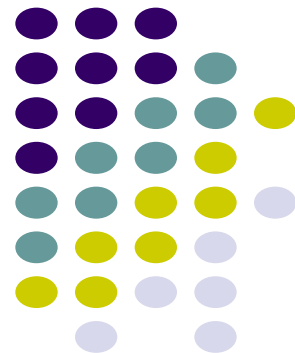


§ 9 求解非齐次线性方程组



9.1 复习



设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, 考虑 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} U \text{ (阶梯形)} \xrightarrow{\text{行变换}} U_0 =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

主变量: 主列对应的变量.

$$\begin{aligned} \text{主列个数} &= \text{主元个数} = \text{主变量个数} \\ &= \text{秩 } A = \text{无关行向量个数} \\ &= \text{无关列向量个数} \end{aligned}$$

列对换

$$R = \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



9.1 复习

(1) U_0 中主列设为第 i_1, \dots, i_r 列, 则 A 中 i_1, \dots, i_r 列线性无关 (称为 A 中主列), 且 A 中其余列均是这些主列的线性组合.

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \qquad \qquad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4 \quad \beta_5$$

容易看出 $\beta_4 = 2\beta_1 + 4\beta_3$, 则 $\alpha_4 = 2\alpha_1 + 4\alpha_3$.

(2) $N(A)$ 中基础解系向量个数为 $n - r$.



9.1 复习

以上例说明: x_1, x_3 为主变量, x_2, x_4, x_5 为自由变量.

令 $x_2 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_4 = 1, x_2 = x_5 = 0$; $x_5 = 1, x_2 = x_4 = 0$

分别得 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解为 $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

则 $N(A) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_i \in \mathbb{R} \right\}.$



9.2 求特解

这次课，考虑求解一般线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

已知：(1) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\iff \mathbf{b} \in C(A)$.

(2) 设 \mathbf{x}^* 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一特解，则 $\mathbf{x}^* + N(A)$ 是方程全部解.



9.2 求特解

$$\text{例 } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \quad \text{一个特解 } \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 + 2x_2 = 0 \implies N(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{则原方程组解集} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = S(A, \mathbf{b}).$$

从图像上看, $S(A, \mathbf{b})$ 和 $N(A)$ 是两条平行直线.



9.2 求特解

如何求特解？

$$\text{例} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 8x_5 = 4 \end{cases}, \text{ 即 } A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

解：考虑增广矩阵

$$(A \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 5 & -3 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (C \ \mathbf{d}).$$



9.2 求特解

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 同解. $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 对应方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}.$$

自由变量为 x_2, x_4, x_5 . 令 $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, 则 $x_3 = -\frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}$.
即 $\mathbf{x}^* = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ 为特解.



9.2 求特解

$C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 和 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解,

令 $x_2 = 1, x_4 = x_5 = 0$, 得 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解 $(-1, 1, 0, 0, 0)^T$;

$x_4 = 1, x_2 = x_5 = 0$, 得 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解 $(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0)^T$;

$x_5 = 1, x_2 = x_4 = 0$, 得 $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解 $(1, 0, -1, 0, 1)^T$.

故 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集为

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c_i \in \mathbb{R} \right\}.$$



9.3 解的一般性讨论

设 A 如上, 为一个 $m \times n$ 阶矩阵, $r = \text{秩}(A)$, 容易检查

$$r \leq \min(m, n).$$

若 $r = n$, 则称 A 是一个列满秩矩阵(matrix of full column rank).

$r = m$, 则称 A 是一个行满秩矩阵(matrix of full row rank).

特别地 $r = n = m$, 则 A 是可逆的.

Case 1 : $r = n = m$. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.



9.3 解的一般性讨论

Case 2 : $r = n < m$. 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 此时 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 无解或有唯一解(特解).

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. $r(A) = 2 = A$ 的列数. 考虑 $A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

$$(A \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 1 & b_2 \\ 6 & 1 & b_3 \\ 5 & 1 & b_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \\ 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} \in C(A) \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 有解}$$
$$\iff c_3 = c_4 = 0$$



9.3 解的一般性讨论

Case 3 : $r = m < n$. 则 A 行消去得到 m 个主元, 即

$$U_0 \xrightarrow[\text{列对换}]{P} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & F \\ & & & \vdots \end{array} \right) = R$$

则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 变为 $U_0\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (同解). $U_0\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 总有特解 $\mathbf{x} = P \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ 0 \end{pmatrix}$.
此时自由变量有 $n - m$ 个.

故这种情况下 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷多解.



9.3 解的一般性讨论

$$\text{Case 4 : } r < m, r < n. \quad A \xrightarrow{E} U_0 \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ 有解 } \iff R\mathbf{y} = E\mathbf{b} = \mathbf{d} \text{ 有解.} \quad R = EAP$$

$$\iff \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ d_{r+1} \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \text{ 满足 } d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$$

$R\mathbf{y} = \mathbf{d}$ 若有解, 则有无穷解 $\implies A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有无穷解.



9.3 解的一般性讨论

注记:

$$\text{Case 2 : } A \text{ 列满秩. } A \xrightarrow{E} U_0 = \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad EA = U_0$$

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}_{n \times m} \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}_{m \times n} = I_n \implies \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} E \cdot A = I_n$$

即 A 有左逆 $(E \ 0)$.

$$\text{Case 3 : } A \text{ 行满秩. } A \xrightarrow{E} U_0 = \begin{pmatrix} I_m & F \end{pmatrix}_{m \times n} \quad EA = U_0$$

$$U_0 \cdot \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times m} = I_m \implies EA \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = I_m \implies A \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} E = I_m$$

即 A 有右逆 $\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}$.



9.3 解的一般性讨论

例：当 $\lambda = ?$ 方程组

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & = 2 \\ x_1 & +7x_2 & -4x_3 & +11x_4 & = \lambda \end{cases} \quad \text{有无穷解, 无解?}$$

解：

$$(A \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix}$$



9.3 解的一般性讨论

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = (C \ \mathbf{d})$$

$C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 和 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 同解.

$C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 有解 $\iff \lambda = 5$. 此时, $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ 有无穷解.

($C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系有 $4 - 2 = 2$ 个向量.)