数字逻辑

第二章 布尔代数

北京理工大学计算机学院

提纲

1. 布尔代数基础

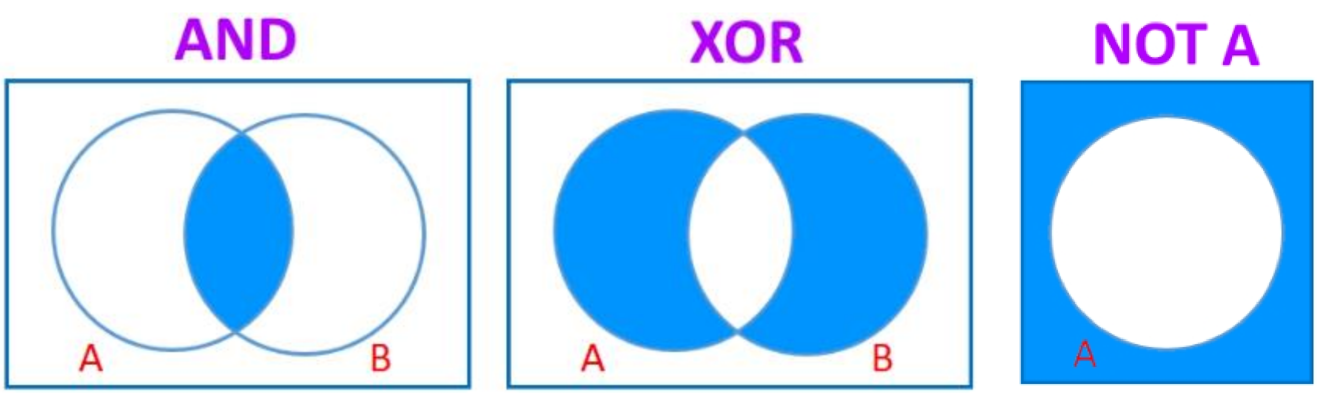
2. 布尔代数公理

3. 标准形式

4. 布尔函数的化简

1.1 二值逻辑

- **二值逻辑（Binary logic）包括二值变量及对这些变量所施加的逻辑运算**
  - 逻辑变量：取值0或1
  - 基本逻辑运算
    - 与（AND）
    - 或（OR）
    - 非（NOT）



1.1 二值逻辑

1.1.1 逻辑运算

与运算（AND）

- 运算符号：• 或者 ∧ 或者什么符号也不用

$$Z = X \cdot Y = X \wedge Y = XY$$

- 运算规则

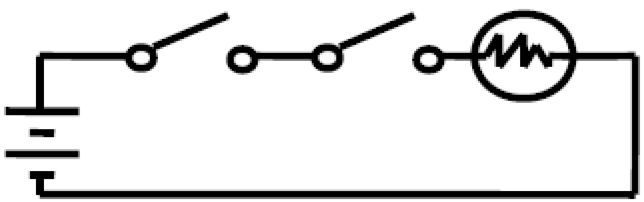
$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

串联的开关



1.1 二值逻辑

1.1.1 逻辑运算

或运算（OR）

- 运算符号：＋ 或者 ∨

$$Z = X + Y = X \vee Y$$

- 运算规则

$$0+0=0$$

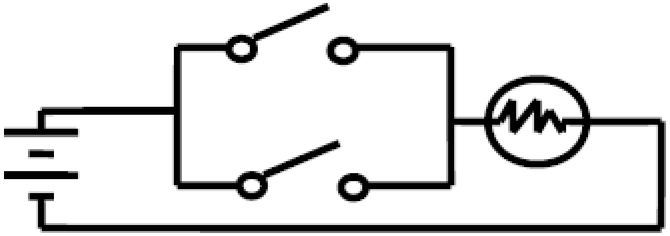
$$0+1=1$$

$$1+0=1$$

$$1+1=1$$

与普通二进制加法区别在于不产生进位！

并联的开关



1.1 二值逻辑

- **1.1.1 逻辑运算**
  - **非运算（NOT）**
    - 运算符号：—

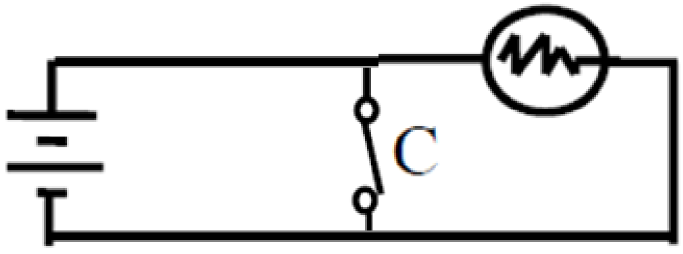
$$Z = \bar{X}$$

    - 运算规则

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

开关



1.1 二值逻辑

1.1.1 逻辑运算

- 真值表
  - 描述参与逻辑运算所有可能逻辑值的输入和输出结果

“与”真值表

X	Y	$Z=X\cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

“或”真值表

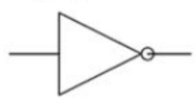
X	Y	$Z=X+Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

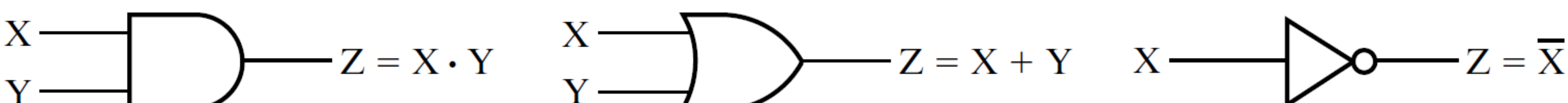
“非”真值表

X	$Z=\overline{X}$
0	1
1	0

1.1 二值逻辑

1.1.2 逻辑门

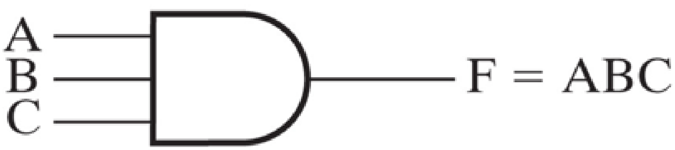
- 定义：处理一个或多个输入信号，产生一个输出信号的数字电路称为逻辑门
- 硬件上表现为直接用晶体管实现的电路
- 基本类型
  - 与门 
  - 或门 
  - 非门 



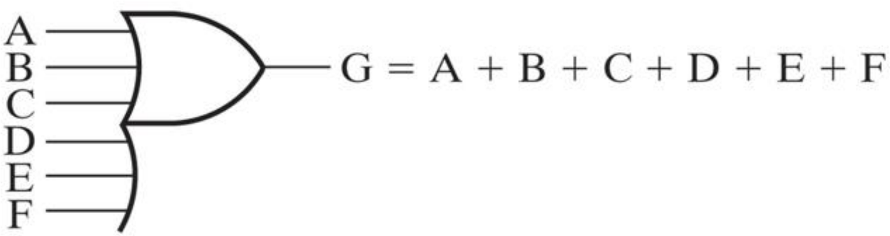
1.1 二值逻辑

1.1.2 逻辑门

- 基本的与门和或门的两个输入信号产生4种组合（00、01、10、11）
- 与门和或门也可以接收多于两种以上的信号输入



三输入与门

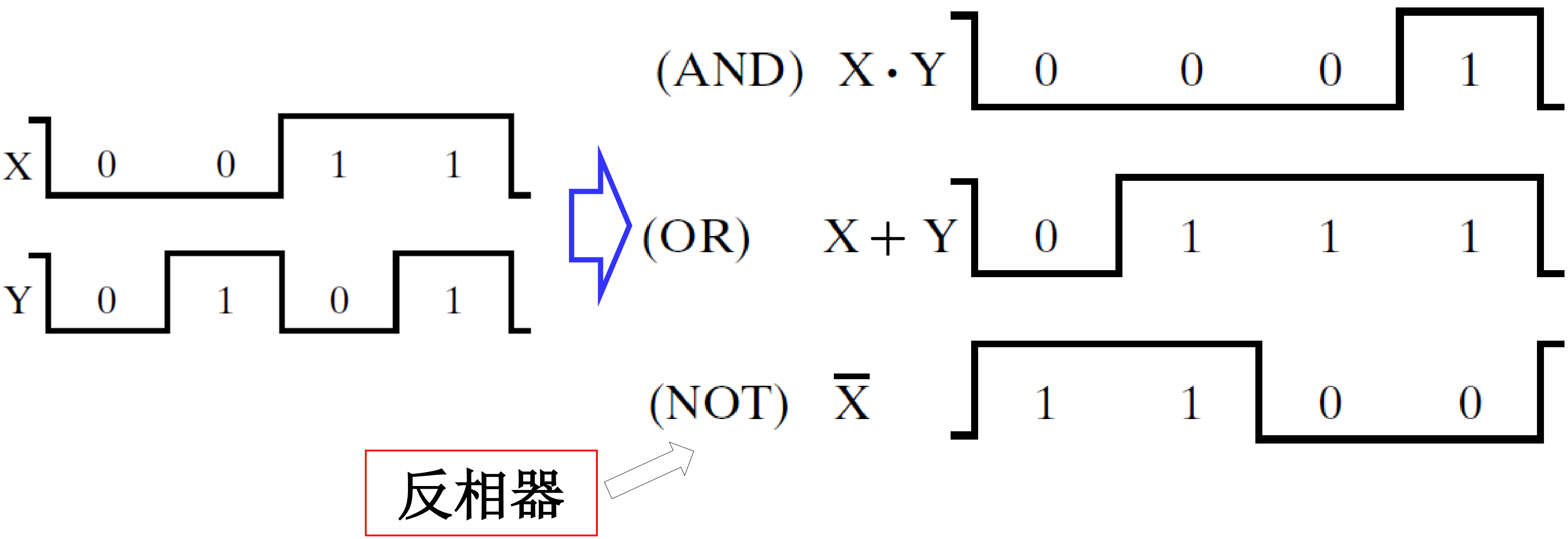


六输入或门

1.1 二值逻辑

1.1.2 逻辑门

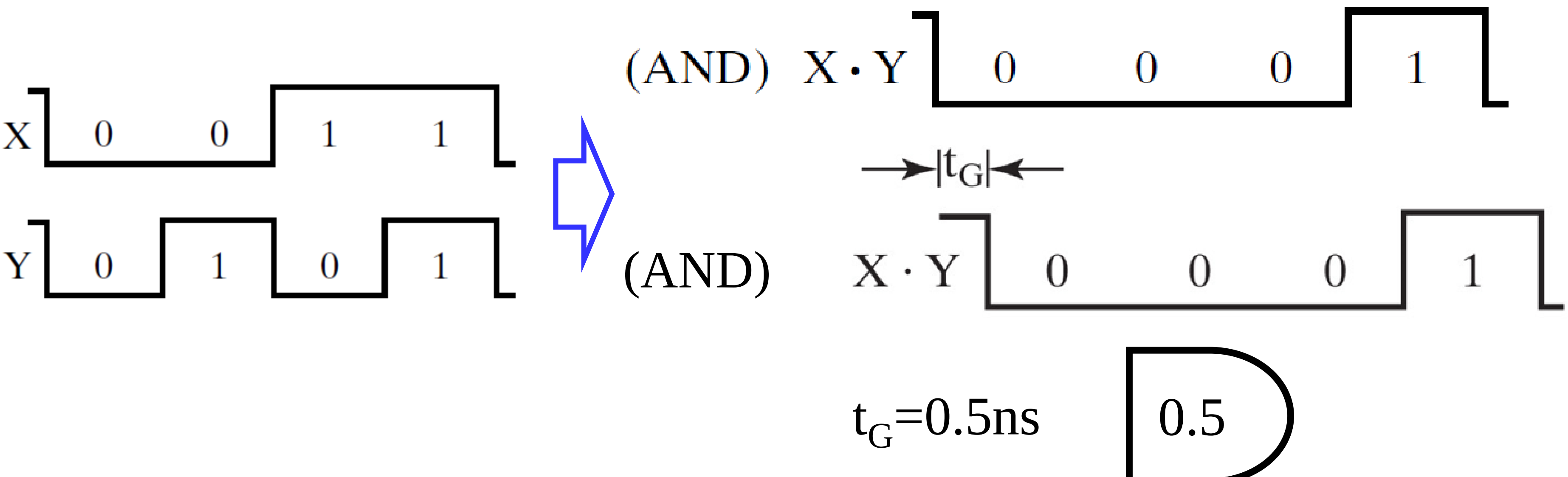
- 可以通过定时图方式表示时序中的逻辑门输入和输出关系
  - x-轴：时间
  - y-轴：高（1）低（0）电平的变化



1.1 二值逻辑

1.1.2 逻辑门

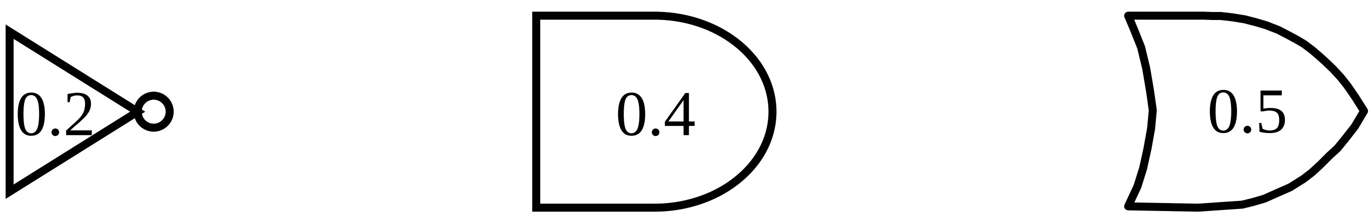
- **传播延迟：**输入信号变化引起输出信号相应变化所需要的时间
- 延时大小用t_G表示



