§4　矩阵的运算

4. 1 矩阵

J. J. Sylvester

矩阵matrix这个词是由英国数学家James Joseph Sylvester(1814-1897)于1850年首先提出来的. Sylvester用matrix这个词指行列式的子式. 在逻辑上，矩阵的概念先于行列式的概念，而在历史上次序正好相反. 在矩阵引进的时候它的基本性质就已经清楚了. 英国数学家Arthur Cayley(1821-1895)首先把矩阵作为独立的数学对象来研究，并就此发表了一系列文章，他被公认为矩阵论的创立者.

4.1 矩阵

矩阵是一张长方形的数表. 一个m行 n列的矩阵称为$m \times n$矩阵. 矩阵 A的第 i 行第 j 列的元素用 a_{ij}表示, 称为 A 的(i,j)元素. 如图:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & \text{第 } j \text{ 列} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \text{第 } i \text{ 行} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n \end{array} & \end{array}$$

矩阵可用列向量表示为 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$.

4.1 矩阵

称两个矩阵相等，若它们有相同的行数列数，且对应元素相等.

元素全是零的$m \times n$矩阵称为零矩阵，用 0 表示. 0 的行数和列数一般可由上下文确定.

矩阵的行数和列数相等时是一个方阵. 方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的对角元 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 构成 A 的主对角线. 对角矩阵是一个方阵, 它的非对角元都是 0.
主对角线上的元素都是 1 的对角矩阵称为单位矩阵, 记为 I.

4.2 矩阵的加法和数乘

定义： 设 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 则

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

设 $c\in\mathbb{F}$, 则 $cA:=(ca_{ij})_{m\times n}$.

注：矩阵 A, B 有相同的行数和列数时，$A+B$ 才有定义.

例：$A=\begin{pmatrix}4&0&5\\-1&2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&7\end{pmatrix}$,

则 $A+B=\begin{pmatrix}5&2&8\\2&7&10\end{pmatrix},\quad 2B=\begin{pmatrix}2&4&6\\6&10&14\end{pmatrix},\quad A+2B=\begin{pmatrix}6&4&11\\5&12&17\end{pmatrix}.$

4.2 矩阵的加法和数乘

容易直接验证，矩阵的加法和数乘满足下述 8条运算法则:

对数域 $\mathbb{F}$上任意$m \times n$矩阵A, B, C 及任意$k, l \in \mathbb{F}$有

1. $(A+B)+C=A+(B+C)$;
2. $A+B=B+A$;
3. $A+0=0+A=A$;
4. 设$A=(a_{ij})$, 矩阵$(-a_{ij})$ 称为 A 的负矩阵，记作 $-A$, 有$A+(-A)=0$;
5. $1A=A$;
6. $(kl)A=k(lA)$;
7. $(k+l)A=kA+lA$;
8. $k(A+B)=kA+kB$.

利用负矩阵的概念，可以定义矩阵的减法为

$$A-B:=A+(-B).$$

4.3 矩阵的乘法

设矩阵 B 的列是 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_p$, 借助于矩阵与向量的乘法, 我们定义了矩阵的乘法：

$$AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_p) := (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots\ A\mathbf{b}_p).$$

回忆：矩阵 $A_{m\times n}$ 与向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 的乘积定义为

$$A\mathbf{x} := x_1\overrightarrow{col_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{col_n}$$
$$:= \begin{pmatrix} \overrightarrow{row_1} \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \overrightarrow{row_m} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

4.3 矩阵的乘法

注：

- A 和 B 可乘 $\iff A$ 的列数 $=B$ 的行数

- $$(AB)_{ij} = (A\mathbf{b}_j)_i = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

4.3 矩阵的乘法

定义: 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, B 的列向量是 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_p$, 则乘积 AB 是 $m \times p$ 矩阵，且

$$AB = A(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \cdots \ \mathbf{b}_p) := (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \cdots \ A\mathbf{b}_p).$$

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= (A \text{ 的第 } i \text{ 行向量}) \cdot (B \text{ 的第 } j \text{ 列向量}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\end{aligned}$$

4.3 矩阵的乘法

例：计算AB，其中 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.

