§8 图与网络

8.1 简介

上一讲我们讨论了胡克定律的向量形式应用到弹性力学
它的应用框架如下：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "K=A^TCA"] \arrow[d, "A"] & f \\ e \arrow[r, "C"] & y \arrow[u, "A^T"'] \end{tikzcd}$$

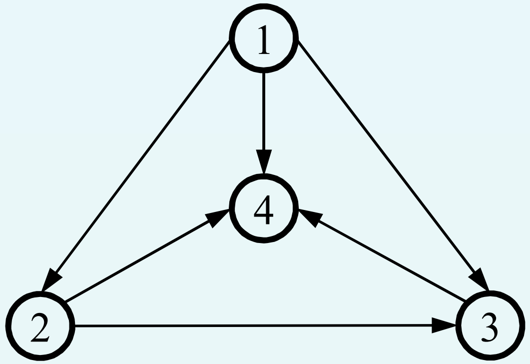
$K=A^TCA$刻画了系统受外力作用形变程度，称为刚度矩阵

8.1 简介

这一讲我们讨论欧姆定律的向量形式关联到图和网络

使用相似的框架

给定一个电路图（或一个定向图），例如



u：各节点电势

e：电势差

y：电流（内部线路）

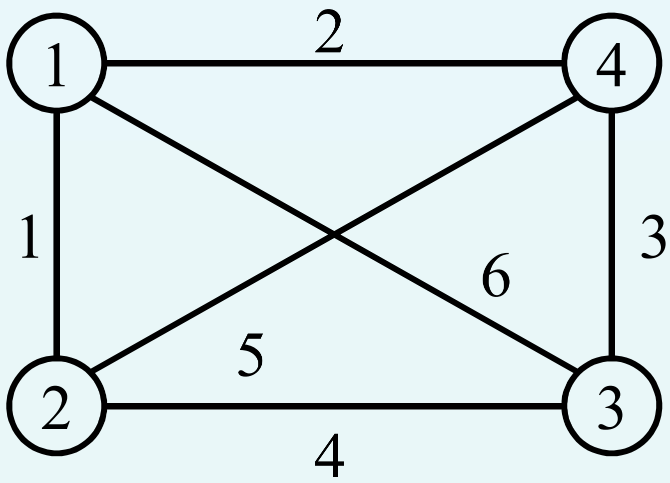
f：外部流入的电流

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

c_i为电导

8.2 图和矩阵

一个图由一些顶点（或节点）和一些连接顶点的边组成，如下图,若干条边构成的连通子图为路.不允许一个顶点到自己的边.



记作G=(V,E)