1.1 二值逻辑

1.1.2 逻辑门

- **传播延迟：**输入信号变化引起输出信号相应变化所需要的时间
- 延时大小用t_G表示



延时0.2ns非门　延时0.4ns与门　延时0.5ns或门

1.1 二值逻辑

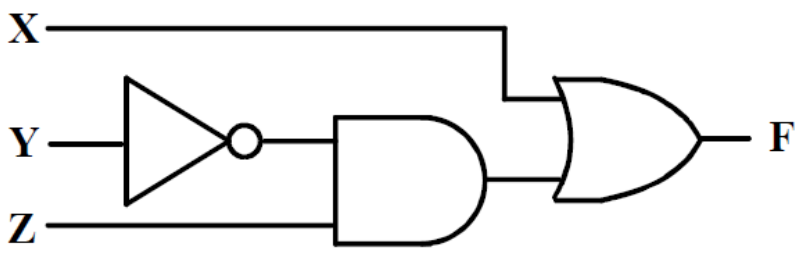
1.1.2 逻辑门

- 复杂逻辑运算及逻辑门

真值表

XYZ	$F=X+\overline{Y}\cdot Z$
000	0
001	1
010	0
011	0
100	1
101	1
110	1
111	1

门电路



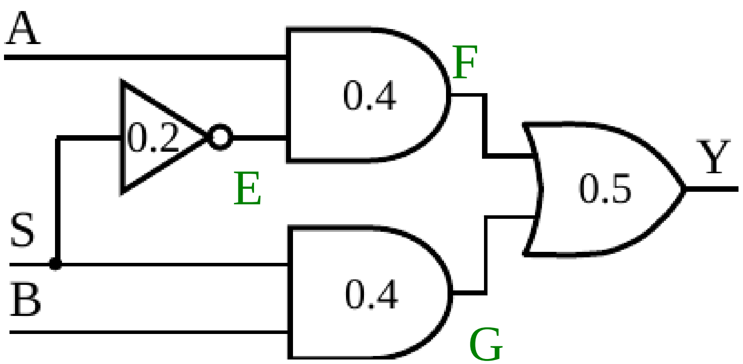
$$F=X+\overline{Y}\cdot Z$$

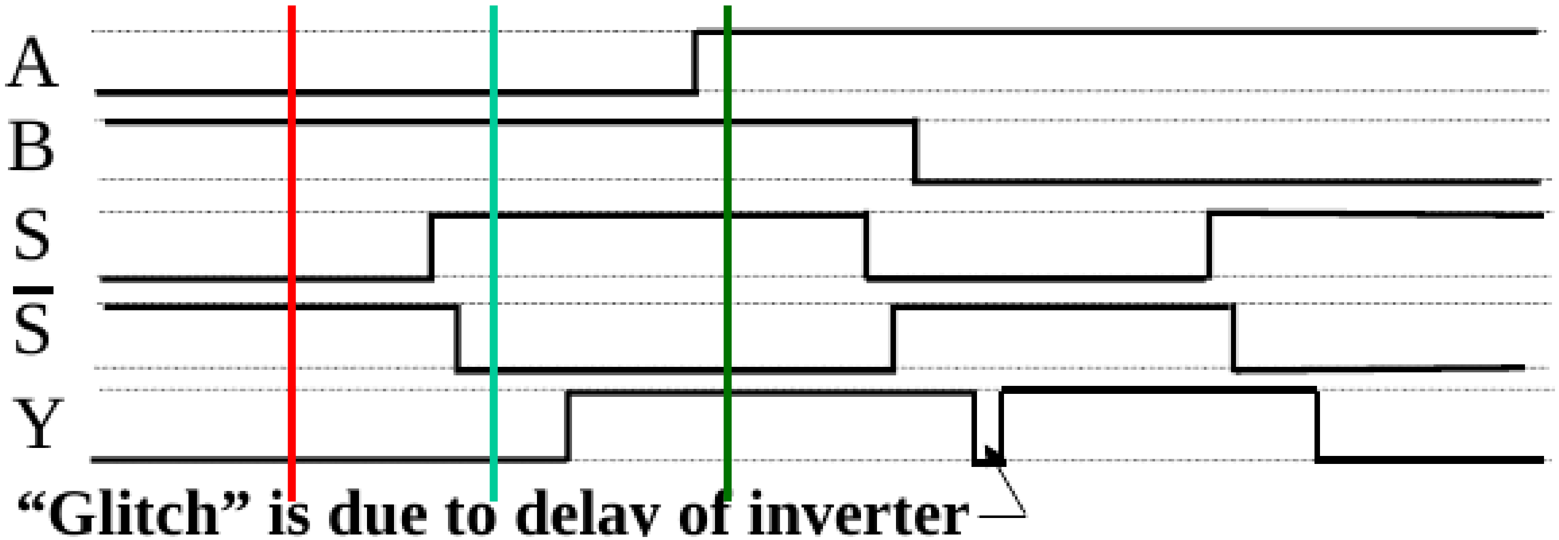
1.1 二值逻辑

■ 1.1.2 逻辑门

■ 具有传播延迟的复杂逻辑运算及逻辑门

$$Y = A \cdot \overline{S} + B \cdot S$$



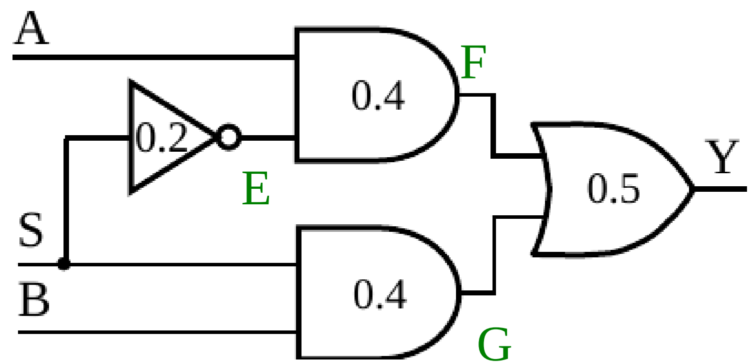


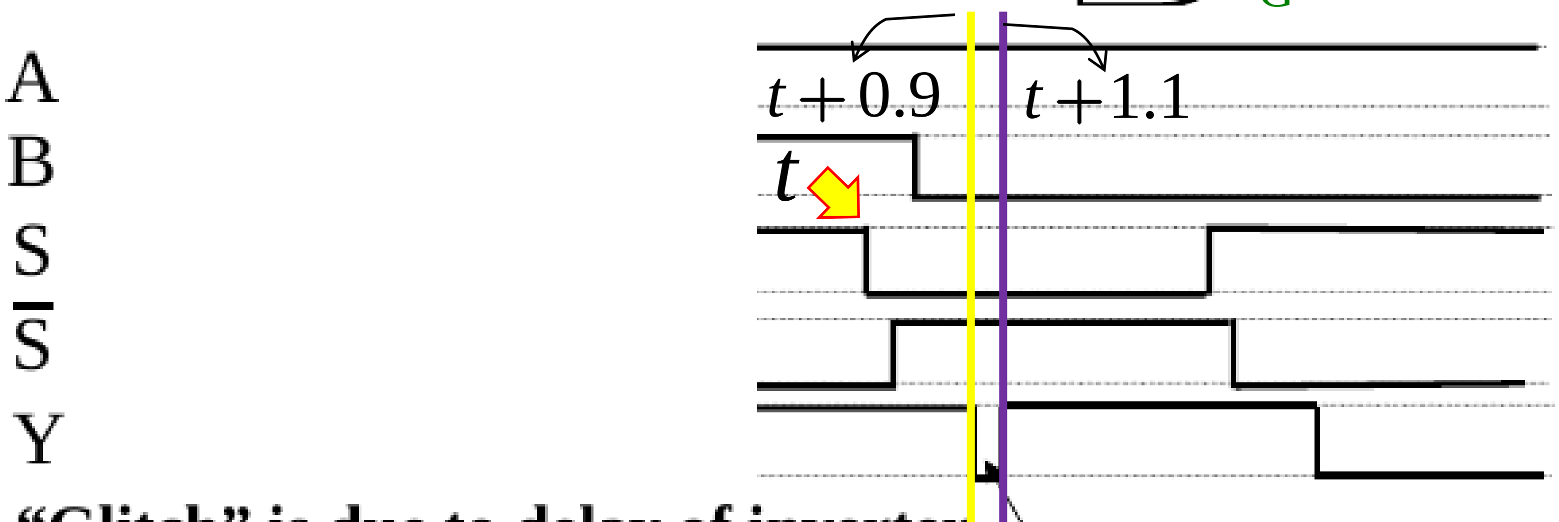
1.1 二值逻辑

■ 1.1.2 逻辑门

- 具有传播延迟的复杂逻辑运算及逻辑门

$$Y = A \cdot \overline{S} + B \cdot S$$





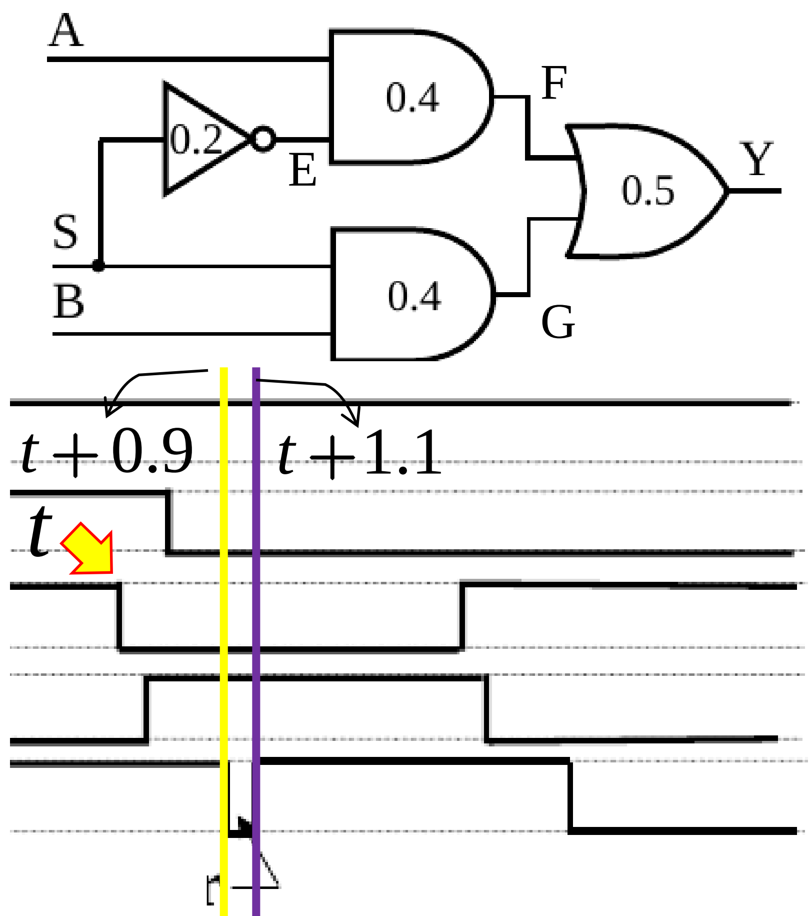
"Glitch" is due to delay of inverter

1.1 二值逻辑

1.1.2 逻辑门

- 具有传播延迟的复杂逻辑运算及逻辑门

Time	A	B	S	E	F	G	Y
<t	1	1	1	0	0	1	1
t	1	1	1->0	0	0	1	1
t+0.1	1	1	0	0	0	1	1
t+0.2	1	1	0	1	0	1	1
t+0.3	1	1	0	1	0	1	1
t+0.4	1	1	0	1	0	0	1
t+0.5	1	1	0	1	0	0	1
t+0.6	1	1	0	1	1	0	1
t+0.7	1	1->0	0	1	1	0	1
t+0.8	1	0	0	1	1	0	1



1.1 二值逻辑

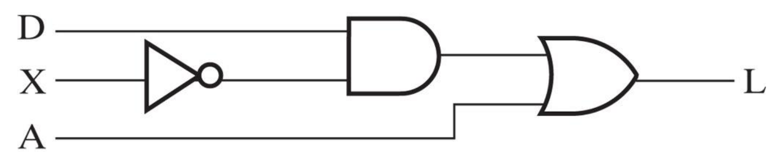
■ 1.1.2 逻辑门

- 现实例子：汽车的电动车窗

$$L = D\overline{X} + A$$

L : 马达　　D : 开关　　X : 限位　　A : 时限

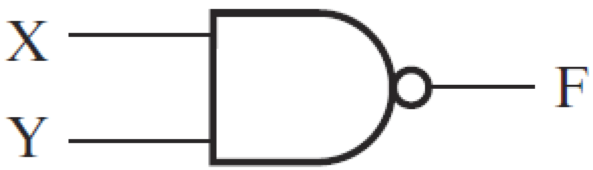
D	X	A	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



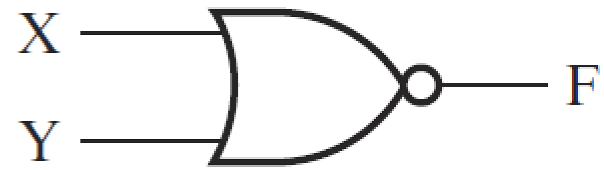
组合逻辑电路

1.1 二值逻辑

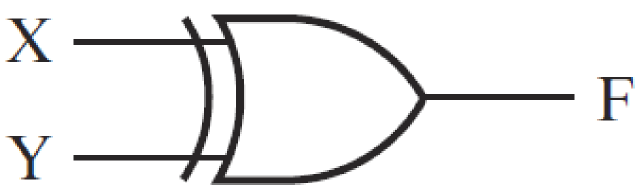
■ 1.1.3 其他逻辑门



$F=\overline{X\cdot Y}$ 与非门



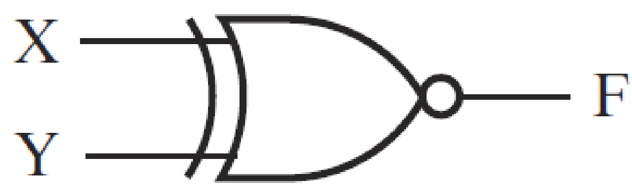
或非门 $F=\overline{X+Y}$



$F=X\overline{Y}+\overline{X}Y$

$=X\oplus Y$

异或门



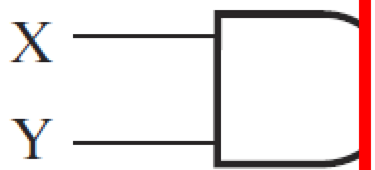
异或非门（同或）

$F=XY+\overline{X}\,\overline{Y}$

$=\overline{X\oplus Y}$

1.1 二值逻辑

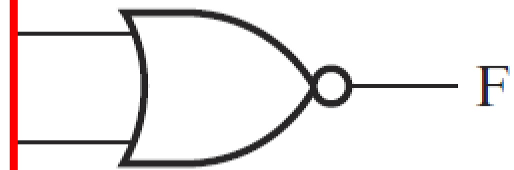
1.1.3 其他



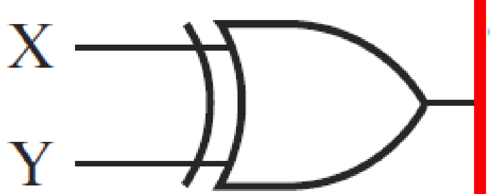
$F=\overline{X\cdot Y}$

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

X	Y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$F=\overline{X+Y}$

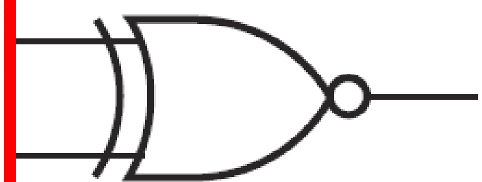


$F=X\overline{Y}+\overline{X}Y$

$=X\oplus Y$

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	Y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



