第二讲 线性子空间

一、线性子空间的定义及其性质

1. 定义:

设V_1是数域K上的线性空间V的一个非空子集合，且对V已有的线性运算满足以下条件:

（1） 如果$x, y \in V_1$，则$x + y \in V_1$；

（2） 如果$x \in V_1$，$k \in K$，则$kx \in V_1$，

则称V_1是V的一个线性子空间或子空间。

2. 性质：

（1）线性子空间V_1与线性空间V具有共同的零元素;

（2） V_1中元素的负元素仍在V中。

[证明]：

(1)

$$\forall x \in V_1$$

$$0x = O \in V_1 \subset V$$

$\therefore$ V_1 中的零元素也在 V中， V_1 与 V享有共同的零元素。

(2)

$$\forall x \in V_1$$

$$(-1)x = (-x) \in V_1 \subset V$$

$\therefore$ V_1 中元素的负元素仍在 V中。 **[证毕]**

显然，零子空间$\{O\}$及 V本身都是 V的子空间，这两个子空间叫做平凡子空间，除此之外的子空间称为非平凡子空间。

3．子空间的生成

设$x_1,x_2,\cdots,x_m$为V中的元素，它们所有可能的线性组合的集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} k_i x_i \middle| k_i \in K, i=1,2\cdots,m\right\}$$

也是V的线性子空间，称为由$x_1,x_2,\cdots,x_m$生（张）成的子空间，记为$L(x_1,x_2\cdots,x_m)$或者$Span(x_1,x_2\cdots,x_m)$。若$x_1,x_2,\cdots,x_m$线性无关，则

$$\dim\{L(x_1,x_2\cdots,x_m)\}=m$$

显然，$\dim V_1 \leqslant \dim V$

4．基扩定理

设V_1是数域K上的线性空间V^n的一个m维子空间，$x_1,x_2\cdots,x_m$是V_1的一个基，则这m个基向量必可扩充为V^n的一个基；换言之，在V^n中必可找到$n-m$个元素$x_{m+1},x_{m+2}\cdots,x_n$，使得$x_1,x_2\cdots,x_n$成为$V^n$的一个基。这$n-m$个元素必不在$V_1$中。

二、子空间的交与和

1．定义： 设V_1、V_2是线性空间 V的两个子空间，则

$$V_1 \cap V_2 = \{x \mid x \in V_1, x \in V_2\}$$

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

分别称为V_1和V_2的交与和。

2．定理： 若V_1和V_2是线性空间V的两个子空间，则$V_1 \cap V_2$，$V_1 + V_2$均为V的子空间。

［证明］(1) $\forall x, y \in V_1 \cap V_2$

$$x + y \in V_1 \qquad x + y \in V_2$$

$$\therefore\ x + y \in V_1 \cap V_2$$

$$\forall x \in V_1 \cap V_2 \quad k \in K$$

$$kx \in V_1 \quad kx \in V_2 \quad \therefore\ kx \in V_1 \cap V_2$$

$\therefore\ V_1 \cap V_2$是V的一个线性子空间。

(2) $\forall x_1, x_2 \in V_1 \quad \forall y_1, y_2 \in V_2$

$$(x_1 + y_1) \in V_1 + V_2 \qquad (x_2 + y_2) \in V_1 + V_2 \qquad (x_1 + x_2) \in V_1 \qquad (y_1 + y_2) \in V_2$$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in V_1 + V_2$$

$$\forall k \in K \qquad kx_1 \in V_1 \qquad ky_1 \in V_2$$

$$k(x_1 + y_1) = kx_1 + ky_1 \in V_1 + V_2$$

$\therefore$ $V_1 + V_2$ 是 V 的子空间。 [证毕]

3. 维数公式

若V_1、V_2是线性空间V的子空间，则有

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

[证明]： 设 $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \dim(V_1 \cap V_2) = m$ ，

