第2章　信息与信号

- 通信的目的：有效、可靠地获取、传递和交换消息中所包含的信息。
- 消息（message）：多种表现形式，例如语音、文字、音乐、数据、图片或活动图像等。
- 信息（Information）：是消息中包含的有效内容。
- 实现通信的方式和手段：
  - 非电的：如旌旗、消息树、烽火台…
  - 电的：如电报、电话、广播、电视、遥控、遥测、因特网和计算机通信等。

什么是信息？

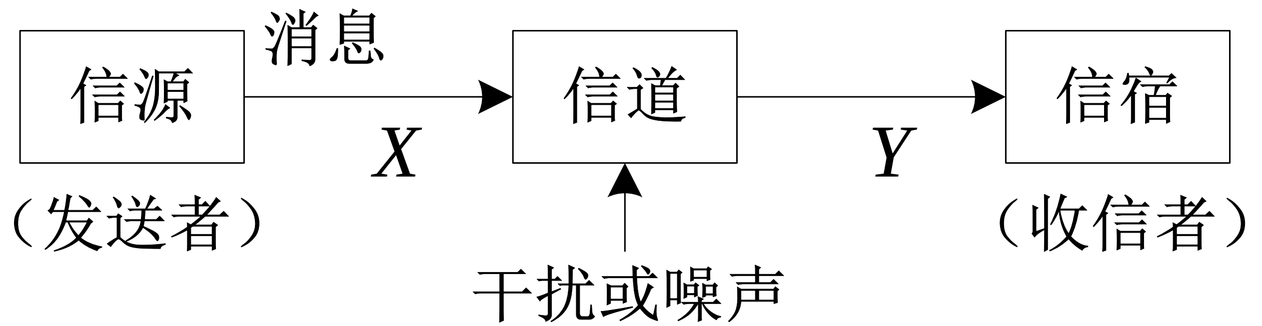
有几十个定义。一个带有哲理的较为本质的定义是：信息是事物运动的状态和方式。也可以认为信息就是一种知识。

信息是一种资源，它不同于物质资源和能量资源，是可以**共享**和**重复使用**的，而且可以**不受时间和空间的限制**而广泛地传播。所以它对物质生产和能量生产可以起到极大的促进作用。

因此信息具有**特殊性**、**普遍性**、**广泛性**、**实效性**、**时效性**。

2.1 信息的概念

各类通信系统——电报、电话、广播、电视、雷达、遥测……等传送的是各种各样的消息。消息的形式可以不同，但它们都是能被传递的，能被人们感觉器官（眼、耳、触觉等）所感知的，而且消息表述的是客观物质和主观思维的运动状态或存在状态。



香农通信系统的简单模型

- 在各种通信系统中，传输的形式是消息。
- 消息传递过程的特点是：收信者在收到消息以前是不知道消息的具体内容的。
  - 收信者无法判断发送者会发来描述何种事物运动状态的具体消息；
  - 无法判断描述的状态；
  - 无法判断所得到的消息是否正确和可靠。
- 消息的传递过程是一个从不知到知的过程，或者是从知之甚少到知之甚多的过程，或是从不确定到部分确定或全部确定的过程。

- **通信过程是一种消除不确定性的过程**。不确定性的消除就获得了信息。
- 香农“信息”的定义：**信息是事物运动状态或存在方式的不确定性的描述**。
- 通信系统形式上传输的是消息，但实质上传输的是信息。
- 消息只是表达信息的工具，表达信息的客体。信息较抽象，而消息是具体的。
- 通信的结果是消除或部分消除不确定性从而获得信息。

消息、信息和信号

- 消息(Message)：语音、文字、图形、图像…
- 信息(Information)：消息的有效内容

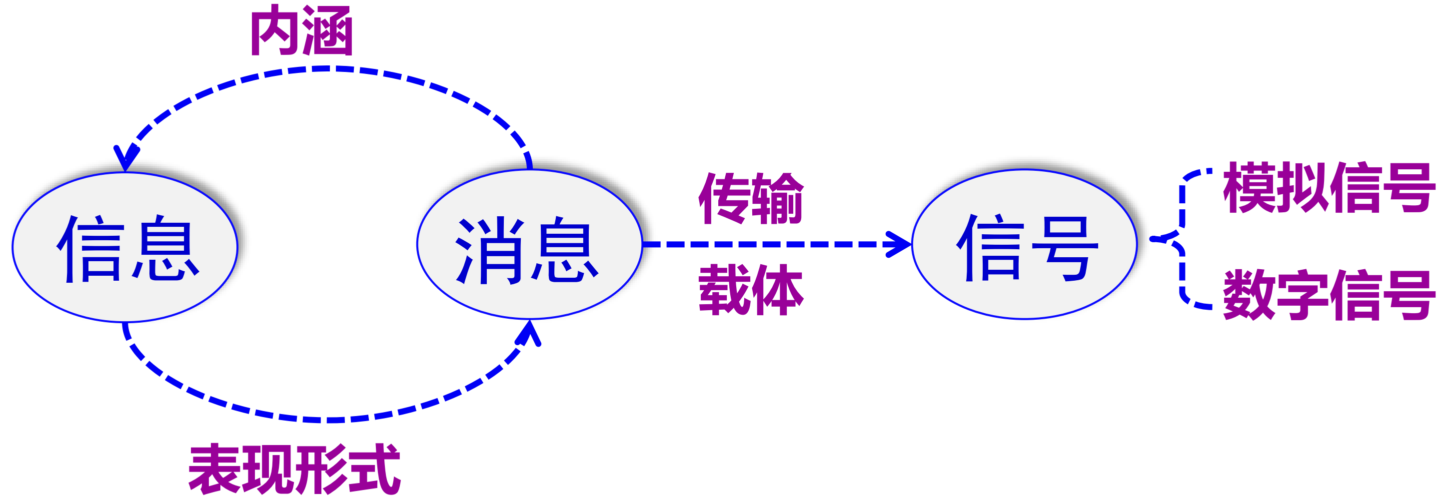
  不同消息可有相同内容
- 信号(Signal)：消息的载体

  通信系统中传输的是信号

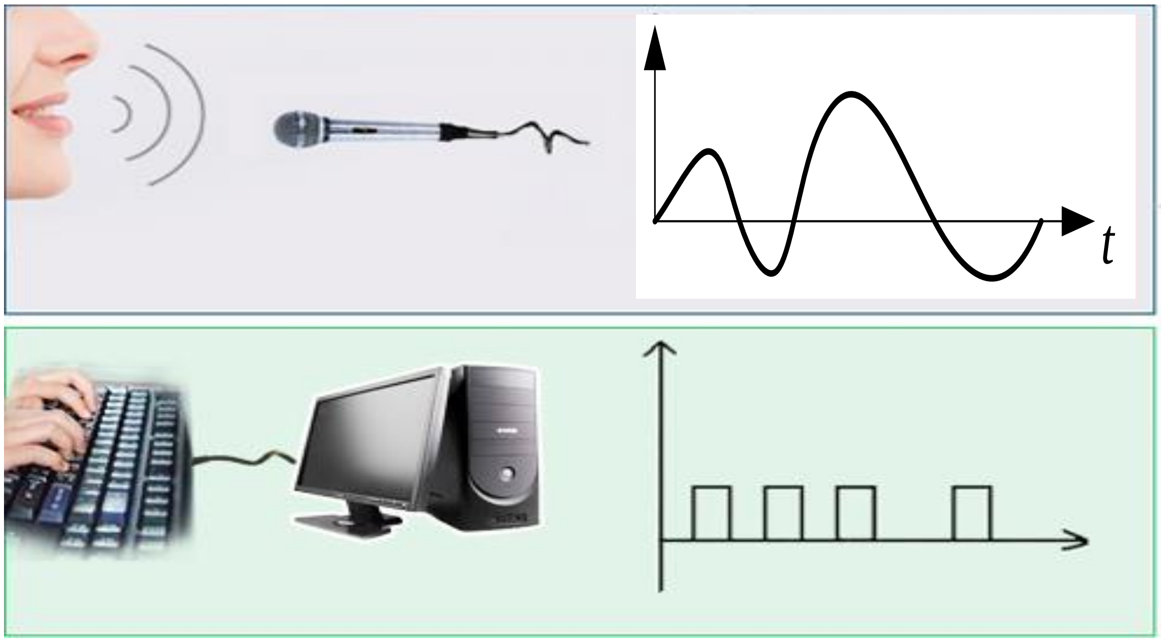
通信系统形式上传输的是消息，但实质上传输的是信息。

消息只是表达信息的工具，表达信息的客体。信息较抽象，而消息是具体的。

■ 三者关系



消息 ~ 电信号的转换:



- 话筒（声音传感器）把声音转变成音频信号；
- 数字终端把符号转变成数字信号；
- 摄像机把图像转变成视频信号；
- 热敏电阻（温度传感器）把温度转变成电信号。

基于以上对消息、信息和信号的理解：

通信：就是利用电信号传输消息中所包含的信息。

完成通信过程所需的电子设备和信道的总体—— communication system

通信系统

2.2信息的度量

2.2.1 自信息

根据香农的有关信息的定义，信息如何测度呢？当人们收到一封电报，或听了广播，或看了电视，到底得到多少信息量呢？显然，信息量与不确定性消除的程度有关。**消除多少不确定性，就得多少信息量**。那么，不确定性（uncertainty）的大小能度量吗？