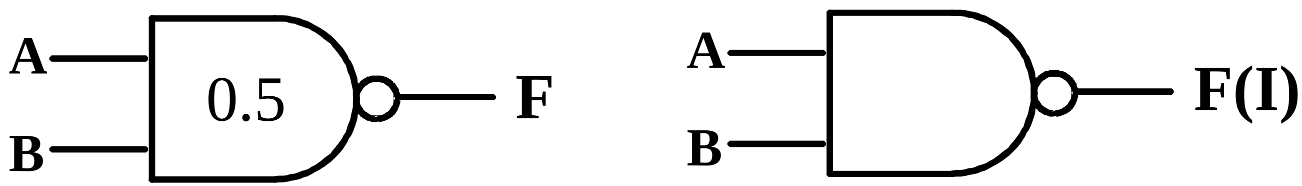
$F=XY+\overline{X}\overline{Y}$

$=\overline{X\oplus Y}$

1.1 二值逻辑

1.1.3 其他逻辑门

- 具有0.5ns传播延迟的与非门



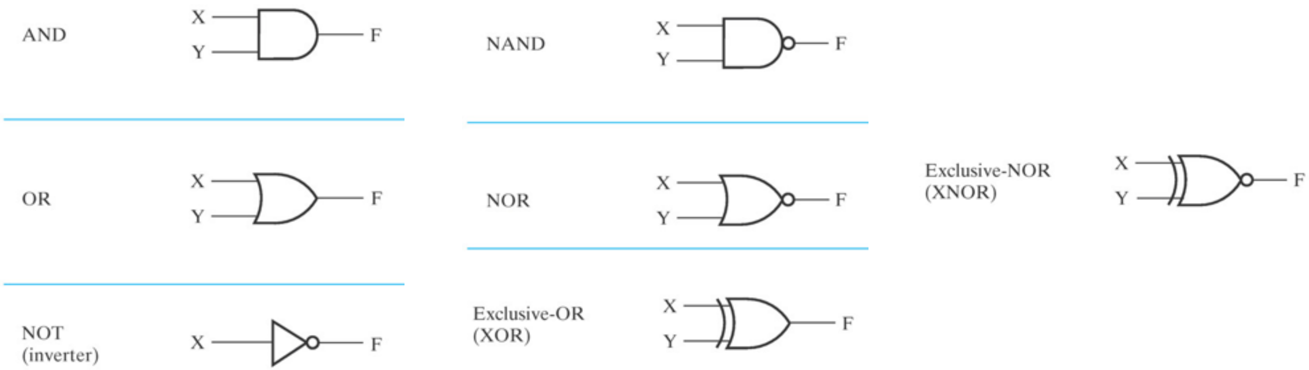
> ➢ 假设初始时A和B都为1一段时间，那么在t=0时, A变为0; 在t=0.8ns时,恢复为1

t (ns)	A	B	F(I)	F	Comment
$-\infty$	1	1	0	0	A=B=1 for a long time
0	1⇒ 0	1	1⇐ 0	0	F(I) changes to 1
0.5	0	1	1	1⇐ 0	F changes to 1 after a 0.5 ns delay
0.8	1⇐ 0	1	1⇒ 0	1	F(Instantaneous) changes to 0
0.13	1	1	0	1⇒ 0	F changes to 0 after a 0.5 ns delay

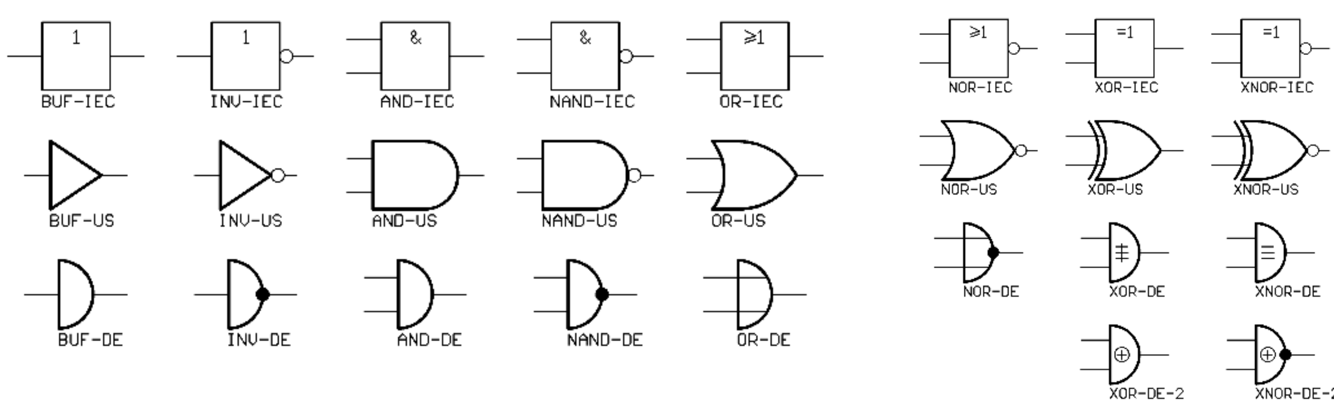
1.1 二值逻辑

■ 1.1.4 符号表示

■ **IEEE （电气和电子工程师协会）图形符号标**

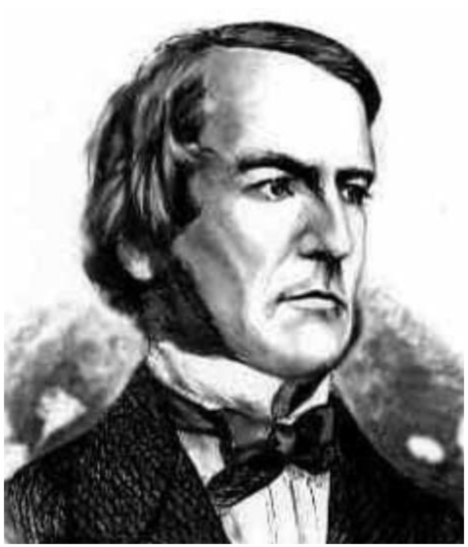


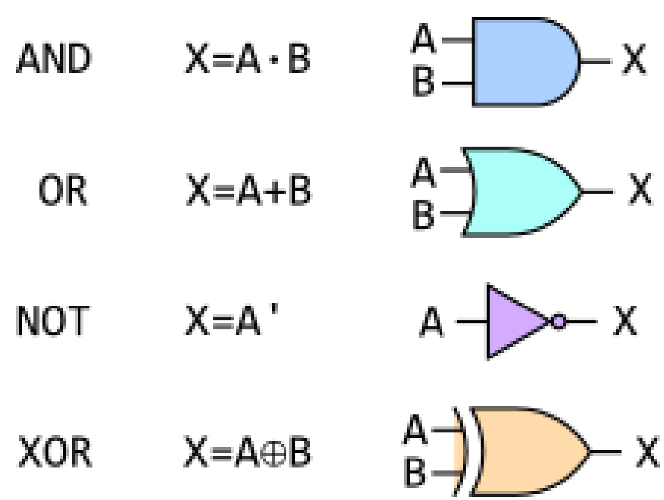
■ **IEC（国际电工委员会）图形符号标准**



1.2 布尔代数

- 布尔代数（**Boolean algebra**）是一种处理逻辑变量和逻辑运算的代数方法
  - 英国数学家乔治·布尔（1815~1864）创立
  - 将二值逻辑采用一套数学符号表示并推广，建立了逻辑的代数系统，奠定了数字电路的基础





1.2 布尔代数

- **布尔表达式（Boolean expression）**是由二进制变量、常量0和1、逻辑运算符号和括号组成的代数运算式

$$D\overline{X}+A$$

- **布尔函数（Boolean function）**是由函数值变量、等号和布尔表达式组成的函数

$$L(D,X,A)=D\overline{X}+A$$

1.2 布尔代数

- 单输出的布尔函数
  - 函数变量取值为0和1的每一种可能组合到函数值输出0或1的映射

$$L(D, X, A) = D\overline{X} + A$$

- 多输出布尔函数
  - 函数变量取值为0和1的每一种可能组合到函数值输出0和1的组合的映射，可以看做多个单输出布尔函数组合而成

$$\begin{cases} L_1(D, X, A) = D\overline{X} + A \\ L_2(D, X, A) = DX + \overline{A} \\ L_3(D, X, A) = \overline{D}\overline{X} \end{cases}$$

提纲

1. 布尔代数基础
2. **布尔代数公理**
3. 标准形式
4. 布尔函数的化简

2.1 布尔恒等式

- 与运算

$$X \cdot 1 = X$$
$$X \cdot 0 = 0$$
$$X \cdot X = X$$
$$X \cdot \overline{X} = 0$$

- 或运算

$$X + 0 = X$$
$$X + 1 = 1$$
$$X + X = X$$
$$X + \overline{X} = 1$$
$$\overline{\overline{X}} = X$$

- 异或运算

$$X \oplus 0 = X$$
$$X \oplus X = 0$$
$$X \oplus \overline{Y} = \overline{X \oplus Y}$$
$$X \oplus 1 = \overline{X}$$
$$X \oplus \overline{X} = 1$$
$$\overline{X} \oplus Y = \overline{X \oplus Y}$$

有且仅有一个输入变量为1，异或结果为1。

2.2 代数性质

- 对偶原则
  - 0和1互为对偶
  - 与和或互为对偶

1. $X + 0 = X$	2. $X \cdot 1 = X$
3. $X + 1 = 1$	4. $X \cdot 0 = 0$
5. $X + X = X$	6. $X \cdot X = X$
7. $X + \overline{X} = 1$	8. $X \cdot \overline{X} = 0$
9. $\overline{\overline{X}} = X$	

互为对偶 $\Leftrightarrow$

$0 \leftrightarrow 1$

$+ \leftrightarrow \cdot$

2.2 代数性质

- 交换律

$$X+Y=Y+X$$

$$X\cdot Y=Y\cdot X$$

- 结合律

$$X+Y\quad+Z=X+\quad Y+Z$$

$$X\cdot Y\quad\cdot Z=X\cdot\quad Y\cdot Z$$

- 分配律

$$X\cdot\quad Y+Z\quad=X\cdot Y+X\cdot Z$$

$$X+Y\cdot Z=\quad X+Y\quad\cdot\quad X+Z$$

2.2 代数性质

■ 德摩根定律

$$\overline{X+Y}=\bar{X}\cdot\bar{Y} \qquad \overline{X\cdot Y}=\bar{X}+\bar{Y}$$

证明
① 真值表
② 逻辑推导

■ 德摩根定律推广

$$\overline{X_1+X_2+\cdots+X_n}=\bar{X}_1\cdot\bar{X}_2\cdots\bar{X}_n$$

$$\overline{X_1\cdot X_2\cdots X_n}=\bar{X}_1+\bar{X}_2+\cdots+\bar{X}_n$$

2.2 代数性质

- 反函数
  - 对布尔表达式取反可以通过将与运算和或运算相互交换、将每一个变量和常量均取反得到

取反

$$F = \bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z$$

$$\bar{F} = \overline{\bar{X}Y\bar{Z} + \bar{X}\bar{Y}Z}$$

$$= \overline{\bar{X}Y\bar{Z}} \cdot \overline{\bar{X}\bar{Y}Z}$$

$$= (X + \bar{Y} + Z)(X + Y + \bar{Z})$$

2.2 代数性质

- 例子：布尔等式推导

$$AB+\bar{A}CD+\bar{A}BD+\bar{A}C\bar{D}+ABCD$$

$$=B(A+D)+\bar{A}C$$

2.2 代数性质

- 例子：布尔等式推导

$$XY + \bar{X}Z + YZ$$

$$= XY + \bar{X}Z$$

一致律定律

提纲

1. 布尔代数基础
2. 布尔代数公理
3. **标准形式**
4. 布尔函数的化简

3.1 基本概念

- 布尔函数对应唯一的真值表，然而满足同样真值表的布尔表达式可以有多种

$$AB+\bar{A}CD+\bar{A}BD$$
$$+\bar{A}C\bar{D}+ABCD$$
$$=B(A+D)+\bar{A}C$$

$$XY+\bar{X}Z+YZ$$
$$=XY+\bar{X}Z$$

- 如何有效地表示布尔函数？
  - 能够和真值表一一对应
  - 容易进行逻辑值的比较判断

3.1 基本概念

■ 最小项

- 所有变量都以原变量或反变量的形式出现，且仅出现一次，这样的**乘积项**叫做最小项
- n个变量，共有2^n个不同的最小项

$n = 3$ 三变量的最小项

X	Y	Z	Product Term	Symbol	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0	1	0	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1	0	1	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2	0	0	1	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3	0	0	0	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6	0	0	0	0	0	0	1	0
1	1	1	XYZ	m_7	0	0	0	0	0	0	0	1

每个最小项有且仅有一项结果为1

3.1 基本概念

■ 最大项

- 每一变量都以原变量或反变量的形式出现，这样的**求和项**叫做最大项
- n个变量，共有2^n个不同的最大项

$n=3$ **三变量的最大项**

X	Y	Z	Sum Term	Symbol	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0	0	1	1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1	1	0	1	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2	1	1	0	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3	1	1	1	0	[illegible]	1	1	1
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6	1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7	1	1	1	1	1	1	1	0

每个最大项有且仅有一项结果为**0**

3.1 基本概念

- 最小项和最大项的两种表示方式
  - ① 原变量和反变量的乘积或者求和
  - ② 使用二进制编码的下标顺序
    - 最小项m：1表示原值，0表示取反
    - 最大项M：0表示原值，1表示取反

三变量的最小项

X	Y	Z	Product Term	Symbol
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_0
0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	m_1
0	1	0	$\overline{X}Y\overline{Z}$	m_2
0	1	1	$\overline{X}YZ$	m_3
1	0	0	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	m_4
1	0	1	$X\overline{Y}Z$	m_5
1	1	0	$XY\overline{Z}$	m_6
1	1	1	XYZ	m_7

三变量的最大项

X	Y	Z	Sum Term	Symbol
0	0	0	$X+Y+Z$	M_0
0	0	1	$X+Y+\overline{Z}$	M_1
0	1	0	$X+\overline{Y}+Z$	M_2
0	1	1	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_3
1	0	0	$\overline{X}+Y+Z$	M_4
1	0	1	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$	M_5
1	1	0	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$	M_6
1	1	1	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	M_7

