第三讲 线性变换及其矩阵

一、线性变换及其运算

1. 定义: 设V是数域K上的线性空间，T是V到自身的一个映射，使得对于V中的任意元素x均存在唯一的$y\in V$与之对应，则称T为V的一个变换或算子，记为

$$Tx=y$$

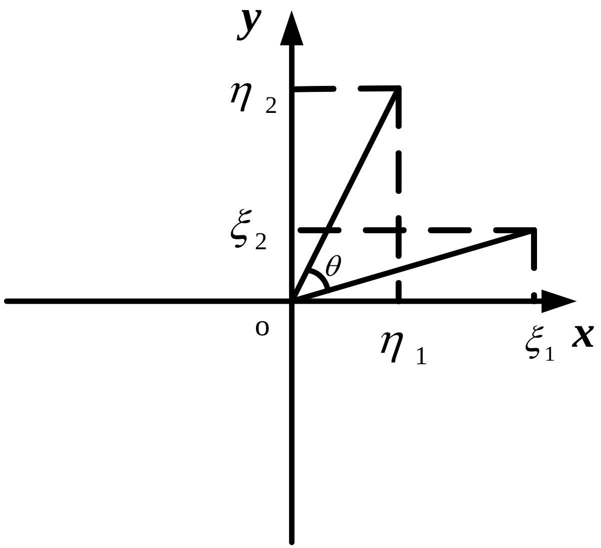
称y为x在变换T下的象，x为y的原象。

若变化T还满足

$$T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty) \qquad \forall x,y\in V,k,l\in K$$

则称T为线性变换。

例1. 二维实向量空间$\mathbf{R}^2=\left\{\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\middle|\ \xi_i\in\mathbf{R}\right\}$，将其绕原点旋转$\theta$角的操作就是一个线性变换。



[证明] 设$x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}$， $y=Tx=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1\cos\theta-\xi_2\sin\theta\\ \eta_2=\xi_1\sin\theta+\xi_2\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2$$

可见该操作为变换，下面证明其为线性变换。

$$\forall x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\quad z=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2\quad k,l\in\mathbf{R}$$

$$kx+lz=\begin{bmatrix}kx_1\\ kx_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}lz_1\\ lz_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_1+lz_1\\ kx_2+lz_2\end{bmatrix}$$

$$T(kx+lz)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}kx_1+lz_1\\ kx_2+lz_2\end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+l\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

$$=k(Tx)+l(Tz)$$

$\therefore$ T是线性变换 [证毕]

例2. 次数不超过n的全体实多项式P_n构成实数域上的一个$n+1$维的线性空间，其基可选为$\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$，微分算子$D=\dfrac{d}{dx}$是P_n上的一个线性变换。

[证明] 显然D对P_n而言是变换，只需证明D满足线性变换的条件即可。

$$\forall f,g\in \mathrm{P}_n,\quad k,l\in \mathrm{R}$$

$$D(kf+lg)=k(Df)+l(Dg)$$

$\therefore$ D是P_n上的线性变换。 [证毕]

2. 性质

- 线性变换把零元素仍变为零元素
- 负元素的象为原来元素的象的负元素
- 线性变换把线性相关的元素组仍变为线性相关的元素组

[证明]：根据 $T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)$

(1) $T(O)=T(0x)=0(Tx)=O$

(2) $T(-x)=(-1)(Tx)=-(Tx)$

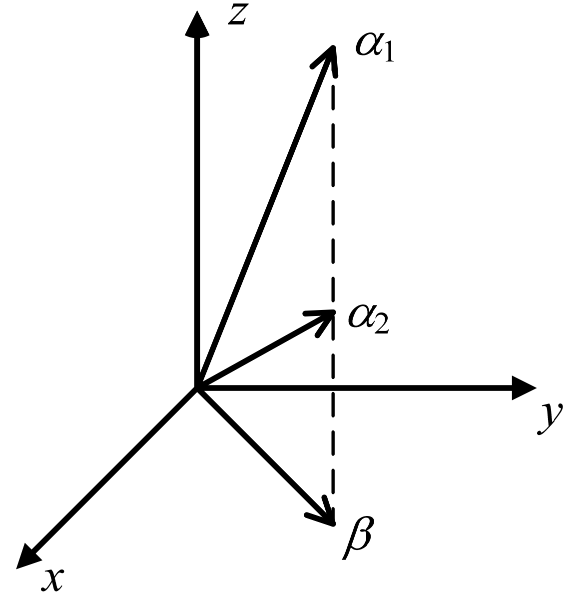
(3) 元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\sum_{i=1}^{m}k_i x_i=O$$

则 $$T(\sum_{i=1}^{m}k_i x_i)=\sum_{i=1}^{m}k_i(Tx_i)=T(O)=O$$

$\therefore$ $\{Tx_i\}$ 线性相关。 [证毕]

