§ 12 复数与复矩阵

12.1 引言

我们学习的大部分线性代数知识都只考虑了实数情形,但复数情形不可避免会遇到.

例如 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 没有实特征值（除了极特殊情形）

目的：比较实和复两种情形的异同.

12.1 引言

①复数复习：

$i^2 = -1$, 一个复数 $a + bi = z$, 长度 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

a实部(real part)　b虚部(imaginary part)

共轭(complex conjugate)

$z = a + bi \longrightarrow \bar{z} = a - bi$

$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ij} \in C$　　$\bar{A} \overset{\text{def}}{=} (\overline{a_{ij}})_{n\times n}$

性质：$\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$　　$z\bar{z} = |z|^2$

12.1 引言

{长度为1 （单位圆上）的复数} ⟶ {二阶旋转矩阵}，且保持乘法

$$z = cos\theta + i\sin\theta \longrightarrow A_z = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

12.1 引言

极分解(polar decomposition)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = re^{i\theta} \quad z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (Euler formula)

单位根 $x^n = 1$有n个复根$e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ $k = 0,1,\dots,n-1$

令$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, $1 + \omega + \cdots \omega^{n-1} = 0$

例 求$(1+i)^8$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i2\pi} = 16$

12.1 引言

②代数基本定理：

$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, a_i \in C$有n个复根(可能重复)

设$a_i \in R, a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$的非实复根成对出现，即
若$z = a + bi (b \neq 0)$是它的根，则$\bar{z} = a - bi$也是它的根.

⇨ 奇次实系数方程总有一个实根.

实系数多项式(次数 ≥ 1)$f(x)$可分解成
$f(x) = a(x - \lambda_1)^{n_1} \ldots (x - \lambda_s)^{n_s} (x^2 - b_1 x + c)^{e_1} \ldots (x^2 - b_t x + c)^{e_t}$

12.1 引言

例 $x^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1}(x - \omega_k) \qquad \omega_k = e^{\frac{i2k\pi}{m}}$

$$(x - \omega_k)(x - \omega_{m-k}) = x^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{m}x + 1 \qquad \omega_k = \overline{\omega}_{m-k}$$

$$x^m + 1 = \prod_{k=0}^{m-1}(x - \xi_k) \qquad \xi_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{m}}$$

证明： $\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$ 可使用以上分解.

12.1 引言

Fact-1: $-1-cos2\theta-isin2\theta=-2cos\theta(cos\theta+isin\theta)\Rightarrow|-1-cos2\theta-isin2\theta|=2|cos\theta|$.

Fact-2: Set $\omega=cos\frac{2\pi}{2n+1}+isin\frac{2\pi}{2n+1}$. Then $x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{2n})$.

Fact-3: $cos\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}=cos\frac{k\pi}{2n+1}$.

12.2 复矩阵

③共轭转置

设$A=\left(\mathrm{a_{ij}}\right)_{\mathrm{n\times n}}$，$\mathrm{a_{ij}}\in \mathrm{C}$

$A^H=\overline{A^T}=(\bar{A})^T$　(“H”是“Hermitian”的简写)

例如：$Z=\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}$　$Z^H=(1-\mathrm{i}\quad -\mathrm{i})$

$ZZ^H=\|Z\|^2$

12.2 复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1+i\end{pmatrix}\qquad A^H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -i & 1-i\end{pmatrix}$$

性质：$(A^H)^H=A, (AB)^H=B^HA^H$

正如R^n上定义内积，C^n上也能定义内积

$u, v \in C^n$

$$内积=u^Hv=(\bar{u}_1 \quad \cdots \quad \bar{u}_n)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\bar{u}_1v_1+\cdots+\bar{u}_nv_n$$

性质：$u^Hv=\overline{v^Hu}$

12.2 复矩阵

④厄米特矩阵(Hermite)

A是Hermite矩阵 $\Longleftrightarrow A=A^H$ 例如 $\begin{pmatrix} 2 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 3 \end{pmatrix}$

性质1. Hermite阵对角线元为实数.

性质2. 设$\mathrm{z}\in\mathrm{C}^{\mathrm{n}}$, A是Hermite阵, 则$\mathrm{z}^{\mathrm{H}}A\mathrm{z}$是一实数.

