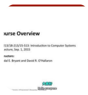
[读书笔记]CSAPP：4[VB]浮点数据类型


深度人工dazed
阿巴阿巴阿巴

视频地址：

【精校中英字幕】2015 CMU 15-213 CSAPP 深入理解计算机系统 课程视频_哔...
www.bilibili.com/video/av31289365?p=4



课件地址：

http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15213-f15/www/lectures/04-float.pdf
www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15213-f15/ww...

对应于书本的2.4。

如有错误请指出，谢谢。

---

1 浮点数简介

浮点表示对形如 $V = x \times 2^y$ 的有理数进行编码，比较适用于非常大的数字、非常接近0的数字。它常常不会太多关注运算的准确性，而是把实现的速度和简便性看得比数字精确性更重要。1985年提出了IEEE标准754，仔细制定了表示浮点数机器运算的标准，后续所有计算机都支持这个标准，极大提高了程序可移植性。

首先会介绍IEEE浮点表示方法，然后由于数字不能精确被表示，所以会介绍浮点数的舍入问题。最后介绍浮点数相关的运算。

2 IEEE浮点表示

IEEE浮点表示使用 $V = (-1)^s \times M \times 2^E$ 表示数字。其中包含三部分：

- **符号（Sign）s：**用来确定V的正负性，当s=0时表示正数，s=1时表示负数。用一个单独的符号位直接进行编码。
- **尾数（Significand）M：** 是一个二进制小数⁺，通常介于1和2之间的小数。使用k位二进制进行编码的小数。
- **阶码⁺（Exponent）E：**对浮点数进行加权。使用n位进行编码的正数 $e_{k-1}, e_{k-2}, \dots, e_0$。

C语言中有单精度精浮点数 `float` ，其中s=1、k=8、n=23；还有双精度浮点数⁺ `double` ，其中s=1、k=11、n=52。

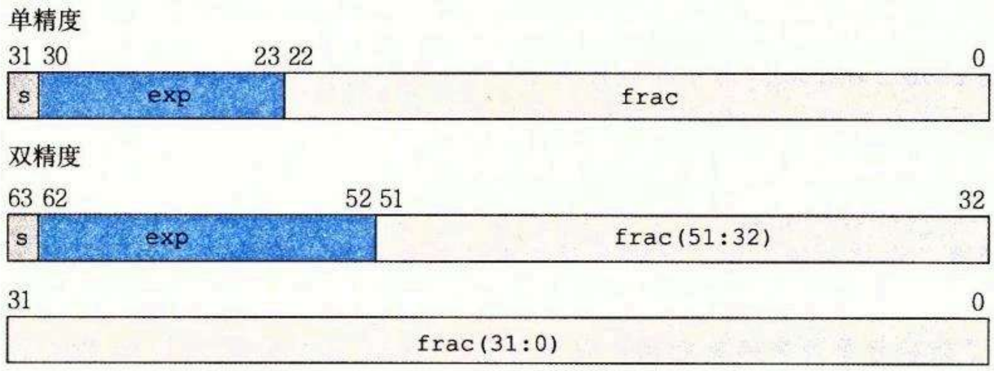


图 2-32 标准浮点格式(浮点数由 3 个字段表示。两种最常见的格式是它们被封装到 32 位(单精度)和 64 位(双精度)的字中)

我们可以根据尾数和阶码的不同取值，将其分成三种情况：

1. **规格化的值**：当 $exp \in (0, 2^w - 1)$ 时， $E = exp - Bias$ ，其中 $Bias = 2^{k-1} - 1$ ，由此能将E重新投影到正负值，并且能够和非规格化进行平滑； $M = 1 + frac$ ，因为我们可以通过调整E使得 $1 \leq M < 2$ ，所以通过这种形式将尾数变成 $1.f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_0$ 的形式，就能获得额外的精度。g规格化数能够表示大范围的数。
2. **非规格化的值**：当 $exp = 0$ 时， $E = 1 - Bias$ ，由此来保证和规格化值的连续性； $M = frac = 0.f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_0$ 。非规格化数⁺能够表示正负0以及趋近于0的数。
3. **特殊值**：当阶码全为1时，如果尾数全为0，则表示无穷，比如两个很大的数相乘，或除以0时；否则表示NaN（Not a Number），比如求-1的根号。