★线性无关的元素组经过线性变换不一定再是线性无关的，变换后的情况与元素组和线性变换有关。



3. 几个相关定义：

（1）恒等变换 T_e： $\forall x \in V, T_e x = x$

（2）零变换 T_0： $\forall x \in V, T_0 x = O$

（3）变换的相等： T_1、T_2 是 V 的两个线性变换， $\forall x \in V$， 均有 $T_1 x = T_2 x$， 则称 $T_1 = T_2$

4. 线性变换的运算：

（1） 线性变换的和T_1+T_2： $\forall x\in V$， $(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$

（2） 线性变换的数乘kT： $\forall x\in V$， $(kT)x=k(Tx)$

负变换： $(-T)x=-(Tx)$

（3） 线性变换的乘积T_1T_2： $\forall x\in V$， $(T_1T_2)x=T_1(T_2x)$

（4） 逆变换T^{-1}： $\forall x\in V$， 若存在线性变换S使得$(ST)x\equiv x$， 则称S为T的逆变换$S=T^{-1}$

（5） 线性变换的多项式：

n个线性变换T相乘，用$\underbrace{TT\cdots T}_{n个}$来表示，称为$T$的$n$次幂，

记为T^n， 并规定$T^0=T_e$

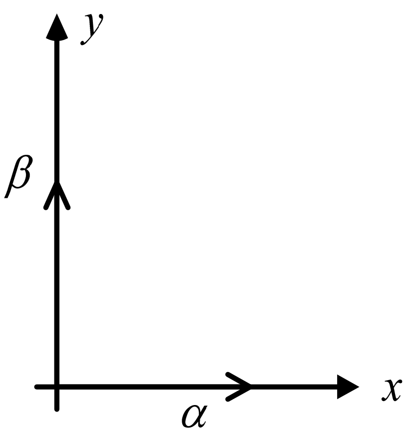
设 $f(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$ 是 x 的 n 次多项式，定义：

$$f(T)=\sum_{n=0}^{N}a_nT^n \qquad 为线性变换T的多项式。$$

说明：

★通常，线性变换的乘积不满足交换律

例如：在R^2中，T_1是向量绕原点逆时针旋转90°，T_2是向量 在x轴上的投影，则对于图中所示的向量α,



$$T_1 T_2 \alpha = T_1 (T_2 \alpha) = \beta$$

$$T_2 T_1 \alpha = T_2 (T_1 \alpha) = O$$

可见， $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$

★不是所有的变换都具有逆变换

★恒等变换、零变换、线性变换的和、乘积多项式及逆变换（若存在）均为线性变换。

二、线性变换的矩阵表示

1. 设T是线性空间V^n的一个线性变换，且$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$V^n$的一个基，$\forall x \in V^n$，存在唯一的坐标表示

$$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

$$Tx = T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n) = [Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n]\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

这表明，V^n中的任一元素的象，由基象组$Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n$唯一确定，因为基象组仍属于V^n，所以可用$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$线性表示：

$$Tx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

写成矩阵形式：

$$T[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [Tx_1, Tx_2, \cdots, Tx_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵 A 称为 T 在基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 下的矩阵。

则 $Tx = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$，若 Tx 在该基下的坐标表示为：

$$Tx = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

对比可知：

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

即：

$$x\leftrightarrow\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}\qquad Tx\leftrightarrow A\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}$$

说明：

- 恒等变换T_e对应的矩阵为单位矩阵I
- 零变换T_0对应的矩阵为零矩阵

2. 定理： 设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$V^n$的一个基，$T_1$、$T_2$在该基下的矩阵分别为$A$、$B$。则有

（1）$(T_1 + T_2)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](A + B)$

（2）$kT_1[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](kA)$

（3）$(T_1T_2)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](AB)$

（4）$T^{-1}[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A^{-1}$

推论1.

线性变换T的多项式对应矩阵多项式，即：

$$f(T)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]f(A)$$

其中 $f(T) = a_0T_e + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n$

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_nA^n$$

推论 2. 设线性变换 T 在 V^n 的基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 下的矩阵为 A，元素 x 在该基下的坐标为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则 Tx 在该基下的坐标 $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ 满足

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

3. 相似矩阵

定义： 设 A，B 为数域 K 上的两个 n 阶矩阵，如果存在 K 上的 n 阶非奇异矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$，则称 A 相似于 B，记为 $A \sim B$。

定理： 设 T 在 V^n 的两个基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 及 $\{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ 的矩阵分别为 A 和 B，且 $[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]C$，则

$$B = C^{-1}AC$$

即 A 和 B 为相似矩阵。

[证明]:

$$T[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A$$

$$T[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1', x_2', \cdots, x_n']B$$