性质3. 设A, B是Hermite阵, 则$A+B$也是. 进一步, 若$AB=BA$, 则AB是Hermite阵. $\Rightarrow$ A^n是Hermite阵.

性质4. 设A是一个n阶复矩阵, AA^H、$A+A^H$是Hermite阵.

12.2 复矩阵

性质5. 一个Hermite阵A特征值是实数.

证明：设$Az=\lambda_0 z$, 则$z^H Az=\lambda_0 z^H z$.

$z^H Az$和$z^H z$均为实数 $\Rightarrow$ λ_0是实数$(z\neq 0)$.

性质6. 一个Hermite阵的不同特征值的特征向量相互正交.

证明：设$Az_1=\lambda_1 z_1, Az_2=\lambda_2 z_2 \quad \lambda_1\neq\lambda_2$

我们有$z_2^H Az_1=\lambda_1 z_2^H z_1$, 因为$A$为Hermite阵, 所以有

$$z_2^H Az_1=z_2^H A^H z_1=(Az_2)^H z_1=\overline{\lambda_2} z_2^H z_1=\lambda_2 z_2^H z_1$$

$\Rightarrow$ $(\lambda_1-\lambda_2)z_2^H z_1=0$ $\Rightarrow$ $z_2^H z_1$=0

性质5.

12.2 复矩阵

⑤酉矩阵

U是酉矩阵 $\Longleftrightarrow$ $U^H U = I_n$

一般地, 设U是$\mathrm{m} \times \mathrm{n}$阶复矩阵 $U = (\mathrm{u}_1 \quad \cdots \quad \mathrm{u}_\mathrm{n})$

满足$\mathrm{u}_\mathrm{i}^\mathrm{H}\mathrm{u}_\mathrm{j} = \begin{cases} 1 & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases}$

则$U^H U = I_n$

12.2 复矩阵

酉矩阵是正交矩阵的复类比.

$U_{n\times n}$是酉矩阵 $\Longleftrightarrow$ $\forall \mathrm{z} \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}$ $\|U\mathrm{z}\| = \|\mathrm{z}\|$

性质：U是酉阵, 则U的特征值模长 $= 1$.

例如：
$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

性质：设U是酉阵, 则$|\mathrm{det}U| = 1$.

12.3 复正规阵

酉矩和Hermite矩阵均为复正规矩阵, 即
$A^H A = AA^H$

酉相似：设A, B是两n阶复矩阵. 若存在酉阵U, 使得
$A = U^H BU$, 则A和B是酉相似.

定理　设A为复正规阵, 则
(1)向量u是A的关于λ的特征向量 $\Longleftrightarrow$ u是A^H的关于$\bar{\lambda}$的特征向量.
(2)不同特征值的特征向量正交.

12.3 复正规阵

证明：

(1)设$A\mathrm{u} = \lambda \mathrm{u}$ 即$(A - \lambda I)\mathrm{u} = 0$ 令$B = A - \lambda I$

$\|B^H \mathrm{u}\|^2 = \mathrm{u}^{\mathrm{H}} B B^H \mathrm{u} = \mathrm{u}^{\mathrm{H}} B^H B\mathrm{u} = \|B\mathrm{u}\|^2 = 0$

$A^H \mathrm{u} = \bar{\lambda}\mathrm{u}$

(2)同Hermite情形

12.3 复正规阵

定理(Schur)　任一复矩阵A酉相似于一上三角阵. 即存在U

满足$U^H = U^{-1}, U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 任一复正规阵酉相似于对角阵, 特别地, 酉阵相似于

$\mathrm{diag}(c_1 \quad \cdots \quad c_n)$　其中$|c_i| = 1$

12.3 复正规阵

一个实矩阵A是正规的 $\Longleftrightarrow$ $A^TA = AA^T$

例如,A正交或A对称(反对称)

A正规,则存在正交阵Ω, $\Omega^T A\Omega$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{pmatrix} & & & \\ & & & \lambda_{2s+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

12.3 复正规阵

其中$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}$特征根为$\lambda_k = a_k + b_k i$和$\overline{\lambda_k} = a_k - b_k i$

$\lambda_{2s+1}, \dots, \lambda_n$为实数.

