奇异值分解

1. 形式：

$\mathbf{A}=\mathbf{U\Sigma V^T}$，其中 A 为普通的矩阵，U 为 A 的行向量空间单位正交基，V 为 A 的列向量空间单位正交基；

2. 目标：

对于行向量正交基 v_i，找到列向量正交基 u_i，使得 $u_i=\mathbf{A}v_i$；

即 $\mathbf{A}[v_1,v_2,...,v_r]=[u_1,u_2,...,u_r]\begin{pmatrix}\delta_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \delta_r\end{pmatrix}$；

3. U 和 V 的计算方法：

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{pmatrix}\delta_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \delta_r^2\end{pmatrix}\mathbf{V};$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{U}\begin{pmatrix}\delta_1^2 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \delta_r^2\end{pmatrix}\mathbf{U}^T;$$

其中 $v_1,v_2,...,v_r$ 为 A 行向量的正交基

$v_{r+1},...,v_n$ 为 A 行向量零空间的正交基

$u_1,u_2,...,u_r$ 为 A 列向量的正交基

$u_r,...,u_n$ 为 $\mathbf{A}^T$ 零空间的正交基

4. 应用：

a. 在 PCA 降维得时候需要选择低维下的特征时使用过，具体参见 PCA.docx