解：记$B=(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)$，计算

$$A\mathbf{b}_1=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-19\end{pmatrix}\qquad A\mathbf{b}_2=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\-23\end{pmatrix}\qquad A\mathbf{b}_3=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-27\end{pmatrix}$$

故 $AB=A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3)=\begin{pmatrix}14 & 19 & 24\\-19 & -23 & -27\end{pmatrix}$.

又 $AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 19 & 24\\-19 & -23 & -27\end{pmatrix}$.

4.3 矩阵的乘法

例：求AB 的第 2 行，其中

$$A=\begin{pmatrix}2&-5&0\\-1&3&-4\\3&0&9\\5&6&7\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-4&1\\7&3\\3&2\end{pmatrix}.$$

解: 由矩阵乘法的定义, AB 的第 2 行是由 A 的第 2 行和 B 的各列相乘所得：

$$\begin{pmatrix}2&-5&0\\-1&3&-4\\3&0&9\\5&6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&1\\7&3\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*\\4+21-12&-1+9-8\\*&*\\*&*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*\\13&0\\*&*\\*&*\end{pmatrix}$$

4.3 矩阵的乘法

注：计算 AB的第 2行时，我们仅需把A的第2行乘以B，得

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 7 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 0\end{pmatrix}.$$

这在一般情况下也是正确的，即

$$AB\text{的第 } i \text{ 行} = (A\text{的第 } i \text{ 行})B$$

4.3 矩阵的乘法

$$AB = A(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_p) = (A\mathbf{b}_1\ A\mathbf{b}_2\ \cdots\ A\mathbf{b}_p).$$

矩阵乘积 AB 的每一列 $A\mathbf{b}_j$ 为矩阵 A 的列向量的线性组合.

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \alpha_2 B \\ \vdots \\ \alpha_m B \end{pmatrix}.$$

矩阵乘积 AB 的每一行 $\alpha_i B$ 为矩阵 B 的行向量的线性组合.

4. 4 矩阵乘法的性质

设A 为$m \times n$ 矩阵, B, C 的行数列数使下列各式中的运算有定义, 则

(1) $A(BC) = (AB)C$ （乘法结合律）

(2) $A(B+C) = AB+AC$ （乘法左分配律）

(3) $(B+C)A = BA+CA$ （乘法右分配律）

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, k为任意数.

(5) $I_m A = A = A I_n$

4. 4 矩阵乘法的性质

(1) $A(BC)=(AB)C$ （乘法结合律）

证明：设 $B=(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_p), C=(\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \cdots\ \mathbf{c}_q)$, 则

$$A(BC)=A(B\mathbf{c}_1\ \cdots\ B\mathbf{c}_q)=(A(B\mathbf{c}_1)\ \cdots\ A(B\mathbf{c}_q)),$$

$$(AB)C=((AB)\mathbf{c}_1\ \cdots\ (AB)\mathbf{c}_q.)$$

故只需证明 $A(B\mathbf{c}_k)=(AB)\mathbf{c}_k,\ k=1,\cdots,q.$

设 $\mathbf{c}_k=\begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{pk} \end{pmatrix}$, 则 $\begin{aligned} A(B\mathbf{c}_k) &= A(c_{1k}\mathbf{b}_1+\cdots+c_{pk}\mathbf{b}_p) \\ &= c_{1k}A\mathbf{b}_1+\cdots+c_{pk}A\mathbf{b}_p \\ &= \left(A\mathbf{b}_1\ \cdots\ A\mathbf{b}_p\right)\mathbf{c}_k \\ &= (AB)\mathbf{c}_k \end{aligned}$

证毕.

