组合数学@CS

刘正阳
zhengyang@bit.edu.cn

课程介绍

- 教师：刘正阳，zhengyang@bit.edu.cn
- 助教：刘伯钰，1120213323@bit.edu.cn
- 一般情况，会早到半小时作为office hour
- 一门新课，一起学习
  - 课件/笔记、思考、科研等
- 2次作业（2*15）+ 1次课程笔记（10）+ 期末考试（60）

大致内容

拓宽视野为主

- 计数：加/乘法原理、组合数、算两次、抽屉原理等
- 随机性：存在性证明、简化算法
- 组合构造：归约（reduction）、其他应用

Avi Wigderson

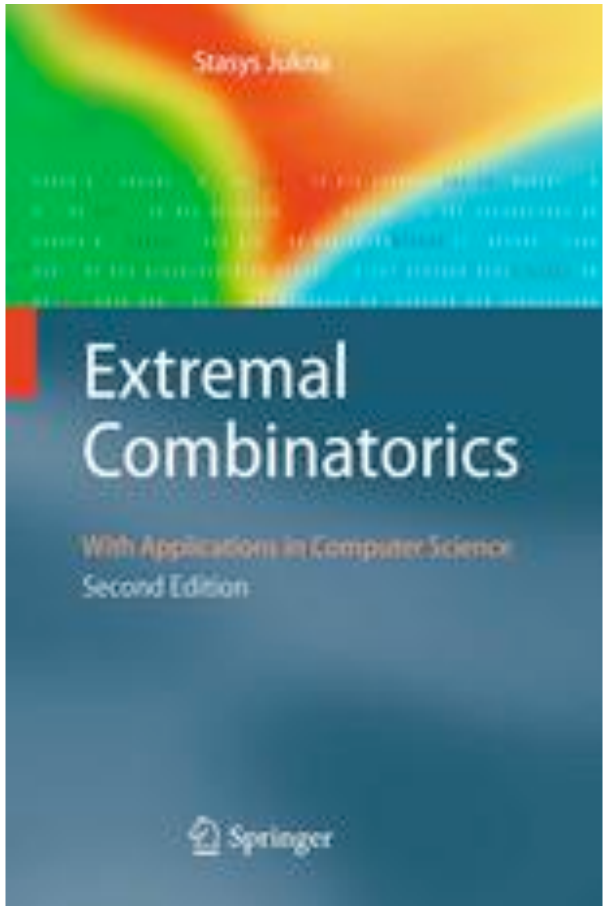
AVI WIGDERSON RECEIVES ACM A.M. TURING AWARD FOR GROUNDBREAKING INSIGHTS ON RANDOMNESS

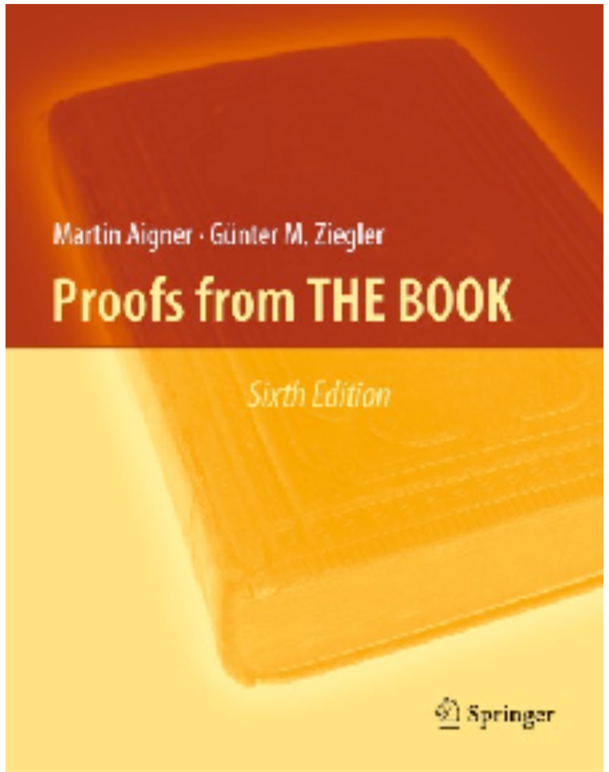
Leading Theoretical Computer Scientist Cited for Field-Defining Contributions