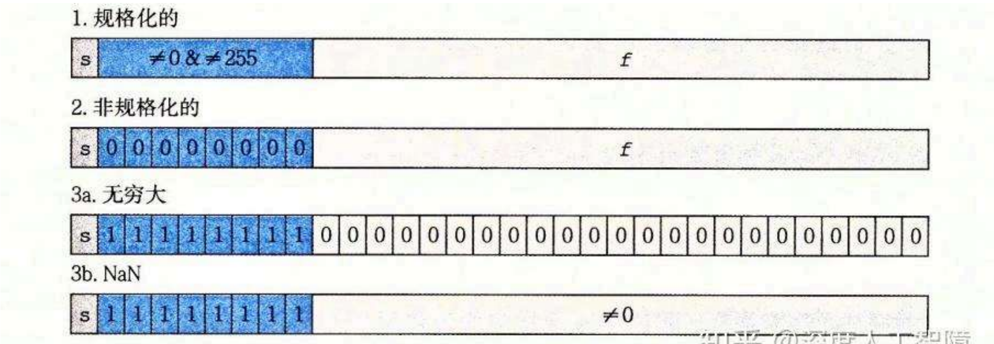


图 2-33 单精度浮点数值的分类(阶码的值决定了这个数是规格化的、非规格化的或特殊值)

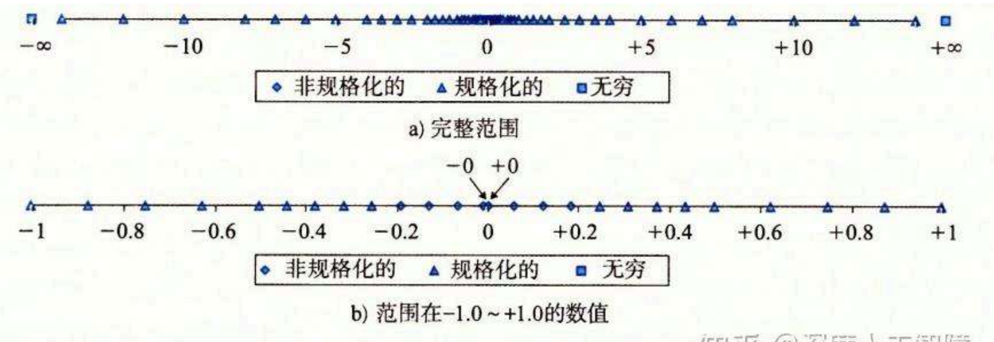


图 2-34 6 位浮点格式可表示的值(k=3 的阶码位和 n=2 的尾数位。偏置量是 3)

通过上面我们可以观察到几个**现象**：

1. 非规格数稠密地分布在靠近0的区域；
2. 有些数的间隔是等距的，因为当exp值不变，在 `frac` 尾数区域进行增加会乘上相同的指数；
3. 越大的数间隔越大，因为比较大的数，它的指数 2^E 会比较大，使得每次变化量会比较大。

根据二进制编码计算数值：

1. 计算 $Bias = 2^{k-1} - 1$
2. 计算阶码的值exp和尾数的值frac

3. 如果为规格化值，则 $E = exp - Bias$ ， $M = 1 + frac$ ；如果为非规格化值，则 $E = 1 - Bias$ ， $M = frac$ 。
4. 计算最终的值 $V = (-1)^s \times M \times 2^E$

