

矩阵论

- 线性空间与线性变换
- 范数理论
- 矩阵分析
- 矩阵分解
- 特征值估计
- 广义逆矩阵

第一讲 线性空间

一、线性空间的定义及性质

[知识预备]

★ **集合**：笼统的说是指一些事物（或者对象）组成的整体。

集合的表示：枚举、表达式

集合的运算：并（ \cup ），交（ \cap ）

★ **数域**：一种数集，对四则运算**封闭**（除数不为零）。比如有理数域、实数域（ \mathbf{R} ）和复数域（ \mathbf{C} ）。实数域和复数域是工程上较常用的两个数域。

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是学习现代矩阵论的重要基础。线性空间的概念是某类事物从量的方面的一个抽象。

1. 线性空间的定义:

设 V 是一个非空集合, 其元素用 x, y, z 等表示; K 是一个数域, 其元素用 k, l, m 等表示。如果 V 满足[如下 8 条性质, 分两类]:

(I) 在 V 中定义一个“加法”运算, 即当 $x, y \in V$ 时, 有唯一的和 $x + y \in V$ (封闭性), 且加法运算满足下列性质:

(1) 结合律 $x + (y + z) = (x + y) + z$;

(2) 交换律 $x + y = y + x$;

(3) 零元律 存在零元素 0 , 使 $x + 0 = x$;

(4) 负元律 对于任一元素 $x \in V$, 存在一元素 $y \in V$, 使 $x + y = 0$, 且称 y 为 x 的负元素, 记为 $(-x)$ 。则有 $x + (-x) = 0$ 。

(II) 在 V 中定义一个“数乘”运算，即当 $x \in V, k \in K$ 时，有唯一的 $kx \in V$ （封闭性），且数乘运算满足下列性质：

(5) 数因子分配律 $k(x + y) = kx + ky$;

(6) 分配律 $(k + l)x = kx + lx$;

(7) 结合律 $k(lx) = (kl)x$;

(8) 恒等律 $1x = x$; [数域中一定有 1]

则称 V 为数域 K 上的线性空间。

★线性空间不能离开某一数域来定义，因为同一个集合，如果数域不同，该集合构成的线性空间也不同。

★两种运算、八条性质。数域 K 中的运算是具体的四则运算，而 V 中所定义的加法运算和数乘运算则可以十分抽象。

★除了两种运算和八条性质外，还应注意唯一性、封闭性。唯一性一般较显然，封闭性还需要证明，出现不封闭的情况：集合小、运算本身就不满足。

例 1. 设 $R^+ = \{\text{全体正实数}\}$, 其“加法”及“数乘”运算定义为

$$x \oplus y = xy, \quad k \circ x = x^k$$

证明: R^+ 是实数域 R 上的线性空间。

[证明] 首先需要证明两种运算的唯一性和封闭性

① 唯一性和封闭性

唯一性显然

若 $x > 0, y > 0, k \in R$, 则有

$x \oplus y = xy \in R^+, \quad k \circ x = x^k \in R^+$ 封闭性得证。

② 八条性质

(1) $x \oplus (y \oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y) \oplus z$

(2) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$

(3) 1 是零元素

$$x \oplus 1 = x \cdot 1 = x \quad [x \oplus 0 = x \rightarrow x0 = x \rightarrow 0 = 1]$$

$$(4) \quad \frac{1}{x} \text{ 是 } x \text{ 的负元素} \quad x \boxplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad [x + y = 0]$$

$$(5) \quad k \circ (x \boxplus y) = (xy)^k = x^k y^k = (k \circ x) \boxplus (k \circ y) \quad [\text{数因子分配律}]$$

$$(6) \quad (k + l) \circ x = x^{k+l} = x^k x^l = (k \circ x) \boxplus (l \circ x) \quad [\text{分配律}]$$

$$(7) \quad k \circ (l \circ x) = (x^l)^k = x^{kl} = (kl) \circ x \quad [\text{结合律}]$$

$$(8) \quad 1 \circ x = x^1 = x \quad [\text{恒等律}]$$

由此可证， R^+ 是实数域 R 上的线性空间。 [证毕]

2. 线性空间的性质

[定理] (1) 零元素是唯一的，任一元素的负元素也是唯一的。

(2) 如下恒等式成立： $0x = 0$ ， $(-1)x = (-x)$ 。

[证明] (1) ①零元素是唯一的。 设存在两个零元素 o_1 和 o_2 ，则由于 o_1 和 o_2 均为零元素， 按零元律有

[交换律]

$$O_1 + O_2 = O_1 = O_2 + O_1 = O_2$$

所以 $o_1 = o_2$ 。即 o_1 和 o_2 相同，与假设相矛盾，故只有一个零元素。

②任一元素的负元素也是唯一的。假设 $\forall x \in V$ ，存在两个负元素 y 和 z ，则根据负元律有：

$$y = y + O = y + (x + z) = (y + x) + z = O + z = z$$

[零元律]

[结合律]

[零元律]

即 y 和 z 相同，故负元素唯一。

(2) ①： 设 $w = 0x$ ， 则 $w + w = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = w$ ， 故 $w = O$ 。

[恒等律]

②： 设 $w = (-1)x$ ， 则 $x + w = 1x + (-1)x = 0x = O$ ， 故 $w = -x$ 。

[证毕]

3. 线性相关性

■ 线性组合: $\forall x_1, x_2 \cdots, x_m \in V, c_1, c_2 \cdots, c_m \in K$

$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ 称为元素组 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 的一个线性组合。

■ 线性表示: V 中某个元素 x 可表示为其中某个元素组的线性组合, 则称 x 可由该元素组线性表示。

■ 线性相关性:

如果存在一组不全为零的数 $c_1, c_2 \cdots, c_m \in K$, 使得对于元素 $x_1, x_2 \cdots, x_m \in V$ 有

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = 0$$

则称元素组 $x_1, x_2 \cdots, x_m$ 线性相关, 否则称其线性无关。

4. 线性空间的维数

[定义]：线性空间 V 中最大线性无关元素组所含元素个数称为 V 的维数，记为 $\dim V$ 。

例 2. 全体 $m \times n$ 阶实矩阵的集合构成一个实线性空间（对于矩阵加法和数对矩阵的数乘运算），求其维数。

[解]令 E_{ij} 为这样的—个 $m \times n$ 阶矩阵，其 (i, j) 元素为 1，其余元素为零。

显然，这样的矩阵共有 $m \times n$ 个，构成一个具有 $m \times n$ 个元素的线性无关元素组 $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}; E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}; \dots; E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn}\}$ 。另一方面，还需说明元素个数最大。对于任意的 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，都可由以上元素组线性表示，

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} \rightarrow \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij} - A = 0$$

即 $\{E_{ij} | i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$ 构成了最大线性无关元素组，所以该空间的维数为 $m \times n$ 。

二、线性空间的基与坐标

1. 基的定义

设 V 是数域 K 上的线性空间， x_1, x_2, \dots, x_r ($r \geq 1$)是属于 V 的 r 个任意元素，如果它满足

(1) x_1, x_2, \dots, x_r 线性无关；

(2) V 中任一向量 x 均可由 x_1, x_2, \dots, x_r 线性表示。

则称 x_1, x_2, \dots, x_r 为 V 的一个基，并称 x_1, x_2, \dots, x_r 为该基的基元素。

✧ 基是 V 中最大线性无关元素组； V 的维数正是基中所含元素的个数。

✧ 基是不唯一的，但不同的基所含元素个数相等。

例 3. 考虑全体复数所形成的集合 C 。如果 $K = C$ （复数域），则该集合对复数加法和复数的乘法构成线性空间，其基可取为 1 ，空间维数为 1 ；如果取 $K = R$ （实数域），则该集合对复数加法及实数对复数的数乘构成线性空间，其基可取为 $\{1, i\}$ ，空间维数为 2 。

数域 K	两种运算	基	一般元素	空间类型	维数
复数域 C	(1) 复数加法; (2) 复数对复数的数乘	$\{1\}$	$c = c \cdot 1$	复线性空间	1
实数域 R	(1) 复数加法 (2) 实数对复数的数乘	$\{1, i\}$	$c = a \cdot 1 + b \cdot i$	实线性空间	2

2. 坐标的定义

称线性空间 V^n 的一个基 x_1, x_2, \dots, x_n 为 V^n 的一个**坐标系**, $\forall x \in V^n$, 它在该基下的线性表示为:

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \quad (\xi_i \in K, x_i \in V^n, i = 1, 2, \dots, n)$$

则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为 x 在该坐标系中的**坐标**或分量, 记为 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ 。

- ✧ 一般来说, 线性空间及其元素是抽象的对象, 不同空间的元素完全可以具有千差万别的类别及性质。但坐标表示却把它们统一了起来, 坐标表示把这种差别留给了基和基元素, 由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来。
- ✧ 更进一步, 原本抽象的“加法”及“数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘。

$$\begin{aligned}
 1^\circ \quad x + y &= (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n) + (\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \cdots + \eta_n x_n) \\
 &= (\xi_1 + \eta_1)x_1 + (\xi_2 + \eta_2)x_2 + \cdots + (\xi_n + \eta_n)x_n
 \end{aligned}$$

正对应

$$\begin{cases} x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \\ y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \end{cases} \rightarrow x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n)$$

$$\begin{aligned}
 2^\circ \quad kx &= k(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n) = (k\xi_1)x_1 + (k\xi_2)x_2 + \cdots + (k\xi_n)x_n \\
 &\rightarrow (k\xi_1, k\xi_2, \cdots, k\xi_n)
 \end{aligned}$$

$$\text{正对应} \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \rightarrow kx = (k\xi_1, k\xi_2, \cdots, k\xi_n)$$

✧ 同一元素在不同坐标系中的坐标是不同的。

三、基变换与坐标变换

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是 V^n 的旧基, y_1, y_2, \dots, y_n 是 V^n 的新基, 由于两者都是基, 所以可以相互线性表示

$$y_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} x_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{即} \quad [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n] C$$

其中 C 称为**过渡矩阵**。可以证明, C 是可逆的。

设 $x \in V^n$, 它在旧基下的线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

它在新基下的线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^n \xi'_i y_i = [y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix}$$

则

$$[y_1, y_2, \dots, y_n] \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n] C \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

由于基元素的线性无关性，所以有

$$C \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

例4. 已知矩阵空间 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的两个基:

$$(I): \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(II): \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求由基(I)改变为基(II)的过渡矩阵。

解: 采用中介基方法。取 $\mathbf{R}^{2 \times 2}$ 的简单基(III)

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

直接写出简单基改变为基(I) 的过渡矩阵:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

直接写出简单基改变为基(II) 的过渡矩阵:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$(A_1, A_2, A_3, A_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) C_1$$

$$(B_1, B_2, B_3, B_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) C_2$$

所以 $(B_1, B_2, B_3, B_4) = (A_1, A_2, A_3, A_4) C_1^{-1} C_2$

所以由基(I)改变为基(II)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1} C_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

作业: **P25—26 3, 5, 7, 9**