“明天降雨量将有一毫米” -- 信息量小
“明天降雨量将达到一米” -- 信息量大
“明日太阳将从东方升起” -- 信息量零

用数学的语言来讲，不确定就是随机性，具有不确定性的事件就是随机事件。因此，可运用研究随机事件的数学工具——概率论和随机过程来测度不确定性的大小。若从直接概念来讲，不确定性的大小可以直观地看成是事先猜测某随机事件是否发生的难易程度。

我们把某事物各种可能出现的不同状态，即所有可能选择的消息的集合，称为**样本空间**。

每个可能选择的消息是这个样本空间的一个**元素**。

对于离散消息的集合，概率测度是对每一个可能选择的消息指定一个概率（这个概率是非负的，且所有消息的概率和为1）。

一个样本空间和它的概率测度称为一个**概率空间**。

一般概率空间用$[X, p(x)]$来表示。

在离散情况下，概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ p(x_1), & p(x_2), & \cdots, & p(x_n) \end{bmatrix}$$

且有 $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

其中$p(x_i)$就是选择符号x_i作为消息的概率，称作为**先验概率**。

消息（符号）的**自信息**

$$I(x_i)=\log_a\frac{1}{p(x_i)}=-\log_a p(x_i)$$

$I(x_i)$代表两种含义：

当事件x_i发生以前，表示事件x_i发生的不确定性；

当事件x_i发生以后，表示事件x_i所含有（或所提供）的信息量。

- 通常取 $a = 2$，此时单位为“比特”。

- 例：对于一个等概率、二进制码元：

$$I = \log_2 [1/P(x)] = \log_2 [1/(1/2)] = 1 \text{ 比特}$$

- 对于一个等概率、M进制码元：

$$I = \log_2 [1/P(x)] = \log_2 [1/(1/M)]$$

$$= \log_2 M \quad \text{比特}$$

若 $M = 2^k$，则 $I = k$ 比特

[例] 设英文字母 E 出现的概率为0.105，x 出现的概率为0.002。试求E及x的自信息。

解： 英文字母E出现的概率为，$p(E)=0.105$

其自信息为

$$I_E=\log_2\frac{1}{p(E)}=\log_2\frac{1}{0.105}=3.25bit$$

字母x出现的概率为，$p(x)=0.002$

其自信息为

$$I_x=\log_2\frac{1}{p(x)}=\log_2\frac{1}{0.002}=8.97bit$$

2.2.2 信息熵

设离散信息源是一个由n个符号组成的集合，称符号集。符号集中的每一个符号 x_i 在消息中是按一定概率 $p(x_i)$ 独立出现的，其概率空间为

$$\begin{bmatrix} X \\ p(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ p(x_1), & p(x_2), & \cdots, & p(x_n) \end{bmatrix},$$

且有 $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$ 则 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 所包含的信息量分别为：

$$-\log_2 p(x_1), -\log_2 p(x_2), \cdots, -\log_2 p(x_n)$$

于是，该信源每个符号所含信息量的统计平均值，即平均信息量为

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log_2 p(x_i) \qquad (bit/\text{符号})$$

信息熵有三种物理含义：

（1）信息熵 $H(X)$表示信源输出后，每个离散消息所提供的平均信息量。

（2）信息熵 $H(X)$ 表示信源输出前，信源的平均不确定度。

（3）信息熵 $H(X)$ 反映了变量的随机性。

[例] 某信息源的符号集由A，B，C，D和E组成，设每一符号独立出现，其出现概率分别为1/4，1/8，1/8，3/16和5/16。试求该信息源符号的平均信息量。

解： 该信息源符号的平均信息量为

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log p(x_i)$$

$$= -\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16} = 2.23 bit/\text{符号}$$

当离散信源的每一符号等概率出现时，即$P(x_i) = 1/n$ $(i=1,2,\ldots n)$时，此时的熵最大。

最大熵值为$\log_2 n$ (比特/符号)。

以上我们讨论了离散消息的度量。
类似，关于连续消息的信息量可用概率密度来描述。
可以证明，连续消息的平均信息量（相对熵）为

$$h(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log_a p(x) dx$$

2.3 信号的概念及分类

2.3.1 基本概念

通信的目的是为了获取信息。信息是人类社会和自然界中需要传递、交换、存储和提取的抽象内容。由于信息是抽象的内容，为了传送和交换信息，必须通过语言、文字、图像和数据等将它表示出来。

即信息通过消息来表示。

信号：消息的载体

通信系统中传输的是信号

2.3.2 信号的分类

1、确知信号与随机信号

• 确知信号：

能够以确定的时间函数表示的信号，它在定义域内任意时刻都有确定的函数值。例如电路中的正弦信号和各种形状的周期信号等。

•随机信号：

在事件发生之前无法预知信号的取值，即写不出明确的数学表达式，通常只知道它取某一数值的概率。

2、周期信号与非周期信号

•周期信号：每隔一个固定的时间间隔重复变化的信号。周期信号满足下列条件

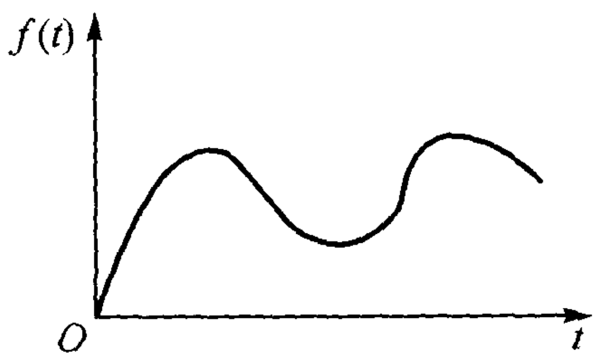
$$f(t)=f(t+nT),n=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,\qquad -\infty<t<\infty$$

•非周期信号：不具有重复性的信号。

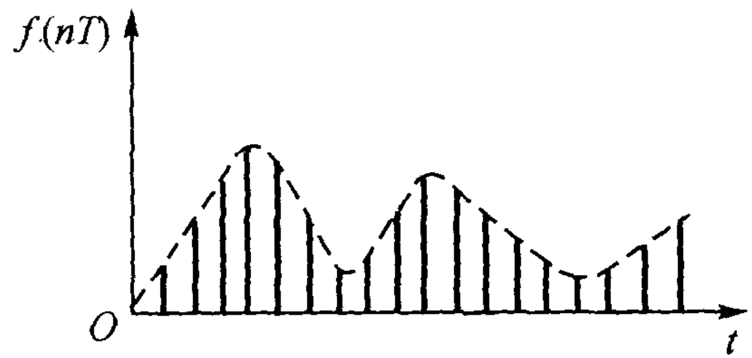
3、模拟信号与数字信号

•模拟信号：

代表消息的信号参量（幅度、频率或相位）随消息连续变化的信号。 但在时间上可以连续，也可以离散。



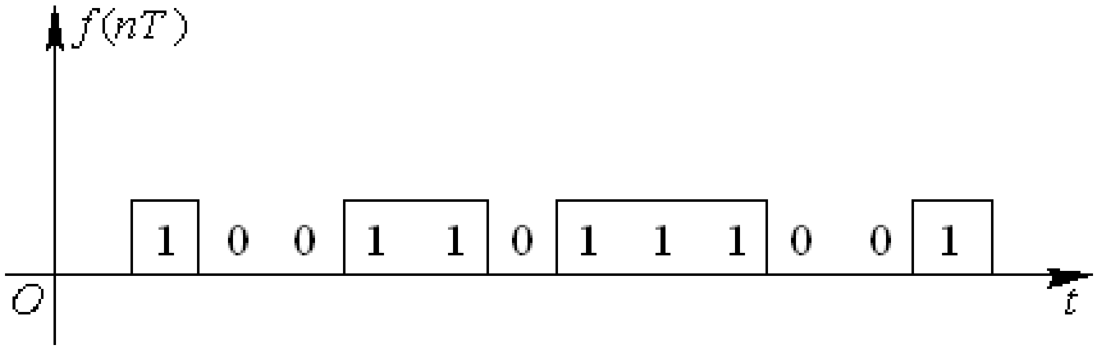
（a）时间连续的模拟信号



（b）时间离散的模拟信号

•数字信号：

它不仅在时间上离散，而且在幅度取值上也是离散的信号。



数字信号示意图

模拟信号和数字信号可以通过一定的方法实现相互转换。

如语音编码器可以实现模拟语音信号转化为数字语音，语音译码器可以实现数字语音转化为模拟语音。

通常使用的A/D和D/A转换器就是实现模拟信号和数字信号之间的相互转换。

2.4 信号的一般特性

信号的一般特性表现为它的**时域特性**和**频域特性**。

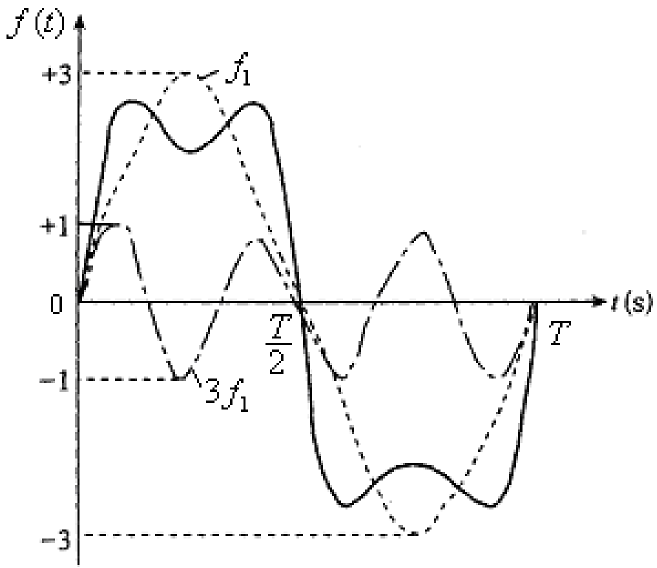
时域特性：信号电压或电流**随时间的变化关系**。

频域特性：任意信号可以表示为许多不同频率的正弦信号的线性组合，这些正弦信号所包含的频率范围，称为该信号的**频谱**。

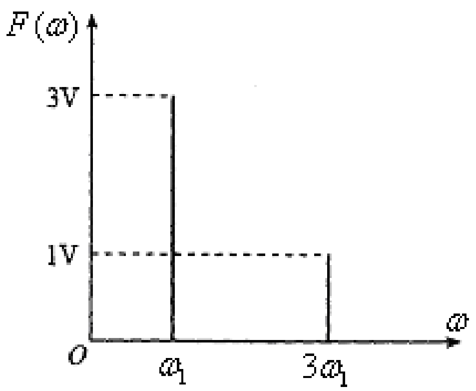
- 通常用$F(\omega)$表示时域信号$f(t)$的频谱。
- 信号$f(t)$的绝对带宽为频谱$F(\omega)$的带宽，单位为赫兹(Hz)。

