§2 相似矩阵

2.1 引言

若n阶矩阵A有n个线性无关的特征向量$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$.
令 $S = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$, 则有

$$AS = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: S\Lambda,$$

故 $S^{-1}AS = \Lambda$ 为对角阵.此时称矩阵A可对角化.

但并非所有矩阵A都可对角化,如$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.1 引言

定义： 若对n阶矩阵A和B, 存在可逆矩阵P, 使得$\boxed{P^{-1}AP = B}$, 则称A相似于B,记作$A \sim B$.

2.1 引言

注: 容易看到, 矩阵相似满足以下性质:

（1）自反性:$A \sim A$;

（2）对称性:$A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

（3）传递性:$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

因此,相似是给定数域K上所有n阶矩阵组成的集合上的一个**等价关系**.

2.1 引言

- $S^{-1}AS = \Lambda$为对角阵, 即A相似于对角阵Λ.
- 实对称阵正交相似于对角阵.

问题: 求n阶方阵的相似标准形.

2.2 相似矩阵的性质

命题: 相似矩阵A与$B = P^{-1}AP$ 具有相同的特征多项式, 故具有相同的特征值, 迹和行列式.

证明: 由

$$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P|$$
$$= |P^{-1}|\,|\lambda I - A|\,|P| = |\lambda I - A|$$

得出所需结论.

2.2 相似矩阵的性质

命题: 设$\mathbf{v}$是矩阵A的关于特征值λ的特征向量,则$P^{-1}\mathbf{v}$是A的相似矩阵$B = P^{-1}AP$关于特征值λ的特征向量.

证明:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow PBP^{-1}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow B(P^{-1}\mathbf{v}) = \lambda(P^{-1}\mathbf{v}).$$

2.2 相似矩阵的性质

注: 相似矩阵具有相同的特征值, 但反之不成立.

例: 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

都有特征值5, -1, -1, 矩阵A与B相似, 但矩阵C与A, B不相似.

2.2 相似矩阵的性质

问题: 给定两个矩阵A和B, 如何判定它们是否相似?

简单情形: 设A和B都可对角化, 且有相同的特征值, 则A和B相似.

一般情形: 同于简单情形, 也需要一个“最简”形式, 即**相似标准形**.
我们通过比较矩阵的相似标准形是否相同来判断它们是否相似.

2.3 Jordan标准形

以2阶矩阵为例:

若2阶矩阵A有2个互异特征值λ_1, λ_2, 则A可对角化, 即

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

若A有重特征值λ_0, 则有两种可能

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

A有2个线性无关的特征向量　　A有1个线性无关的特征向量

2.3 Jordan标准形

- 1个Jordan块, 形如 $$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

- 一个Jordan块$(\lambda_0)_{1\times 1}$.

2.3 Jordan标准形

例:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 有特征值2(3重), 其代数重数为3, 几何重数为1.

2.3 Jordan标准形

Jordan块 $J_{\lambda_0,n} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix}_{n\times n}$ 的性质:

(1) 只有一个n重特征值λ_0,只有一个线性无关的特征向量$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) $(J_{\lambda_0,n} - \lambda_0 I_n)^n = 0.$

2.3 Jordan标准形

(3) $J_{\lambda_0,n}$ 与 $J_{\lambda_0,n}^T$ 相似.

令 $P = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, 则 $P^{-1} = P, \quad P^{-1} J_{\lambda_0,n} P = J_{\lambda_0,n}^T.$

2.3 Jordan标准形

(4) $J_{\lambda_0,n} = \lambda_0 I_n + N, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$(J_{\lambda_0,n} - \lambda_0 I_n)\mathbf{e}_n = N\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n-1}, N\mathbf{e}_{n-1} = \mathbf{e}_{n-2}, \cdots, N\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, N\mathbf{e}_1 = 0.$

即:

$$J_{\lambda_0,n}\mathbf{e}_1 = \lambda_0\mathbf{e}_1,$$
$$J_{\lambda_0,n}\mathbf{e}_2 = \lambda_0\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1,$$
$$J_{\lambda_0,n}\mathbf{e}_3 = \lambda_0\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2,$$
$$\ldots$$

2.3 Jordan标准形

定理: 设矩阵A有s个线性无关的特征向量, 则存在可逆矩阵P, 使得

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix} =: J,}$$

其中 $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (i = 1, \cdots, s).$

J称为矩阵A的Jordan标准形. 若不计Jordan块的次序, 则Jordan标准形唯一.