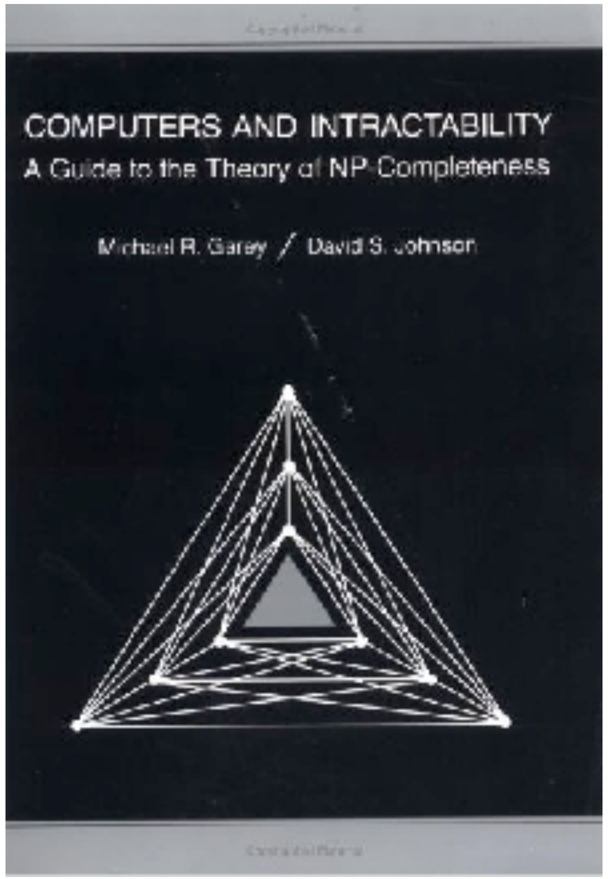
ACM, the Association for Computing Machinery, today named Avi Wigderson as recipient of the 2023 ACM A.M. Turing Award for foundational contributions to the theory of computation, including reshaping our understanding of the role of randomness in computation, and for his decades of intellectual leadership in theoretical computer science.

参考书

课件为主，签到替换成编写课程笔记







1. **Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science**
2. **Proofs from THE BOOK**
3. **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**

计数（Counting）

加/乘法原理

- A到B可以乘坐飞机、船或火车
- B到C可以骑车、开车、走路。。
- A到B有几种方法?
- A经B再到C呢?

组合数

二项式定理

- 一个具有n个元素的集合，有多少个子集恰好包含k个元素? $\binom{n}{k}$
- 组合数、也叫二项式系数（binomial coefficient）

二项式定理

- 一个具有n个元素的集合，有多少个子集恰好包含k个元素? $\binom{n}{k}$
- 组合数、也叫二项式系数（binomial coefficient）
- 二项式定理 [牛顿 1666]:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

二项式定理

- 一个具有n个元素的集合，有多少个子集恰好包含k个元素? $\binom{n}{k}$
- 组合数、也叫二项式系数（binomial coefficient）
- 二项式定理 [牛顿 1666]：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- 证明思路：考虑 $x^k y^{n-k}$ 的系数

二项式定理

- 一个具有n个元素的集合，有多少个子集恰好包含k个元素? $\binom{n}{k}$
- 组合数、也叫二项式系数（binomial coefficient）
- 二项式定理 [牛顿 1666]：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- 证明思路：考虑 $x^k y^{n-k}$ 的系数
- 例题：n, k 为自然数，证明 n^k 是奇数当且仅当 n 是奇数

阶乘与组合数

“定义为”

