§1. 向量及其运算

1.1 引 言

线性代数的中心问题是求解线性方程组.

例：给定一个线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$

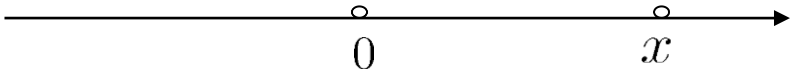
它能表示为 $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$

此方程组可解 $\Longleftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 可表示为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 的线性组合.

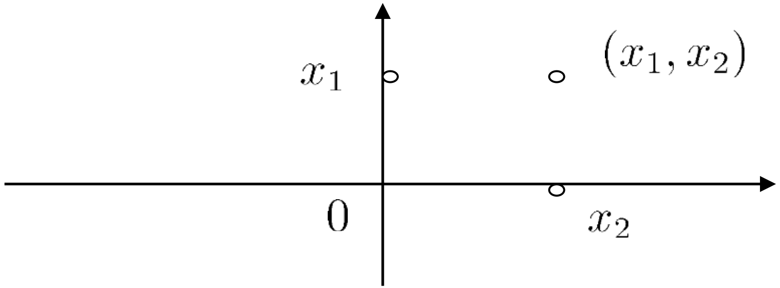
线性代数是建立在向量的加法和数乘这两种所谓“线性运算”上的.

1.2 n维空间中的点

在直线上取定坐标系后，每个实数一一对应表示直线上的点.

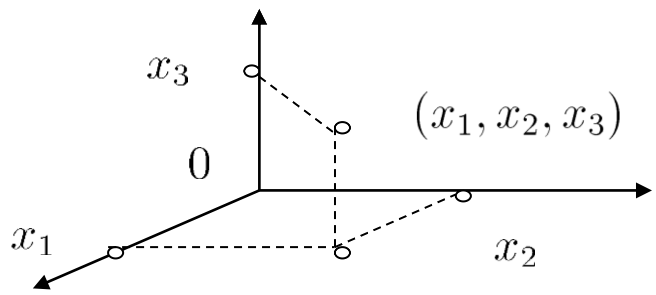


一个二元有序数组 (x_1, x_2) 一一对应地表示平面上的点.



1.2　n维空间中的点

一个三元有序数组 (x_1, x_2, x_3) 一一对应地表示 3 维空间中的点.



同理，定义 n 维空间的点为一个 n 元有序数组 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$,

称 x_i为点$\mathbf{x}$的第 i 个坐标.

1.2 n维空间中的点

称两个点 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 相等，若

$$x_i=y_i,\ \forall 1\leq i\leq n.$$

可以定义两个点 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$ 的和

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}:=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n).$$

若 c 为一个数，可以定义数乘运算：$c\mathbf{x}:=(cx_1,cx_2,\cdots,cx_n)$.

1.2　n维空间中的点

一些例子：

- $\mathbf{x} = (1, 2), \quad \mathbf{y} = (-4, 5),$　则　$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-3, 7).$

- $\mathbf{x} = (-1, \pi, 3), \quad \mathbf{y} = (\sqrt{3}, 5, -2),$　则　$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (-1 + \sqrt{3}, \pi + 5, 1).$

- $\mathbf{x} = (2, -1, 4), \quad c = 7,$　则　$c\mathbf{x} = (14, -7, 28).$

1.2 n维空间中的点

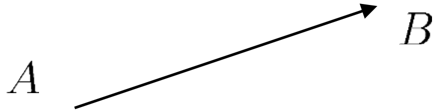
容易看到这样定义的加法和数乘运算对任意n 维空间中点 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$满足以下 8条性质：

1. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z});$
2. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x};$
3. 若令 $\mathbf{0}=(0,\cdots,0)$ 为一点，则 $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x};$
4. 若以$-\mathbf{x}$表示$(-1)\mathbf{x}$, 则 $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0};$
5. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x};$
6. $(c_1\cdot c_2)\mathbf{x}=c_1(c_2\mathbf{x});$
7. $(c_1+c_2)\mathbf{x}=c_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{x};$
8. $c(\mathbf{x}+\mathbf{y})=c\mathbf{x}+c\mathbf{y}.$

1.3 向 量

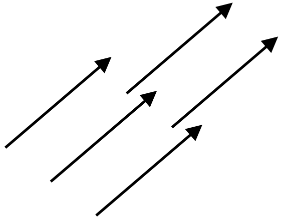
向量指空间中具有一定长度及方向的直线段.

