鸽笼原理

刘正阳
zhengyang@bit.edu.cn

一个简单的事实

鸽子多，笼子少

- 反证法的应用
- 证明存在性的方法，非构造性
- 简单蕴含着不简单！
- 什么是鸽子？什么是笼子？

一些例子

- 任意图存在两个点度数相等

一些例子

- 任意图存在两个点度数相等

If G is a finite graph, the *independence number* $\alpha(G)$ is the maximum number of pairwise nonadjacent vertices of G. The *chromatic number* $\chi(G)$ of G is the minimum number of colors in a coloring of the vertices of G with the property that no two adjacent vertices have the same color.

Proposition 4.2. *In any graph G with n vertices, $n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$.*

一些例子

- 任意图存在两个点度数相等

If G is a finite graph, the *independence number* $\alpha(G)$ is the maximum number of pairwise nonadjacent vertices of G. The *chromatic number* $\chi(G)$ of G is the minimum number of colors in a coloring of the vertices of G with the property that no two adjacent vertices have the same color.

Proposition 4.2. *In any graph G with n vertices, $n \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$.*

Proposition 4.3. *Let G be an n-vertex graph. If every vertex has a degree of at least $(n-1)/2$ then G is connected.*

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

$$a_i \to (x_i, y_i)$$

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let* $A = (a_1, \ldots, a_n)$ *be a sequence of* n *different real numbers. If* $n \geq sr + 1$ *then either* A *has an increasing subsequence of* $s + 1$ *terms or a decreasing subsequence of* $r + 1$ *terms (or both).*

$$a_i \rightarrow (x_i, y_i)$$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度，y_i 是以 a_i 起始的最长递减序列长度。

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

$$a_i \rightarrow (x_i, y_i)$$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度，y_i 是以 a_i 起始的最长递减序列长度。

所有元素的 (x_i, y_i) 均不相等

Erdős–Szekeres定理

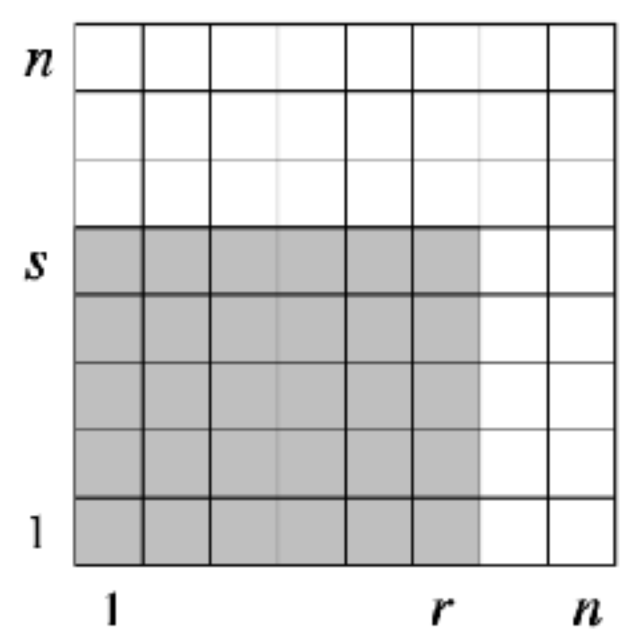
序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s+1$ terms or a decreasing subsequence of $r+1$ terms (or both).*

$$a_i \to (x_i, y_i)$$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度，y_i 是以 a_i 起始的最长递减序列长度。

所有元素的 (x_i, y_i) 均不相等



Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

另一种角度：$a_i \rightarrow x_i$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

另一种角度：$a_i \to x_i$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度

如果某个 $x_i \geq s + 1$，结束；于是有 $x_i \leq s$，从而存在 $r + 1$ 个 x_i 相同，即 $x_{l_1} = x_{l_2} = \cdots = x_{l_{r+1}}$，且 $l_1 < l_2 < \cdots < l_{r+1}$

Erdős–Szekeres定理

序列中的递增和递减，一种对偶?

Theorem 4.5 (Erdős–Szekeres 1935). *Let $A = (a_1, \ldots, a_n)$ be a sequence of n different real numbers. If $n \geq sr + 1$ then either A has an increasing subsequence of $s + 1$ terms or a decreasing subsequence of $r + 1$ terms (or both).*

另一种角度：$a_i \to x_i$

其中 x_i 是以 a_i 终止的最长递增序列长度

如果某个 $x_i \geq s + 1$，结束；于是有 $x_i \leq s$，从而存在 $r + 1$ 个 x_i 相同，即 $x_{l_1} = x_{l_2} = \cdots = x_{l_{r+1}}$，且 $l_1 < l_2 < \cdots < l_{r+1}$

考虑 a_{l_k} 与 $a_{l_{k+1}}$ 的关系?

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，
  $d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，$d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$
- 均值不等式：令 $A \subseteq V$ 为一个最大独立集，那么$B = V \backslash A$ 有什么性质?