[例] 设有一个信号为 $f(t)=3\sin\omega_1 t+\sin 3\omega_1 t$

式中，$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=2\pi f_1$，则信号的信号特征如图所示：
图（a）为信号*f(t)*的时域图；
图（b）为对应*f(t)*的频谱图，其频谱从$f_1(Hz)$延续到$3f_1(Hz)$，其带宽为$2f_1$Hz。



图（a）



图（b）

根据傅里叶变换的原理，任何一个周期为T的周期信号，只要满足狄里赫利条件，则可展开为傅里叶级数

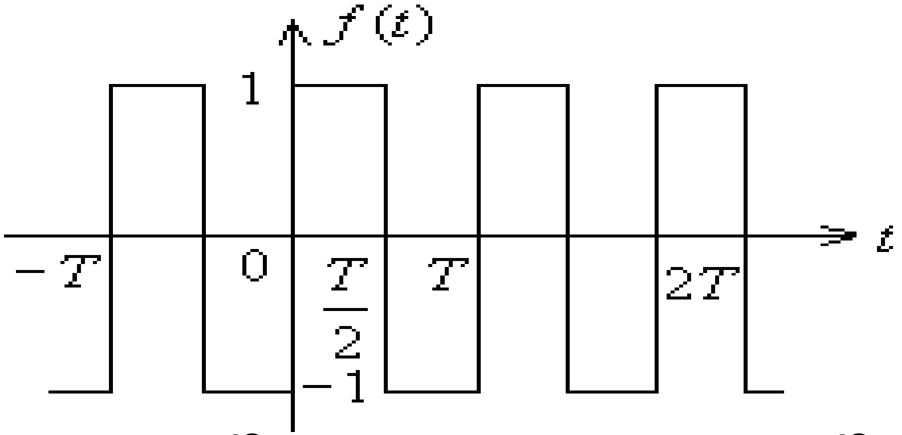
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t]$$ 其中，$\omega_0=2\pi/T$ 为基波角频率；

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt$$ $f(t)$的均值（直流分量）

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega_0 tdt$$ $f(t)$的第n次余弦波的振幅

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega_0 tdt$$ $f(t)$的第n次正弦波的振幅

例： 将下图中的方波信号展开为傅里叶级数



解：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\cos(n\Omega t)dt+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\cos(n\Omega t)dt$$

$$=\frac{1}{n\Omega}\cdot\frac{2}{T}\left[-\sin(n\Omega t)\right]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{1}{n\Omega}\cdot\frac{2}{T}\left[-\sin(n\Omega t)\right]\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0}+\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$\Omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow a_n=0 \qquad n=0,1,2,3,\ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}(-1)\sin(n\Omega t)dt + \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\sin(n\Omega t)dt$$

$$= \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}\cos(n\Omega t)\Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} + \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{n\Omega}\left[-\cos(n\Omega t)\right]\Big|_{0}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right] + \frac{1}{n\pi}\left[-\cos(n\pi)\right] + \frac{1}{n\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos(n\pi)\right] = \begin{cases} 0, & n = 2,4,6,8,\ldots\ldots \\ \frac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5,7,\ldots\ldots \end{cases}$$

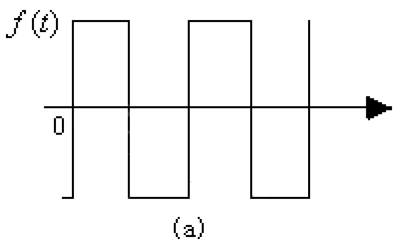
$$a_n = 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

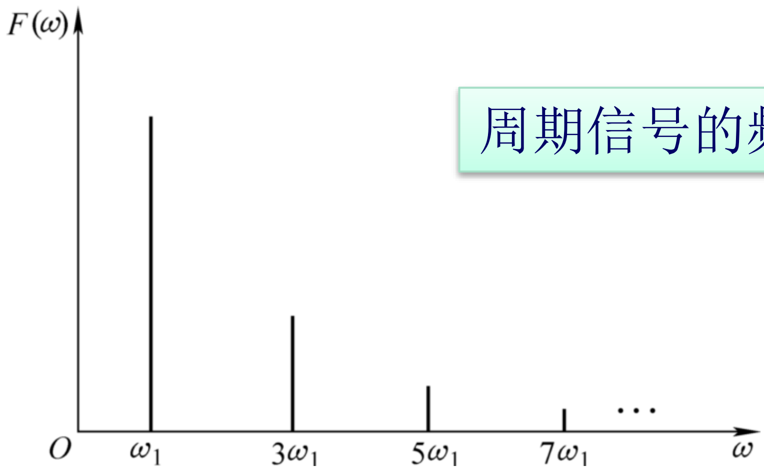
$$b_n = \begin{cases} 0 , & n = 2, 4, 6, 8, \ldots\ldots \\ \dfrac{4}{n\pi} , & n = 1, 3, 5, 7, \ldots\ldots \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}[\sin(\Omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\Omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\Omega t) + \ldots + \frac{1}{n}\sin(n\Omega t) + \ldots]$$

$$n = 1, 3, 5, \cdots$$

它仅含有一、三、五、七.... 等奇次谐波分量。





周期信号的频谱是离散谱

周期方波信号

周期方波的频谱示意图

图（b）为的基波，

图（c）为3次谐波，

图（d）为5次谐波，

图（e）为7次谐波等。

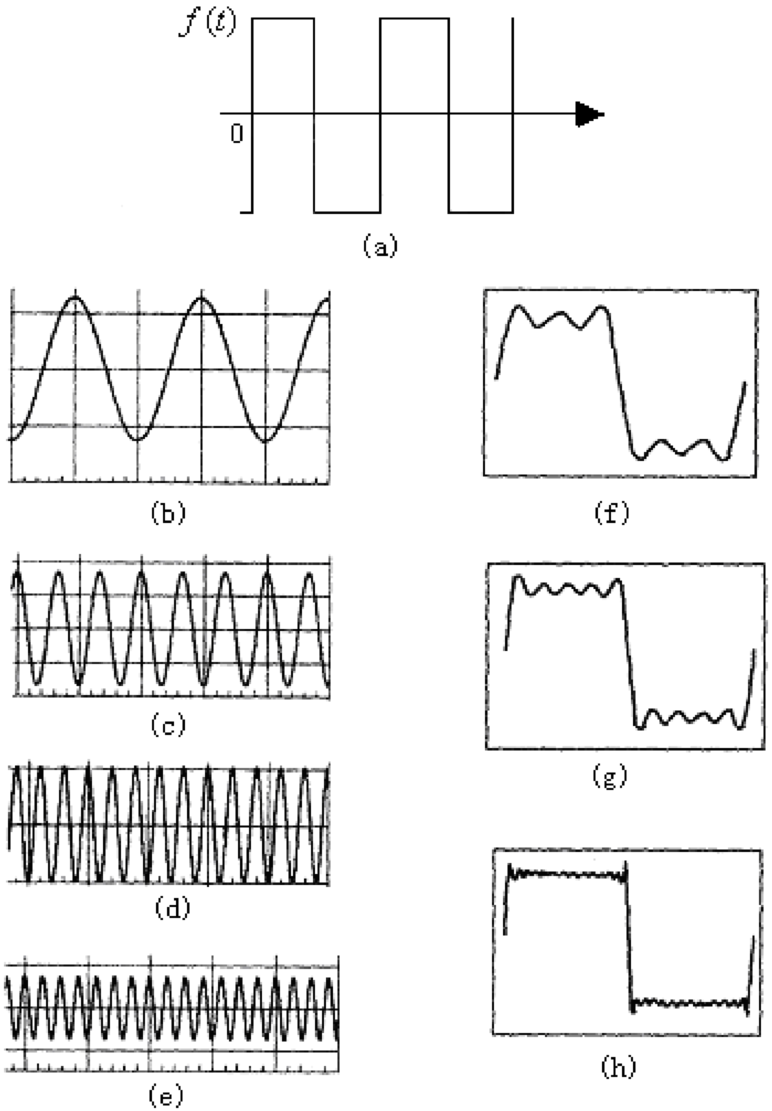
把这些谐波相加，又可以反过来合成为方波。

图（f）是基波与3次谐波和5次谐波合成的结果，

图（g）是基波和3次谐波…直到9次谐波合成的结果，

图（h）是基波和3次谐波…直到27次谐波合成的结果。

可见，含有的高次谐波次数越多，合成后的波形越逼近原来的方波。



周期方波的分解与合成过程

对于非周期信号来说，其频谱将是连续的频谱，则傅里叶级数就变成了傅里叶积分，可表示为：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