- 阶乘： $n! := n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 并且 $0! = 1$
- 第 k 阶乘（k-th factorial）：不超过 n 的 k 个最大数乘机

$$(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

阶乘与组合数

“定义为”

- 阶乘： $n! := n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 并且 $0! = 1$

- 第 k 阶乘（k-th factorial）： 不超过 n 的 k 个最大数乘机

$$(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

- 如何计算组合数? $$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

阶乘与组合数

“定义为”

- 阶乘： $n! := n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 并且 $0! = 1$

- 第 k 阶乘（k-th factorial）： 不超过 n 的 k 个最大数乘机

$$(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

- 如何计算组合数?

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- 证明思路：考虑 $(n)_k$ 什么含义？与组合数的关系？

组合恒等式

适合出题

两种常见证明方法：组合方法与代数方法

组合恒等式

适合出题

两种常见证明方法：组合方法与代数方法

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

组合恒等式

适合出题

两种常见证明方法：组合方法与代数方法

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

逆向思维

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

组合恒等式

适合出题

两种常见证明方法：组合方法与代数方法

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

逆向思维

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

二项式定理特例

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

组合恒等式

适合出题

两种常见证明方法：组合方法与代数方法

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

逆向思维

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

二项式定理特例

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

分情况讨论

帕斯卡三角（Pascal Triangle）

组合不等式

证明 $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \quad and \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k$

组合不等式

证明 $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \quad and \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{\mathrm{e}n}{k}\right)^k$

第一部分

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k = \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k} \leq \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} = \binom{n}{k}.$$

组合不等式

证明 $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k}$ and $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$

第一部分

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k = \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdots\frac{n}{k} \leq \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{1} = \binom{n}{k}.$$

第二部分

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i} \leq \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{t^i}{t^k} = \frac{(1+t)^n}{t^k}$$

取 $t = k/n$，同时 $1 + t \leq e^t$ 即可

经典计数问题

可重复选择计数

- 组合数针对子集而言，即元素不可重复。如果可以重复呢?
- $x_1 + \cdots + x_n = r$ 有多少非负整数解?

可重复选择计数

- 组合数针对子集而言，即元素不可重复。如果可以重复呢?
- $x_1 + \cdots + x_n = r$ 有多少非负整数解?
  - x_i 可以看成第 i 个小朋友分到的糖果数，从而非负

可重复选择计数

- 组合数针对子集而言，即元素不可重复。如果可以重复呢?
- $x_1 + \cdots + x_n = r$ 有多少非负整数解?
    - x_i 可以看成第 i 个小朋友分到的糖果数，从而非负

1. 如果 $r \le n$，并且尽量公平，$\binom{n}{r}$
2. 如果$r > n$，并且每人至少分到1块，$\binom{r-1}{n-1}$
3. 如果 x_i 可为零，如何化归到case 2? $\binom{n+r-1}{r}$

划分（Partition）计数

- 集合 $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ 的一个划分是指分成互不相交的子集，例如{1,2,3,4,5}的一个划分是{{1,4,5}, {2, 3}}。

划分（Partition）计数

- 集合 $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ 的一个划分是指分成互不相交的子集，例如{1,2,3,4,5}的一个划分是{{1,4,5}, {2, 3}}。

- 用 $S(n; k_1, \ldots, k_n)$ 记作划分中有 k_i 个 i-元素子集的个数，其中 $i \in [n]$，即$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$。

划分（Partition）计数

- 集合 $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ 的一个划分是指分成互不相交的子集，例如{1,2,3,4,5}的一个划分是{{1,4,5}, {2, 3}}。

- 用 $S(n;k_1,\ldots,k_n)$ 记作划分中有 k_i 个 i-元素子集的个数，其中 $i \in [n]$，即$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$。

$$S(n;k_1,k_2,\ldots,k_n) = \frac{n!}{k_1!\cdots k_n!(1!)^{k_1}\cdots(n!)^{k_n}}$$

划分（Partition）计数

- 集合 $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ 的一个划分是指分成互不相交的子集，例如{1,2,3,4,5}的一个划分是{{1,4,5}, {2, 3}}。

- 用 $S(n; k_1, \ldots, k_n)$ 记作划分中有 k_i 个 i-元素子集的个数，其中 $i \in [n]$，即$k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n$。

$$S(n; k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_n! (1!)^{k_1} \cdots (n!)^{k_n}}$$

集合与序列的差别?

