§21 特征值在微分方程中的应用

21.1 引言

回顾：设矩阵 A 可对角化, 即存在可逆阵 S, 使 $S^{-1}AS=\Lambda$ 为对角阵, 则 $A=S\Lambda S^{-1}$, 于是 $A^k=S\Lambda^k S^{-1}$.

对差分方程 $\mathbf{u}_{k+1}=A\mathbf{u}_k$, 解为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_k&=A^k\mathbf{u}_0=S\Lambda^k S^{-1}\mathbf{u}_0\\&=c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n,\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{u}_0=c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_n\mathbf{x}_n$, $A\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i(1\le i\le n)$.

21.1 引言

问题：设关于 t 的向量值可导函数 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ 满足

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u},$$

其中 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶常数矩阵，求解 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$.

若 u 为数值函数，$\begin{cases} \frac{du}{dt}=au, & (a=const) \\ u(0)=u_0, \end{cases}$ 的解为 $u(t)=e^{at}u_0$.

21.1 引言

若 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 为对角阵，则 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{u}$

$$\Longleftrightarrow \frac{du_i}{dt} = \lambda_i u_i (1 \leq i \leq n)$$

$$\Longleftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} c_n \end{pmatrix}, c_i = const$$

这类方程组称为“解耦的”(uncoupled).

怎样对一般矩阵 A, 求解 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$?

21.2 A可对角化的情形

例：求解 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{u}.$

解：记 $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$，则 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

注意到 $\begin{cases} \frac{d(x+y)}{dt} = x + y, \\ \frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y). \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = e^t c_1, \\ x - y = e^{-t} c_2. \end{cases}$ (“解耦的”)

$$\Longrightarrow \mathbf{u}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, c_1, c_2 = const.$$

21.2 A可对角化的情形

设 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ 有形如 $e^{\lambda t}\mathbf{x}$ 的解，其中 λ 为数，$\mathbf{x}$ 为向量，则

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

因此，A 的每个特征值 λ 及其特征向量 $\mathbf{x}$ 会给出 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ 的一个解 $\mathbf{u} = e^{\lambda t}\mathbf{x}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

21.2 A可对角化的情形

$$\lambda_1 = 1, A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = -1, A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

令 $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$，则 $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda.$

21.2 A可对角化的情形

令 $S^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \mathbf{v}$, 于是

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} \quad \Longrightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Lambda\mathbf{v} \quad \Longrightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} e^t c_1 \\ e^{-t} c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{u} = S\mathbf{v} = c_1 e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

21.2 A可对角化的情形

一般的，若 $A = S\Lambda S^{-1}$ 可对角化，

类似于求解 $\mathbf{u}_k = A^k\mathbf{u}_0$, 有

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} = S\Lambda S^{-1}\mathbf{u} \iff \frac{d(S^{-1}\mathbf{u})}{dt} = \Lambda(S^{-1}\mathbf{u})$$

$$\Longrightarrow S^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}c_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}c_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n,$$

且 $\mathbf{u}(0) = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$.

21.2 A可对角化的情形

引理1：设 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1(t)$ 和 $\mathbf{u}=\mathbf{u}_2(t)$是齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u}$ 的解，则它们的线性组合 $\mathbf{u}=c_1\mathbf{u}_1(t)+c_2\mathbf{u}_2(t)$也是此方程组的解，其中$c_1$ 和 c_2 是任意常数.

引理2: $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=A_{n\times n}\mathbf{u}$ 的解集是一个 n 维向量空间.

$\Longrightarrow$若A可对角化, 则 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u}$的解空间有一组基$\{e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1,\cdots,e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n\}$.

故方程组的通解为$\mathbf{u}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n, c_i=const.$

21.2 A可对角化的情形

例：求解初值问题 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$

解：易得 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 的特征向量分别为

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ 方程组的通解为 $\mathbf{u}(t) = c_1 e^{t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{2t}\mathbf{x}_2 + c_3 e^{3t}\mathbf{x}_3.$

21.2 A可对角化的情形

而初始值有分解 $\mathbf{u}(0)=\begin{pmatrix}9\\7\\4\end{pmatrix}=2\mathbf{x}_1+3\mathbf{x}_2+4\mathbf{x}_3$,

又 $\mathbf{u}(0)=c_1\mathbf{x}_1+c_2\mathbf{x}_2+c_3\mathbf{x}_3$,

故 $\mathbf{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow$ 初值问题的解为 $\mathbf{u}(t)=2e^{t}\mathbf{x}_1+3e^{2t}\mathbf{x}_2+4e^{3t}\mathbf{x}_3$.

21.2 A可对角化的情形

例：设一质点在平面力场作用下运动，其位置向量 $\mathbf{u}$ 满足

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{pmatrix}.$$

求解初值问题.

解：可求得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$, 相应特征向量为

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故方程组的通解为 $\mathbf{u}(t) = c_1 e^{6t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{-t}\mathbf{x}_2$.

21.2 A可对角化的情形

由初值条件得 $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{u}(0)$,

即 $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{70} \\ \frac{94}{35} \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ 初值问题的解为 $\mathbf{u}(t) = -\frac{3}{70}e^{6t}\mathbf{x}_1 + \frac{94}{35}e^{-t}\mathbf{x}_2$.

21.3 矩阵的指数函数

回顾 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

设 A为n 阶方阵，定义

$$e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \cdots$$

$$= A(I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots) = Ae^{At}.$$

$\Longrightarrow \mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0)$ 为 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ 的解.

21.3 矩阵的指数函数

矩阵的指数函数的性质：

(1)若 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$，则 $e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

21.3 矩阵的指数函数

(2)若 $AB = BA$, 则 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. 特别地, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(3)若存在可逆阵 P, 使 $A = PBP^{-1}$, 则 $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$.