两式称为傅里叶变换对，表示为：

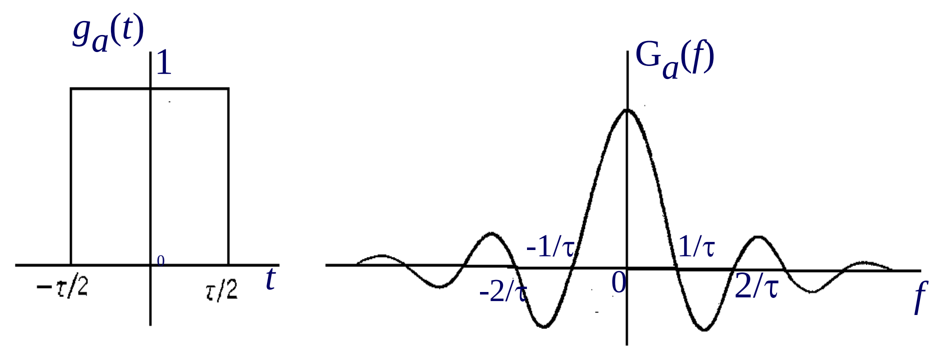
$$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$$

【例】试求一个矩形脉冲的频谱特性。

设 $g_a(t)=\begin{cases}1 & |t|\le \tau/2\\ 0 & |t|>\tau/2\end{cases}$ - 单位门函数

它的傅里叶变换为

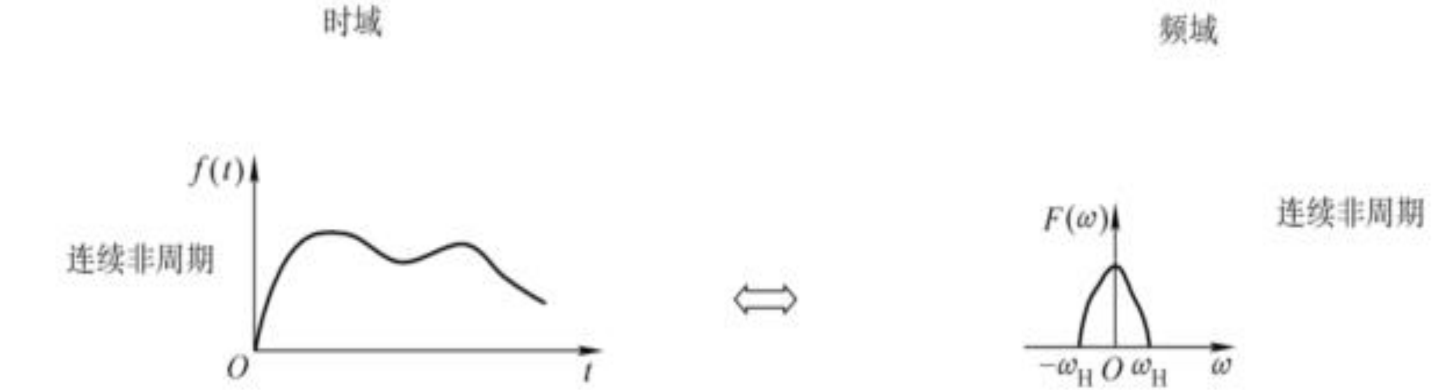
$$G_a(f)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2}e^{-j2\pi ft}dt=\frac{1}{j2\pi f}(e^{j\pi f\tau}-e^{-j\pi f\tau})=\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}=\tau\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$



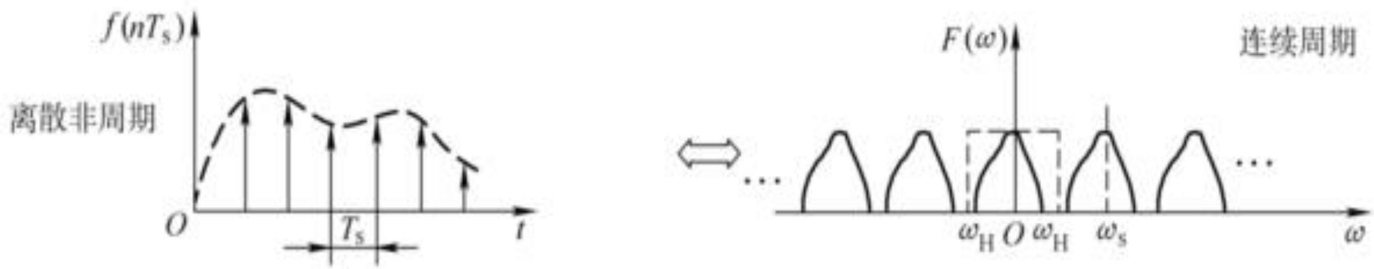
(a) $g_a(t)$　(b) $G_a(f)$

单位门函数

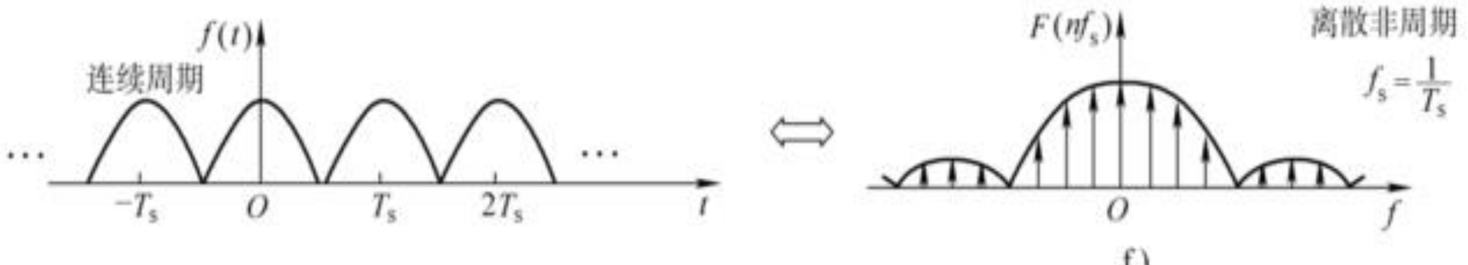
$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$



连续非周期的时间函数对应的频谱也是**连续非周期函数**



离散非周期序列函数对应的频谱是**周期性的连续函数**



连续周期函数对应的频谱是非周期的**离散序列函数**

信号的时域和频域之间的关系

2.5 随机信号概述

2.5.1 随机变量

- 在概率论中，将每次试验的结果用一个变量X来表示，如果变量的取值*x*是随机的，则称变量X为**随机变量**。
- 当随机变量X的取值个数是有限个时，则称它为**离散随机变量**；否则就称为**连续随机变量**。
- 随机变量的统计规律用**概率分布函数**或**概率密度函数**来描述。

（1）**概率分布函数 F(x)**

定义随机变量X的概率分布函数$F(x)$是取值小于或等于某个数值x的概率，即

$$F(x)=P(X\le x)$$

上述定义中，随机变量可以是连续随机变量，也可以是离散随机变量。

对于离散随机变量，其分布函数也可表示为

$$F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_i\le x}P(x_i)\qquad i=1,2,3,\cdots$$

式中，$P(x_i)(i=1,2,3,\cdots)$ 是随机变量X取值为x_i 的概率。

（2）**概率密度函数**

对于连续随机变量X，其分布函数F(x)对于一个非负函数*f(x)*有下式成立

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

则*f(x)*称为随机变量的**概率密度函数**（简称概率密度）。

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

2、随机变量的数字特征

（1）数学期望

数学期望（简称均值）是用来描述随机变量X的统计平均值，它反映随机变量取值的集中位置。

对于离散随机变量X，设 $P(x_i)(i=1,2,\cdots,k)$ 是其取值为x_i 的概率，则其数学期望定义为：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}x_iP(x_i)$$

对于连续随机变量，其数学期望定义为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

$f(x)$为随机变量X的概率密度函数。

（2）方差

方差反映随机变量的取值偏离均值的程度。方差定义为随机变量X与其数学期望之差的平方的数学期望。

$$D[X]=E[X-E(X)]^2$$

对于离散随机变量，上式方差的定义可表示为

$$D[X]=\sum_i [x_i-E(X)]^2 P_i$$

P_i 是随机变量X取值为x_i的概率。

对于连续随机变量，方差的定义可表示为

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}[x_i-E(X)]^2 f(x)dx$$

还可以表示为

$$D[X]=E[X-E(X)]^2=E\left[X^2-2XE(X)+E^2(X)\right]=E(X^2)-E^2(X)$$

[例] 设X是取值0、1、2、3、4、5等概率分布的离散随机变量，求其均值和方差。

解：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{k}x_iP(x_i)=0\times1/6+1\times1/6+2\times1/6+3\times1/6+4\times1/6+5\times1/6=2.5$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{k}x_i^2P(x_i)=0^2\times1/6+1^2\times1/6+2^2\times1/6+3^2\times1/6+4^2\times1/6+5^2\times1/6=9.17$$

则：

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=9.17-2.5^2=2.92$$

- **均值** ---摆动中心

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx = a(t)$$ --- t 的确定函数

- **方差** ---偏离程度

$$D[\xi(t)] = E\left\{ [\xi(t) - a(t)]^2 \right\}$$
$$= E[\xi^2(t)] - [a(t)]^2 = \sigma^2(t)$$