通常记起点为 A , 终点为 B 的向量为 $\overrightarrow{AB}$.



力、位移、速度、加速度等都是物理学中常出现的向量.

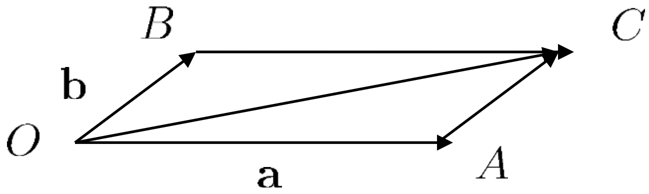
两个向量相等 $\Longleftrightarrow$ 二者长度相等，方向相同 .



相等的向量

1.3 向 量

向量的加法(addition)：
两个向量 $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ 和 $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ 的和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 为以向量 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 代表的向量 (平行四边形法则).

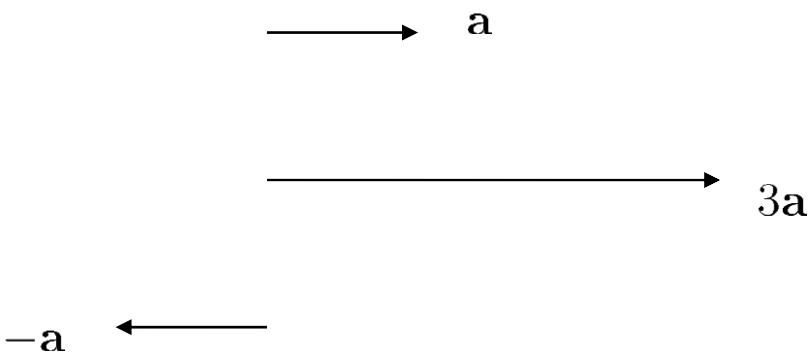


向量的加法又满足三角形法则.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

1. 3　向 量

向量的数乘(scalar multiplication)：



1.3 向 量

① 向量的加法满足结合律，即对任意向量$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

② 向量的加法满足交换律，即对任意向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b},$

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

③ 当 $A=B$ 时，称向量 $\overrightarrow{AB}$ 为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 则 $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ 可表示为$\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$对任意向量 $\mathbf{a}$ 成立.

④ 对向量 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ ，记向量$\overrightarrow{BA}$ 为$-\mathbf{a}$ ，则 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$ 即为$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0},\ \forall\mathbf{a}.$

1.3　向 量

⑤　$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$

⑥　$(c_1 \cdot c_2)\mathbf{a} = c_1(c_2\mathbf{a}).$

⑦　$(c_1 + c_2)\mathbf{a} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{a}.$

⑧　$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}.$

1.3 向 量

若固定向量的起点，如记之为原点，则向量由其终点唯一确定. 于是我们可以等同：

1. n 维空间中的点；
2. n 元有序数组；
3. n 维空间中由原点出发的向量.

我们将不加区分地使用向量的这三个身份.

记 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 为列向量, 其中 a_i 为向量 $\mathbf{a}$的第 i 个分量.

1.3 向 量

向量的加法：

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} := \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}.$$

数乘：

$$c\mathbf{a} := \begin{pmatrix} ca_1 \\ \vdots \\ ca_n \end{pmatrix}.$$

1.4 向量空间的定义

在由称为“向量”的元素构成的非空集合V中，若定义了加法和数乘运算，且对任意向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 及数 $k,l\in\mathbb{F}$ 满足以下 8 条性质：

1. $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$
2. $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$
3. 存在零向量 $\mathbf{0}$ ，$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}.$
4. 对任意向量 $\mathbf{a}$ ，存在唯一相反向量 $-\mathbf{a}$ ，使得 $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}.$
5. $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}.$
6. $(kl)\mathbf{a}=k(l\mathbf{a}).$
7. $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}.$
8. $(k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a}.$

则称 V为定义在数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间(vector space).

1.5　向量的线性组合

定义：设 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 为 m 个 n 维向量，$c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{R}$, 则称 $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$ 为向量 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 的一个线性组合.

例：给定 $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

则 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 是向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的一个线性组合.

1.5　向量的线性组合

问题：给定一组向量$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$，则 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m$ 的全部线性组合是怎样的集合？

例：向量 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的全部线性组合 $\{c\mathbf{u} | c \in \mathbb{R}\}$ 为以 $\mathbf{u}$ 为方向的一条直线.