2.3 Jordan标准形

注:

（1）Jordan标准形J中Jordan块个数 = A的线性无关的特征向量的个数;

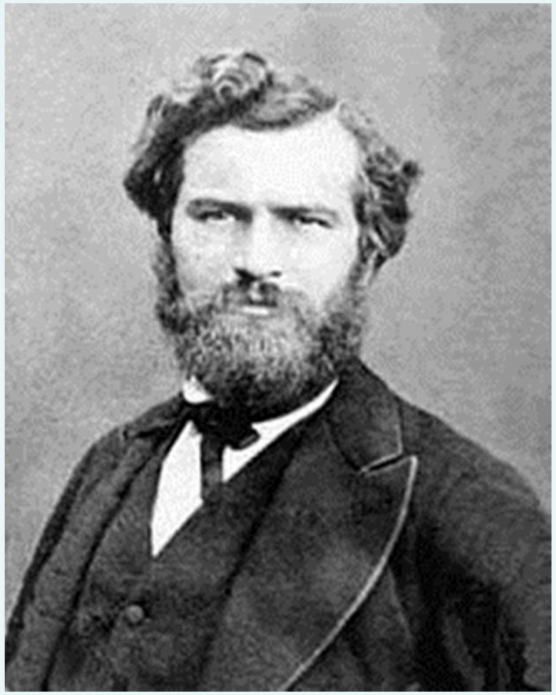
（2）若s = n, 则J是对角阵, A可对角化;

（3）定理等价于说, 存在一组基$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$, 使得

$$A(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)J.$$

2.3 Jordan标准形

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 – 1922)是法国著名数学家. 除了首次公开发表关于矩阵的相似标准形的讨论外, 他还因复分析中的Jordan曲线定理, 群论中的Jordan-Hölder定理等重要结果而闻名于世. 注意, 不要把Camille Jordan与引入Gauss-Jordan消元法的测地学家Wilhelm Jordan (1842 – 1899)以及引入Jordan代数的物理学家Pascual Jordan (1902 – 1980)混淆.



2.3 Jordan标准形

例: 求矩阵$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$的Jordan标准形.

解: 由$|A - \lambda I| = (2 - \lambda)^3 = 0$得A的特征值为$\lambda = 2$ (3重).

由 $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 知 $\dim N(A - 2I) = 2.$

由定理, A的Jordan标准形为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.4 定理的证明

例: 假设矩阵A相似于
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{2,3} & & \\ & J_{4,2} & \\ & & J_{0,2} \end{pmatrix} =: J.$$

记 $P = (\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \mathbf{x}_3\ \mathbf{x}_4\ \mathbf{x}_5\ \mathbf{x}_6\ \mathbf{x}_7)$, 则AP = PJ即

$$A\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{x}_1,\ A\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1,\ A\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_2,$$
$$A\mathbf{x}_4 = 4\mathbf{x}_4,\ A\mathbf{x}_5 = 4\mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_4,$$
$$A\mathbf{x}_6 = \mathbf{0},\quad A\mathbf{x}_7 = \mathbf{x}_6.$$

2.4 定理的证明

三个向量链 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}, \{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}, \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$ 满足

(1) $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ 或 $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i-1}$,

(2) 起始向量是一个特征向量,

(3) 所有向量 $\mathbf{x}_i$ 满足:存在某正整数k, 使得 $(A - \lambda I)^k \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$.

(这种向量称为属于特征值λ_i的广义特征向量.)

故求可逆矩阵P, 使得 $P^{-1}AP = J$ 等价于求A的n个线性无关的广义特征向量.

2.4 定理的证明

定理的证明:

对矩阵A的阶数用数学归纳法.

n = 1时结论自然成立. 假设阶数 < n的矩阵A总可以相似于Jordan标准形.下面对阶数为n的矩阵A讨论.