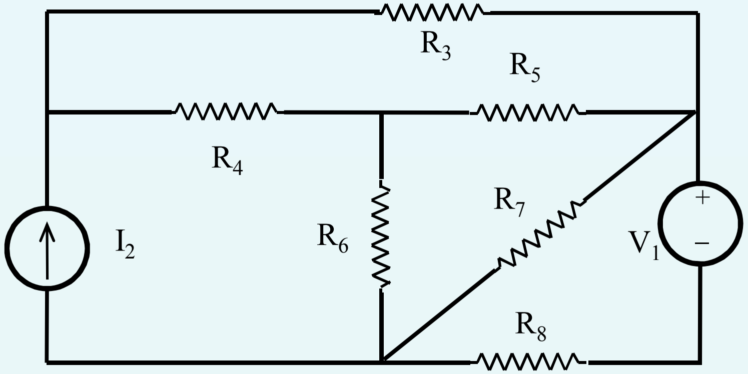
V={1,2,...,n}顶点集

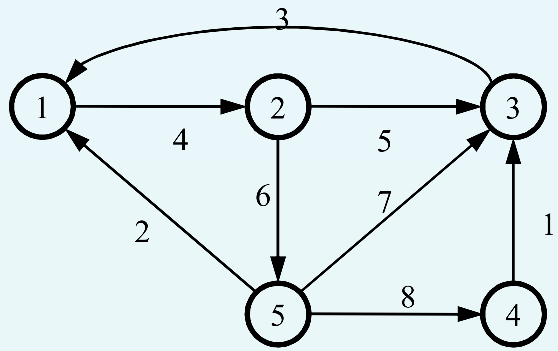
E={e_1, ... e_m}边集

若我们给每条边规定一个方向，则成为定向图

8.2 图和矩阵

给定一个电路图，我们可以抽象出顶点和边，得到一张定向图例如





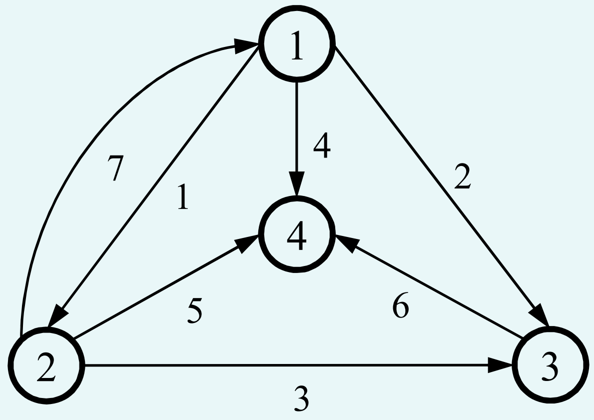
V={①,②,③,④,⑤}　E={1,2,3,4,5,6,7,8}

一个回路是一个子图，它的边构成的路的起始点和终点相同，例如上图，$1 \xrightarrow{4} 2 \xrightarrow{6} 5 \xrightarrow{2} 1$ 是一个回路.

8.2 图和矩阵

一个定向图可以结合一个关联矩阵（incidence matrix）
关联矩阵的每一行对应一条边，每一列对应一个顶点
每一行只有两个非零数1和-1.若顶点j到k有一条边，则这条边对应行的第j个元素为-1,第k个元素为1.
例如：参见简介中的定向图

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} ① & ② & ③ & ④ \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\end{array}
$$



8.2 图和矩阵

一个定向图可以结合一个邻接矩阵（adjacency matrix）

设$B=(b_{ij})_{n\times n}$是一个定向图的邻接矩阵, 则

$$b_{ij}=\begin{cases} d_{ij} & \text{顶点}i\text{到}j\text{有}d_{ij}\text{条边} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$n=$ 顶点个数

上例 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4}$

8.2 图和矩阵

一个定向图也可以结合一个Laplacian矩阵.$L=A^TA$
其中A是关联矩阵，可以看出

$$L=(l_{ij})_{n\times n}$$

n=顶点数

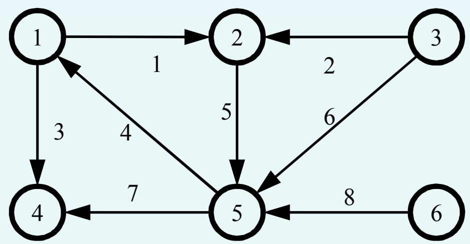
$$l_{ij}=A\text{的第}i\text{列和第}j\text{列的内积}=\begin{cases}\text{经过顶点}i\text{的边数} & i=j\\ -d_{ij} & i\text{和}j\text{由}d_{ij}\text{条边相连}\\ 0 & i\neq j,i\text{和}j\text{不相邻}\end{cases}$$

8.2 图和矩阵

显然Laplacian矩阵是半正定的且$L=D-(B+B^T)$.D是L的对角线元构成的矩阵.B是相应的邻接矩阵.

因为A的每一行元素之和等于0.即 $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=0$,所以$L$的每一行元素之和等于0，且$L$是奇异阵.

例如



$$L=\begin{pmatrix}3&-1&0&-1&-1&0\\-1&3&-1&0&-1&0\\0&-1&2&0&-1&0\\-1&0&0&2&-1&0\\-1&-1&-1&-1&5&-1\\0&0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥\end{array}\\ \begin{pmatrix}-1&1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0\\-1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&-1&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\end{array}$$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

一个图对于每条边赋予一个数$c_1,\ldots, c_m$,假设$c_i>0$,则这个图变成一个网络（network）.例如，边是弹簧，c_i是弹性系数，边是电路， c_i是电导（conductance）等.