1.5 向量的线性组合

例：向量 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 的全部线性组合

为 $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}=\begin{pmatrix}c\\c+d\\d\end{pmatrix}$，其中 c,d 为任意实数.

这是平面 $x-y+z=0$.

1.5　向量的线性组合

例：向量 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ 的全部线性组合

为 $c\mathbf{u}+d\mathbf{v}=\begin{pmatrix}c+\sqrt{2}d\\c+\sqrt{2}d\\0\end{pmatrix}$ ，其中 c,d 为任意实数.

这是直线 $\begin{cases}x=y\\z=0.\end{cases}$

1.5　向量的线性组合

例：向量 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

的全部线性组合 $\{c\mathbf{u}+d\mathbf{v}+e\mathbf{w}|c,d,e\in\mathbb{R}\}$ 为整个 3 维空间.

这是因为，任意 3 维向量 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 都可以表示为 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 的下列线性组合：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{x+y-z}{2}\mathbf{u}+\frac{y+z-x}{2}\mathbf{v}+\frac{z+x-y}{2}\mathbf{w}.$$

1.5 向量的线性组合

例：向量 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{w}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

的全部线性组合$\{c\mathbf{u}+d\mathbf{v}+e\mathbf{w}=(c+e)\mathbf{u}+(d+e)\mathbf{v}|c,d,e\in\mathbb{R}\}$

为向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}$张成的平面 $x-y+z=0$. 这是因为$\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 所张成的这张平面上.

1.5 向量的线性组合

总结：在 3 维空间中， 一般而言， 向量 $\mathbf{u}$ ， $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ ， 或 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的所有线性组合分别是一条直线，一张平面或整个 3 维空间.

1.6 向量的点积，长度

定义：设 $\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n)$, $\mathbf{w}=(w_1,\cdots,w_n)$ 是两个 n 维向量，定义点积(dot product) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ 为

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=v_1w_1+\cdots+v_nw_n.$$

点积又称为内积(inner product)或数量积(scalar product).

注意：两个向量的点积是一个数.

例：（1） $\mathbf{v}=(1,2)$, $\mathbf{w}=(2,-1)$, 则 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=2-2=0.$

例：（2） $\mathbf{v}=(1,3,-2)$, $\mathbf{w}=(-1,4,-3)$, 则

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=-1+12+6=17.$$

1.6 向量的点积，长度

例：（经济学中的点积）

已知三种商品的价格分别是 p_1, p_2, p_3 ，其交易数量分别为 q_1, q_2, q_3，其中 $q_i > 0$ 表示卖出，$q_i < 0$ 表示买入.

则总收入 $= p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$.

若记价格向量为 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ，交易数量向量为 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$,

则总收入 $= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.

若 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$，则说明收支平衡.

若讨论多件商品，则需引入高维向量空间及高维向量的点积.

1.6　向量的点积，长度

定义：向量 $\mathbf{v}$ 的长度（length）或模（norm）定义为

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

若 $\mathbf{v} = (v_1, \cdots, v_n)$ ，则 $||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$

特别，$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$;

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $||\mathbf{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$

例： $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ ，则 $||\mathbf{v}|| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}.$

1.6　向量的点积，长度

定义：若 $||\mathbf{v}||=1$ ，则 $\mathbf{v}$ 称为单位向量（unit vector）.

例：$\mathbf{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $||\mathbf{v}||=1$.

单位化：任给一非零向量 $\mathbf{v}$ ，则 $\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$ 是沿 $\mathbf{v}$ 方向的单位向量.

例： $\mathbf{v}=(1,2,3)$ ，则沿 $\mathbf{v}$ 方向的单位向量为 $\dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3).$

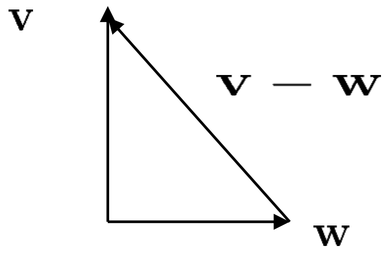
向量点积的性质：

1. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}$.（对称性）
2. $\mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}+d\mathbf{w})=c\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+d\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$.（线性性）
3. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=||\mathbf{v}||^2\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. （正定性）

1.7　向量的夹角

定义：若 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$ ，则称向量 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 垂直(perpendicular)(或称正交(orthogonal)). 记作 $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$ 或 $\mathbf{w}\perp\mathbf{v}$.