我们以正数为例（s=0），说明几个比较**特殊的值：**

- **0：** 只有非规格化才能表示0，exp和frac全部为0时，结果为0。
- **最小的正非规格化数：** $E = 1 - (2^{k-1} - 1) = 2 - 2^{k-1}$ 是固定值，在frac取值范围内的最小值正数是 $[0, 0, \ldots, 1]$ ，则 $M = frac = 2^{-n}$ ，所以 $V = M \times 2^E = 2^{-n} \times 2^{2-2^{k-1}} = x^{-n+2-2^{k-1}}$ 。
- **最大非规格化数：** E还是固定值 $2 - 2^{k-1}$ ，在frac取值范围内的最大值是 $[1, 1, \ldots, 1, 0]$ ，则 $M = frac = 1 - 2^{-n}$ ，所以 $V = (1 - 2^{-n}) \times 2^{2-2^{k-1}}$ 。
- **最小规格化数：** exp的最小值为 $[0, 0, \ldots, 0, 1] = 1$ ，所以 $E = exp - Bias = 1 - (2^{k-1} - 1) = 2 - 2^{k-1}$ ；frac全0时，M取得最小值1，所以 $V = 2^{2-2^{k-1}}$ 。
- **1：** 要表示1，则需要用规格化⁺来表示，当frac全为0时，M=1，需要让E=0，则 $exp = Bias = 2^{k-1} - 1$ ，即exp为 $[0, 1, 1, \ldots, 1]$ 。
- **最大规格化数：** exp的最大值为 $[1, 1, \ldots, 1, 0] = 2^k - 2$ ，frac的最大值为全1，即 $frac = 1 - 2^{-n}$ ，所以 $E = exp - Bias = 2^k - 2 - (2^{k-1} - 1) = 2^{k-1} - 1$ ， $M = 1 + frac = 2 - 2^{-n}$ ，所以 $V = (2 - 2^{-n}) \times 2^{2^{k-1}-1} = (1 - 2^{-n-1}) \times 2^{k-1}$ 。

描述	位表示	指数			小数		值		
		e	E	2^E	f	M	$2^E \times M$	V	十进制
0	0 0000 000	0	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{0}{512}$	0	0.0
最小的非规格化数	0 0000 001	0	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{512}$	0.001953
	0 0000 010	0	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{512}$	$\frac{1}{256}$	0.003906
	0 0000 011	0	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{512}$	$\frac{3}{512}$	0.005859
	⋮								
最大的非规格化数	0 0000 111	0	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{512}$	$\frac{7}{512}$	0.013672
最小的规格化数	0 0001 000	1	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{0}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{512}$	$\frac{1}{64}$	0.015625
	0 0001 001	1	−6	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{512}$	$\frac{9}{512}$	0.017578
	⋮								
	0 0110 110	6	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{7}{8}$	0.875
	0 0110 111	6	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{15}{16}$	0.9375
1	0 0111 000	7	0	1	$\frac{0}{8}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{8}$	1	1.0
	0 0111 001	7	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	1.125
	0 0111 010	7	0	1	$\frac{2}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{5}{4}$	1.25
	⋮								
	0 1110 110	14	7	128	$\frac{6}{8}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{1792}{8}$	224	224.0
最大的规格化数	0 1110 111	14	7	128	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{1920}{8}$	240	240.0
无穷大	0 1111 000	—	—	—	—	—	—	∞	—

图 2-35 8 位浮点格式的非负值示例（$k=4$ 的阶码位的和 $n=3$ 的小数位。偏置量是 7）

IEEE设计的好处：

1. 最大非规格化值 $(1 - 2^{-n}) \times 2^{2-2^{k-1}}$ 和最小规格化值 $2^{2-2^{k-1}}$ 之间的幅度是 2^{-n} ，是n位尾数所能表示的最小值，可以看成是**光滑转变。**
2. 从最小非规格化数到最大规格化数的位向量的变化是顺序的，和无符号整数的排序相同。所以可以用无符号数的排序函数⁺来对浮点数进行排序。**注意：** 负无穷转化为无符号数进行比较时会有问题。

将十进制化为浮点数表示：

以12345为例，我们推算单精度浮点数⁺的编码

1. 计算 $Bias = 2^{k-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$

2. 将12345化为二进制数[11000000111001]
3. 首先将二进制数其化成小于1的科学技术法 $0.11000000111001\times 2^{14}$ ，很明显指数14不为 $1-Bias=-126$ ，所以是规格化数，所以将其转化为大于1的科学计数法 $1.1000000111001\times 2^{13}$ ，所以 $M=1.1000000111001$ ， $E=14$ 。
4. 因为 $M=1+frac$ ，所以frac的编码为 $[1000000111001]$ 。因为 $E=exp-Bias=exp-127$ ，所以 $exp=127+13=140=[10001100]$ 。
5. 将frac和exp的二进制编码扩展到对应位数并拼接在一起，补上符号位就为最终结果 $01000110010000001110010000000000$ 。