当 $a(t)=0$ 时：

$$\boxed{\sigma^2(t) = E[\xi^2(t)]}$$

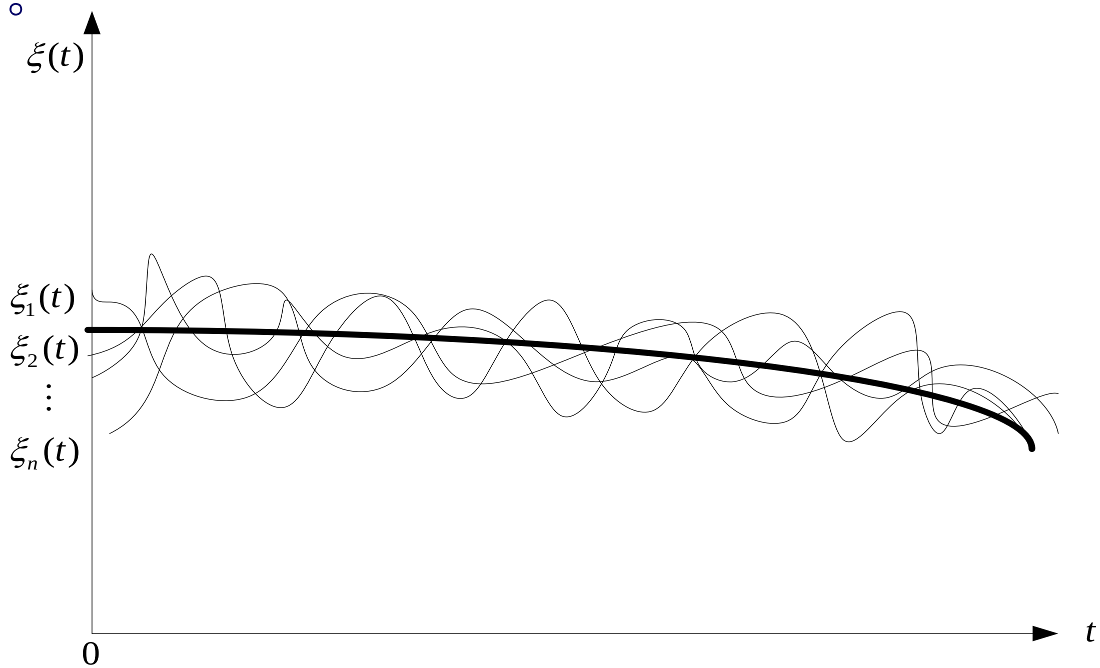
2.5.2 随机过程的一般表述

什么是随机过程？

- 随机过程是一类随时间作随机变化的过程，它不能用确切的时间函数描述。可从两种不同角度理解：
- 角度1：对应不同随机试验结果的时间过程的集合。

【例】 设有n台性能完全相同的接收机，工作条件完全相同。用n台示波器同时观测并记录这n台接收机的输出噪声波形 。记录的是n条随时间起伏且各不相同的波形。

- **样本函数$\xi_i(t)$：** 随机过程的一次实现，是确定的时间函数。
- **随机过程：** $\xi(t) =\{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)\}$是全部样本函数的集合。



- 角度2：随机过程是随机变量概念的延伸。
  - 在任一给定时刻t_1上，每一个样本函数$\xi_i(t)$都是一个确定的数值$\xi_i(t_1)$，但是每个$\xi_i(t_1)$都是不可预知的。
  - 在一个固定时刻t_1上，不同样本的取值$\{\xi_i(t_1), i = 1, 2, \ldots, n\}$是一个随机变量，记为$\xi(t_1)$。
  - 换句话说，随机过程在任意时刻的值是一个随机变量。
  - 因此，我们又可以把**随机过程**看作是在时间进程中处于不同时刻的**随机变量的集合**。
  - 这个角度更适合对随机过程理论进行精确的数学描述。

- **随机过程定义：** 随时间变化的无数个随机变量的集合为随机过程。
- **基本特征：** 它是时间t的函数，但在任一确定时刻上的取值是不确定的，是一个随机变量。
- 通信过程中的随机信号和噪声均可归纳为依赖于时间t的随机过程。

随机过程的分布函数和概率密度

- 设$\xi(t)$表示一个随机过程，则它在任意时刻t_1的值$\xi(t_1)$是一个随机变量，其统计特性可以用**分布函数**或**概率密度函数**来描述。
- 随机变量$\xi(t_1)$小于或等于某一数值x_1的概率 $P[\xi(t_1) \le x_1]$ 记作

$$F_1(x_1, t_1) = P[\xi(t_1) \le x_1]$$

称之为随机过程$\xi(t)$的**一维分布函数。**

- 若对x_1偏导存在

$$f_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

称之为随机过程$\xi(t)$的**一维概率密度函数。**

- 一维分布函数或一维概率密度函数仅仅描述了随机过程在任一瞬间的统计特性，对随机过程描述不充分。

- 随机过程$\xi(t)$ 的**二维分布函数：**

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2,) = P\left\{ \xi(t_1) \le x_1, \xi(t_2) \le x_2 \right\}$$

- 随机过程$\xi(t)$的**二维概率密度函数：**

$$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}$$

若上式中的偏导存在的话。

任意给定，$t_1, t_2, \cdots, t_n$ ，则 $\xi(t)$ 的**n维分布函数**被定义为

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P(\xi(t_1) \le x_1, \xi(t_2) \le x_2, \ldots, \xi(t_n) \le x_n)$$

如果存在

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

则称 $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 为 $\xi(t)$ 的**n维概率密度函数**。

显然，n越大，对随机过程统计特性的描述就越充分，但问题的复杂性也随之增加。在一般实际问题中，引用二维概率密度函数即可解决问题。

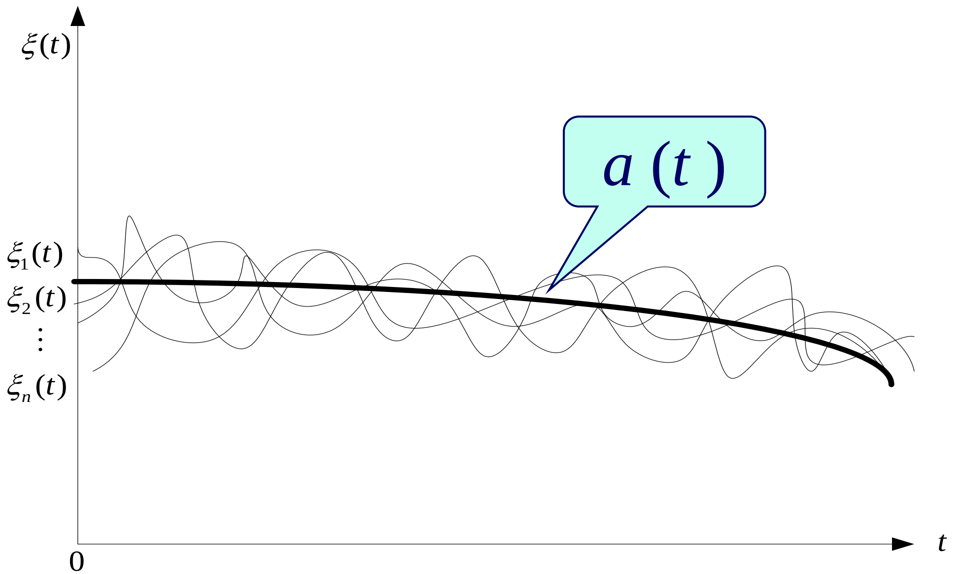
二、随机过程的数学特征

1、数学期望（统计平均值）

随机过程$\xi(t)$的**数学期望**定义为

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx$$

$\xi(t)$的均值是时间的确定函数，常记作**a(t)**，它表示随机过程的n个样本函数曲线的摆动中心：



2、方差

$$D[\xi(t)] = E\left\{[\xi(t) - E[\xi(t)]^2 \right\}$$

方差常记为$\sigma^2(t)$。

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= E\left[\xi^2(t) - 2a(t)\xi(t) + a^2(t)\right] \\ &= E[\xi^2(t)] - 2a(t)E[\xi(t)] + a^2(t) \\ &= E[\xi^2(t)] - a^2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x,t)dx - [a(t)]^2 \end{aligned}$$

均方值

均值平方

所以，方差等于均方值与均值平方之差，它表示随机过程在时刻 t 对于均值$a(t)$的偏离程度。

3、自相关函数和自协方差

衡量同一随机过程在任意两个时刻上获得的随机变量的统计相关特性时，常用自协方差和自相关函数来表示。

- 自相关函数 $R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\xi(t_2)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

式中， $\xi(t_1)$和$\xi(t_2)$分别是在t_1和t_2时刻观测得到的随机变量。可以看出，$R(t_1, t_2)$是两个变量t_1和t_2的确定函数。

- 自协方差函数

$$B(t_1,t_2)=E\{[\xi(t_1)-a(t_1)][\xi(t_2)-a(t_2)]\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x_1-a(t_1)][x_2-a(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

式中 $a(t_1)$ $a(t_2)$ — 在t_1和t_2时刻得到的$\xi(t)$的均值

$f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$ — $\xi(t)$的二维概率密度函数。

自相关函数和自协方差函数之间的关系：

$$B(t_1,t_2)=R(t_1,t_2)-a(t_1)a(t_2)$$

[例] 设随机过程 $X(t)=At+b$, $t>0$，其中 A 为高斯随机变量，b 为常数，且 A 的一维概率密度函数 $f_A(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/2}$，求 $X(t)$ 的均值和方差。