4. 4 矩阵乘法的性质

设A为$m\times n$矩阵，B 为 $n\times p$ 矩阵. A 与 B 可做乘法, 但B 与 A 未必可做乘法. 即使 A 与B , B 与 A 都可做乘法, 也有可能 $AB\neq BA$.

例：(1)设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}$, 则

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\\11 & 25\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 14\\14 & 20\end{pmatrix},$$

$$AB\neq BA.$$

4.4 矩阵乘法的性质

例：(2)设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，则

$$AB=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

$$BA=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix},$$

$$AB\neq BA.$$

4.4 矩阵乘法的性质

定义：若 $AB = BA$，称 A 和 B 可交换.

小结：矩阵的乘法一般不可交换. 这是矩阵与普通实数的重要区别.

4.4 矩阵乘法的性质

注：消去律对矩阵乘法不成立, 即若 $AB = AC$, 一般情况下$B = C$并不成立.

例：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix};$$

则 $AB = AC$, 但 $B \neq C$.

注：若乘积 AB 是零矩阵, 一般情况下, 不能断定 $A = 0$ 或 $B = 0$.

例： $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 12 \\ 3 & -18 \end{pmatrix}, AB = 0$ 但 $A \neq 0, B \neq 0$.

4.5 矩阵的方幂

设 A 是 $n\times n$ 矩阵, p 是正整数, 则 $A^p=\underbrace{A\cdots A}_{p\text{ 个}}$ 称为矩阵 A 的 p 次幂. 规定 $A^0=I_n$.

$$A^p\cdot A^q=A^{p+q},\qquad (A^p)^q=A^{pq}.$$

注：一般地 $(AB)^p\neq A^pB^p$, 因此 $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$.

例: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, 求 A^p.

解： $A^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2A$, 则 $A^p=2A^{p-1}=\cdots=2^{p-1}A$.

4.6 注记：关于“矩阵乘法”的引入

历史上, Arthur Cayley是为描述线性变换的复合而引入矩阵乘法的定义的.

例如，设变换

$$\begin{cases} x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

后跟着变换

$$\begin{cases} x'' &= b_{11}x' + b_{12}y', \\ y'' &= b_{21}x' + b_{22}y', \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

则 x'', y'' 和 x, y 之间的关系由下式给出:

$$\begin{cases} x'' &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y, \\ y'' &= (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y, \end{cases}$$

4.6 注记：关于“矩阵乘法”的引入

因此Cayley定义两个矩阵的乘积为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix},$$

即两矩阵乘积的第 (i,j) 元素为左边因子的第 i 行元素与右边因子的第 j 列对应元素乘积之和.

4.7 分块矩阵

处理大阶矩阵的运算时，常转换成小阶矩阵的运算.

将矩阵用纵线和横线分成若干小块，每一小块称为矩阵的子块. 分为子块的矩阵称为分块矩阵(Block matrix).

例：$A = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -2 \\ \hdashline 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ 是一个分块矩阵, 它有 4 个小块:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix},$$

则 A 可记为 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

4.7 分块矩阵

例：线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的增广矩阵 $(A\mid\mathbf{b})$是有两个子块的分块矩阵. 消元时, 直接左乘初等矩阵E, $E(A\mid\mathbf{b})=(EA\mid E\mathbf{b})$.

分块矩阵的加法：若矩阵 A 和 B 有相同行数和列数，且被同样地分块，则对应块相加得$A+B$.

分块矩阵的数乘：数 k 乘分块矩阵只需 k 乘 A 的每个子块.

4.7 分块矩阵

分块矩阵的乘法：

分块矩阵 A, B 可乘 $\iff A$ 的列的划分与 B 的行的划分一致.

例：设 $A = \left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ \hdashline -2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 7 \\ \hdashline 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$

4.7 分块矩阵

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} -4 & 23 \\ -4 & -1 \\ \hdashline -3 & 6 \end{array}\right).$$

注：在 AB 乘积表达式中的子块乘积，每一项应把来自 A 的子矩阵写在左边.