特别地, 一正交阵正交相似于

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s \end{pmatrix} & & & \\ & & & \pm1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \pm1 \end{pmatrix}$$

12.3 复正规阵

例1　设A为n阶实正交阵. 若$\lambda=\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$是$A$的特征值, $x=x_1+ix_2\left(x_1,x_2\in R^n\right)$是$A$的关于$\lambda$的特征向量, 则$\|x_1\|=\|x_2\|$, 且$x_1, x_2$相互正交.

证明：$\lambda=\alpha+i\beta$和$\bar{\lambda}=\alpha-i\beta$均为$A$的特征值.

$Ax=\lambda x \Rightarrow A\bar{x}=\bar{\lambda}\bar{x}$　　　$\lambda\neq\bar{\lambda} \Rightarrow$ x和$\bar{x}$正交

$x=x_1+ix_2, \bar{x}=x_1-ix_2$

$(\bar{x})^H x=0 \Rightarrow \|x_1\|=\|x_2\|, x_1^T x_2=0$

12.3 复正规阵

例2　证明：$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$酉相似

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

例3　设A是Hermite阵, 则$I + iA$非奇异.

$U = (I - iA)(I + iA)^{-1}$是酉阵

$U^H = (I - iA)^{-1}(I + iA) = (I + iA)(I - iA)^{-1}$

12.4 离散Fourier变换

回忆若f(x)满足f(x), f'(x)piecewise连续, 且$f(x+L)=f(x)$

则$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos\frac{2\pi nx}{L}+b_n\sin\frac{2\pi nx}{L})$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{2\pi nx}{L}dx \quad b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{2\pi nx}{L}dx$$

令$V=\{f(x)|f(x)\text{如上条件}\}\rightarrow R^\infty$

$f(x)\rightarrow(a_0,a_1,b_1,a_2,b_2,\dots)$

这是一个线性映射，$(a_0,a_1,b_1,\dots)$是f(x)的逆Fourier变换

12.4 离散Fourier变换

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \Rightarrow \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\right)\cdot(-i)$$

$\Downarrow$

$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{L}t}, c_n = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-i\frac{2\pi n}{L}t}$. Set $\omega_n = \frac{2\pi n}{L}$. Then the Fourier transform of $f(t)$ is

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

$\Downarrow$

离散化形式：

$\hat{f}(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega_n t}dt,\ n = 0, 1, \cdots, N-1. \Rightarrow \hat{f}(\omega_n) \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)e^{-i\omega_n t_k}$

$f(t_j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{L}t_j}$, Set $t_j = \frac{jL}{N} \Rightarrow f(t_j) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\frac{2\pi kj}{N}}$.

$Set A_j = f(t_j), a_k = c_k.\ f(t) \to (A_0, A_1, \cdots, A_{N-1}),\ (c_k) \to (a_0, a_1, \cdots, a_{N-1})$.

12.4 离散Fourier变换

$N = 4,$

$A_0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

$A_1 = a_0 + ia_1 - a_2 - ia_3$

$A_2 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$

$A_3 = a_0 - ia_1 - a_2 + ia_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

12.4 离散Fourier变换

一般地,

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$F_{s,t} = e^{i\frac{2\pi st}{N}}$$

令$\omega_N = e^{i\frac{2\pi}{N}}$

$$\Rightarrow F_{s,t} = \omega_N^{st} = F_{t,s}$$

F Fourier矩阵, F的列相互正交, 且F对称(非Hermite)

12.4 离散Fourier变换

$F^{-1}=\frac{1}{N}\bar{F}$ 给定$\begin{pmatrix}A_0\\A_1\\\vdots\\A_{N-1}\end{pmatrix}$,求$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_{N-1}\end{pmatrix}=F^{-1}\begin{pmatrix}A_0\\A_1\\\vdots\\A_{N-1}\end{pmatrix}$

需要N^2次乘法,$N(N-1)$次加法$\left(忽略\frac{1}{N}的除法\right)$

计算量 $=O(N^2)$

注记: $\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_{N-1}\end{pmatrix}$是向量$\begin{pmatrix}A_1\\\vdots\\A_{N-1}\end{pmatrix}$关于某个正交基的坐标分量