高斯过程：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

a — 均值

σ^2 — 方差

解： 由

$$f_A(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/2}$$

得出随机变量 A 的均值为 1，方差为 1，即 $E(A)=1$， $D(A)=1$。

因为 $X(t)=At+b$，所以 $E[X(t)]=E[At+b]=t+b$

同理，$D[X(t)]=D[At+b]=t^2$

2.5.3 平稳随机过程

若一个随机过程的任意n维分布函数或概率密度函数与时间起点无关。

也就是说，对于任意的正整数n和所有实数τ，随机过程$\xi(t)$的n维概率密度函数满足：

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

则称 $\xi(t)$ 为严平稳随机过程，或称狭义平稳随机过程。

- **性质：**

　　该定义表明，平稳随机过程的统计特性不随时间的推移而改变，即它的一维分布函数与时间t无关：

$$f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$$

而二维分布函数只与时间间隔$\tau=t_2-t_1$有关：

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$$

- **数字特征：**

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 = a$$

$$R(t_1, t_2) = E[\xi(t_1)\xi(t_1 + \tau)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R(\tau)$$

可见，（1）其均值与t无关，为常数a；

（2）自相关函数只与时间间隔τ有关。

把同时满足（1）和（2）的过程定义为**广义平稳随机过程**。显然，**严平稳随机过程必定是广义平稳的，反之不一定成立。**

在通信系统中所遇到的信号及噪声，大多数可视为平稳的随机过程。因此，研究平稳随机过程有着很大的实际意义。

狭义平稳

- 随机过程的统计特性与时间起点无关。
  - 一维分布则与时间 t 无关：　$f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$
  - 二维分布只与间隔 τ 有关：$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$

注意：

$$\boxed{\text{狭义平稳} \underset{\text{未必}}{\overset{\text{必}}{\rightleftarrows}} \text{广义平稳}}$$

广义平稳

- 均值与时间 t 无关：
- 相关函数仅与 τ 有关：

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= a \\ R(t_1,t_1+\tau) &= R(\tau) \end{aligned}}$$

2.平稳随机过程的特性

– 问题的提出：我们知道，随机过程的数字特征（均值、相关函数）是对随机过程的所有样本函数的统计平均，但在实际中常常很难测得大量的样本，这样，我们自然会提出这样一个问题：能否从一次试验而得到的一个样本函数$x(t)$来决定平稳过程的数字特征呢?

– 回答是肯定的。平稳过程在满足一定的条件下具有一个有趣而又非常有用的特性，称为“**各态历经性**”。

– 具有各态历经性的过程，其数字特征（均为统计平均）完全可由随机过程中的任一实现的时间平均值来代替。即：**统计平均=时间平均**。

设：$x(t)$是平稳过程$\xi(t)$的任意一次实现（样本），则其时间均值和时间相关函数分别定义为：

$$\bar{a} = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

$$\overline{R(\tau)} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

如果平稳过程使下式成立

$$\begin{cases} a = \bar{a} \\ R(\tau) = \overline{R(\tau)} \end{cases}$$

则称该平稳过程具有各态历经性。

即：平稳过程的统计平均值等于它的**任一次实现**的时间平均值，则该平稳过程具有**各态历经性**。

- “各态历经”的**含义**是：随机过程中的任一次实现都经历了随机过程的所有可能状态。因此，在求解各种统计平均（均值或自相关函数等）时，无需作无限多次的考察，只要获得一次考察，**用一次实现的“时间平均”值代替过程的“统计平均”值即可**，从而使测量和计算的问题大为简化。
- 具有各态历经的随机过程一定是平稳过程，反之不一定成立。**在通信系统中所遇到的随机信号和噪声，一般均能满足各态历经条件。**

【例】 设一个随机相位的正弦波为

$$\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$$

其中，A和ω_c均为常数；θ是在(0, 2π)内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$是否具有各态历经性。

【解】(1)先求$\xi(t)$的统计平均值：

数学期望

$$\begin{aligned} a(t) = E[\xi(t)] &= \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_c t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\omega_c t\cos\theta - \sin\omega_c t\sin\theta)d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi}[\cos\omega_c t\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta - \sin\omega_c t\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta] = 0 \end{aligned}$$

$$\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R(t_1,t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\ &= E[A\cos(\omega_c t_1 + \theta)\cdot A\cos(\omega_c t_2 + \theta)] \\ &= \frac{A^2}{2}E\{\cos\omega_c(t_2 - t_1) + \cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\theta]\} \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c(t_2 - t_1) + \frac{A^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos[\omega_c(t_2 + t_1) + 2\theta]\frac{1}{2\pi}d\theta \\ &= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c(t_2 - t_1) + 0 \end{aligned}$$

令$t_2 - t_1 = \tau$，得到

$$R(t_1,t_2) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau = R(\tau)$$

可见， $\xi(t)$的数学期望为常数，而自相关函数与t 无关，只与时间间隔τ 有关，所以$\xi(t)$是广义平稳过程。

$$\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$$

(2) 求$\xi(t)$的时间平均值

$$\overline{a} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t + \theta)dt = 0$$

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos(\omega_c t + \theta)\cdot A\cos[\omega_c(t+\tau)+\theta]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{2T}\left\{\int_{-T/2}^{T/2}\cos\omega_c\tau dt + \int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\theta)dt\right\}$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos\omega_c\tau$$

比较统计平均与时间平均，有

$$a = \overline{a},\ R(\tau) = \overline{R}(\tau)$$

因此，随机相位余弦波是各态历经的。

设x(t) 是平稳过程的任一个实现，它的时间平均值为：

$$\overline{a} = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

遍历

$$a = \overline{a}$$

$$R(\tau) = \overline{R(\tau)}$$

意义：

统计平均值=时间平均值

替代

使计算大为简化

注意：

$$\text{遍历过程} \underset{\text{未必}}{\overset{\text{必是}}{\rightleftarrows}} \text{平稳过程}$$

含义： 任一样本经历了平稳过程的所有可能状态。

自相关函数的性质

- 自相关函数的定义：$R(\tau)=E[\xi(t)\xi(t+\tau)]$
- 自相关函数的性质：

$R(0)=E[\xi^2(t)]$ — $\xi(t)$的平均功率

$R(\tau)=R(-\tau)$ — τ的偶函数

$|R(\tau)|\le R(0)$ — $R(\tau)$的上界

即自相关函数$R(\tau)$在$\tau=0$有最大值

$R(\infty)=E^2[\xi(t)]=a^2$ — $\xi(t)$的直流功率

$R(0)-R(\infty)=\sigma^2$ — 表示平稳过程$\xi(t)$的交流功率

当均值为0时，有 $R(0)=\sigma^2$ 。

【例】 设一平稳随机过程$X(t)$的自相关函数为

$$R_X(\tau)=25+\frac{4}{1+\tau^2}$$

求其均值和方差。

解： 由自相关函数的性质可得

$$R(0)=E[X^2(t)]=25+\frac{4}{1+0}=29$$

$$R(\infty)=E^2[X(t)]=25$$

所以均值为

$$E[X(t)]=\pm 5$$

方差为

$$\sigma^2=R(0)-R(\infty)=29-25=4$$

（3）频谱特性

平稳随机过程的频谱特性用功率谱密度来表征。

定义单位频带内信号的平均功率为功率谱密度（简称功率谱），单位为W/Hz，用$P_\xi(\omega)$来表示。

平稳随机过程的自相关函数与其功率谱密度之间互为傅里叶变换的关系：

$$\begin{cases} R(\tau) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \\ P_\xi(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{cases}$$

2.6 通信中噪声的概念

2.6.1 噪声的分类

1、按照来源分类

（1）人为噪声。它是由人类的活动产生的，例如电钻和电气开关瞬态造成的电火花、汽车点火系统产生的电火花、荧光灯产生的干扰、其它电台和家电用具产生的电磁波辐射等。

（2）自然噪声。它是自然界中存在的各种电磁波辐射，例如闪电、大气噪声，以及来自太阳和银河系等的宇宙噪声。

2、按照性质分类

（1）**脉冲噪声**。它是突发性地产生的幅度很大、持续时间很短、间隔时间很长的干扰。例如电火花。

（2）**窄带噪声**。它可以看作是一种非所需的连续的已调正弦波，或简单地就是一个幅度恒定的单一频率的正弦波。例如来自其他电子设备。

（3）**起伏噪声**。它是在时域和频域内都普遍存在的随机噪声。热噪声、电子管内产生的散弹噪声和宇宙噪声等都属于起伏噪声。

- 起伏噪声是无处不在的，是通信系统中最基本的噪声源。
- 起伏噪声是一种高斯噪声，且在相当宽的频率范围内其频谱是均匀分布的，好像白光的频谱在可见光的频谱范围内均匀分布那样，所以起伏噪声又常称为白噪声。
- 在讨论通信系统性能受噪声影响时，主要分析的是高斯白噪声的影响。
- 高斯噪声是指概率密度函数服从高斯分布（正态分布）的平稳随机过程。在实践中观察到的大多数噪声都是高斯过程，所以高斯噪声是通信领域中普遍存在的一类噪声。