应用了算两次计数。

算两次

- 想法：以不同方法计数，结果应该相同！

算两次

- 想法：以不同方法计数，结果应该相同！
- 例子
  - 矩阵元素之和：行和列

算两次

- 想法：以不同方法计数，结果应该相同！
- 例子
  - 矩阵元素之和：行和列
  - 握手（Handshaking）引理：握手奇数次的人的个数为偶数。

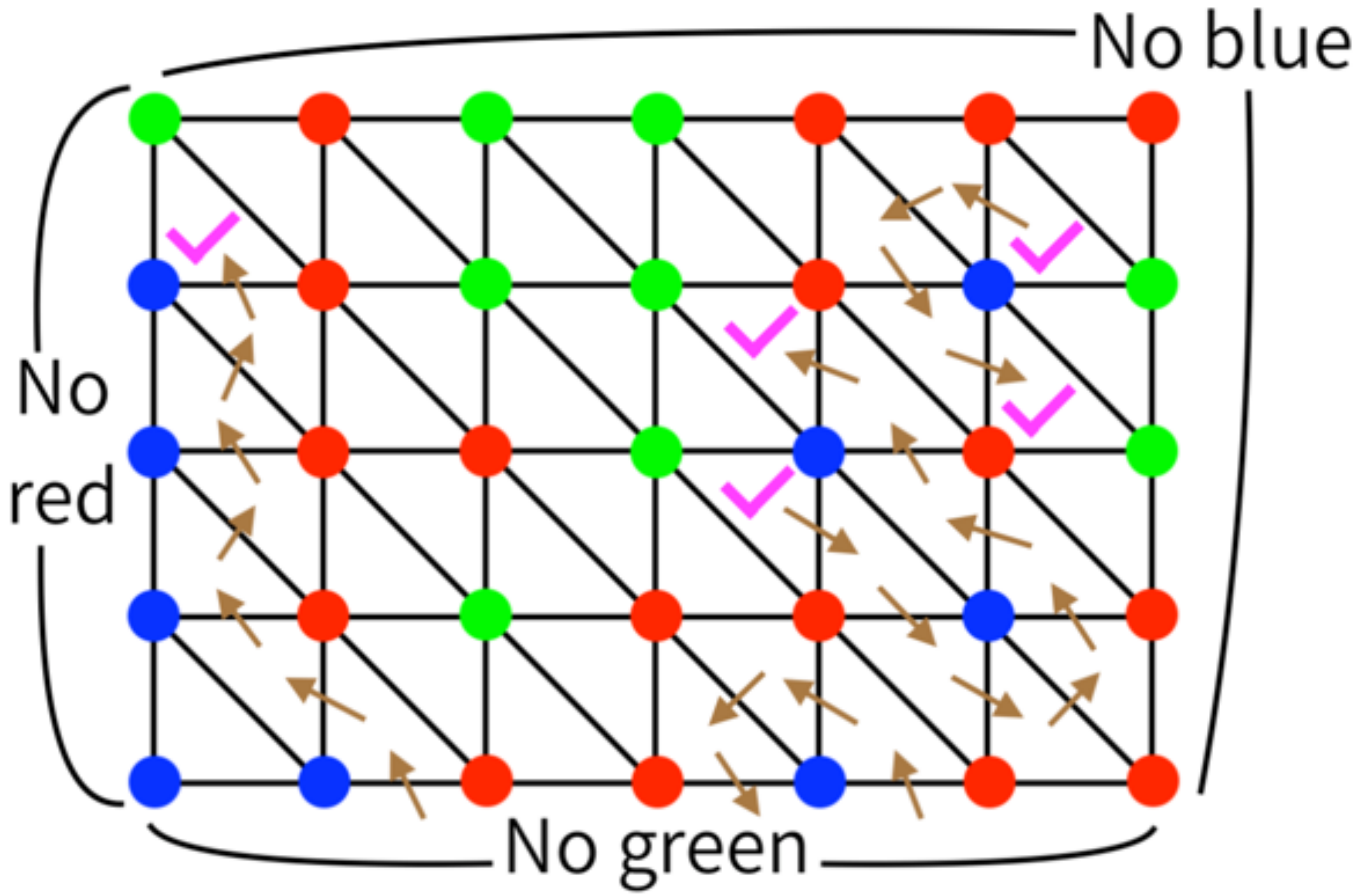
算两次

- 想法：以不同方法计数，结果应该相同！
- 例子
  - 矩阵元素之和：行和列
  - 握手（Handshaking）引理：握手奇数次的人的个数为偶数。
  - *Let $\mathcal{F}$ be a family of subsets of some set X. Then*

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{A \in \mathcal{F}} |A| .$$

其中 $d(x)$ 是 $\mathscr{F}$ 中包含元素 x 的子集个数。

算两次 II



证明：按规则对边界染色后，一定存在全色小三角形。

练习题

1.5. Prove that
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}\,.$$

1.9. Prove the Cauchy–Vandermonde identity:
$$\binom{p+q}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{p}{i}\binom{q}{k-i}\,.$$

1.13. Use combinatorics (not algebra) to prove that, for $0 \le k \le n$,
$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}\,.$$

平均值原理

- 想法：平均值的含义?
- 描述：1. 一组数中一定存在不小于平均值的数，也一定存在不大于平均值的数；或 2. 有大于平均值的数，就一定有小于平均值的数

平均值原理

- 想法：平均值的含义?
- 描述：1. 一组数中一定存在不小于平均值的数，也一定存在不大于平均值的数；或 2. 有大于平均值的数，就一定有小于平均值的数
- 例子
  - n 个点的图中只有小于 $n-1$ 条边，那该图一定不连通。

平均值原理

- 想法：平均值的含义?
- 描述：1. 一组数中一定存在不小于平均值的数，也一定存在不大于平均值的数；或 2. 有大于平均值的数，就一定有小于平均值的数