Step1: 假设A有零特征值,则A是奇异矩阵. (若否, 可任取一特征值λ, 讨论奇异矩阵 $A-\lambda I$.) 那么r(A) = r < n. 取A的列空间C(A)的一组基 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$, 则$A\mathbf{u}_i \in C(A)$, $A\mathbf{u}_i$是$\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_r$ 的线性组合, 即有

$$A(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r) = (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r)\widetilde{A}$$

2.4 定理的证明

$\widetilde{A}$ 为r阶矩阵, 由归纳假设, 存在r阶可逆矩阵Q, 使得$Q^{-1}\widetilde{A}Q = J_{\widetilde{A}}$. 则

$$A(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r)Q = (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r)QJ_{\widetilde{A}}.$$

令 $(\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_r) := (\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_r)Q$, 故$\{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_r\}$ 仍为C(A)的一组基, 且满足

$$A(\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_r) = (\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_r)J_{\widetilde{A}}.$$

2.4 定理的证明

例: 矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$为奇异矩阵, $\{\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

为C(A)的一组基.

$A\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{u}_1$, 则 $A(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1}\tilde{A}Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

令$(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4 定理的证明

Step2: 设 $\dim(C(A)\cap N(A))=p$. 设 $\mathbf{w}\in C(A)\cap N(A)$, 则**w**属于一条长度 > 1的链, 因为存在**y**, 使得**w** = A**y**.

故有p条链在C(A)中, 首项是属于$\lambda=0$ 的特征向量.

设 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_k\}$ 是其中一条链,

$$A\mathbf{w}_1=\mathbf{0}, A\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1,\cdots,A\mathbf{w}_k=\mathbf{w}_{k-1}.$$

因为$\mathbf{w}_k\in C(A)$, 故存在$\mathbf{w}_{k+1}$, 使得$A\mathbf{w}_{k+1}=\mathbf{w}_k$, 于是链 $\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_k\}$扩充为$\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_k,\mathbf{w}_{k+1}\}$. 这样, Step2为Step1中p条链提供了p个新向量, 记为$\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_p$.

2.4 定理的证明

如上例, $C(A)\cap N(A)=\left\{k\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ k\in\mathbb{C}\right\}$, $p=\dim(C(A)\cap N(A))=1.$

存在 $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$, 使得$A\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}=\mathbf{w}_2$, 于是$\{\mathbf{w}_2\}$ 扩充为$\{\mathbf{w}_2,\mathbf{y}\}$,

$A(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{y})=(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{y})\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.令 $P=(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{y})$, 则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

2.4 定理的证明

Step3: 若$\dim N(A) > p$, 即$n-r>p$,则还需要找$n-r-p$个N(A)中线性无关的向量$\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_{n-r-p} \in N(A) \setminus N(A) \cap C(A)$, 它们将产生$n-r-p$ 个1阶Jordan块(0).

断言: 这样得到n个向量

$$\{\mathbf{w}_i(1 \le i \le r), \mathbf{y}_j(1 \le j \le p), \mathbf{z}_k(1 \le k \le n-r-q)\}$$

线性无关. 以这n个向量为列向量构成矩阵P, 则 $J = P^{-1}AP$ 为A的Jordan标准形.

2.4 定理的证明

若矩阵A无零特征值, 可任取A的特征值λ, 则矩阵$A' = A - \lambda I$有零特征值. 把上述讨论用于A', 得可逆矩阵P, 使得$J' = P^{-1}A'P$为A'的Jordan标准形.

那么对$A = A' + \lambda I$, 有

$$P^{-1}AP = P^{-1}A'P + \lambda P^{-1}P = J' + \lambda I =: J$$

为A的Jordan标准形.