2.6.2 高斯噪声

1、高斯噪声的性质

（1）若高斯过程是宽平稳随机过程，则它也是严平稳随机过程。也就是说，对于高斯过程来说，宽平稳和严平稳是等价的。

因为，若高斯过程是广义平稳的，即其均值与时间无关，协方差函数只与时间间隔有关，而与时间起点无关，则它的n维分布也与时间起点无关，故它也是严平稳的。

（2）若高斯过程中的随机变量之间互不相关，则它们也是统计独立的；

即其概率密度可以简化为

$$f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=\prod_{\mathrm{k}=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\mathrm{k}}}\exp[-\frac{(x_{\mathrm{k}}-a_{\mathrm{k}})^2}{2\sigma_{\mathrm{k}}^2}]$$

$$=f(x_1,t_1)\cdot f(x_2,t_2)\cdots\cdots f(x_n,t_n)$$

（3）若干个高斯过程之和的过程仍是高斯过程；

（4）高斯过程经过线性变换（或线性系统）后的过程仍是高斯过程

2、高斯噪声的一维概率密度函数

高斯过程的一维概率密度表示式为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]$$

a — 均值

σ^2 — 方差

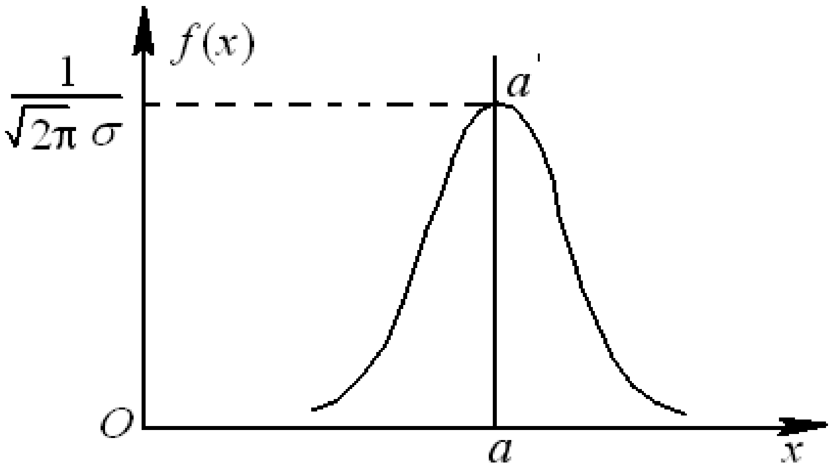


图2-10 高斯过程的一维概率密度函数

2.6.3 高斯白噪声

通信系统中，常会遇到这样一类噪声，它的功率谱密度均匀分布在整个频率范围内，即双边功率谱为

$$P_{\xi}(\omega)=\frac{n_0}{2} \qquad (-\infty<\omega<\infty)$$

这种噪声被称为白噪声，它是一个理想的宽带随机过程。

式中n_0为一常数，单位是瓦/赫兹。

显然，白噪声的自相关函数可借助于下式求得，即

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega=\frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$

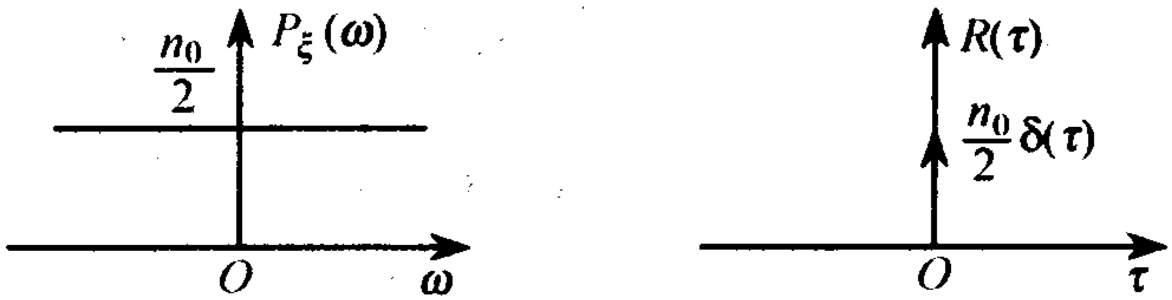
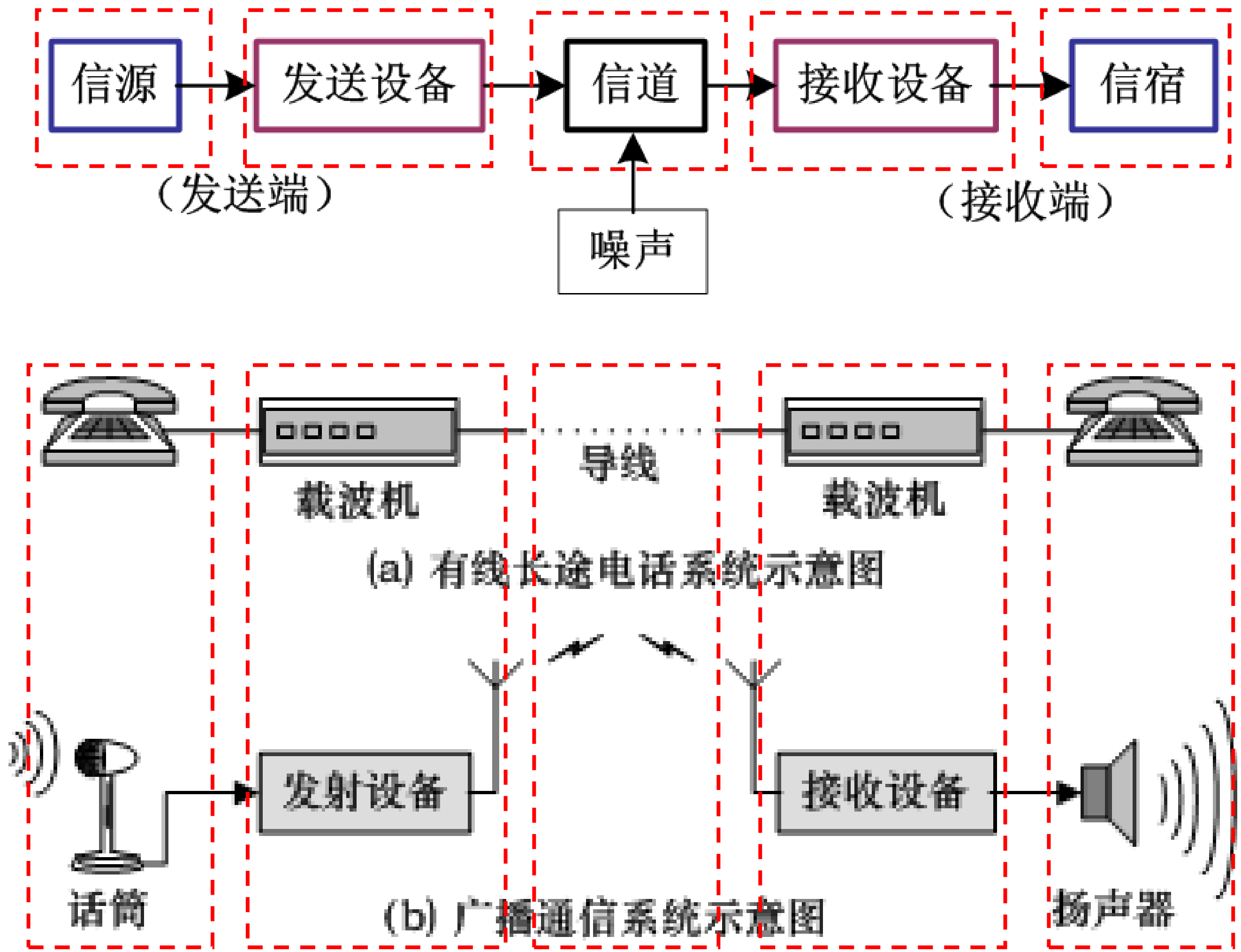