注意：要在exp前面补0，在frac后面补0。因为exp表示整数，frac表示小数。

对比无符号数的编码，我们可以发现：因为无符号数一定大于0，所以相同的数想用浮点数编码只能使用规范化数进行编码，而规范化数会将frac的最高有效位1去掉，所以无符号数的编码和浮点数编码，在frac部分是相似的，浮点数会少了最高有效位的1。而无符号数的其他部分就是0，而浮点数的其他部分是表示指数的编码。

3 浮点数舍入

浮点数由于有限的位数，所以对于真实值x，我们想要用一种系统的方法来找到能够用浮点数表示的“最接近的x”匹配值x'，这个过程就称为**舍入。**

常见的舍入方法有四种：向零舍入、向上舍入、向下舍入以及向偶数舍入。以十进制为例可以看以下表格

方 式	1.40	1.60	1.50	2.50	−1.50
向偶数舍入	1	2	2	2	−2
向零舍入	1	1	1	2	−1
向下舍入	1	1	1	2	−2
向上舍入	2	2	2	3	−1

图 2-37 以美元舍入为例说明舍入方式(第一种方法是舍入到一个最接近的值，而其他三种方法向上或向下限定结果，单位为美元)

其中比较特殊的是**向偶数舍入：**如果处于中间值，就朝着令最后一个有效位为偶数来舍入；否则朝着最近的值舍入。比如1.40，由于靠近1就朝1舍入；1.6靠近2就朝2舍入；1.50位于十进制的中间值，就朝着偶数舍入，所以为2。

向偶数舍入的意义：如果对一系列值进行向上舍入，则舍入后的平均值会比真实值更大；使用向下舍入，则舍入后的平均值会比真实值更小。通过向偶数舍入，每个值就有50%概率变大、50%概率变小，使得总的统计量保持较为稳定。

十进制的中间值为 $500...{}_{10}$ ，比这个中间值大就向上舍入，比这个中间值小就向下舍入，否则朝着偶数舍入。

而二进制的中间值是 $100...{}_2$ ，比如 $101...{}_2$ 就比中间值大， $010...{}_2$ 就比中间值小。而且二进制中，当最后一个有效位为0时，为偶数。比如

- Round to nearest 1/4 (2 bits right of binary point)

Value	Binary	Rounded	Action	Rounded Value
2 3/32	10.00011_2	10.00_2	(<1/2—down)	2
2 3/16	10.00110_2	10.01_2	(>1/2—up)	2 1/4
2 7/8	10.11100_2	11.00_2	(1/2—up)	3
2 5/8	10.10100_2	10.10_2	(1/2—down)	2 1/2

- `10.00011` ：由于 `011` 比中间值小，所以直接向下舍入，为 `10.00` 。
- `10.00110` ：由于 `110` 比中间值大，所以直接向上舍入，为 `10.01` 。

- `10.11100` ：由于 `100` 为中间值，而 `10.11` 最后一个有效位1位奇数，所以向上舍入为偶数 `11.00` 。
- `10.10100` ：由于 `100` 为中间值，而 `10.10` 最后一个有效位0位偶数，所以直接向下舍入 `10.10` 。

4 浮点数运算

浮点数运算无法直接通过在位向量上运算得到。

4.1 浮点数乘法+

对于两个浮点数 $(-1)^{s_1}\times M_1\times 2^{E_1}$ 和 $(-1)^{s_2}\times M_2\times 2^{E_2}$ ，计算结果为 $(-1)^s\times M\times 2^E$ ，其中 $s=s_1XORs_2$ ， $M=M_1\times M_2$ ， $E=E_1+E_2$ 。

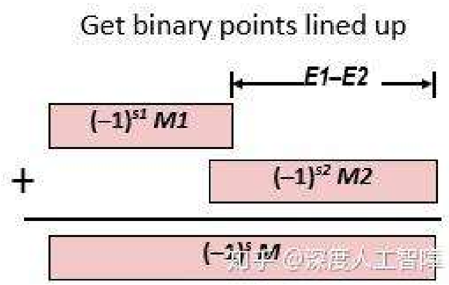
- 如果 $M\geq 2$ ，就将frac右移一位，并对E加一。
- 如果E超过了表示范围，就发生了溢出。
- 如果M超过了表示范围，对frac进行舍入。