3.1 基本概念

- 最小项和最大项中的所有变量按照统一的顺序排列（通常按字符表顺序）
  - 三个变量**a、b、c**
    - 最大项：$a+b+\overline{c}$, $a+b+c$
    - 最小项：$a\overline{b}c$, abc, $\overline{a}\overline{b}c$
    - 例如 $b+a+\overline{c}$, $c+b+a$, $a\overline{c}b$ 没有按照字符顺序
    - 例如 $a+\overline{c}$, $\overline{b}c$ 没有包含所有的变量

3.1 基本概念

- 最小项和最大项的两种表示方式
  - 例子：2变量的最小项、最大项及真值表

x	y	m_0	m_1	m_2	m_3	M_0	M_1	M_2	M_3
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0

$$\mathrm{m}_i = \bar{\mathrm{M}}_i,\ \mathrm{M}_i = \bar{\mathrm{m}}_i$$

3.1 概念

- 标准最小项之和（标准与-或表达式）
  - 由真值表中所有使函数取值为1的**最小项的逻辑和（或）**表示的布尔函数

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ$$

$$= m_0 + m_2 + m_5 + m_7 = \sum m(0,2,5,7)$$

标准最小项之和表达式又称为**标准积之和**形式。

3.1 概念

- 标准最大项之积（标准或-与表达式）
  - 由真值表中所有使函数取值为0的**最大项的逻辑积（与）**表示的布尔函数

$$
\begin{aligned}
F &= (X+Y+\bar{Z})(X+\bar{Y}+\bar{Z})(\bar{X}+Y+Z)(\bar{X}+\bar{Y}+Z) \\
&= M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_6 \\
&= \prod M(1,3,4,6)
\end{aligned}
$$

标准最大项之积表达式又称为**标准和之积形式**。

3.2 标准形式

3.2.1 标准最小项之和/最大项之积形式

- 任何布尔函数都可以用最小项逻辑和的形式来表示，也就是标准积之和
  - 通过分配律和$(v+\bar{v})$形式的与运算，将布尔表达式中所有项展开

$$
\begin{aligned}
f &= x + \bar{x}\,\bar{y} \\
&= x(y+\bar{y}) + \bar{x}\,\bar{y} \\
&= x\,y + x\,\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y} \\
&= m_3 + m_2 + m_0
\end{aligned}
$$

  - 例子

$$F = A + \bar{B}\,C = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

3.2 标准形式

3.2.1 标准最小项之和/最大项之积形式

- 任何布尔函数都可以用最大项逻辑积的形式来表示，也就是标准和之积
  - 通过分配律和$(v \cdot \bar{v})$形式的或运算，将布尔表达式中的项结合

$$
\begin{aligned}
f &= x + \bar{x}\,\bar{y} \\
&= (x + \bar{x})(x + \bar{y}) \\
&= (x + \bar{y}) \\
&= M_1
\end{aligned}
$$

  - 例子

$$F = A\,C + B\,C + \bar{A}\,\bar{B} = M_6 \cdot M_4 \cdot M_2$$

3.2 标准形式

- **3.2.1 标准最小项之和/最大项之积形式**
  - 布尔函数标准形式的若干性质
    - n个变量的布尔函数有2^n个最小项
    - 最小项的反是最大项，最大项的反是最小项
    - 原函数的反函数所包括的最小项，在原函数中不包含
    - 全部最小项之和恒等于1
    - 全部最大项之积恒等于0
    - 最小项对应于真值表中值为1的项，而最大项对应真值表中值为0的项

3.2 标准形式

3.2.1 标准最小项之和/最大项之积形式

- 思考题：下面布尔表达式的标准积之和形式

$$Y = A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}CD + AC$$

$$= A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BCD + \overline{A}\,\overline{B}CD + ABCD$$

$$+ ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D}$$

$$= (A+B+C+D)(A+B+C+\overline{D})(A+\overline{B}+C+D)$$

$$(A+\overline{B}+C+\overline{D})(A+B+\overline{C}+D)(A+\overline{B}+\overline{C}+D)$$

$$(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+B+C+\overline{D})$$

3.2 标准形式

3.2.2 积之和/和之积形式

- 由真值表构建逻辑函数的最小项之和或者最大项之积后，可以进一步简化成以下两种标准形式
  - **积之和：**乘积项之和的标准形式

$$F = \overline{Y} + \overline{X}Y\overline{Z} + XY$$

  - **和之积：**求和项之积的标准形式

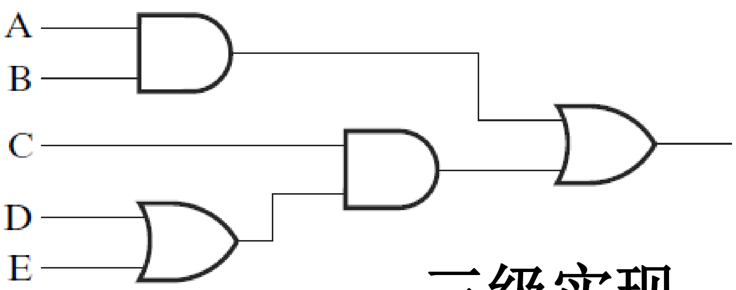
$$F = X(\overline{Y} + Z)(X + Y + \overline{Z})$$

3.2 标准形式

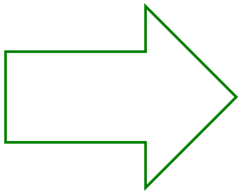
3.2.2 积之和/和之积形式

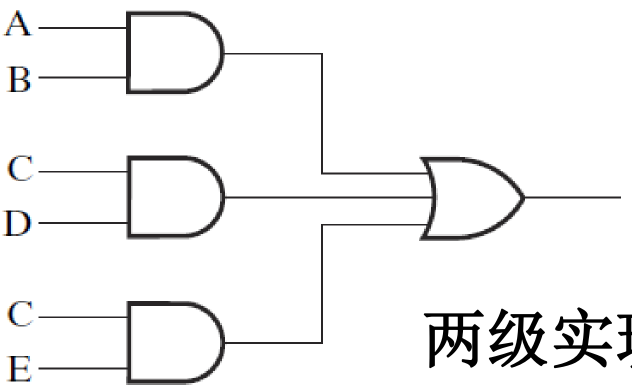
- 积之和
  - 在标准最小项之和的基础上减少乘积项以及乘积项中字符的数目
  - 由与门电路后接或门电路实现

$$F = AB + C(D+E) = \sum m(0,\ldots,31) = AB + CD + CE$$



三级实现





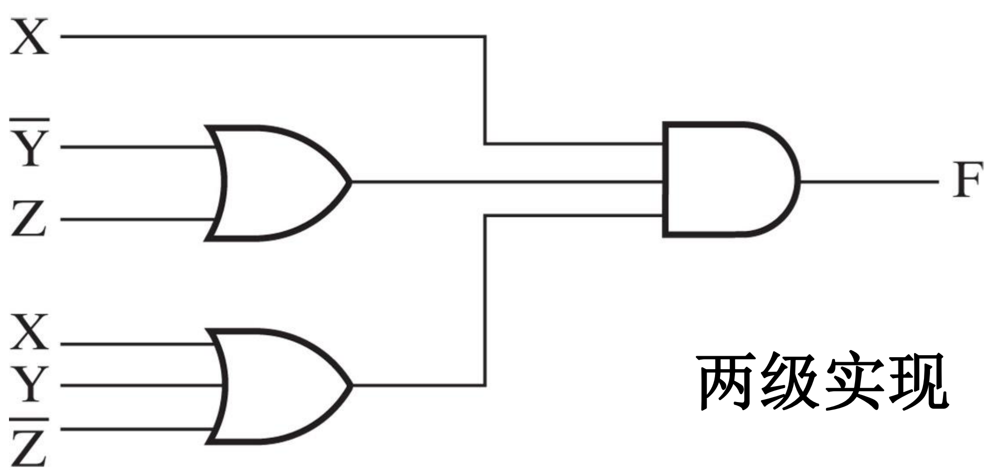
两级实现

3.2 标准形式

3.2.2 积之和/和之积形式

- 和之积
  - 在标准最大项之积的基础上减少求和项以及求和项中字符的数目
  - 由或门电路后接与门电路实现

$$F = X(\bar{Y} + Z)(X + Y + \bar{Z})$$



两级实现

提纲

1. 布尔代数基础
2. 布尔代数公理
3. 标准形式
4. **布尔函数的化简**

4.1 电路优化

- 给定布尔函数，通过化简寻找最简单的逻辑门组成的电路实现函数对应的真值表
- 布尔函数化简后，需要判断化简形式是否最优，而最优的表达式不是唯一的

A	B	C	$A+BC$	$(A+B)(A+C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$$
\begin{aligned}
F &= \bar{A}BC + A\bar{B} + AB \\
&= (A+B)(A+C) \\
&= A+BC
\end{aligned}
$$

4.1 电路优化

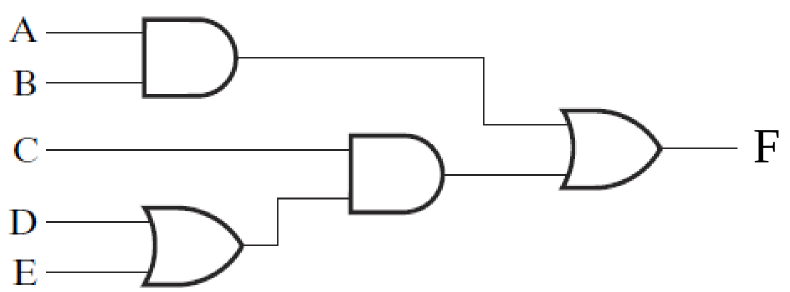
■ 化简时优化的逻辑电路成本

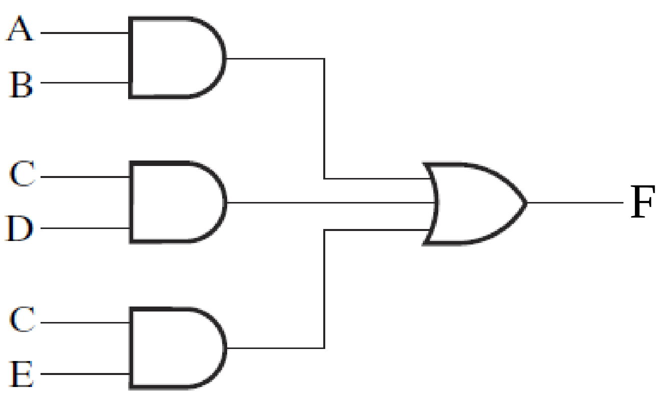
① 文字成本（Literal cost, L）

- 与逻辑门电路图一一对应的布尔表达式中的文字的个数

$$F = AB + C(D+E) \longrightarrow L = 5$$

$$= AB + CD + CE \longrightarrow L = 6$$





4.1 电路优化

- 化简时优化的逻辑电路成本

  ① 文字成本（Literal cost, L）

  - 与逻辑门电路图一一对应的布尔表达式中的文字的个数

$$F = ABCD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \longrightarrow L = 8$$

$$H = (\bar{A} + B)(\bar{B} + C)(\bar{C} + D)(\bar{D} + A) \longrightarrow L = 8$$

F: 2个最小项 ✓

H: 4个最大项

4.1 电路优化

- **化简时优化的逻辑电路成本**
  - ① 文字成本（Literal cost, L）
  - ② 门输入成本（Gate input cost, G）
    - 与给定布尔函数一一对应的所用逻辑门的输入端的个数，也就是逻辑门电路图中输入端的个数

G=L+T(+I)
- 全部文字数：L
- 除单个文字之外的全部项数：T
- 不同的取反值的单个文字总数（可选）：I

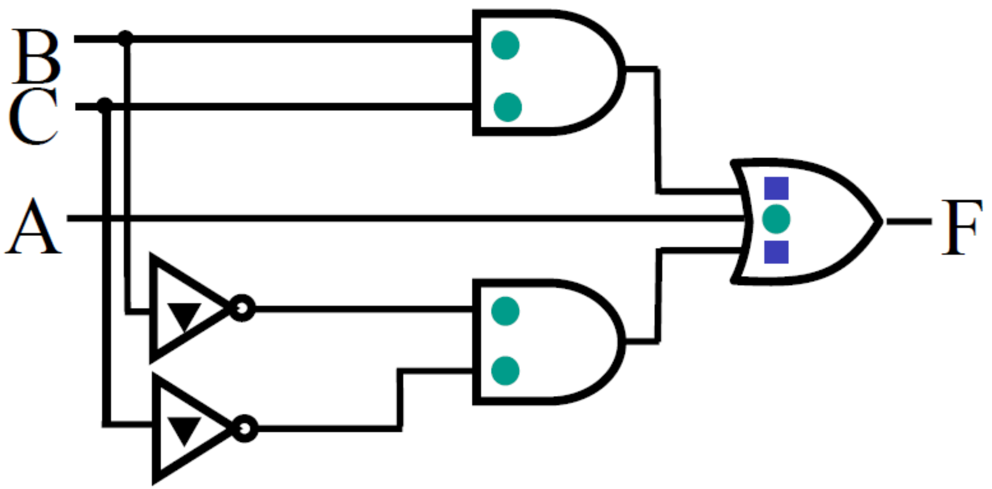
$$F = ABCD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \longrightarrow G = 8 + 2 = 10$$

$$H = (\bar{A} + B)(\bar{B} + C)(\bar{C} + D)(\bar{D} + A) \longrightarrow G = 8 + 4 = 12$$