规定：零向量和任意向量垂直.



这样定义的垂直的概念与几何直观是一致的，即

$$\mathbf{v}\perp\mathbf{w}\Longleftrightarrow\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0.$$

事实上，设 $\mathbf{v}\perp\mathbf{w}$ ，则 $\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w}$ 构成直角三角形的三边.

于是由勾股定理知 $||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2=||\mathbf{v}||^2+||\mathbf{w}||^2$. 左边展开

得 $||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2=(\mathbf{v}-\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{w})=||\mathbf{v}||^2-\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}+||\mathbf{w}||^2$.

故有 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=0$. 反之亦然.

1.7 向量的夹角

命题：两非零向量$\mathbf{v},\mathbf{w}$的夹角 θ 满足 $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}$.

证明：一般地，向量$\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{v}-\mathbf{w}$构成三角形的三边.

由余弦定理得$||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2=||\mathbf{v}||^2+||\mathbf{w}||^2-2||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||\cos\theta$.

故：

$$\cos\theta=\frac{||\mathbf{v}||^2+||\mathbf{w}||^2-||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2}{2||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}=\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}.$$

- 若 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}>0$，则 $\cos\theta>0$ ，取 $0\le\theta<\dfrac{\pi}{2}$.
- 若 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}<0$，则 $\cos\theta<0$ ，取 $\dfrac{\pi}{2}<\theta\le\pi$.

例：$\mathbf{v}=(1,1),\mathbf{w}=(-1,0)$ 则 $\cos\theta=\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\mathbf{v},\mathbf{w}$ 夹角 $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$.

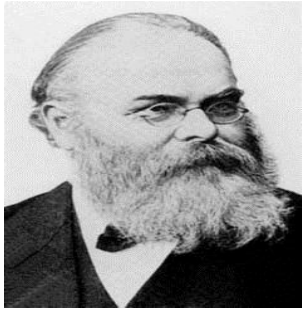
1.8　两个不等式

两个不等式：

- Cauchy-Schwarz不等式： $|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}|\leq||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||$， 等号成立当且仅当一个向量是另一个向量的倍数.

Cauchy-Schwarz不等式首先由法国数学家Augustin-Louis Cauchy(1789-1857)于1821年发现，再由俄国数学家Viktor Yakovych Bunyakovsky(1804-1889)于1859年重新发现，后由德国数学家Herman Schwarz(1843-1921)于1886年再次重新发现.

A. L. Cauchy



H. Schwarz

1.8　两个不等式

两个不等式：

- 三角不等式(Triangle inequality)：$||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| \le ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$, 等号成立当且仅当 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 之一为另一向量的非负倍数.

证明：
$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}+\mathbf{w}||^2 &= (\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = ||\mathbf{v}||^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + ||\mathbf{w}||^2 \\ &\le ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 + 2|\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}| \\ &\le ||\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{w}||^2 + 2||\mathbf{v}||\cdot||\mathbf{w}|| \\ &= (||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||)^2. \end{aligned}$$

等号成立当且仅当$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = ||\mathbf{v}||\cdot||\mathbf{w}||$，这等价于$\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 之一是另一个向量的非负倍数.

1.8　两个不等式

例：设 $\mathbf{v}=(a,b),\mathbf{w}=(b,a)$, 则由Cauchy-Schwarz不等式得

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}=2ab\le a^2+b^2=||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||.$$

若令 $x=a^2,\ y=b^2$, 则得“几何平均不大于算术平均”：

$$\sqrt{xy}\le\frac{x+y}{2}.$$

例：设 $||\mathbf{v}||=5,\ ||\mathbf{w}||=3,$ 求 $||\mathbf{v}-\mathbf{w}||$ 的最小和最大可能长度.

解：首先, $||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2=||\mathbf{v}||^2-2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}+||\mathbf{w}||^2.$

由Cauchy-Schwarz不等式, $-||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||\le\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\le||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||.$

故 $(||\mathbf{v}||-||\mathbf{w}||)^2\le||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2\le(||\mathbf{v}||+||\mathbf{w}||)^2.$

所以, $2\le||\mathbf{v}-\mathbf{w}||\le 8.$