§10 无关性、基与维数

10.1 引言

给定 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 其中 A是$m\times n$ 阶矩阵，两个要素：

(1) A 的列向量中无关向量个数(列秩) $=$ A 的行向量中无关向量个数(行秩) $=$ 真正起作用方程个数$=r$.

(2)解空间中无关解向量个数 $=s=$自由变量个数.

等式：$r+s=n=A$ 的列数

等式直观地理解：给定r 个方程，n 个未知量，则能求出r 个解，剩下 $n-r$ 个变量自由变化.

10.1 引言

求解：$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
$$A \xrightarrow{\text{行变换}} U_0 \xrightarrow{\text{列对换}} R=\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $F=(c_{ij})_{r\times(n-r)}$，则 $R\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 有 $n-r$ 个无关解向量

$$\eta_1=\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \eta_{n-r}=\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

10.1 引言

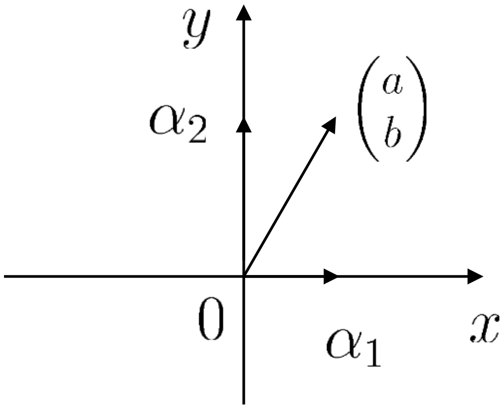
设 U_0 的 $i_1, \cdots, i_r$ 列形如 $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，即 i_k 列 $= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow$ 第 k 分量

则 $P_{1,i_1} P_{2,i_2} \cdots P_{r,i_r}$ 是 U_0 到 R 的列对换. 将 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 的 $i_1, \cdots, i_r$ 各分量变到 $1, \cdots, r$ 分量得 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系.

10.2 n维实空间的坐标系

这次课我们确切刻划空间中无关向量个数的概念.

我们经常说 $\mathbb{R}^2$ 是 2 维的， $\mathbb{R}^3$ 是 3 维的，这是因为我们可以在其中建立一个坐标系.



例如，$\mathbb{R}^2$ 对应右边一个坐标系，它是 2 维的，

因为任一向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha_1 + \alpha_2$

$$\alpha_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 x, y 轴上两向量，线性无关.

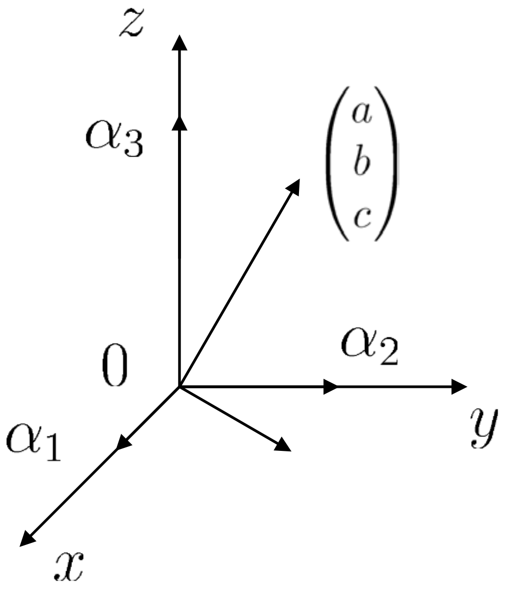
10.2 n维实空间的坐标系

$\mathbb{R}^3$ 对应右边如图坐标系，任一向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

可分解成 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$;

$$\alpha_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

而 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 x, y, z 轴上无关三向量.



10.2 n维实空间的坐标系

一般地，$\mathbb{R}^n$ 是一个 n 维向量空间，因为

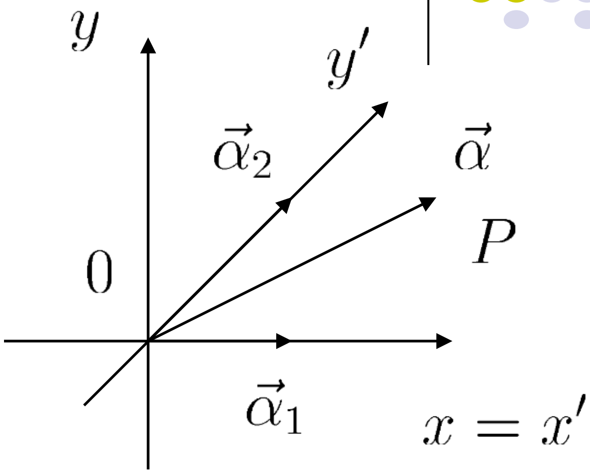
(1) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性无关，构成一个 n 维坐标系，$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$.

(2)任一向量 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 均是 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 的线性组合，

即 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n.$

10.2 n维实空间的坐标系

又例：$\mathbb{R}^2$ 中也可以用非直角坐标系，例如 $x'y'$ 夹角 45°, xy 夹角 90°.



$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 在 $x0y$ 坐标系中.

在新坐标系 $x'0y'$ 中，设 x', y' 轴上单位向量为 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

则 $\vec{\alpha}_1 = \vec{e}_1, \vec{\alpha}_2 = \sqrt{2}\vec{e}_2$, 即 $\vec{\alpha} = \vec{e}_1 + \sqrt{2}\vec{e}_2$, 我们说 $\vec{\alpha}$ 对应点 P 在新坐标系下的坐标为 $(1, \sqrt{2})$.