2.4 定理的证明

断言的证明: 设

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \mathbf{w}_i + \sum_{j=1}^{p} d_j \mathbf{y}_j + \sum_{k=1}^{n-r-p} e_k \mathbf{z}_k = 0. \qquad (*)$$

两边左乘矩阵A, 得

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \begin{pmatrix} \lambda_i \mathbf{w}_i \\ \text{or} \\ \lambda_i \mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1} \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{p} d_j A \mathbf{y}_j = 0. \qquad (**)$$

2.4 定理的证明

注意$A\mathbf{y}_j$ 是特殊的$\mathbf{w}_j$, 在$\lambda = 0$ 的链的末尾. 所以它不会出现在$(*)$ 中第一项中, 故$(**)$ 的左边是互不相同的 $\mathbf{w}_i$ 的某个线性组合. 而所有 $\mathbf{w}_i$ 是C(A)的基, 线性无关,故 $d_j = 0(j = 1, \cdots, p)$. 于是$(*)$ 可化为

$$\sum_{i=1}^{r} c_i\mathbf{w}_i = -\sum_{k=1}^{n-r-p} e_k\mathbf{z}_k,$$

因此$e_k = 0(k = 1, \cdots, n-r-p)$.

最后$\sum_{i=1}^{r} c_i\mathbf{w}_i = 0$, 由$\mathbf{w}_i$ 的线性无关性知$c_i = 0(1 \le i \le r)$. 则断言成立.

综上所述，定理得证。

2.4 定理的证明

例: 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,求可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP=J$为其Jordan标准形.

解: 可求得A有特征值$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1.$

Step1.

$$A'=A-I=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$奇异, 取$C(A')$的一组基

2.4 定理的证明

$$\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

则 $A'\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \qquad A'\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 9\mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2.$

即 $A'(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2) = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$

2.4 定理的证明

记 $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, 令 $Q = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 则 $Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

于是 $A'(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)Q = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)Q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

令 $(\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2)Q = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =: (\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2)$, 则 $A'(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

即$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$是$A'$的属于特征值$\lambda = 0$的一条链.

2.4 定理的证明

Step2. $N(A') \cap C(A') = \{k\mathbf{w}_1 \mid k \in \mathbb{C}\}$, $p = \dim(N(A') \cap C(A')) = 1$.

求解$A'\mathbf{y} = \mathbf{w}_2$得 $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \mathbf{w}_3$.

于是 $A'(\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3) = (\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4 定理的证明

Step3. $\dim(N(A') \setminus (N(A') \cap C(A'))) = 1,$

$$\text{取 } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A') \setminus (N(A') \cap C(A')). \text{ 则有}$$

$$A'(\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{z}) = (\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3 \ \mathbf{z}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4 定理的证明

令 $P = (\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \mathbf{w}_3\ \mathbf{z})$. 注意$A = A' + I$, 故有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: J.$$

2.4 定理的证明

更进一步, 我们有

定理: n阶复矩阵的Jordan标准形中, 主对角元为特征值λ_i 的Jordan块的个数t_i 为

$$\boxed{t_i = n - r(A - \lambda_i I),}$$

其中每个Jordan块的阶数不超过λ_i的代数重数.

m阶Jordan块的个数d_i为

$$\boxed{d_i = r((A - \lambda_i I)^{m-1}) + r((A - \lambda_i I)^{m+1}) - 2r((A - \lambda_i I)^m).}$$

2.4 定理的证明

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 显然A的特征值为 $\lambda = 3$ (4重).

由于 $r(A-3I) = 2$, 故 $\dim N(A-3I) = 4-2 = 2$,A有两个线性无关的特征向量, 故A的Jordan标准形有2个Jordan块. 这2个Jordan块的阶数可能为1, 3或者2, 2. 由于 $(A-3I)^2 = 0$, 故1阶Jordan块的个数

$$d_1 = r((A-3I)^0) + r((A-3I)^2) - 2r(A-3I)$$

$$= 4 + 0 - 2 \times 2 = 0$$

2.4 定理的证明

因此, A的Jordan标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}.$$

2.5 Jordan标准形的应用

定义: 对n阶矩阵A, 定义

$$\boxed{e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots}$$

2.5 Jordan标准形的应用

性质:

(1) 若AB = BA, 则$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

(2) 若$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$为对角块阵, 则$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 \\ 0 & e^{A_2} \end{pmatrix}$.

2.5 Jordan标准形的应用

(3) 对Jordan块 $J_K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}_{k\times k}$ ，有

$$\boxed{e^{J_K t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}_{k\times k}}$$

2.5 Jordan标准形的应用

证明:

(1)与(2)可由定义直接验证得.