需要证明 $\dim(V_1 + V_2) = n_1 + n_2 - m$ 。

设 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的一个基，根据基扩定理，存在：

1） $y_1, y_2 \cdots, y_{n1-m} \in V_1$ ，使 $x_1, x_2 \cdots, x_m, y_1, y_2 \cdots, y_{n1-m}$ 成为 V_1 的一个基；

2） $z_1, z_2 \cdots, z_{n2-m} \in V_2$ ，使 $x_1, x_2 \cdots, x_m, z_1, z_2 \cdots, z_{n2-m}$ 成为 V_2 的一个基；

考察 $x_1,x_2\cdots,x_m,y_1,y_2\cdots,y_{n1-m},z_1,z_2\cdots,z_{n2-m}$， 若能证明它为$V_1+V_2$的一个基，则有$\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$ 。

成为基的两个条件：1）它可以线性表示V_1+V_2中的任意元素；2）线性无关

显然条件 1）是满足的，现在证明条件 2），采用反证法。

假定上述元素组线性相关，则存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2\cdots,k_m,p_1,p_2\cdots,p_{n1-m},q_1,q_2\cdots,q_{n2-m}$ 使$\sum k_i x_i+\sum p_i y_i+\sum q_i z_i=O$

令$z=\sum q_i z_i\in V_2$， 则$-z=\sum k_i x_i+\sum p_i y_i\in V_1$

$$\therefore -z\in V_1\bigcap V_2$$

则$-z$ 可用 $x_1,x_2\cdots,x_m$ 线性表示，令$-z=\sum l_i x_i$

则， $z+(-z)=\sum q_i z_i+\sum l_i x_i=O$

$\because$ $x_1,x_2\cdots,x_m,z_1,z_2\cdots,z_{n2-m}$ 线性无关， $\therefore q_i=0,l_i=0$

$\therefore \sum k_i x_i+\sum p_i y_i=O$ $\because$ $x_1,x_2\cdots,x_m,y_1,y_2\cdots,y_{n1-m}$ 线性无关 $\therefore k_i=0,p_i=0$

这与假设矛盾，所以上述元素线性无关，可作为V_1+V_2的一个基。

$\therefore \dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$ [证毕]

例1. 设V_1是R^3中所有形为$(a_1,0,a_2)$的元素形成的子空间，V_2是由(1,2,1)、(3,1,2)生成的子空间，求$V_1 \cap V_2$及V_1+V_2。

解：$x_1=(1,0,0)$和$x_2=(0,0,1)$为V_1的一个基， $y_1=(1,2,1)$和$y_2=(3,1,2)$为V_2的一个基。设$(a_1, a_2, a_3) \in V_1 \cap V_2$，则

$$(a_1, a_2, a_3)=b_1 x_1+ b_2 x_2=c_1 y_1+c_2 y_2$$

$$\left.\begin{aligned} a_1&= b_1=c_1+3c_2 \\ a_2&=0=2c_1+c_2 \\ a_3&= b_2=c_1+2c_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} a_1&= b_1=-5c_1 \\ a_2&=0 \\ a_3&= b_2=-3c_1 \end{aligned}$$

$\therefore$ $(a_1, a_2, a_3)=c_1 (5,0,3)$

$\therefore$ $V_1 \cap V_2$是以(5,0,3)为基的一维子空间。

$\because$ $\dim V_1=2, \dim V_2=2$, 而$\dim(V_1 \cap V_2)=1$

$\therefore$ $\dim(V_1+V_2)=3$ $\qquad$ $\therefore$ $V_1+V_2= R^3$

显然(5,0,3)、 (0,0,1)、 (3,1,2)是V_1+V_2的一个基。

例2. 设R^3的子空间 $V_1=\{(x,y,z)|x=y=z\}$, $V_2=\{(x,y,z)|x=0\}$

求证$V_1+V_2=R^3$。

证明：设$\alpha=(a_1,a_2,a_3)$为R^3的任意元素

$\because\ \alpha=(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_1,a_1)+(0,a_2-a_1,a_3-a_1)$