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

A^TCA称为加权的Laplacian矩阵，例如c_i是弹性系数，我们得到了刚度矩阵.本讲我们讨论图是电路图的情形.

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

回忆相关的物理定律：

(1)欧姆定律（Ohm's law）：$y_i=c_ie_i$

其中y_i是在第i条边上的电流，c_i是边上电导，e_i是连接第i条边的两节点电势差

(2)Kirchhoff's voltage law(KVL)：

每条回路电势差之和为零

(3)Kirchhoff's current law(KCL)：

每个顶点流入电流=流出电流

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

我们以下应用如下框架

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r] \arrow[d, "A"] & f \\
e \arrow[r, "C"] & y \arrow[u, "A^T"']
\end{tikzcd}
$$

其中$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, u_i为各顶点的电势

$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}$, e_i为每条边上电势差

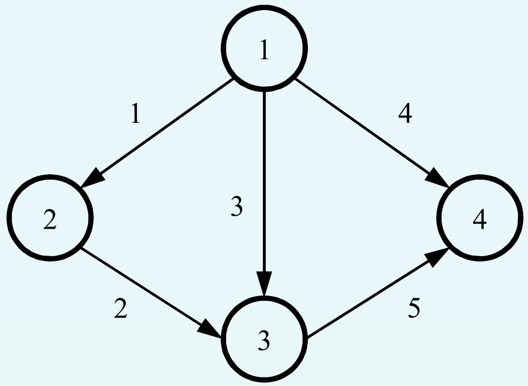
$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, y_i为每条边上电流

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, f_i为各顶点流入的外部电流（保持系统稳定）

考虑如下电路图

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

右图（假设为闭合电路图）



$$
关联矩阵A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

设各顶点电势为u_1, u_2, u_3, u_4,得到向量 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

我们得到各边的电势差向量 $e = -\begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ u_3 - u_2 \\ u_3 - u_1 \\ u_4 - u_1 \\ u_4 - u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix}$

容易验证e=-*A*u

使用欧姆定律，设各边的电导为c_1, c_2, c_3, c_4, c_5,我们得到各边的电流向量

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e_1 \\ c_2 e_2 \\ c_3 e_3 \\ c_4 e_4 \\ c_5 e_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix} e = Ce$$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

因为没有外部电流，此时$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{f}_4 \end{pmatrix} = 0$

我们检查各顶点流出和流入电流，由KCL，流入=流出

$-y_1 - y_3 - y_4 = 0$ （顶点1）

$y_1 - y_2 = 0$ （顶点2）

$y_2 + y_3 - y_5 = 0$ （顶点3）

$y_4 + y_5 = 0$ （顶点4）

写成矩阵形式$A^T y=0$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

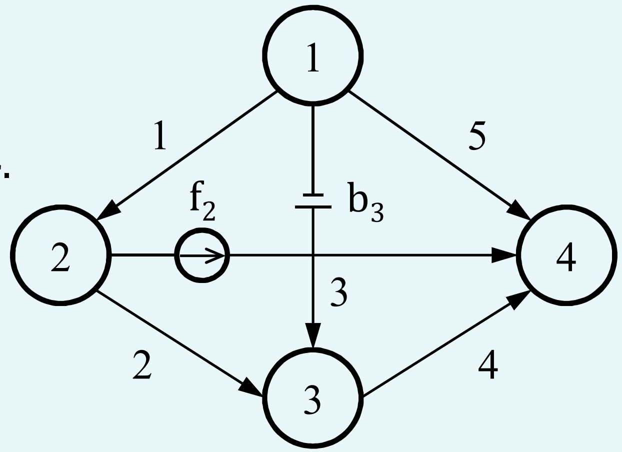
以上讨论可以表示为如下框架：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{u}=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3,\mathrm{u}_4)^{\mathrm{T}} \ \text{电势} \arrow[d, "A"'] & & \mathrm{f} = A^T \mathrm{y} = 0 \\
\mathrm{e}=(\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3,\mathrm{e}_4,\mathrm{e}_5)^{\mathrm{T}} \ \text{电势差} \arrow[rr, "\begin{pmatrix} \mathrm{c}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{c}_5 \end{pmatrix}", "\text{欧姆定律}"'] & & \mathrm{y}=(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2,\mathrm{y}_3,\mathrm{y}_4,\mathrm{y}_5)^{\mathrm{T}} \ \text{电流} \arrow[u, "A^T", "(\mathrm{KCL})"']
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{e} = -A\mathrm{u}$$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

