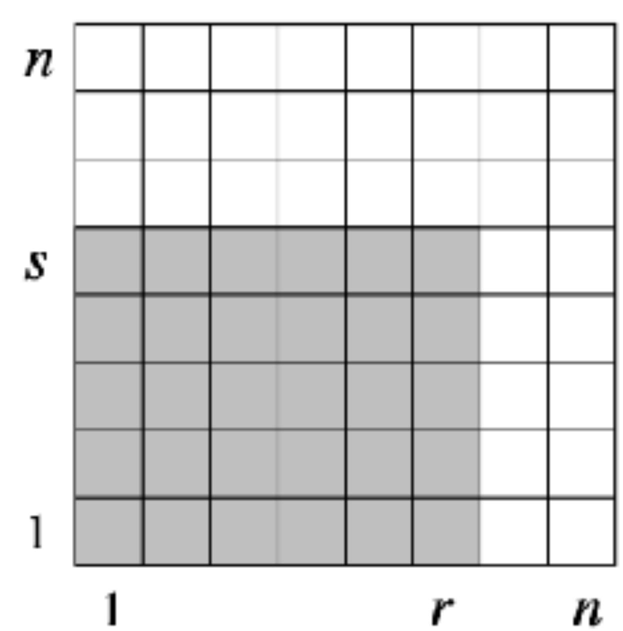
序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

$$a_i \rightarrow (x_i, y_i)$$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度，y_i 是以 a_i 起始的最长递减序列长度。

所有元素的 (x_i, y_i) 均不相等



Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，$d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，
  $d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$
- 均值不等式：令 $A \subseteq V$ 为一个最大独立集，那么$B = V \backslash A$?

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，$d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$
- 均值不等式：令 $A \subseteq V$ 为一个最大独立集，那么$B = V \backslash A$?
- 鸽笼原理+数学归纳法