4.7 分块矩阵

矩阵乘法的列行展开：

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 则

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n.$$

注： $\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$ 是一个 $m \times p$ 矩阵.

4.7 分块矩阵

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}_{2\times 2}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}_{2\times 3},$

则

$$AB=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4 & -4\\ 0 & 5 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 1 & 5 & -4\end{pmatrix}.$$

注：当矩阵太大时, 不适于存储在高速计算机内存中, 分块矩阵允许计算机一次处理几块子矩阵. 当把矩阵分块后再进行矩阵计算会更有效.

4.8 矩阵的转置

将$m \times n$矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行与列互换, 得到的矩阵$(a_{ji})_{n\times m}$称为 A 的转置(transpose), 记为 A^T.

例：设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}c_{11}&0&0\\c_{21}&c_{22}&0\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{pmatrix}.$

则 $A^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}, B^T=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}, C^T=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}&c_{31}\\0&c_{22}&c_{32}\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}, D^T=\begin{pmatrix}d_1&&\\&d_2&\\&&d_3\end{pmatrix}.$

4. 8 矩阵的转置

性质: (1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3)对任意数k, $(kA)^T = kA^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

4.8 矩阵的转置

证明:(4)设 $A=(a_{ij})_{m\times n}=(\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n), B=(b_{ij})_{n\times p}=(\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_p)$，则

$$(AB)^T=(A\mathbf{b}_1\cdots A\mathbf{b}_p)^T=\begin{pmatrix}(A\mathbf{b}_1)^T\\ \vdots\\ (A\mathbf{b}_p)^T\end{pmatrix}, B^TA^T=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{b}_p^T\end{pmatrix}A^T=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1^TA^T\\ \vdots\\ \mathbf{b}_p^TA^T\end{pmatrix}.$$

故只需证 $(A\mathbf{b}_j)^T=\mathbf{b}_j^TA^T$即可, 记 $\mathbf{b}_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}$.

事实上，$(A\mathbf{b}_j)^T=(b_{1j}\mathbf{a}_1+\cdots+b_{nj}\mathbf{a}_n)^T$

$$=b_{1j}\mathbf{a}_1^T+\cdots+b_{nj}\mathbf{a}_n^T$$

$$=(b_{1j}\cdots b_{nj})\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n^T\end{pmatrix}=\mathbf{b}_j^TA^T.$$

得证.

4.8 矩阵的转置

证二：设 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times p$ 矩阵.

$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki},$$

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk},$$

故 $(AB)^T = B^T A^T$.

$\longrightarrow (A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$.

若干个矩阵乘积的转置等于它们转置的乘积，相乘次序相反.

4.8 矩阵的转置

应用：内积.

设 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 为两 n 维列向量, 则 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x}$.

例：$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3+4+3=10.$

例：设 A 为 $m\times n$ 矩阵, $\mathbf{x}$ 为 n 维向量, $\mathbf{y}$ 为 m 维向量, 则

$$(A\mathbf{x})^T\mathbf{y}=\mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y}) \text{ 即 } (A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot(A^T\mathbf{y}) \quad (*)$$

给定 A, A^T 是使 $(*)$ 对任意 n 维向量 $\mathbf{x}$,任意 m 维向量 $\mathbf{y}$ 成立的矩阵.

4.8 矩阵的转置

定义: 若 $A^T = A$, 则称 A 是一个对称矩阵(symmetric matrix).

若 $A^T = -A$,则称 A是一个反对称矩阵(anti-symmetric matrix).

例： $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$为对称矩阵, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$为反对称矩阵.

4.8 矩阵的转置

性质：设R为$m\times n$ 矩阵, 则RR^T为 $m\times m$对称矩阵,R^TR 为 $n\times n$ 对称矩阵, 且其对角元均非负.

例：设$R=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, 则 $R^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $RR^T=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $R^TR=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$.