10.3 无关性、基与维数

现在，我们推广 $\mathbb{R}^n$ 的维数到一般向量空间的维数(dimension).

定义：设 V 是一个向量空间, $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n \in V$, $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是线性无关的(linearly independent) $\Longleftrightarrow$ 若 $a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, 其中 $a_i\in\mathbb{R}$, 则 $a_1=\cdots=a_n=0$.

$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$是 V 的一个基(basis) $\Longleftrightarrow$(1) $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 线性无关;

(2) $\forall\alpha\in V,\alpha$ 是 $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$ 的线性组合.

我们说 V 的维数(dimension)是 $n=$ 基中向量个数.

(记作 $dim\,V=n$)

10.3 无关性、基与维数

例： $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$是一个向量空间.

它有一个基$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$; 基不唯一,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$也是一个基.

$dim M_2(\mathbb{R}) = 4.$

10.3 无关性、基与维数

例：$S=\{3\times 3$阶实对称阵$\}$是一个向量空间，它有自然的一组基

$$\left\{E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},E_4=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},E_5=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},E_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

$$\forall\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4+eE_5+fE_6.$$

$$dim\,S=6.$$

10.4 无关性、基与维数的性质

问题：任两个基中向量一样多吗？

定理：设 V 是一个向量空间，$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 是一组基，$\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m\}$ 是另一组基，则 $m=n$.

证明：假设 $m\neq n$, 且 $m<n$. 根据基的定义，

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1+\cdots+a_{1n}\mathbf{v}_n\\
\mathbf{w}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1+\cdots+a_{2n}\mathbf{v}_n\\
\vdots\ \ &\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots\\
\mathbf{w}_m &= a_{m1}\mathbf{v}_1+\cdots+a_{mn}\mathbf{v}_n
\end{aligned}$$

它可以形式地写成：$(\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m)$

$$= (\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}_{n\times m}$$

$$= (\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)A$$

10.4 无关性、基与维数的性质

同理，

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= b_{11}\mathbf{w}_1 + \cdots + b_{1m}\mathbf{w}_m \\
\mathbf{v}_2 &= b_{21}\mathbf{w}_1 + \cdots + b_{2m}\mathbf{w}_m \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
\mathbf{v}_n &= b_{n1}\mathbf{w}_1 + \cdots + b_{nm}\mathbf{w}_m
\end{aligned}
\Longrightarrow
\begin{aligned}
&(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) \\
&= (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}_{m\times n} \\
&= (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)B
\end{aligned}$$

总结，我们有 $(\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m) = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)A$

$$(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m)B.$$

10.4 无关性、基与维数的性质

于是 $(\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m)=(\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m)BA,\ (\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)=(\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n)AB.$

因为$\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m\}$和$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ 均线性无关，则

$$BA=I_m, AB=I_n.$$

但这不可能.

因为我们假设 $m<n$, 则 $dim\,N(B)=n-r(B)\geq n-m>0,$

故 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解，进而 $AB\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解. 因此 AB 不可逆，

$$AB\neq I_n.$$

10.4 无关性、基与维数的性质

命题：$\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$个向量线性相关.

证明：设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}$ 为 $\mathbb{R}^n$中 $n+1$个线性无关列向量，它可扩充成 $\mathbb{R}^n$中一组基，由前面定理，得证.

或直接证明：

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n+1}) \xrightarrow{\text{行变换}} (U_0)_{n\times(n+1)} \xrightarrow{\text{列对换}} R=\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R 不可能有 $n+1$ 个无关列.

10.4 无关性、基与维数的性质

注：一般地，给定 $\mathbb{R}^n$ 中若干列向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，考虑矩阵

$$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\xrightarrow{\text{行变换}}U_0$$

设 $rank\,U_0=r$，且 $i_1,\cdots,i_r$ 列为列向量 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$，则 A 的 $i_1,\cdots,i_r$ 列线性无关，即 $\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}\}$ 是 $C(A)$ 的一组基.

10.4 无关性、基与维数的性质

例：设 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，A 是一个 $n \times n$ 可逆矩阵，则 $A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_n$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基.

证明：设 $c_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n A\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, c_i \in \mathbb{R}$,

则 $A(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$.

A 可逆 $\Longrightarrow c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 线性无关，则 $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

因此，$A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_n$ 线性无关.

任一向量$\alpha \in \mathbb{R}^n, A^{-1}\alpha \in \mathbb{R}^n$, 则 $\exists a_i \in \mathbb{R}, A^{-1}\alpha = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$.

即 $\alpha = a_1 A\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n A\mathbf{v}_n$.

10.5 关于秩的不等式

回到我们的两个基本空间 $C(A)$ 和 $N(A)$.

$C(A)$ 的基来自于主列　　　$dim\,C(A)=r(A)$.

$N(A)$ 的基来自于自由列　　$dim\,N(A)=n-r(A)$.

应用：

(1) $r(AB)\le min(r(A),r(B))$.

证明：$r(AB)=dim\,C(AB)$.

$$C(AB)\subset C(A)\ \Longrightarrow dim\,C(AB)\le dim\,C(A)=r(A)$$

则 $r(AB)\le r(A)$.

同理，$r(B^TA^T)\le r(B^T)\ \Longrightarrow r(AB)\le r(B)$.

10.5 关于秩的不等式

最后一步，用了

(2)

$$r(A) = r(A^T).$$

(3) $$r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

提示：$$C(A+B) \subset C(A|B) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i + b_i\beta_i | a_i, b_i \in \mathbb{R}\}.$$