Local Duality Theorem

问题 • $\min f(x)$

$\quad s.t.\ h(x)=0$

有局部解 x^*，拉格朗日乘子为 α^*，

假设 x^* 是一个正则点，关于约束的[illegible]相联的 Hessian 为 $L^*=L(x^*,\alpha^*)$.

是正定的，则对偶问题为

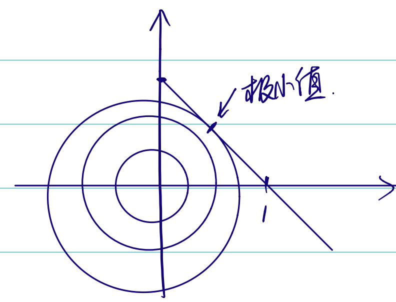
$$\max_{\alpha} W(\alpha)$$

$$W(\alpha)=L(x(\alpha),\alpha),\quad x(\alpha)=\arg\min_{x} L(x,\alpha)$$

Example • primal problem.

$$\min\ x_1^2+x_2^2$$

$$s.t.\quad x_1+x_2=1$$



Dual problem

$$\max_{\alpha} W(\alpha)$$

where

$$W(\alpha)=\min_{x_1,x_2}(x_1^2+x_2^2)+\alpha(x_1+x_2-1)$$

解: $L(x_1,x_2,\alpha)=(x_1^2+x_2^2)+\alpha(x_1+x_2-1)$

$$W(\alpha)=\min_{x_1,x_2} L(x_1,x_2,\alpha)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1+\alpha \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2+\alpha \Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}\alpha$$

此时 $W(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=-\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

得到 $x_1^*=x_2^*=\frac{1}{2}$. $\alpha^*=-1$.