数学性质：

- 可交换
- 不可结合：可能出现溢出和不精确的舍入，比如 $1e20*(1e20*1e-20)=1e20$ ，而 $(1e20*1e20)*1e-20=INF$ 。
- 不可分配：如果分配了可能会出现NaN，比如 $1e20*(1e20-1e20)=0$ ，而 $1e20*1e20-1e20*1e20=NaN$ 。
- 保证，只要 $a\neq NaN$ ，则 $a*^t a\geq 0$ 。

4.2 浮点数加法

对于两个浮点数 $(-1)^{s_1}\times M_1\times 2^{E_1}$ 和 $(-1)^{s_2}\times M_2\times 2^{E_2}$ ，计算结果为 $(-1)^s\times M\times 2^E$ ，其中s和M是对其后的运算结果， $E=max(E_1,E_2)$ 。



- 如果 $M\geq 2$ ，则frac右移一位，并对E加1。
- 如果 $M<1$ ，则frac左移一位，并对E减1。
- 如果E超过表示范围，就发生溢出。
- 如果M超过表示范围，就对frac进行舍入。

数学性质：

- 由于溢出，可能得到无穷之。
- 可交换
- 不可结合（由于舍入），因为较大的数和较小的数相加，由于舍入问题，会将较小的数舍入，比如 $(3.14+1e10)-1e10=0$ 而 $3.14+(1e10-1e10)=3.14$ 。
- 除了无穷和NaN，存在加法逆元+。
- 满足单调性，如果 $a\geq b$ ，则对于任意a、b和x，都有 $x+a\geq x+b$ 。NaN除外。无符号数和补码+由于溢出会发生值的跳变，所以不满足单调性。

注意：需要考虑好清楚数值的范围，如果计算的数值范围变化很大，需要重新结合或改变运算顺序，避免由于溢出或舍入出现计算问题。

5 C中的浮点数

C中提供了 `float` 和 `double` 两种精度的浮点数。由于编码不同，所以在浮点数和整型数之间强制类型转换时，会修改编码，并且会出现溢出和舍入。

- **float/double转换成int：**首先小数部分会被截断，也就是向0舍入。 `float` 的尾数部分为23字节，比int的32字节小，所以int可以精确表示float的整数部分，而 `double` 的尾数有52位，可能会出现舍入。并且当超过int的取值范围或NaN时，微处理器会指定 $[100...0]$ 为整数不确定值，即对应的 $TMin_w$ ，所以一个很大的浮点数转化为int时，可能会出现负数。
- **int或float转换为double：**double尾数有52位，而int只有32位，float只有23位，所以double会精确表示int和float，不会出现溢出和输入。
- **int转换为float：**不会发生溢出，但是由于float尾数位数比较少，会出现舍入。
- **double转换为float：**可能会出现溢出和舍入。

总结：超过数值表示范围，会发生溢出；尾数较短，会发生输入。

课堂作业：

```
int x = …;
float f = …;
double d = …;
```

Assume neither
d nor f is NaN

- `x==(int)(float)x` ： int有32位，float尾数有23位，从int强制类型转换到float会出现舍入，所以错误。
- `x==(int)(double)x` ： int有32位，double尾数有52位，所以从int强制类型转换到float不会出现舍入，所以正确。
- `f==(float)(double)f` ： double的精度和范围都比float大，所以能够无损地从float强制类型转换到double，所以正确。
- `d==(double)(float)d` ： 因为float的精度和范围都比double小，可能会出现溢出和输入，所以错误。
- `f==-(-f)` ： 因为只要改变一个符号位，所以正确。
- `2/3==2/3.0` ： 因为 `2/3` 是int类型，会舍入变成0，而 `2/3.0` 是double类型，会得到数值，所以错误。
- `d<0.0` 推出 `((d*2)<0.0)` ： 乘2相当于exp加一，如果出现溢出，也是无穷小，所以正确。
- `d>f` 推出 `-f>-d` ： 只要改变一个符号位，所以正确。
- `d*d>=0.0` ： 正确。
- `(d+f)-d==f` ： 不符合结合律，可能会出现舍入和溢出。