4.1 电路优化

- 化简时优化的逻辑电路成本
  - ① 文字成本（Literal cost, L）
  - ② 门输入成本（Gate input cost, G）

$$F = A + BC + \bar{B}\bar{C}$$



L＝5

G＝L+2=7

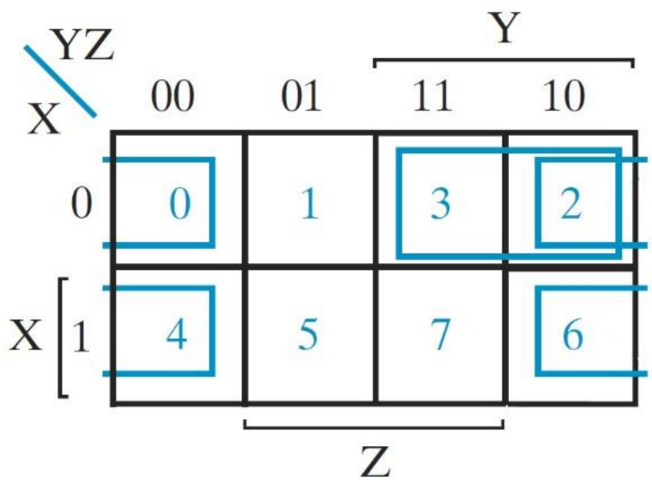
4.1 电路优化

■ 两种化简途径

① **代数化简：**代数推导

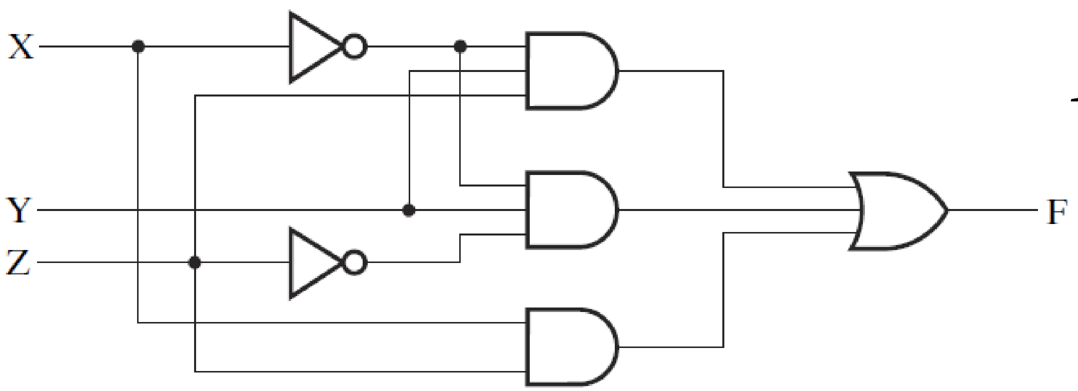
$$AB+ABCD+\bar{A}CD+\bar{A}C\bar{D}+\bar{A}BD=AB(1+CD)+\bar{A}C(D+\bar{D})+\bar{A}BD$$
$$=AB+\bar{A}C+\bar{A}BD=B(A+\bar{A}D)+\bar{A}C$$
$$=B(A+D)+\bar{A}C$$

② **卡诺图化简：**图简化

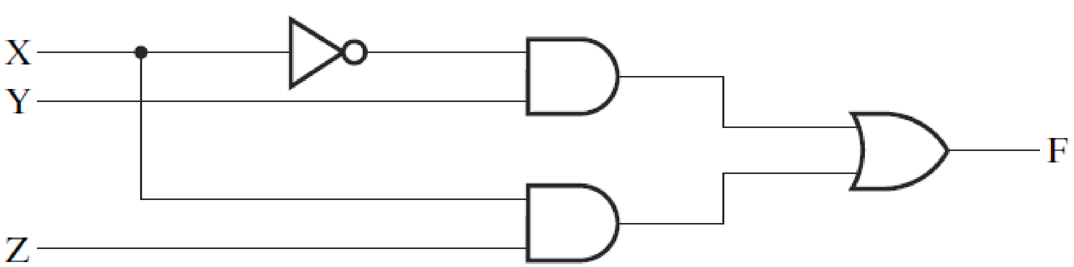


4.2 代数化简

- 利用布尔代数中基本的布尔恒等式、代数性质等对布尔函数进行约简，进而能够简化数字电路



$$F = \bar{X}YZ + \bar{X}Y\bar{Z} + XZ$$
$$= \bar{X}Y(Z + \bar{Z}) + XZ$$
$$= \bar{X}Y \cdot 1 + XZ$$



$$F = \bar{X}Y + XZ$$

4.2 代数化简

- 优点
  - 对变量个数没有限制
  - 可灵活简化表达式
- 缺点
  - 需要熟悉布尔代数系统
  - 需要一定的运算技巧
  - 不易判断化简结果是否最优

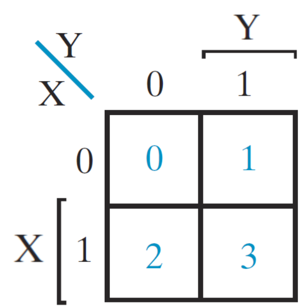
4.3 卡诺图化简

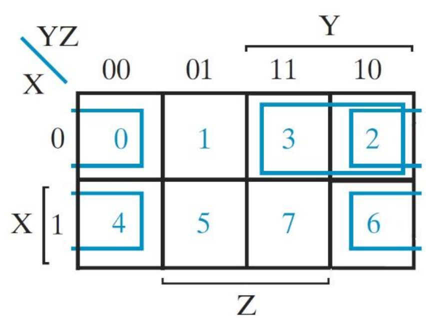
4.3.1 基本概念

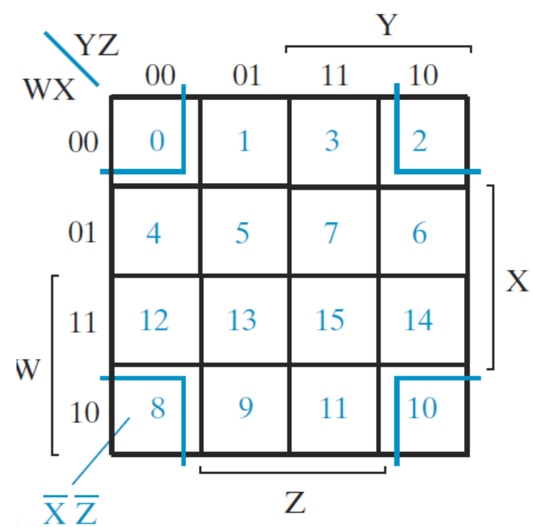
- 给定布尔函数后，通过卡诺图尽量减少门输入成本（或文字成本）进行优化
- 提供直观、简单的操作，实现布尔函数的化简，容易判断结果是否最简

莫里斯 · 卡诺

美国贝尔实验室





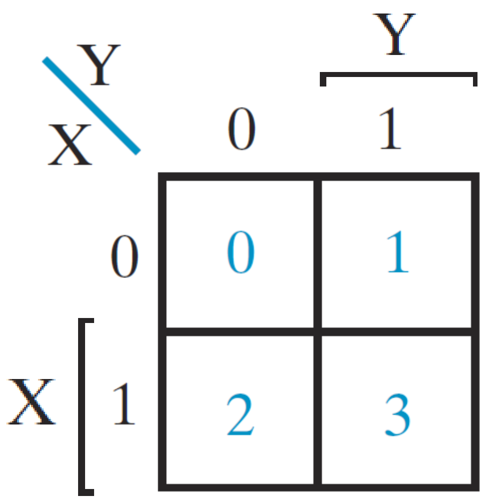


4.3 卡诺图化简

■ 4.3.1 基本概念

- 卡诺图（K-maps）
  - 方格组成的集合
  - 每个方格代表一个最小项
  - 水平和竖直方向依次排列变量

二变量
卡诺图



0 $m_0 = \bar{X}\bar{Y}$

1 $m_1 = \bar{X}Y$

2 $m_2 = X\bar{Y}$

3 $m_3 = XY$

4.3 卡诺图化简

■ 4.3.2 卡诺图构造方式

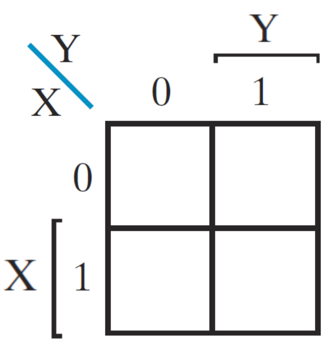
① 小方格的数量等于最小项的个数

② 行变量和列变量位于卡诺图的左上方，每一行/列标记变量的二进制组合m_i

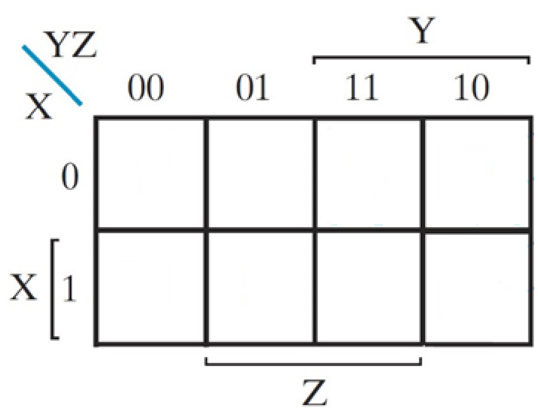
（或者变量取值为1的行/列用方括号括起）

③ 相邻项只有一个变量值不同（格雷码）

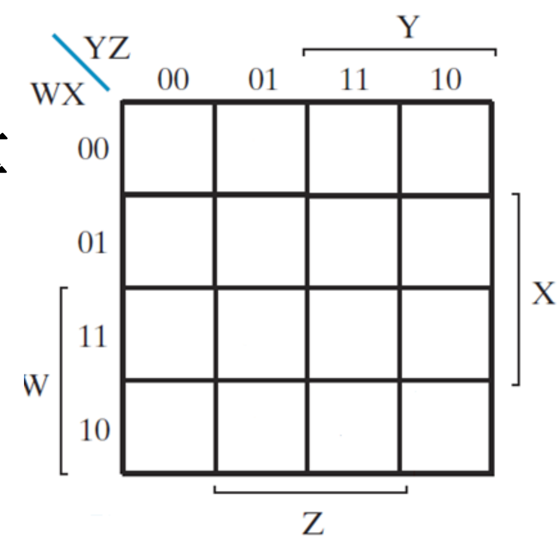
2个变量



3个变量



4个变量



4.3 卡诺图化简

4.3.2 卡诺图构造方式

- 例子：2个变量的卡诺图
  - 4个方格
  - 4个最小项 m_0, m_1, m_2, m_3
  - 与两个变量的布尔函数的真值表对应

X \ Y	0	1
0	0 m_0	1 m_1
1	2 m_2	3 m_3

Input Values (x,y)	Function Value F(x,y)
0 0	a
0 1	b
1 0	c
1 1	d

F	y = 0	y = 1
x = 0	a	b
x = 1	c	d

4.3 卡诺图化简

4.3.2 卡诺图构造方式

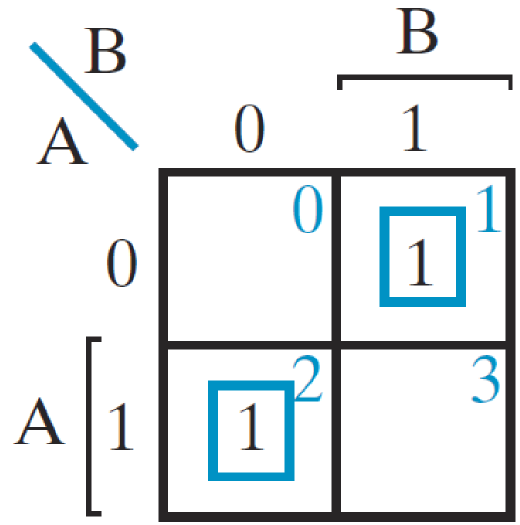
例子：2个变量的卡诺图

布尔函数 F(A, B)

真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

卡诺图



$$F(A,B) = \sum m(1,2)$$

4.3 卡诺图化简

■ 4.3.2 卡诺图构造方式

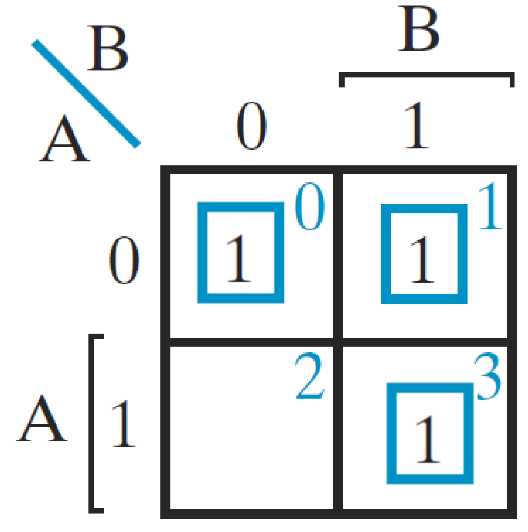
■ 例子：2个变量的卡诺图

布尔函数 G(A, B)

真值表

A	B	G
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

卡诺图



$$G(A,B) = \sum m(0,1,3)$$

4.3 卡诺图化简

4.3.2 卡诺图构造方式

- 例子：3个变量的卡诺图

布尔函数 H(A, B, C)

真值表

卡诺图

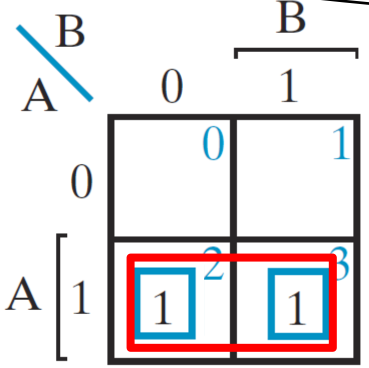
X	Y	Z	H
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

4.3 卡诺图化简

4.3.3 化简的一般原则

- 相邻方格：两个方格的二进制表示中只有一个变量的值不同
- 通过矩形（方格或相邻方格的组合）操作减少乘积项中文字个数，降低文字成本
  - 分配律

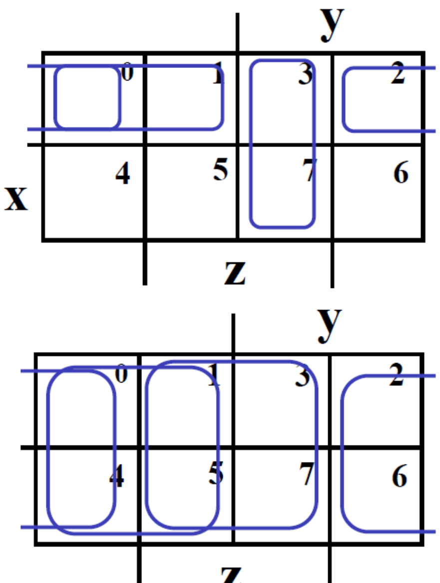
$$AB + A\overline{B} = A \qquad (\overline{X}Y)Z + (\overline{X}Y)\overline{Z} = \overline{X}Y$$