(3): 注意到$J_k=\lambda I_k+N$, 其中$N=\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0\end{pmatrix}_{k\times k}$ 满足

$$N^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}_{k\times k},\cdots,N^{k-1}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix}_{k\times k},N^k=0,$$

2.5 Jordan标准形的应用

即N为幂零矩阵.

并且$\lambda I_k N = N\lambda I_k$, 故由(1)得

$$e^{J_k t} = e^{(\lambda I_k + N)t} = e^{\lambda t I_k + Nt} = e^{\lambda t I_k} \cdot e^{Nt}.$$

而由定义

$$\begin{aligned} e^{\lambda t I_k} &= I_k + \lambda t I_k + \frac{(\lambda t I_k)^2}{2!} + \cdots \\ &= (1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots)I_k = e^{\lambda t} I_k, \end{aligned}$$

2.5 Jordan标准形的应用

$$e^{Nt} = I + Nt + \frac{(Nt)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Nt)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & \ddots & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

故得证.

2.5 Jordan标准形的应用

应用: 设A为n阶矩阵, 则方程 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$的解为 $\mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0)$.

(1) 若A可相似于对角阵, 即存在可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= Pe^{\Lambda t}P^{-1}\mathbf{u}(0)\\ &= \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}\\ &= c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n,\end{aligned}$$

其中$\mathbf{u}(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{x}_i$.

2.5 Jordan标准形的应用

(2) 一般地, 若存在可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP = J$ 为Jordan标准形,则

$$\mathbf{u}(t) = Pe^{Jt}P^{-1}\mathbf{u}(0)$$

$$= P\begin{pmatrix} e^{J_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_st} \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{u}(0).$$

2.5 Jordan标准形的应用

例: 求初值问题 $\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} & = & A\mathbf{u} \\ \mathbf{u}(0) & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{cases}$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

解: 由前面的讨论知, 存在可逆矩阵$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J \text{ 为A的Jordan标准形.}$$

2.5 Jordan标准形的应用

则初值问题的解为

$$\mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0) = Pe^{Jt}P^{-1}\mathbf{u}(0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} + \frac{t}{3} + 1 \\ e^{2t} - \frac{t}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2.5 Jordan标准形的应用

例: 求解$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0, \\ y(0) = c_1, y'(0) = c_2. \end{cases}$

解: 给定二阶齐次线性方程可改写为

$$\begin{pmatrix} y'' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}.$$

记$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 存在可逆矩阵$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 使得$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J$

为Jordan标准形.

2.5 Jordan标准形的应用

则 $\begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = Pe^{Jt}P^{-1}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$,

其中 $e^{Jt} = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

于是得 $y(t) = e^{t}[c_1 + t(c_2 - c_1)]$.

2.5 Jordan标准形的应用

例: 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|\lambda I_3 - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 =: f(\lambda)$.

则$f(A) := A^3 - 2A^2 = 0$.

验证: 已求得$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{pmatrix} = J$.

则 $P^{-1}f(A)P = f(J)$. 只需验证 $f(J) = 0$.

2.5 Jordan标准形的应用

而 $f(J)=(J-2I_3)J^2$, 其中

$$J-2I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\\&J_2-2I_2\end{pmatrix},$$

$$J^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_1^2&\\&0\end{pmatrix},$$

故 $f(J)=(J-2I_3)J^2=\begin{pmatrix}0&\\&J_2-2I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_1^2&\\&0\end{pmatrix}=0.$

2.5 Jordan标准形的应用

一般的, 设矩阵A的特征多项式$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$, 设$J_{\lambda,l}$是关于特征值$\lambda$的$l$阶Jordan块, 则$(J_{\lambda,l} - \lambda I_l)^{n(\lambda)} = 0$, 其中$n(\lambda)$是$\lambda$的代数重数. 由此$f(A) = 0$. 即

(Hamilton – Caylay 定理) 设A是复数域上n阶矩阵,$f(\lambda) = |\lambda I - A|$是A的特征多项式,则$f(A) = 0$.