第十六讲 矩阵特征值的估计

一、特征值界的估计

定理 1. 设 $A\in R^{n\times n}$，λ 为 A 的任意特征值，则有

$$\left|\mathrm{Im}(\lambda)\right|\le M\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$

其中，$M=\max\limits_{1\le i,j\le n}\left|\frac{a_{ij}-a_{ji}}{2}\right|$

证明：设 x 为 A 的属于特征值 λ 的单位特征向量，即 $Ax=\lambda x$，

$x^H x=1$，则

$$\lambda=x^H Ax \quad\rightarrow\quad \bar{\lambda}=\left(x^H Ax\right)^H=x^H A^H x$$

$$\lambda-\bar{\lambda}=2j\mathrm{Im}(\lambda)=x^H\left(A-A^H\right)x=x^H\left(A-A^T\right)x$$

$$2jI_m(\lambda)=x^H(A-A^T)x=\frac{1}{2}[x^H(A-A^T)x+x^H(A-A^T)x]$$

$$=\frac{1}{2}[x^H(A-A^T)x+x^T(A^T-A)\overline{x}]=\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})\overline{\xi}_i\xi_j+\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ji}-a_{ij})\xi_i\overline{\xi}_j\right]$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-a_{ji})\frac{\overline{\xi}_i\xi_j-\xi_i\overline{\xi}_j}{2}$$

两边取模：

$$2\left|I_m(\lambda)\right|\le\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left|a_{ij}-a_{ji}\right|\right)\left|\overline{\xi}_i\xi_j-\xi_i\overline{\xi}_j\right|\le M\sum_{i,j=1}^{n}\left|\overline{\xi}_i\xi_j-\xi_i\overline{\xi}_j\right|=M\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\left|\overline{\xi}_i\xi_j-\xi_i\overline{\xi}_j\right|$$

任意 m 个实数 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_m$ 满足：

$$(\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_m)^2\le m(\eta_1^2+\eta_2^2+\cdots+\eta_m^2)$$

$$\therefore 4[I_m(\lambda)]^2\le M^2\left[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\left|\overline{\xi}_i\xi_j-\xi_i\overline{\xi}_j\right|\right]^2\le n(n-1)M^2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}\left|\overline{\xi}_i\xi_j-\xi_i\overline{\xi}_j\right|^2$$

又由$\left|\bar{\xi}_i\xi_j-\xi_i\bar{\xi}_j\right|^2=(\bar{\xi}_i\xi_j-\xi_i\bar{\xi}_j)(\xi_i\bar{\xi}_j-\bar{\xi}_i\xi_j)=2\left|\xi_i\right|^2\left|\xi_j\right|^2-\xi_i^2\bar{\xi}_j^2-\bar{\xi}_i^2\xi_j^2$可得：

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left|\bar{\xi}_i\xi_j-\xi_i\bar{\xi}_j\right|^2=2\sum_{i,j=1}^{n}\left|\xi_i\right|^2\left|\xi_j\right|^2-\sum_{i,j=1}^{n}(\xi_i^2\bar{\xi}_j^2+\bar{\xi}_i^2\xi_j^2)$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\left|\xi_i\right|^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j\right|^2-2\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i^2\cdot\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2=2-2\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right|^2\le 2$$

$\therefore 4[I_m(\lambda)]^2\le 2n(n-1)M^2$，即：$\left|I_m(\lambda)\right|\le M\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}$ [证毕]

推论： 厄米矩阵的特征值都是实数，反厄米矩阵的特征值都是零或纯虚数。

引理： 设$B\in C^{n\times n}$，列向量$y\in C^n$，满足$\|y\|_2=1$，则$\left|y^H By\right|\le n\cdot\max\limits_{1\le i,j\le n}\left|b_{ij}\right|$

证明：设$B=(b_{ij})_{n\times n}$，$y=(\eta_1\quad \eta_2\quad \cdots\quad \eta_n)^T$，则

$$\left|y^H By\right|=\left|\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\bar{\eta}_i\eta_j\right|\le\max_{i,j}\left|b_{ij}\right|\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\left|\eta_i\right|\left|\eta_j\right|\le\max_{i,j}\left|b_{ij}\right|\cdot\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left|\eta_i\right|^2+\left|\eta_j\right|^2\right)$$

$$=\max_{i,j}\left|b_{ij}\right|\cdot\frac{1}{2}(n+n)=n\cdot\max_{i,j}\left|b_{ij}\right|$$

[证毕]

定理 2. 设$A\in R^{n\times n}$，λ为 A 的任意特征值，则有

$$|\lambda|\le n\rho \qquad |\mathrm{Re}(\lambda)|\le\frac{1}{2}n\tau \qquad |\mathrm{Im}(\lambda)|\le\frac{1}{2}ns$$

其中，$\rho=\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$，$\tau=\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}+\overline{a_{ji}}|$，$s=\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}-\overline{a_{ji}}|$

二、盖尔圆法

定义： 设$A=(a_{ij})_{n\times n}\in C^{n\times n}$,由方程$|z-a_{ii}|\le R_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}|a_{ij}|$所确定的圆称为 A 的第 *i* 个盖尔圆，$R_i$称为盖尔圆的半径。

定理 3： 矩阵 A 的所有特征值均落在它的所有盖尔圆的并集之中。

证明：设$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in C^{n\times n}$，$\lambda$ 为 A 的某一个特征值，x 为相应的特征向量，将 x 写成$x=\left[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right]^T$，并设$\left|\xi_{i_0}\right|=\max\left|\xi_i\right|$

由$Ax=\lambda x$，考虑i_0行：$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\xi_j=\lambda\xi_{i_0}$，则

$$\left(\lambda-a_{i_0 i_0}\right)\xi_{i_0}=\sum_{j=1}^{n}{}' a_{i_0 j}\xi_j \qquad \left(j\neq i_0\right)$$

$$\left|\lambda-a_{i_0 i_0}\right|=\left|\sum_{j=1}^{n}{}' a_{i_0 j}\frac{\xi_j}{\xi_{i_0}}\right|\leq\sum_{j=1}^{n}{}'\left|a_{i_0 j}\right|\left|\frac{\xi_j}{\xi_{i_0}}\right|\leq R_{i_0}$$

所以，λ 落于 A 的第i_0个盖尔圆中，当然也在所有盖尔圆的并集之中。

[证毕]

定理 4： 由矩阵 **A** 的所有盖尔圆组成的连通部分中任取一个，如果它是由 k 个盖尔圆构成的，则在这个连通部分中有且仅有 **A** 的 k 个特征值（盖尔圆相重时重复计数，特征值相同时也重复计数）。

注意： 连通的盖尔圆中，有些盖尔圆可能包含两个或多个特征值，而其它盖尔圆中可能无特征值。

推论 1. 孤立盖尔圆中恰好包含一个特征值。

推论 2. 盖尔圆方法中盖尔圆半径可以按列求和。（方阵转置后特征值不变）

● 相似矩阵 $P^{-1}AP$ 与 A 有相同的特征值。

取 $P = diag[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n](\alpha_i > 0)$，则 $PAP^{-1} = \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j} a_{ij}\right)_{n \times n}$

推论 3. 盖尔圆半径变为 $R_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{\alpha_i}{\alpha_j}|a_{ij}|$，两个盖尔圆定理（定理 3 和定理 4）仍然成立。

根据推论 3，选取适当的 α_i 使盖尔圆变大或变小，可以对特征值进行隔离。但有时这种隔离特征值的方法会失效，如对于那些对角线上由相同元素组成的矩阵，此时盖尔圆的圆心相同。

作业：**P261 2，3，4**