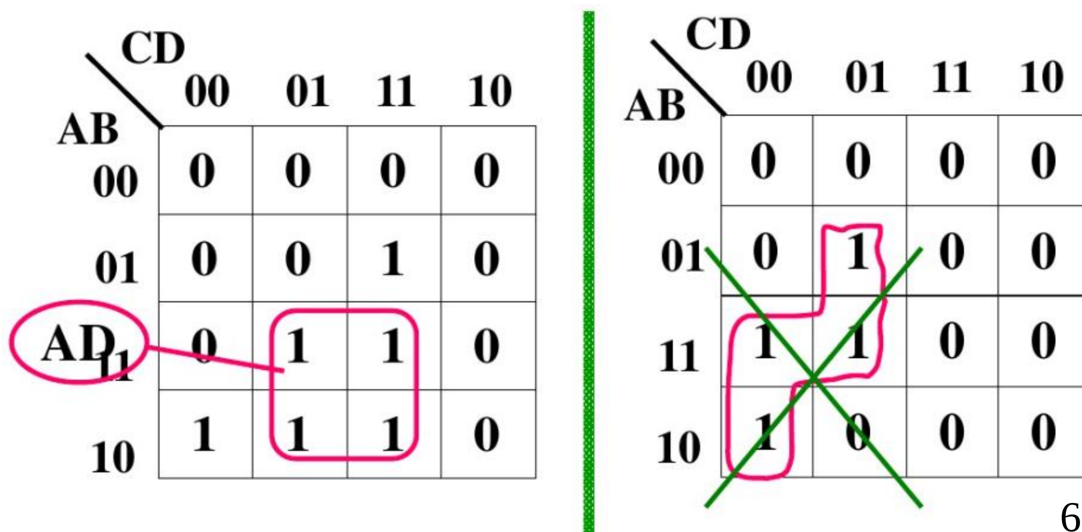


4.3 卡诺图化简

4.3.3 化简的一般原则

- 矩形的方格数必须是2的幂次方：1、2、4、8
- 找出最少的矩形来包含或覆盖所有标记为1的方格：矩形数尽可能少，矩形尽可能大
- 根据矩形数写出最简式



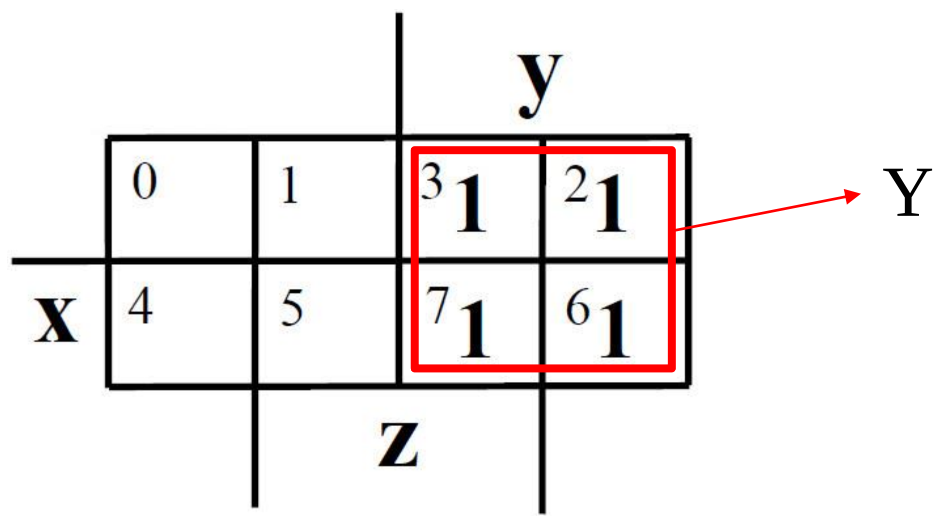


4.3 卡诺图化简

4.3.3 化简的一般原则

3个变量卡诺图化简

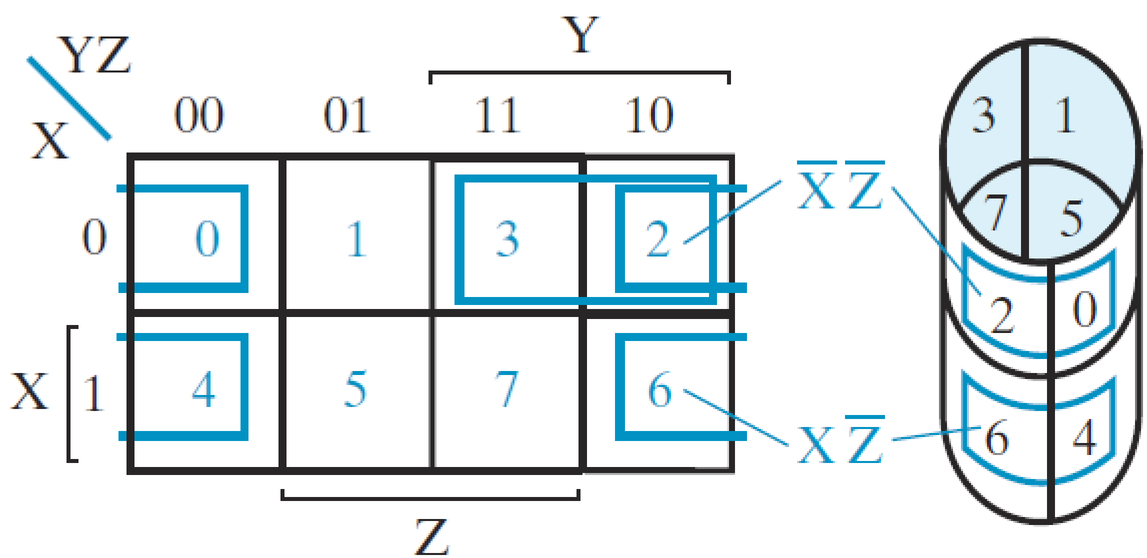
- 每个方格代表一个3变量的最小项
- 两个相邻方格形成的矩形代表一个2变量乘积
- 四个‘相邻’方格形成的矩形代表一个变量
- 八个‘相邻’方格形成的矩形代表常值1



4.3 卡诺图化简

4.3.3 化简的一般原则

- **3个变量卡诺图化简**
  - 3个变量的相邻关系



卡诺图 **圆柱图**

4.3 卡诺图化简

- **4.3.3 化简的一般原则**
  - **3个变量卡诺图化简**
    - 例子：

$$F = \sum m(2,3,6,7) = \bar{X}YZ + XYZ + \bar{X}Y\bar{Z} + XY\bar{Z}$$

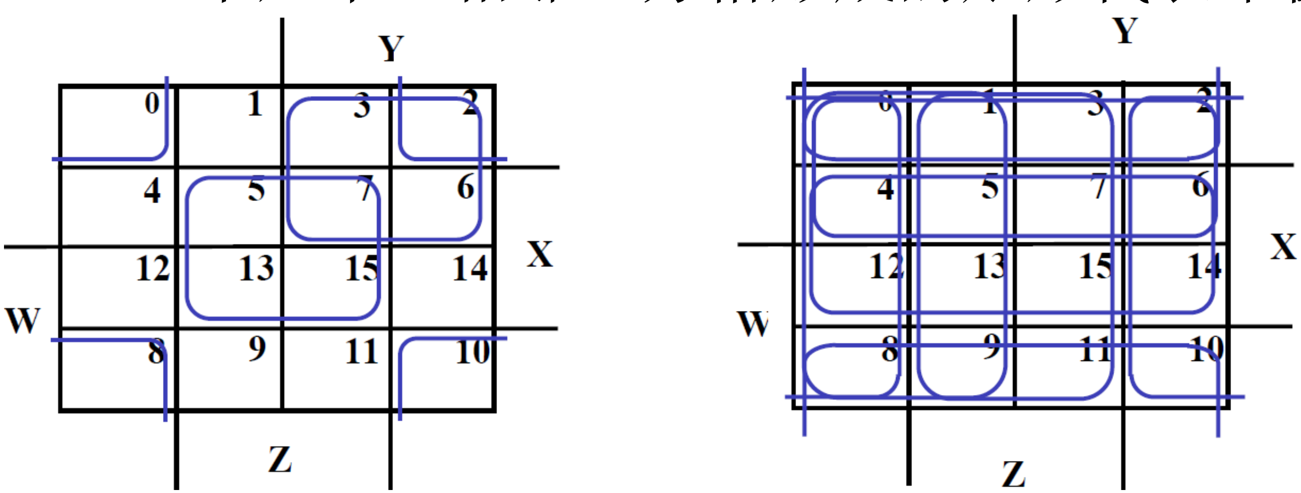
4.3 卡诺图化简

4.3.3 化简的一般原则

- **3个变量卡诺图化简**
  - 例子：$F = \sum m(1,2,3,5,7)$

4.3 卡诺图化简

- **4.3.3 化简的一般原则**
  - **4个变量卡诺图化简**
    - 每个方格代表一个4变量的最小项
    - 两个相邻方格形成的矩形代表一个3变量
    - 四个‘相邻’方格形成的矩形代表一个2变量
    - 八个‘相邻’方格形成的矩形代表一个1变量
    - 十六个‘相邻’方格形成的矩形代表常值1