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，$d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$
- 均值不等式：令 $A \subseteq V$ 为一个最大独立集，那么$B = V \backslash A$ 有什么性质?
- 鸽笼原理+数学归纳法：不妨考虑图里有2n个点，$n^2 + 1$ 条边会出现三角形。

Mantel 定理

无三角形(triangle-free)的图最多有多少边?

Theorem 4.7 (Mantel 1907). *If a graph G on n vertices contains more than $n^2/4$ edges, then G contains a triangle.*

- 算两次：没有三角形->相邻两点不存在公共邻居，$d(x) + d(y) \leq n$，对于 $(x, y) \in E$

- 均值不等式：令 $A \subseteq V$ 为一个最大独立集，那么$B = V \backslash A$ 有什么性质?

- 鸽笼原理+数学归纳法：不妨考虑图里有2n个点，$n^2 + 1$ 条边会出现三角形。

Ex **Theorem 4.8** (Turán 1941). *If a graph $G = (V, E)$ on n vertices has no $(k+1)$-clique, $k \geq 2$, then*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}. \tag{4.1}$$

Dirichlet 定理

Theorem 4.9 (Dirichlet 1879). *Let x be a real number. For any natural number n, there is a rational number p/q such that $1 \leq q \leq n$ and*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$$

Dirichlet 定理

Theorem 4.9 (Dirichlet 1879). *Let x be a real number. For any natural number n, there is a rational number p/q such that $1 \leq q \leq n$ and*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$$

$$\{kx\}, k = 1,2,\ldots,n+1 \Rightarrow [0,1/n), \ldots, [1-1/n,1)$$

Dirichlet 定理

Theorem 4.9 (Dirichlet 1879). *Let x be a real number. For any natural number n, there is a rational number p/q such that $1 \leq q \leq n$ and*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq} \leq \frac{1}{q^2}.$$

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$$

$$\{kx\}, k = 1,2,\ldots,n+1 \Rightarrow [0,1/n), \ldots, [1-1/n,1)$$

$$q = a - b, p = \lfloor ax \rfloor - \lfloor bx \rfloor$$

几个练习题

- n 个整数 $a_1, \ldots, a_n$，一定存在相邻的整数求和 $\sum_{i=k}^{l} a_i$ 是 n 的倍数。

几个练习题

- n 个整数 $a_1, \ldots, a_n$，一定存在相邻的整数求和 $\sum_{i=k}^{l} a_i$ 是 n 的倍数。

- 从1到2n这些整数中取出n+1个数，证明存在两个数他们互质。

几个练习题

- n 个整数 $a_1, \ldots, a_n$，一定存在相邻的整数求和 $\sum_{i=k}^{l} a_i$ 是 n 的倍数。

- 从1到2n这些整数中取出n+1个数，证明存在两个数他们互质。

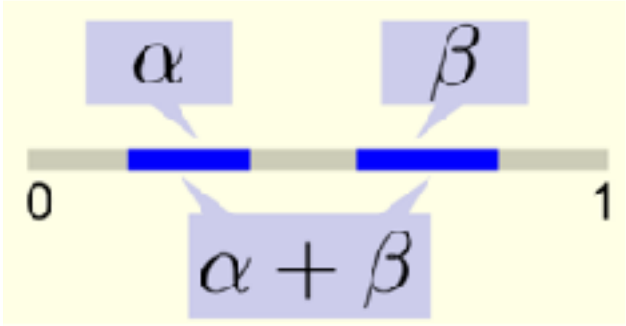
- 从1到2n这些整数中取出n+1个数，证明存在两个数，一个能被另一个整除。

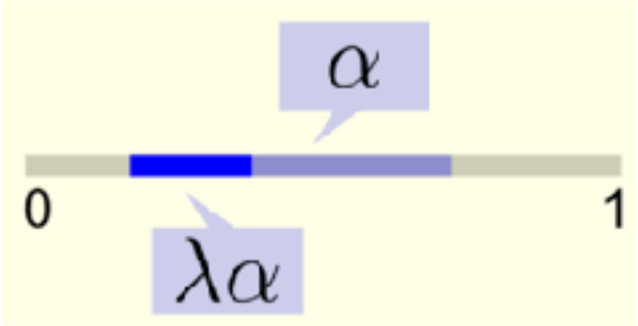
公平分配

模型

- 蛋糕 [0,1]
- 玩家 $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$
- 每人分到的蛋糕，子区间的并集

- 价值函数 v_i 将分到的蛋糕映射成非负实数，满足
  - 可加性
  - 可分性





  - 假设 $v_i([0,1]) = 1$

目标

将 $[0,1]$ 分配成 $(A_1, \ldots, A_n)$，互不相交，满足：

- 按比例(Proportional)：$v_i(A_i) \geq 1/n$
  - Knife-moving 算法
- 无嫉妒(Envy-free)：$v_i(A_i) \geq v_i(A_j)$
  - 2人？ cut-and-choose
  - 3人？ 不太容易。。