Indução e suas Aplicações

Gabriel Teixeira da Silva

16 de outubro de 2018

Resumo

Neste trabalho mostraremos diversas utilizações do princípio de indução em Ciência da Computação.

1 Introdução

Indução Matemática é uma técnica de demonstração usada para provar que dado um número possui certa propriedade, e é demonstrado que o sucessor desse número também a possui. Geralmente a indução é associada ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ (1, 2, 3...). A indução Matemática pode ser empregada sempre que o conjunto em questão puder ser gerado por meios de definições indutivas. Imaginemos que temos uma escada infinita, e queremos saber se podemos alcançar todos os degraus dessa escada.

- Podemos alcançar o primeiro degrau da escada.
- Se pudermos alcançar um determinado grau da escada, então poderemos alcançar o próximo grau.

Exemplo

Suponha que deseja-se provar que essa propriedade vale para todos os números do conjunto dos Naturais $\mathbb{N}$.

$$1+23+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

- O primeiro passo, e mostrar que essa propriedade é válida par um 'n' qualquer. Esse passo é chamado de 'Base de Indução(B.I).'

$$P(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

Vamos começar essa prova com n = 1.

$$P(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$$

- Assumindo que a propriedade vale para um ‘n‘ qualquer, pela definição podemos provar que essa propriedade vale para o seu sucessor que é ‘n + 1‘.Esse passo é chamado de ‘Passo Indutivo(P.I).‘ Devemos mostrar que n + 1 é verdadeiro, ou seja

  1 + 2 + 3 +....+ n + (n + 1)

  $$= \frac{(n+1)[(n+1)+1])}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

  também é verdadeira. Quando adicionamos (n + 1) em ambos os lados da equação P(n), obtemos

  $$1+2+3+.....+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} \; +(n+1)$$

  $$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

  $$= \frac{(n+1)+(n+1)}{2}$$

  Completamos os passos da base e indução. Assim, pela indução matemática, sabemos que P(n) é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

---

2 Indução Completa

O passo base de uma demonstração por indução completa, é o mesmo usado na indução matemática. Para demonstrar que P(n) é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, em que P(n) é uma função proposicional, seguimos os dois passo a seguir:

- **PASSO BASE** Seguindo o principio da indução matemática, o primeiro passo é verificar se P(1) é verdadeira.
- **PASSO DE INDUÇÃO** Nesse passo vamos mostrar que a proposição condicional [P(1) / P(2) / P(3)...../ P(N)] -¿ P(N + 1) é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.
- Dependendo do caso a ser provado, pode ser mais conveniente usar a indução matemática ou a indução completa, de uma maneira mais geral, o tipo de indução que vai ser usada, sempre vai depender do caso a ser provado.

---

3 Indução Estrutural

A indução estrutural pode ser entendida como uma generalização da indução matemática. A indução estrutural é usada para provar uma propriedade P para todos os elementos de um conjunto definido recursivamente. A indução matemática é fortemente ligada na estrutura recursiva dos números naturais, mas com a indução estrutural podemos apliar essa aplicação para outras estruturas definidas recursivamente.

- **PASSO BASE** Mostre como os resultados se mantêm para todos os elementos especificados no passo base da definição recursiva que pertencerem a um conjunto.
- **PASSO RECURSIVO** Mostre que, se a proposição for verdadeira para cada um dos elementos usados para formar novos elementos no passo recursivo da definição, o resultado se mantém para novos elementos.

A indução estrutural pode ser usada para demonstrar que todos os elementos de um determinado conjunto construído recursivamente, têm uma propriedade particular.

Exemplo

Vamos mostrar que toda fórmula bem formada contém o mesmo número de parênteses á esquerda e á direita.

- Envolvem **V** e **F**
- Variáveis proposicionais.
- Operadores do Conjunto¿ $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$.

Resolução

Passo base: As fórmulas **V**, **F** e p(sendo p uma variavel proposicional), não contém parênteses, portanto o mesmo número de parênteses á esquerda e á direitra são iguais (que é igual a 0).

Passo Indutivo: Assuma que p e q são fórmulas bem formadas contendo o mesmo número de parênteses á esquerda e á direita. Ou seja, se l é o número de parênteses á esquerda e r e o número de parênteses á direita então: $l_p = l_q$ e $r_p = r_q$.

Assumindo que $l_p = l_q$ e $r_p = r_q$
Precisamos mostrar que contém o mesmo números de parênteses: $(\neg P)$, (P$\wedge Q$), (P$\vee Q$), (P$\rightarrow Q$), (P$\leftrightarrow Q$).
Número de parênteses á esquerda:
Em $(\neg P)$: $l_p + 1$.
Nos demais: $l_p + l_q + 1$.
Número de parênteses á direita:
Em $(\neg P)$: $r_p + 1$.
Nos demais: $r_p + r_q + 1$.
Uma vez que $l_p = r_p$ e $l_q = r_q$ estes números são iguais.

Definição 1. *O conjunto de árvores com raiz, em que uma árvore com raiz consistem em um conjunto de vértices que contém um vértice distinto, que chamamos de raiz, e arestas que conectam esses vértices, pode ser definido recursivamente por esses passos:*

- **PASSO BASE** Um único vértice r é uma árvore com raiz.
- **PASSO INDUTIVO** Suponha que T_1, T_2,....,T_n são árvores disjuntas que possuem raízes r_1, r_2,....,r_n. Então, o grafo formado começando com uma raiz r, que não esteja em nenhuma das árvores com raízes T_1, T_2,....,T_n, e adicionando uma aresta a partir de r a cada um dos vértices r_1, r_2,....,r_n, é também uma árvore com raiz.

Altura:

- A altura de um nó em uma árvore é o maior comprimento do nó até uma folha.
- A altura de uma árvore é a altura de sua raiz.
- Altura da árvore é a maior profundidade de qualquer nó na árvore.

4 Resolução dos Problemas

Depois de definir o que é indução matemática e indução estrutural, vamos resolver dois problemas que foi proposto. Nessas duas questões a ser resolvidas, vamos usar os conceitos que estabelecemos na primeira parte desse documento para nos ajudar na solução. Cada passo irá ser detalhadamente exposto nesse trabalho, para o leitor ter um bom entendimento de como foi resolvida cada questão.

PROBLEMA 1

5 Conclusão