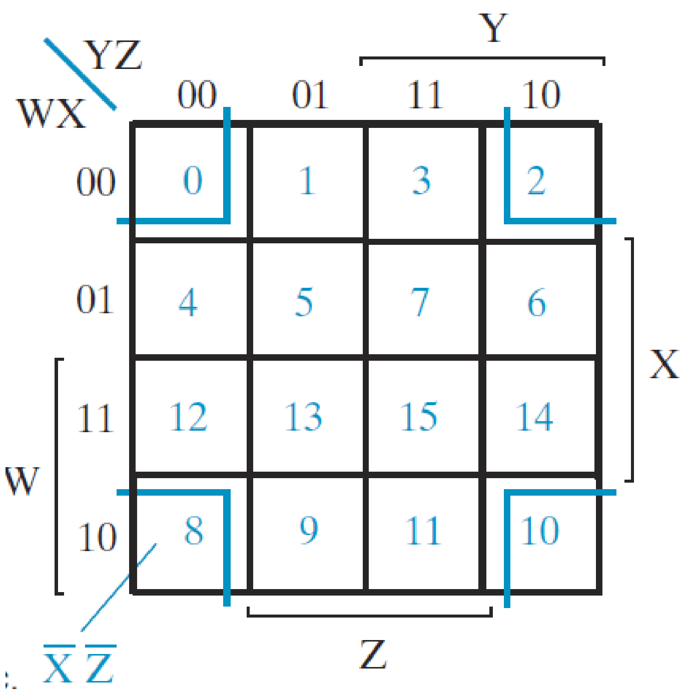


4.3 卡诺图化简

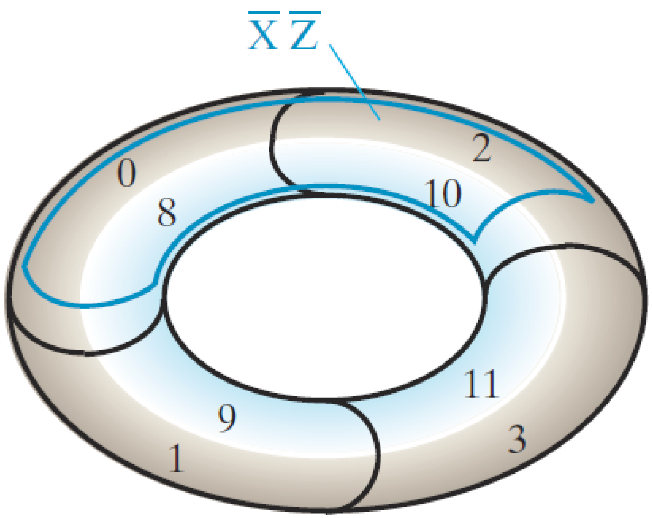
4.3.3 化简的一般原则

4个变量卡诺图化简

- 4个变量的相邻关系



卡诺图



环图

4.3 卡诺图化简

4.3.3 化简的一般原则

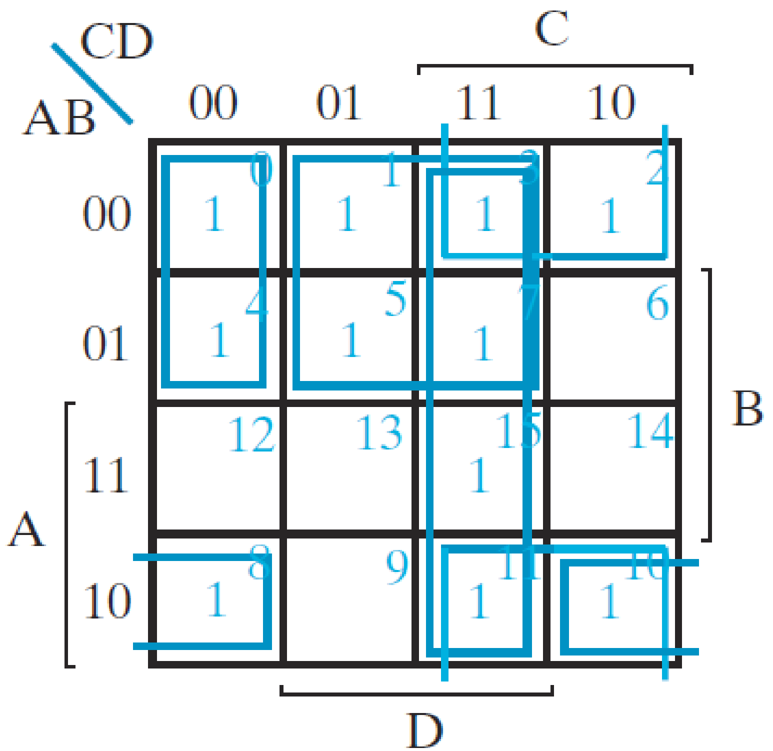
4个变量卡诺图化简

- 例子：$F = \sum m(0,1,2,4,5,6,8,9,10,12,13)$

4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

- 基本概念
  - 蕴涵项
  - 主蕴涵项
  - 质主蕴涵项



最优的布尔表达式

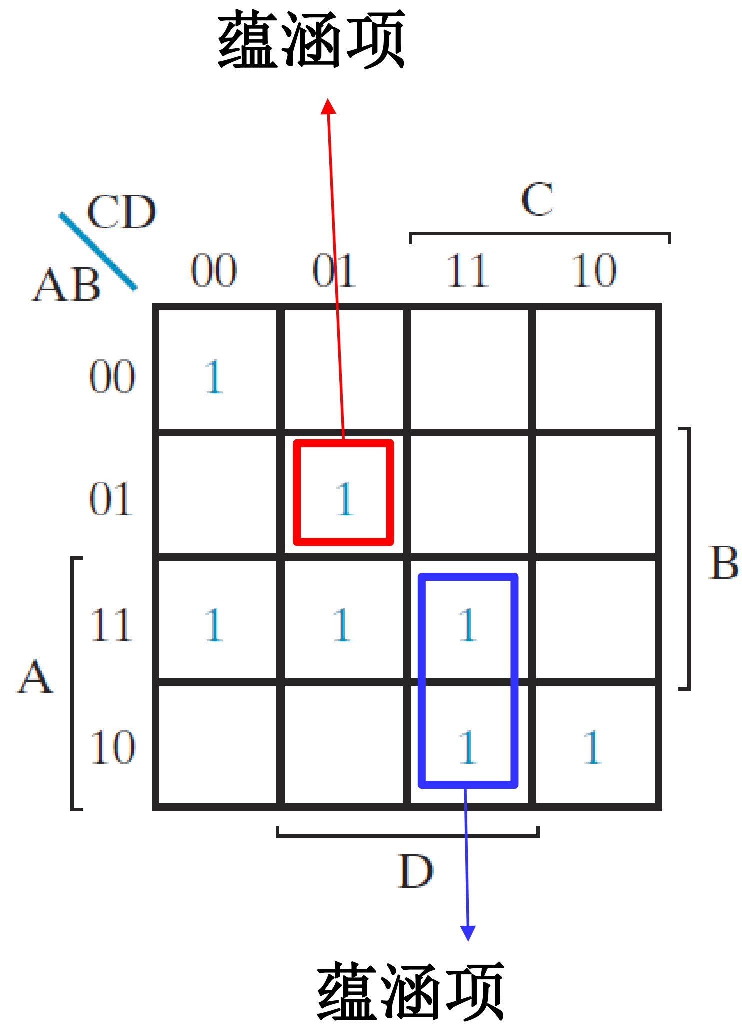
- 合并方格时确保包含了布尔函数的全部最小项
- 避免出现多个矩形包含的冗余项

4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

基本概念

- 蕴涵项：如果函数对某个乘积项的每一个最小项都取值为1，则该乘积项是函数的一个蕴涵项



- 卡诺图中1方格所对应的最小项
- 卡诺图中**能够进行合并**的2n个1方格组成的矩形

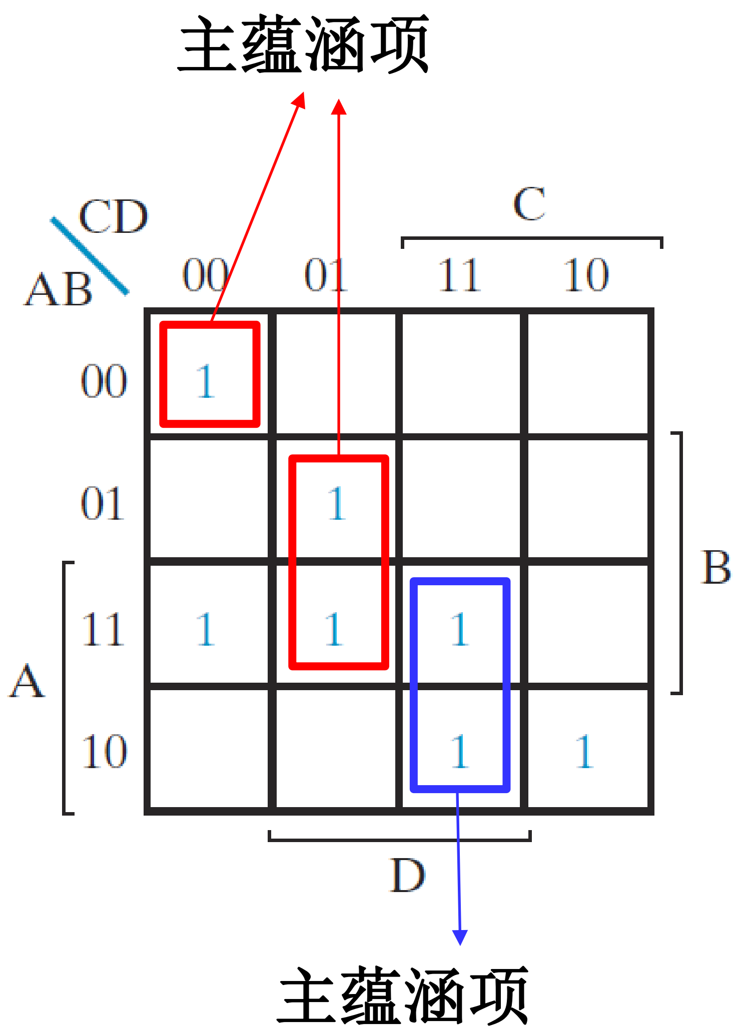
4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

基本概念

- 主蕴涵项：蕴涵项中移去任何一个变量所得的乘积项不再是蕴含项

- 卡诺图中不能被更大卡诺圈包含的2^n个1方格组成的矩形



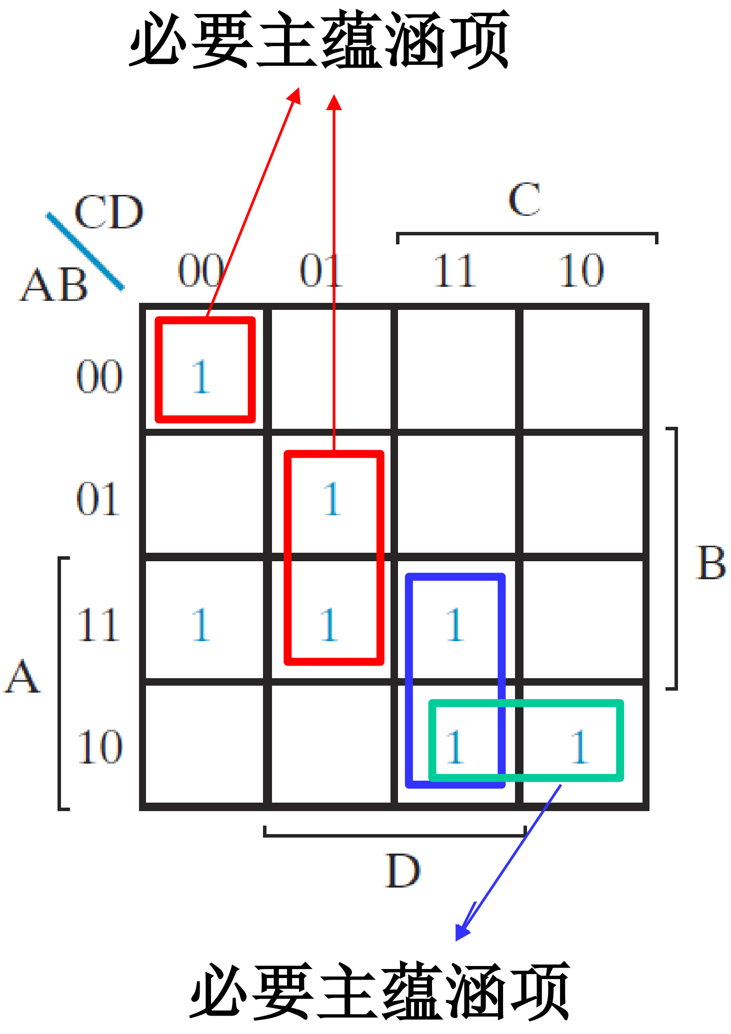
4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

基本概念

- 必要主蕴涵项：如果一个1方格仅存在于唯一的主蕴涵项矩形内，这样的主蕴涵项是必要的

- 必要主蕴涵项至少包括一个没有被任何其他主蕴含项覆盖的方格

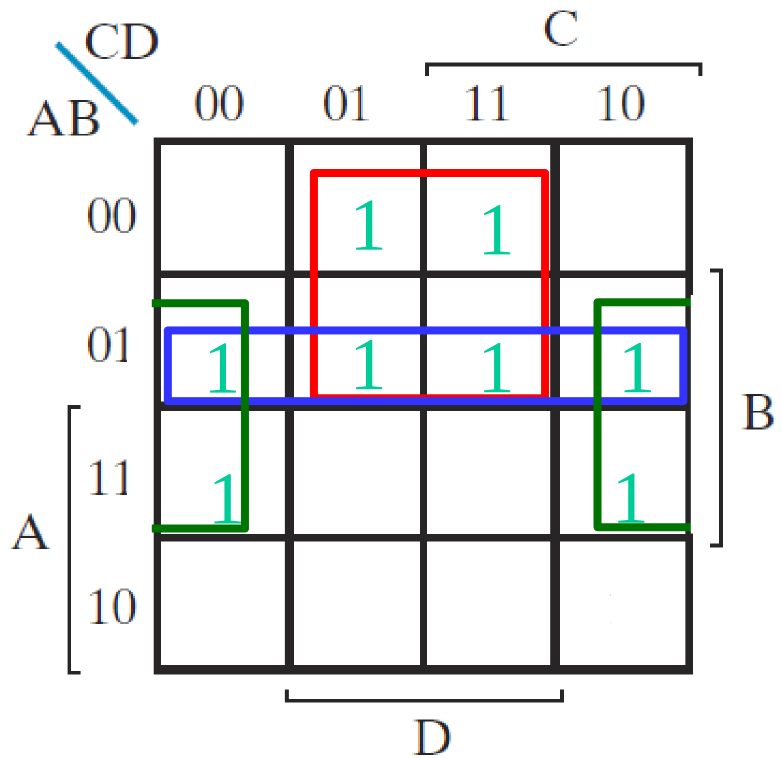


4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

基本概念

- 例子：寻找主蕴含项



$\bar{A}D$

$B\bar{D}$

$\bar{A}B$

4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

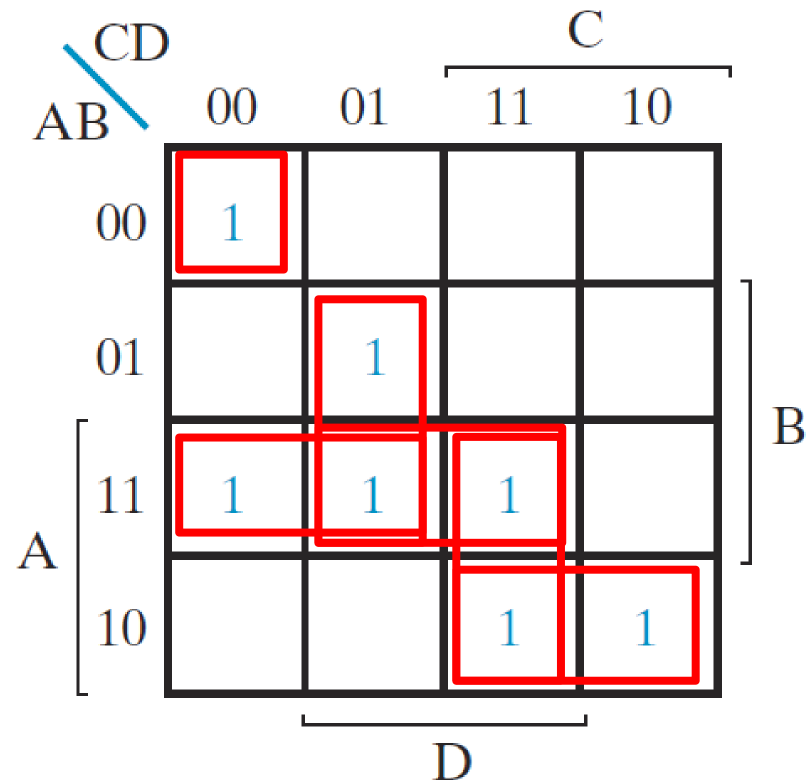
- **步骤1：确定所有的主蕴涵项**
- **步骤2：对全部质主蕴涵项进行求和**
- **步骤3：加上其他主蕴涵项用来覆盖剩余的不被质主蕴涵项所包含的最小项**
  - 尽可能减少主蕴涵项的重叠
  - 在最后的表达式中，确保所选择的主蕴涵项至少覆盖一个没有被其他主蕴涵项覆盖的最小项

4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

- 步骤1：确定所有的主蕴涵项

$$\left.\begin{array}{l}\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\\ B\bar{C}D\\ AB\bar{C}\\ A\bar{B}C\\ ABD\\ ACD\end{array}\right\}\text{主蕴涵项}$$



4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

- 步骤2：对全部质主蕴涵项进行求和

质主蕴涵项

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

$B\overline{C}D$

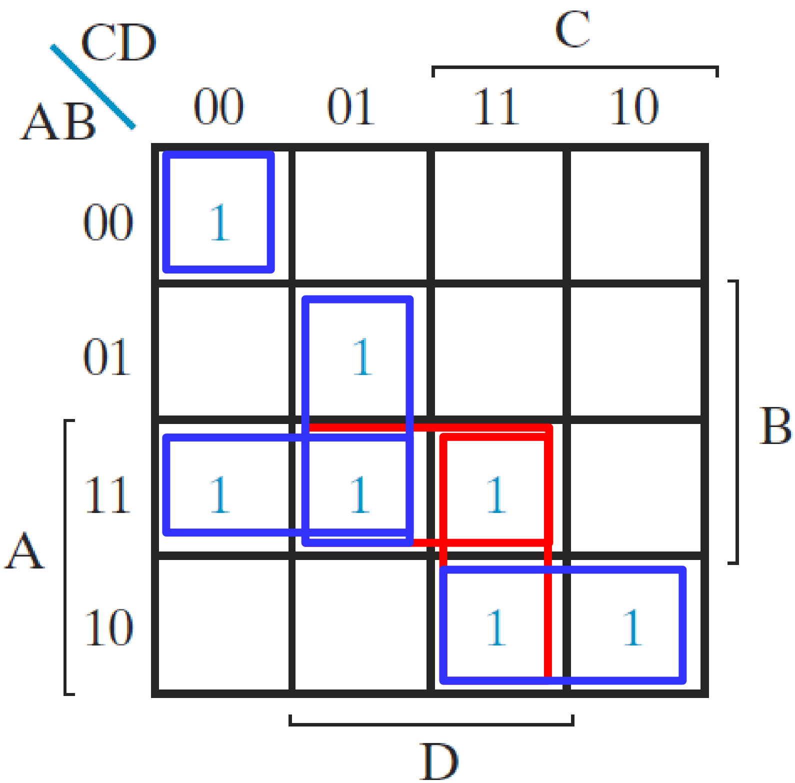
$AB\overline{C}$

$A\overline{B}C$

ABD

ACD

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+B\overline{C}D+AB\overline{C}+A\overline{B}C$