而 $T[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = T[x_1, x_2, \cdots, x_n]C = [x_1, x_2, \cdots, x_n]AC$

$$[x_1', x_2', \cdots, x_n']B = [x_1, x_2, \cdots, x_n]CB$$

$$\therefore\ [x_1, x_2, \cdots, x_n]AC = [x_1, x_2, \cdots, x_n]CB$$

$\Rightarrow AC = CB$ 即 $B = C^{-1}AC$

[证毕]

定理：n方阵A和B相似的充要条件是A和B为同一线性变换在不同基下的矩阵。

[证明] 必要性：已知A和B相似，即存在可逆矩阵P使$B=P^{-1}AP$

选取一个基$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，定义

$$T[x_1,x_2,\cdots,x_n]=[x_1,x_2,\cdots,x_n]A$$

考虑$[x_1',x_2',\cdots,x_n']=[x_1,x_2,\cdots,x_n]P$可作为基，且

$$\begin{aligned}T[x_1',x_2',\cdots,x_n'] &= T[x_1,x_2,\cdots,x_n]P\\ &=[x_1,x_2,\cdots,x_n]AP\\ &=[x_1',x_2',\cdots,x_n']P^{-1}AP\\ &=[x_1',x_2',\cdots,x_n']B\end{aligned}$$

$\therefore A$和B为同一线性变换在不同基下的矩阵。

充分性的证明由相似矩阵定义的证明给出。

[证毕]

三、线性变换及矩阵的值域和核

1.定义：设T是线性空间V^n的线性变换，称

$$R(T)=\left\{Tx \mid x\in \mathrm{V}^n\right\}$$ 为T的值域；

$$N(T)=\left\{x \mid x\in \mathrm{V}^n, Tx=O\right\}$$ 称为T的核。

$R(T)$和$N(T)$均为V^n的子空间。

设A为$m\times n$阶矩阵，称

$$R(A)=\left\{Ax \mid x\in \mathrm{R}^n \text{ or } \quad x\in \mathrm{C}^n\right\}$$ 为矩阵A的值域；

$$N(A)=\left\{x \mid x\in \mathrm{R}^n \text{ or } \quad x\in \mathrm{C}^n, Ax=0\right\}$$ 为A的核。

$\dim R(T)$、$\dim N(T)$称为T的秩和零度（或亏）；

$\dim R(A)$、$\dim N(A)$称为A的秩和零度。

2.定理：（1） $\dim R(T)+\dim N(T)=\dim \mathrm{V}^{n}$

（2） $\dim R(A)=\operatorname{rank}(A)$

（3） $\dim R(A)+\dim N(A)=n$， n为A的列数。

若A是线性变换T的矩阵，则

$$\dim R(T)=\dim R(A)，\quad \dim N(T)=\dim N(A)$$

[证明]：（ 1 ） 设$\dim N(T)=r$， $\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$是$N(T)$的一组基，则根据基扩定理，可将其扩展为V^{n}的一组基$\{x_1,x_2,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_n\}$，可以证明$\{Tx_{r+1},Tx_{r+2},\cdots,Tx_n\}$是$R(T)$的一组基。

设$\forall x\in V^{n}$， $x=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n$， 则

$$Tx=k_1Tx_1+k_2Tx_2+\cdots+k_nTx_n$$

$$Q \quad Tx_i=O \quad (i=1,2,L\ ,r)$$

$$\therefore \quad Tx=k_{r+1}Tx_{r+1}+k_{r+2}Tx_{r+2}+\cdots+k_nTx_n$$

即$R(T)$中的任意元素Tx均可由$\{Tx_{r+1},Tx_{r+2},\cdots,Tx_n\}$线性表示。下面证明$\{Tx_{r+1},Tx_{r+2},\cdots,Tx_n\}$线性无关

设 $\sum_{i=r+1}^{n} l_i T x_i = O$， 即 $T\left(\sum_{i=r+1}^{n} l_i x_i\right) = O$，

则 $\sum_{i=r+1}^{n} l_i x_i \in N(T)$， 可用 $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 线性表示，即：

$$\sum_{i=r+1}^{n} l_i x_i = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i$$

$\because$ $\{x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n\}$ 线性无关 $\therefore$ $l_i = 0 \quad (i = r+1, \cdots, n)$

$\therefore$ $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 线性无关

$\therefore$ $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 是 $R(T)$ 的一组基， $\dim R(T) = n - r$

$\therefore$ $\dim R(T) + \dim N(T) = \dim V^n$

（2）由定义知， $R(A)$ 是 A 的列向量所张成的子空间， $\dim R(A)$ 等于列向量组中最大线性无关组中的元素个数，即列向量组的秩，又因为矩阵 A 的秩 rankA 等于列向量组的秩，所以 $\dim R(A) = \mathrm{rank}(A)$

（3） $N(A)$ 是 Ax=0 的解空间，若 rankA=r， 则 $\dim N(A) = n - r$

所以 $\dim R(A) + \dim N(A) = n$， n 为 A 的列数。 ［证毕］

作业：P77－78，1、26、7