$\therefore\ \alpha\in V_1+V_2$ $\therefore\ R^3\subseteq V_1+V_2$

又$\because\ V_1+V_2\subseteq R^3$

$\therefore\ V_1+V_2=R^3$

[证毕]

三、子空间的直和

1. 定义： 设V_1、V_2是线性空间V的子空间，若其和空间V_1+V_2中的任一元素只能唯一的表示为V_1的一个元素与V_2的一个元素之和，即$\forall x\in V_1+V_2$，存在唯一的$y\in V_1, z\in V_2$，使$x=y+z$，则称V_1+V_2为V_1与V_2的直和，记为$V_1\oplus V_2$。

子空间的直和并不是一种特殊的和，仍然是$V_1+V_2=\{x+y \mid x\in V_1, y\in V_2\}$，反映的是两个子空间的关系特殊。

2. 定理： 设V_1、V_2是线性空间V的子空间，如下四种表述等价

（1）V_1+V_2成为直和$V_1\oplus V_2$

（2）$V_1\cap V_2=\{0\}$

（3）$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

（4）$x_1,x_2\cdots,x_s$为V_1的基，$y_1,y_2\cdots,y_t$为V_2的基，则$x_1,x_2\cdots,x_s,y_1,y_2\cdots,y_t$为$V_1+V_2$的基

[证明]：（2）和（3）的等价性显然；

采用循环证法：（1）$\rightarrow$（2）$\rightarrow$（4）$\rightarrow$（1）

（1）$\rightarrow$（2）：已知$V_1+V_2=V_1\oplus V_2$，假定 $x\neq O$ 且$x\in V_1\cap V_2$，则

$$O=O+=x+(-x)$$

$$O\in V_1+V_2,\quad O\in V_1,\quad O\in V_2,\quad x\in V_1,\quad -x\in V_2$$

说明对零元素存在两种分解，这与直和的定义矛盾，所以假定不成立，在$V_1\cap V_2$中只能存在零元素，即$V_1\cap V_2=\{O\}$

（2）$\rightarrow$（4）：已知$V_1\cap V_2=\{O\}$

成为基的两个条件：

1）可以线性表示V_1+V_2中的任意元素；2）线性无关

$\forall x\in V_1$， $y\in V_2$，存在如下坐标表示式

$$x=\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i \qquad y=\sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i$$

$x+y$可表示V_1+V_2中的任一元素，所以 $x_1,x_2\cdots,x_s,y_1,y_2\cdots,y_t$可表示$V_1+V_2$中的任意元素。

假设 $x_1,x_2,\cdots,x_s,y_1,y_2,\cdots,y_t$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 使

$$\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i+\sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i=O$$

而 $x=\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i\in V_1\qquad y=\sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i\in V_2$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i=-y\in V_2$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i\in V_1\cap V_2$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i=O$$

$$\therefore\quad \xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_s=0$$

同理 $\eta_1=\eta_2=\cdots=\eta_s=0$

这与其线性相关性矛盾，$x_1,x_2,\cdots,x_s,y_1,y_2,\cdots,y_t$ 线性无关。

$\therefore\quad x_1,x_2,\cdots,x_s,y_1,y_2,\cdots,y_t$ 可作为 V_1+V_2 的基

（4）$\rightarrow$（1）：已知（4）成立

在$x_1,x_2\cdots,x_s,y_1,y_2\cdots,y_t$这组基下，$\forall x\in V_1+V_2$存在唯一的坐标$\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_s,\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_t$使

$$x=\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i+\sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{s}\xi_i x_i\in V_1 \qquad \sum_{i=1}^{t}\eta_i y_i\in V_2$$

$\therefore V_1+V_2$成为直和

[证毕]

作业：**P25－26，11、12、13**