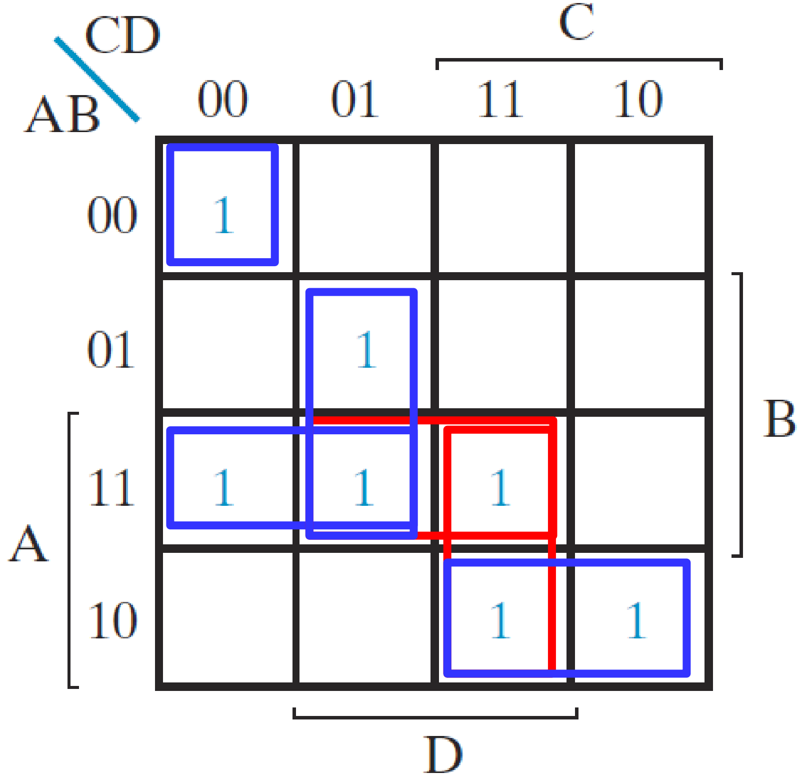


4.3 卡诺图化简

4.3.4 化简的方法

- 步骤3：加上其他主蕴涵项用来覆盖剩余的不被质主蕴涵项所包含的最小项

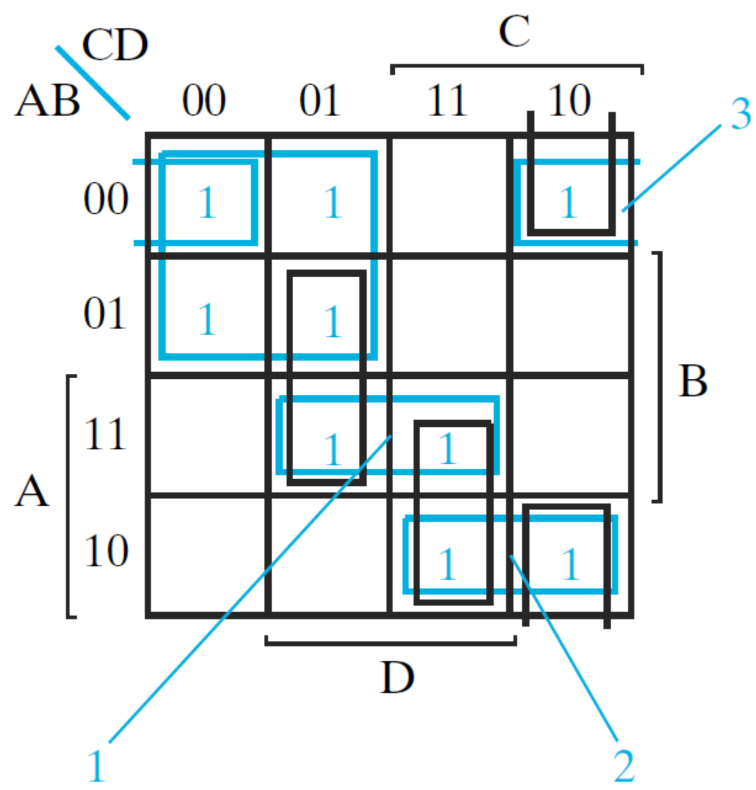
$F=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}+B\overline{C}D+AB\overline{C}+A\overline{B}C$



4.3 卡诺图化简

■ 4.3.4 化简的方法

■ 例子 $F=\sum m(0,1,2,4,5,10,11,13,15)$



$F=\overline{A}\,\overline{C}+ABD+A\overline{B}C+\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$

4.3 卡诺图化简

4.3.5 不完全确定函数的化简

- 无关最小项
  - 实际应用中，某些最小项取值是不确定的
    - 某些组合不会出现。例如用4位二进制对十进制进行编码时，有6种组合不会使用
    - 不关心某些输入组合
  - 卡诺图中使用×表示
- 包含无关最小项的布尔函数称为不完全确定函数

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	×
01	0	1	×	0
11	1	1	1	0
10	×	0	1	1

4.3 卡诺图化简

■ 4.3.5 不完全确定函数的化简

- 化简时可以包含使得主蕴涵项最简单的无关最小项

$F=\sum m(1,3,7,11,15)$ $\boxed{d=\sum m(0,2,5)}$ 无关最小项

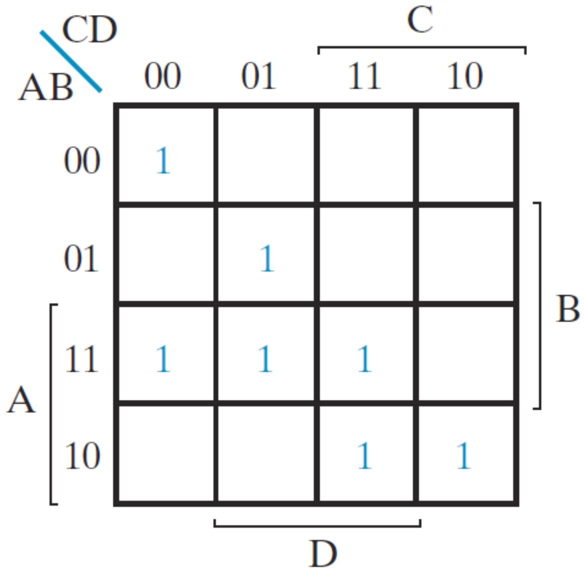
AB \ CD	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

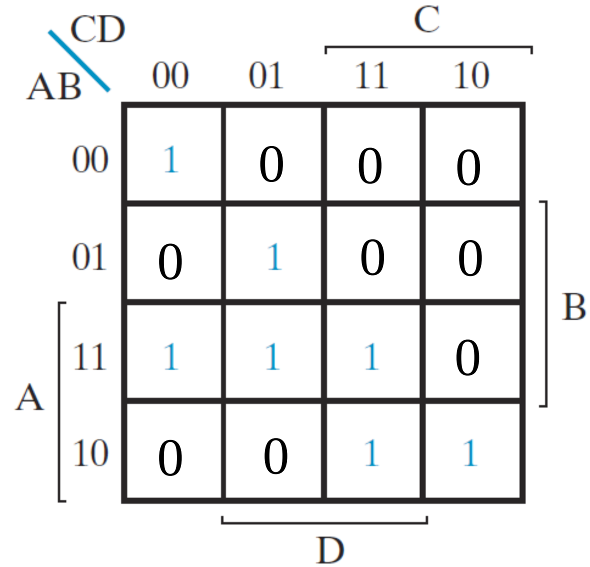
$F=CD+\bar{A}\bar{B}D$

$F=CD+\bar{A}\bar{B}$

4.4 和之积优化

- 目的：将函数化简为和之积的表示
- 优化准则：变量取反求对偶式
    - 利用对偶原则，将标记为0的方格进行矩形合并，得到函数 $\overline{F}$ 的优化表达式
    - 取反操作得到和之积形式表示的优化表达式

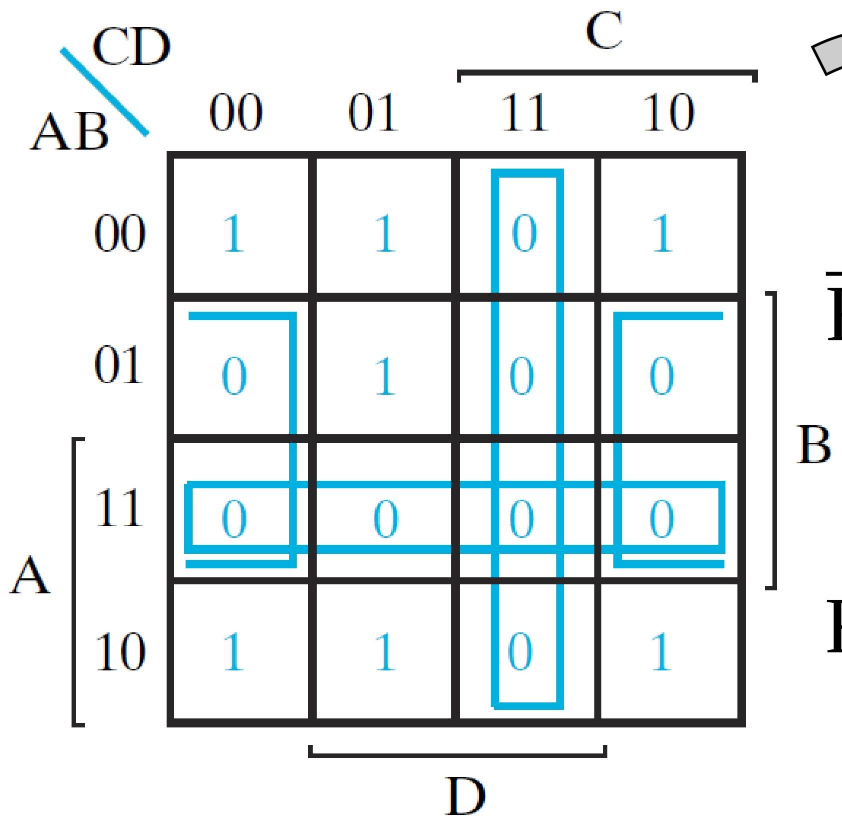




4.4 和之积优化

- 例子

$$F=\sum m(0,1,2,5,8,9,10)$$



$$\overline{F}=AB+CD+B\overline{D}$$

$$F=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+\overline{D})(\overline{B}+D)$$

4.5 奇（偶）函数优化

- 三变量或三变量以上的函数，如果需要奇数个变量值为1，函数值才为1，称为奇函数

$$F=X\oplus Y\oplus Z$$

$$=(X\overline{Y}+\overline{X}Y)\overline{Z}+(XY+\overline{X}\,\overline{Y})Z$$

$$=X\overline{Y}\,\overline{Z}+\overline{X}Y\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Y}Z+XYZ$$

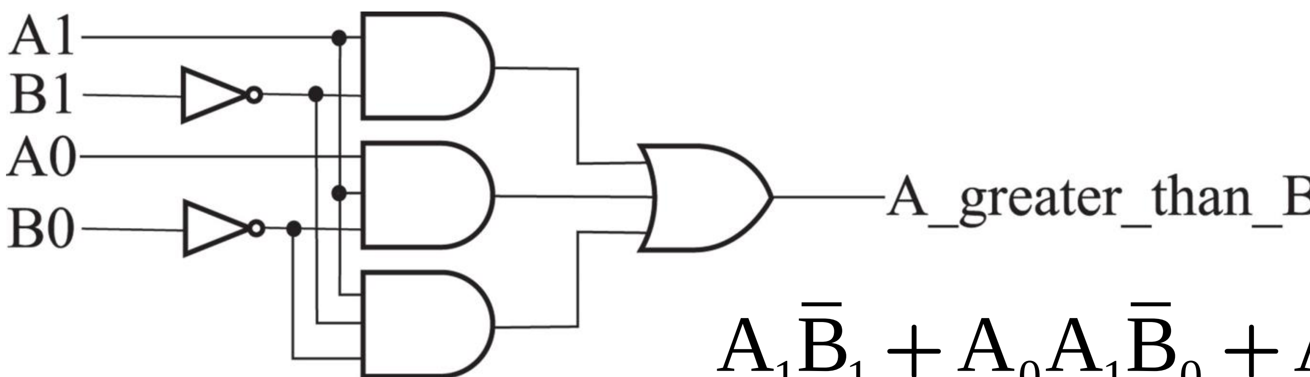
			y	y
	0	1 1	3	2 1
x	4 1	5	7 1	6
		z	z	

小结

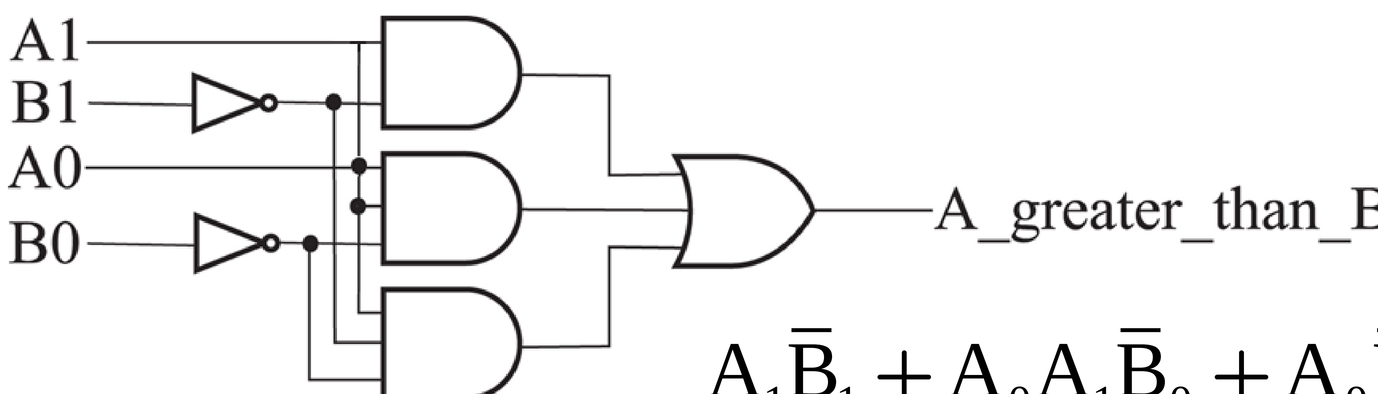
- 二值逻辑运算
  - 或、与、非
  - 异或、同或
- 布尔代数运算规则
- 标准形式
  - 最小项、最大项
  - 和之积、积之和
- 布尔函数优化
  - 卡诺图

教材修正

- P60页， 图2-27 二位大于比较器



$$A_1\overline{B}_1 + A_0A_1\overline{B}_0 + A_1\overline{B}_0\overline{B}_1$$



$$A_1\overline{B}_1 + A_0A_1\overline{B}_0 + A_0\overline{B}_0\overline{B}_1$$