- 例子
  - n 个点的图中只有小于 $n-1$ 条边，那该图一定不连通。
  - （不相关的算法题）有 n 根木棍，长度分别为 $l_1, \ldots, l_n > 0$，想锯出相同长度的小木棍 m 根，计算小木棍的最大长度?

容斥原理

For any two sets A and B we have

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

容斥原理

For any two sets A and B we have

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Proposition 1.13 (Inclusion-Exclusion Principle)**.** *Let $A_1, \ldots, A_n$ be subsets of X. Then the number of elements of X which lie in none of the subsets A_i is*

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|. \tag{1.19}$$

$$\boxed{A_I := \bigcap_{i \in I} A_i}$$

容斥原理

For any two sets A and B we have

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Proposition 1.13 (Inclusion-Exclusion Principle). *Let $A_1, \ldots, A_n$ be subsets of X. Then the number of elements of X which lie in none of the subsets A_i is*

$$\sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} |A_I|. \tag{1.19}$$

$$\boxed{A_I := \bigcap_{i \in I} A_i}$$

关键的一步求和变换

$$\sum_I (-1)^{|I|} |A_I| = \sum_I \sum_{x \in A_I} (-1)^{|I|} = \sum_x \sum_{I : x \in A_I} (-1)^{|I|}.$$

深入学习

- 第二章，介绍更多的算两次技术应用