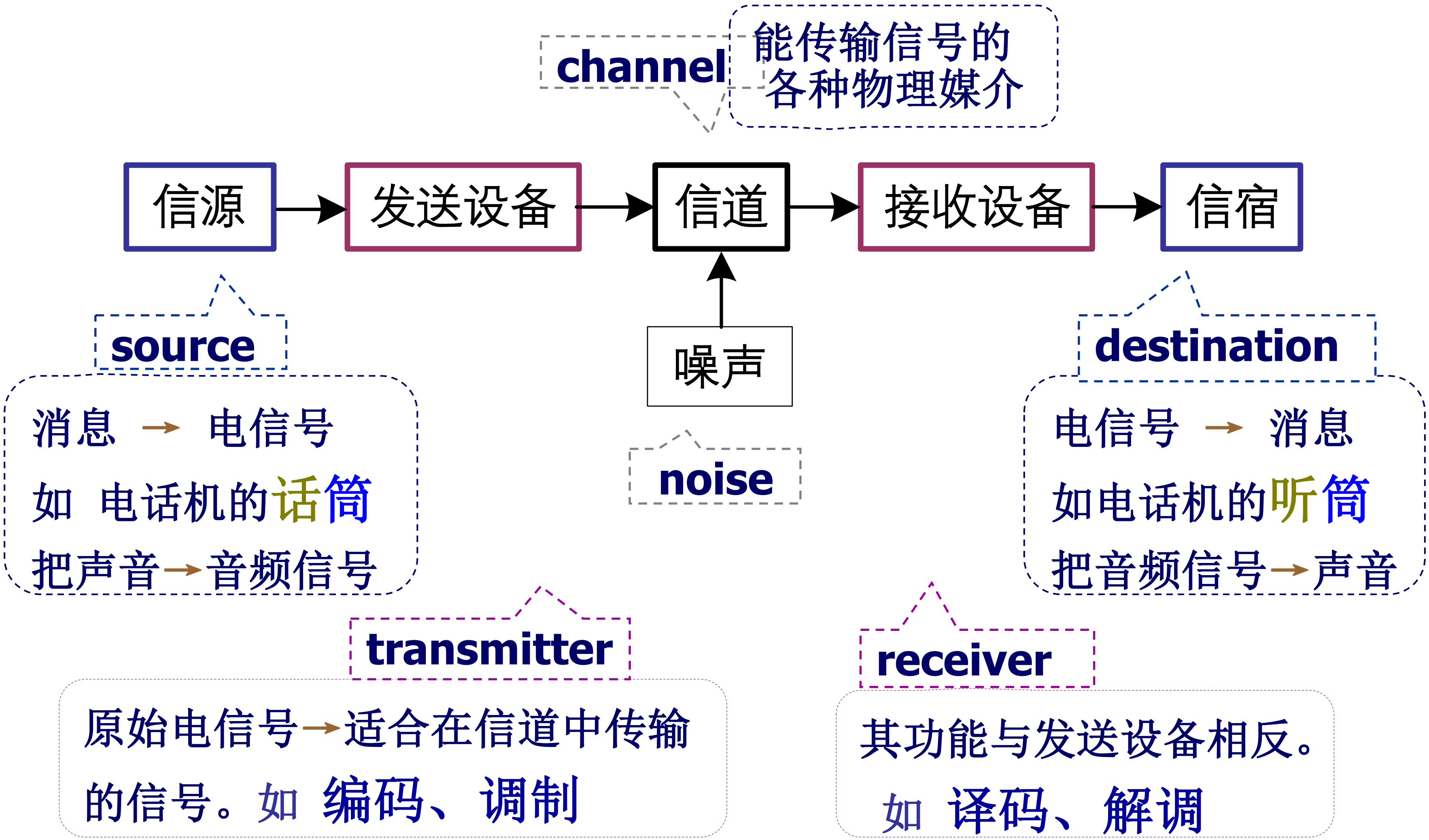
图2-11 白噪声的双边带功率谱密度和自相关函数

这说明，白噪声只有在$\tau=0$时才相关，而它在任意两个时刻上的随机变量都是互不相关的。

通信系统一般模型



信源
发送设备
信道
接收设备
信宿
（发送端）
噪声
（接收端）
导线
载波机
载波机
(a) 有线长途电话系统示意图
发射设备
接收设备
话筒
扬声器
(b) 广播通信系统示意图


channel
能传输信号的各种物理媒介
信源
发送设备
信道
接收设备
信宿
噪声
source
消息 → 电信号
如 电话机的话筒
把声音→音频信号
noise
destination
电信号 → 消息
如电话机的听筒
把音频信号→声音
transmitter
原始电信号→适合在信道中传输的信号。如 编码、调制
receiver
其功能与发送设备相反。
如 译码、解调

2.7 信息处理

2.7.1 信息处理的基本概念

信息处理的目的主要有：

①提高有效性；

②提高抗干扰性；

③改善主观感觉的效果；

④对信息进行识别和分类；

⑤分离和选择信息。

总的来说，是为了提高系统对某一方面的要求以及优化系统某一方面的性能指标。

2.7.2信息处理的主要手段

信息处理的主要手段是变换，即编、译码。

比如：

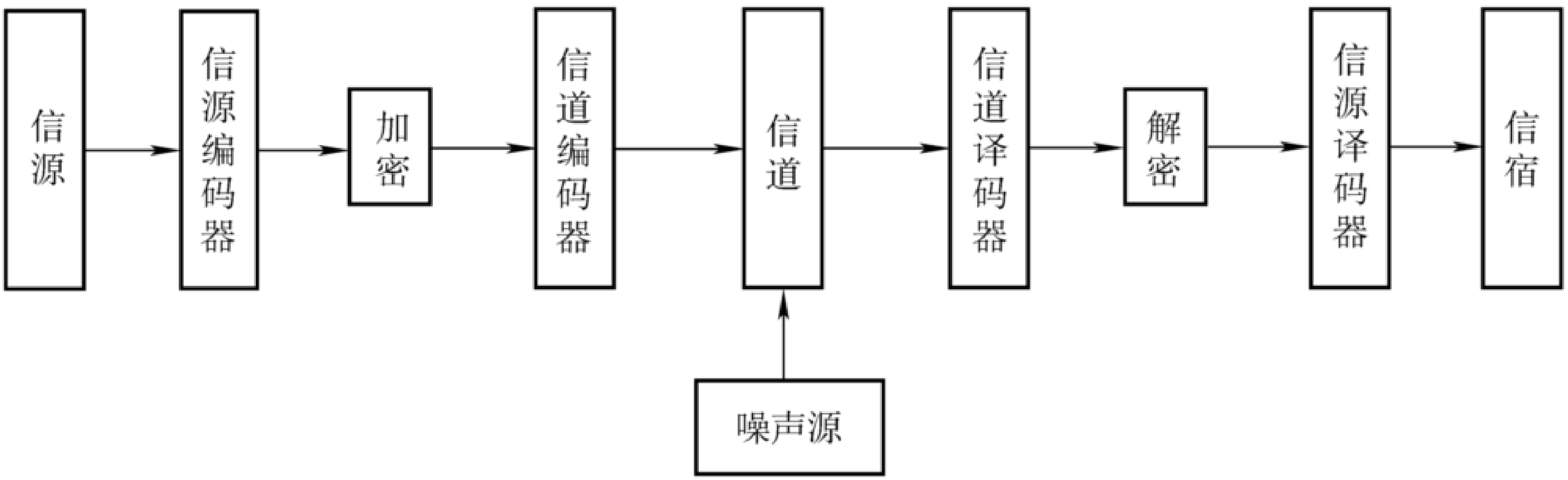
•为了提高系统的**有效性**，可以通过**信源编码**来实现；

•为了提高系统的**安全性**，可以通过**密码**来实现；

•为了提高系统的**可靠性**，可以通过**信道编码**来实现等。

由此，可将信息与通信中的基本问题归纳为三性：有效性、安全性和可靠性。

数字通信系统的原理方框图



数字通信系统原理方框图

要把信源（消息源）发出的消息所携带的信息，高速度、高质量地通过信道传送给信宿（受信者），需要进行以下几方面的信息处理：

1、信源编码

信源编码器有两个重要作用：

- 其一，当信息源为模拟信源时，信源编码器将模拟信源输出的模拟信号转换成数字信号（即A/D变换），以实现模拟信号的数字化传输；

- 其二，当信息源为数字信源（离散信源）时，信源编码器设法寻找适当的方法把信源输出符号序列变换为最短的码字序列（即压缩编码），以消除信源符号之间存在分布不均匀和相关性，减少冗余、提高编码效率，从而提高数字信号传输的有效性。

2、加密

加密的实质是为了解决通信与信息系统中信息传输、存储的安全性和保密性能。

3、信道编码

信道编码是在信息序列上附加上一些监督码元，利用这些冗余的码元，使原来不规律的或规律性不强的原始数字信号变为有规律的数字信号，其目的是实现信道与通信系统在可靠性指标下的优化。

作业

书上第二章课后

2-1，2-2，2-4，2-6，2-7，2-8

2-1 信息、信号、通信的含义是什么？

2-2 什么是确知信号？什么是随机信号？

2-4 什么是高斯白噪声？它的概率密度函数、功率谱密度函数如何表示？

2-6 简述信源编码和信道编码的作用。

2-7　试求下列均匀概率密度函数的数学期望和方差。已知

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a} & -a\leqslant x\leqslant a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

2-8　某平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 如图 2-13 所示。试求：(1)期望 $E[X(t)]$；(2)均方值 $E[X^2(t)]$；(3)方差 σ_x^2。

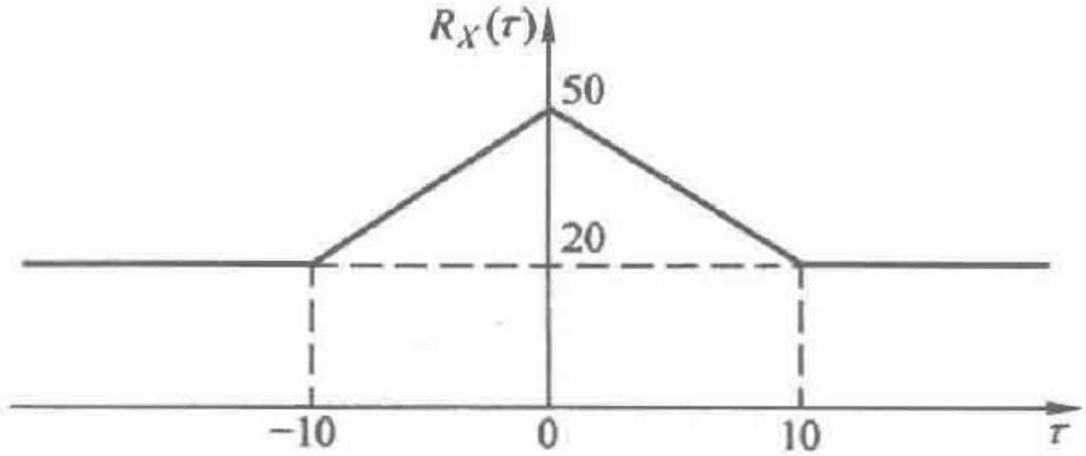


图 2-13　题 2-8 图