$(a_0,a_1,b_1,\dots)$是$f(x)$关于$\{1,\cos x,\sin x,\dots\}$的坐标

12.5 快速Fourier变换

快速Fourier变换减少了DFT的计算量到$O(N\log_2 N)$

N	N^2	$N\log_2 N$	FFT efficiency
256	65536	1024	64:1
512	262144	2304	114:1
1024	1048576	5120	205:1

注：$$\lim_{N\to+\infty}\frac{\log_2 N}{N}=0$$

12.5 快速Fourier变换

我们解释算法：

$$N=4\quad \begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0\\ A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix}\qquad i^4=1$$

引入记号：

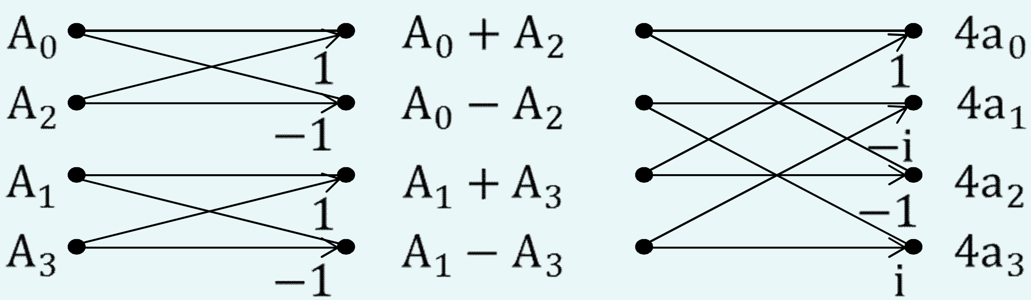
$$\begin{tikzcd} p \arrow[r] & p+\alpha q \\ q \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

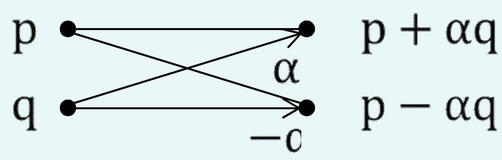
12.5 快速Fourier变换

$$4a_0 = (A_0 + A_2) + (A_1 + A_3)$$
$$4a_1 = (A_0 - A_2) - i(A_1 - A_3)$$
$$4a_2 = (A_0 + A_2) - (A_1 + A_3)$$
$$4a_3 = (A_0 - A_2) + i(A_1 - A_3)$$

将A_0, A_1, A_2, A_3重新排序A_0, A_2, A_1, A_3，使用记号，则



这里：



称为一个butterfly operation

12.5 快速Fourier变换

FFT算法将DFT算法分成$\log_2 N$段，每一段有$\frac{N}{2}$个butterfly operation.

$N=8$, Step1. 将$A_0, A_1, \ldots A_7$重新排序.

原则：考虑0,1, … ，7的二进制，设j的二进制数的反转为n_j.

若$j<n_j$，则交换A_j和A_{n_j}. 例如1的二进制数为001_2，反转为100_2 $=4, 1<4$，交换A_1和A_4.

排序后为：$A_0, A_4, A_2, A_6, A_1, A_5, A_3, A_7$(奇偶分离)

$$
\begin{array}{ccc}
\{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\} & \rightarrow & \{A_0, A_4, A_2, A_6\}, \{A_1, A_5, A_3, A_7\} \\
\downarrow \text{reordering} & & \downarrow \\
\{A_0, A_4, A_2, A_6, A_1, A_5, A_3, A_7\} & \leftarrow & \{A_0, A_4\}\{A_2, A_6\}\{A_1, A_5\}\{A_3, A_7\}.
\end{array}
$$

12.5 快速Fourier变换

奇偶分离的原因： $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{N}\overline{F}\right)\begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix}$

令$p(x) = A_0+A_1x + \cdots + A_{N-1}x^{N-1} = p_e(x^2) + xp_o(x^2)$

$p_e = A_0 + A_2x^2 + \cdots \qquad p_o = A_1 + A_3x^2 + \cdots$

$a_j = \frac{1}{N}\left(1,\overline{\omega}_N^j,\overline{\omega}_N^{2j},\ldots\right)\begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{N}p\left(\overline{\omega}_N^j\right)=\frac{1}{N}[p_e\left(\overline{\omega}_N^{2j}\right)+\overline{\omega}_N^j p_o(\overline{\omega}_N^{2j})] \quad j = 0,1,\cdots \frac{N}{2}-1$