21.3 矩阵的指数函数

回到 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$:

若 A 可对角化，即存在可逆阵 S, 使 $S^{-1}AS = \Lambda$ 为对角阵

$\Longrightarrow A = S\Lambda S^{-1}$.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} \text{ 有解 } \mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0) = Se^{\Lambda t}S^{-1}\mathbf{u}(0)$$

$$= (\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n,$$

其中 $S^{-1}\mathbf{u}(0) = \mathbf{c}$, 即 $\mathbf{u}(0) = S\mathbf{c} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n$.

21.3 矩阵的指数函数

问题：若 A 不能对角化，则 $e^{At}=?$ $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u}$怎样求解？

例：求解 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\mathbf{u}.$

解：$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2 \implies \lambda_1=\lambda_2=1$

$$A-I=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \implies \mathbf{x}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \implies GM=1<2=AM$$

$\implies A$不能对角化.

21.3 矩阵的指数函数

但是仍有$\mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0)$.

注意到

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, (A - I)^2 = 0.$$

$$\Longrightarrow e^{At} = e^{(A-I)t+It} = e^{(A-I)t} \cdot e^{It} = e^t(I + (A - I)t)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0) = e^t \begin{pmatrix} 1 - t & t \\ -t & 1 + t \end{pmatrix} \mathbf{u}(0)$$

21.4 二阶常系数线性微分方程

考虑 $y'' + ay' + by = 0\,(*)$, 其中 $y = y(t)$ 为未知函数, a, b 为常数.
注意该方程只含未知函数及其导数

$\Longrightarrow$ 设 $y = e^{\lambda t}$ 是上述方程的解，则代入得

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = 0.$$

$$\Longrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

称其为特征方程.

21.4 二阶常系数线性微分方程

设 λ_1, λ_2 是 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的两个根.

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t}$ 是 $(*)$ 的两个线性无关的解.

注记：$y'' + ay' + by = 0$ 的解集是一个二维向量空间.

(1)若 λ_1, λ_2 为实数，则方程 $(*)$ 的通解为

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

(2)若 λ_1, λ_2 为共轭复数，即 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$, 则 $(*)$有通解

$$y = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

21.4 二阶常系数线性微分方程

与微分方程组的关系：

$$y'' + ay' + by = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y' \\ \dfrac{dy'}{dt} = -ay' - by \end{cases}$$

即 $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix},$$

或记为

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}, \mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}.$$

21.4 二阶常系数线性微分方程

则 $det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+a\lambda+b.$ (恰好是特征方程)

设其有两相异特征值 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$ 为相应特征向量.

$$\Longrightarrow \text{通解为}\, \mathbf{u}=\begin{pmatrix}y\\ y'\end{pmatrix}=c_1e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}+c_2e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}, c_1, c_2=const.$$

$$\Longrightarrow y=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}.$$

21.4 二阶常系数线性微分方程

注：此处，A 有相异特征值 $\Longleftrightarrow$ A 可对角化.

思考：求 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ 的通解.
(解为 $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t}, c_1, c_2, c_3$ 为任意常数)

21.4 二阶常系数线性微分方程

若 A 有相同特征值 $\lambda_1=\lambda_2$, 即 A 不能对角化.

例：求解 $y''-2y'+y=0$.

(法一)把 $y=e^{\lambda t}$ 代入方程得 $(\lambda^2-2\lambda+1)e^{\lambda t}=0$.

$$\Longrightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1.$$

则 e^t, te^t 为方程的两个线性无关的解.

故原方程有通解：$y=c_1e^t+c_2te^t, c_1, c_2=const.$

于是

$$y(0)=c_1, y'(0)=c_1+c_2, \Longrightarrow c_1=y(0), c_2=y'(0)-y(0).$$

$$\Longrightarrow y=y(0)e^t+(y'(0)-y(0))te^t.$$

21.4 二阶常系数线性微分方程

(法二)设 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, 则 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{u} = A\mathbf{u}.$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow GM = 1 < 2 = AM$$

$\Longrightarrow$ A 不可对角化.

21.4 二阶常系数线性微分方程

由前面例题已求得

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= e^{At}\mathbf{u}(0) = e^{(A-I)t+It}\mathbf{u}(0) \\
&= e^{t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} \\
&= e^{t}\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} + te^{t}\begin{pmatrix} y'(0)-y(0) \\ y'(0)-y(0) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow y = y(0)e^{t} + (y'(0)-y(0))te^{t}.$$

21.5 微分方程 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u}$的稳定性

与差分方程一样，$t\to\infty$ 时，决定解 $\mathbf{u}(t)$状态的是 A 的特征值.

若 A 可对角化，则 $\frac{d\mathbf{u}}{dt}=A\mathbf{u}$有通解

$$\mathbf{u}(t)=c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1+\cdots+c_ne^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n.$$

(1)若所有 $Re\lambda_i<0$, 则 $e^{At}\to 0$, 解是稳定的.

(2)若所有 $Re\lambda_i\le 0$, 则 e^{At} 有界，解是中性稳定的.

(3)若至少有一个特征值满足 $Re\lambda>0$, 则 e^{At}无界，解是不稳定的.

21.5 微分方程 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ 的稳定性

例：$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

解是中性稳定的.

事实上，$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 是一个旋转矩阵.

$\mathbf{u}(t) = e^{At}\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ 描述了一个做作圆周运动的点.

21.5 微分方程 $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$ 的稳定性

例：$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{u}.$

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3.$$

解是稳定的.

事实上，

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{-t} \mathbf{x}_1 + c_2 e^{-3t} \mathbf{x}_2,$$

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$