§7 向量空间

7.1 引言

我们在前几节讨论了矩阵和向量，一个线性方程组可以写成矩阵形式：$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，它的解是向量的集合。正如微积分研究点的集合关于开集、闭集和极限等性质，线性代数将考虑解向量的集合关于加法、数乘的运算性质，满足这种运算性质的集合称为向量空间。

线性代数　　主要运算：向量的线性组合

　　　　　　主要问题：$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解

问题：一个方程组有多于一个的有限个解吗？

7.1 引言

设 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有两个互异的解$\alpha,\beta,\alpha\neq\beta,$则

$$\left.\begin{array}{l} A\alpha=\mathbf{b} \\ A\beta=\mathbf{b} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall c\in\mathbb{R}, A(c\alpha+(1-c)\beta)=\mathbf{b},$$

即$c\alpha+(1-c)\beta, c\in\mathbb{R}$均是$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解.

$A(\beta-\alpha)=0,$ 即 $\beta-\alpha$ 是 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解.

因此 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 若超过一个解，则有无穷解.

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$若有解 $\alpha,$ 则任意解 $\beta(A\beta=\mathbf{b})$均满足$\beta\in\{\alpha+N(A)\},$

其中$N(A)=\{\mathbf{y}|A\mathbf{y}=\mathbf{0}\}.$

7.1 引言

$\Longrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解的情况：

$Case\,1$ 只有零解　　　　$Case\,2$ 有无穷解

为了描述解集，我们引入一个概念——向量空间.

7.2 向量空间和子空间

定义：设$V \subset \mathbb{R}^n$是一些n维列向量的集合，且V关于向量加法和数乘封闭，即$\forall \alpha, \beta \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Longrightarrow c_1\alpha + c_2\beta \in V$. 则称$V$为一个向量空间(vector space).

性质：零向量属于一向量空间V.

7.2 向量空间和子空间

例：$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$，则 V 是一个向量空间，

例如 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in V$, 则 $c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in V, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

例：$\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$不是一个向量空间.

例：$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 1 \right\}$不是向量空间.

7.2 向量空间和子空间

更一般的定义：

一个实向量空间(real vector space)是“向量”的集合，其关于加法和(实数的)数乘封闭(即线性组合封闭)且满足1.7节的八条性质.

例：$M_n(\mathbb{R}) = \{n \text{ 阶实矩阵}\}$.

例：和 $\mathbf{u}$ 垂直的 3 维向量全体, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例：$V = \{y = f(x) | y'''' = 0\}$.

7. 2 向量空间和子空间

子空间：设 V 是一个向量空间，$W \subset V$, 若 W 关于 V 的加法、数乘封闭，则 W 是一个子空间(subspace).

例：$\mathbb{R}^3$ 的子空间

1. $W = \mathbb{R}^3$.

2. $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

3. W是一过原点平面.

4. W 是一过原点直线.

7.3 列空间和零空间

关于$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 相关联的有两类(子)空间.

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=(\vec{\alpha_1},\vec{\alpha_2})$, 则 $\vec{\alpha_1}$ 和 $\vec{\alpha_2}$ 的全部线性组合是一个 $\mathbb{R}^3$ 的子空间, 称为 A 的列空间(column space), 记作 $C(A)$.

几何上，它是一张平面(过原点).

7.3 列空间和零空间

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_5)$

$$V = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_5\alpha_5 | c_i \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_1 + c_3 \\ -c_2 + c_4 \\ -c_3 + c_5 \\ -c_4 \end{pmatrix} | c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 | b_1 + b_3 + b_5 = 0 \right\} = C(A).$$

几何上，它是 $\mathbb{R}^5$上一个“超”平面.

7.3 列空间和零空间

定理：$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解 $\Longleftrightarrow \mathbf{b}\in C(A)$

例如，$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 总有解，因为$\mathbf{0}\in C(A)$.

例：$A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{pmatrix}_{4\times 3}$，问：$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\in C(A)$?

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=1\cdot\alpha_1=A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

7. 3 列空间和零空间

另一类子空间：零空间 $N(A)=\{\mathbf{x}|A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}\subset\mathbb{R}^n$.

验证：它是一个空间！($A\mathbf{x}=\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ 的解集不是一个空间)

定理：$A\mathbf{x}=0$ 有无穷解 $\Longleftrightarrow$ A 的列向量线性相关.

7.4 阶梯形

问题：求解 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 或 $N(A)$?

例：$A=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}=U.$

U 是一个阶梯形式(echelon form).

主元所在列($1,3$ 列)称为主列(pivot column)，主元对应变量 (x_1,x_3) 称为主变量(pivot variable).

7.4 阶梯形

检查：$2,4$ 两列是$1,3$列的线性组合，称为自由列(free column).

x_2, x_4是自由变量, 对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & =0 \\ & & 2x_3 & +4x_4 & =0 \end{cases}.$$

目标：保证每个方程只有一个主变量.

7.4 阶梯形

$$U=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即 $\left\{\begin{array}{ccccc}x_1&+2x_2&&-2x_4&=0\\&&2x_3&+4x_4&=0\end{array}\right.\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2+2x_4\\x_2=x_2\\x_3=-2x_4\\x_4=x_4\end{cases},$

即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}.\Longrightarrow N(A)=\left\{c_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\middle|c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}.$

7.4 阶梯形

注：1. $A \xrightarrow{\text{行变换}} U$, 则 $N(A) = N(U)$.

2. $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 这说明 $N(B) \subset N(AB)$.

3. $C(AB) \subset C(A)$, AB 的每一列是 A 的列向量的线性组合.

4.设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有一个解 $\mathbf{x}^*$, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集为 $\mathbf{x}^* + N(A)$.

例：比较 $N(C)$ 和 $N(A), N(B)$, 其中 $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

例：设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中两子空间，则

$V_1 + V_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 | \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$ 是一个子空间，而 $V_1 \cup V_2$ 一般不是子空间.