$a_{N/2+j} = \frac{1}{N}[p_e\left(\overline{\omega}_N^{2(N/2+j)}\right)+\overline{\omega}_N^{(N/2+j)} p_o(\overline{\omega}_N^{2(N/2+j)})]$

因为$\overline{\omega}_N^{2j} = \overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^j, \overline{\omega}_N^{\frac{N}{2}+j} = -\overline{\omega}_N^j, \overline{\omega}_N^{N+2j} = \overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^j$

12.5 快速Fourier变换

为了方便，我们忽略$\frac{1}{N}$，只是记得在最后结果补上.

使用以上性质：

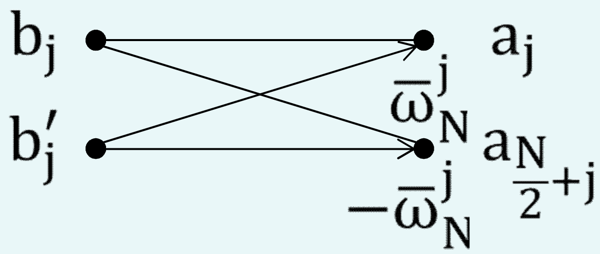
$$\begin{cases} a_j = p_e\left(\overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j}\right) + \overline{\omega}_N^j p_o(\overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j})] \\ a_{\frac{N}{2}+j} = p_e\left(\overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j}\right) - \overline{\omega}_N^j p_o(\overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j})] \end{cases} \quad j = 0,1,\ldots\frac{N}{2}-1$$

12.5 快速Fourier变换

令$b_j = p_e\left(\overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^j\right)$ $b_j' = p_o\left(\overline{\omega}_{\frac{N}{2}}^j\right)$，我们以上讨论总结：

$$a_j = p\left(\overline{\omega}_N^j\right) \quad j = 0,1\cdots,N-1 \Rightarrow \begin{cases} a_j = b_j + \overline{\omega}_N^j b_j' \\ a_{\frac{N}{2}+j} = b_j - \overline{\omega}_N^j b_j' \end{cases} \quad j = 0,1,\cdots\frac{N}{2}-1$$

如图这是一个butterfly operation



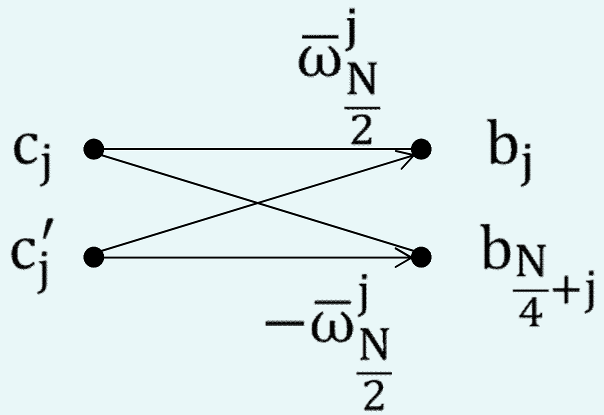
12.5 快速Fourier变换

对b_j, b_j'可以重复以上讨论.例如

$$b_j = p_e\left(\bar{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j}\right) \qquad \begin{cases} b_j = c_j + \bar{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j} c_j' \\ b_{\frac{N}{4}+j} = c_j - \bar{\omega}_{\frac{N}{2}}^{j} c_j' \end{cases} \quad j = 0,1,\cdots\frac{N}{4}-1$$

$$j = 0,1\cdots,\frac{N}{2}-1$$

其中$c_j = p_{ee}\left(\bar{\omega}_{\frac{N}{4}}^{j}\right), c_j' = p_{eo}(\bar{\omega}_{\frac{N}{4}}^{j})$



12.5 快速Fourier变换

如图

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{reordering}} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_4 \\ A_2 \\ A_6 \\ A_1 \\ A_5 \\ A_3 \\ A_7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{combination}} \begin{pmatrix} a_{ee} \\ a_{eo} \\ a_{oe} \\ a_{oo} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_e \\ a_o \end{pmatrix} \to a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{pmatrix}$$

除上$\frac{1}{8}$