例2.右边电路图，有电流源f_2和电压源b_3.
在平衡状态下，设各点电势为u_1, u_2, u_3, u_4.



$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

各边的电势差为

$$e = b - \begin{pmatrix} u_2 - u_1 \\ u_3 - u_2 \\ u_3 - u_1 \\ u_4 - u_3 \\ u_4 - u_1 \end{pmatrix} = b - Au \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

使用欧姆定律 $y = C(b - Au)$ $\quad c = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix}$ $\quad c_i$为电导

使用KCL，流入=流出，我们有

$-y_1 - y_3 - y_5 = 0$ （顶点1）
$y_1 - y_2 - f_2 = 0$ （顶点2）
$y_2 + y_3 - y_4 = 0$ （顶点3）
$y_4 + y_5 + f_2 = 0$ （顶点4）

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

写成矩阵形式

$$A^T\mathrm{y}=\mathrm{f} \qquad \text{其中}\ \mathrm{f}=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{f}_2\\ 0\\ -\mathrm{f}_2\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

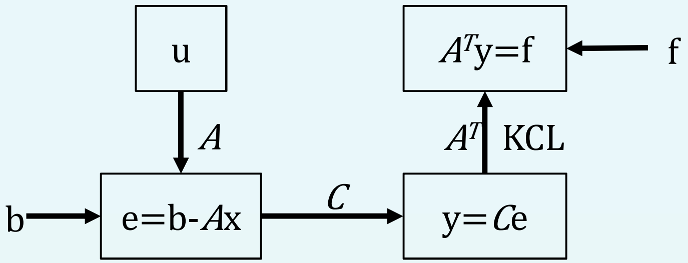
$$\mathrm{f}=A^TC(\mathrm{b}-A\mathrm{u})=A^TC\mathrm{b}-(A^TCA)\mathrm{u} \quad \text{或} \quad A^TCA\mathrm{u}=A^TC\mathrm{b}-\mathrm{f}$$

电压和电流的平衡方程

$$\begin{cases} C^{-1}\mathrm{y}+A\mathrm{u}=\mathrm{b} & \text{（外部电压源）}\\ A^T\mathrm{y}=\mathrm{f} & \text{（外部电流源）}\end{cases}$$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

总结为如下框图



刚度矩阵$K=A^TCA$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_1+c_3+c_5 & -c_1 & -c_3 & -c_5 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_3 & -c_2 & c_2+c_3+c_4 & -c_4 \\ -c_5 & 0 & -c_4 & c_4+c_5 \end{pmatrix}$$

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

当$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 1$时，$K$变成Laplacian矩阵

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

对比K和L，可以看出$c_1 + c_3 + c_5$对应着边1,3,5经过顶点①

$c_1 + c_2$对应着边1,2经过顶点②

性质：K是对称正半定阵.

因为 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ K不是正定阵

8.3 网络和加权Laplacian矩阵

给定一个网络，即一个图且每边有一个正数（权，weight）
假设网络有n个顶点 {①, ②, ③, ... , ⓝ}
$\{c_1, \dots, c_m\}$是m条边的权.

$$K = (\mathrm{K}_{\mathrm{ij}})_{n\times n} \qquad \mathrm{K}_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} \text{连接i和j的边的权值和的相反数} & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \\ \text{经过i的边的权值之和} & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0 & \mathrm{i,j}\text{不相等} \end{cases}$$

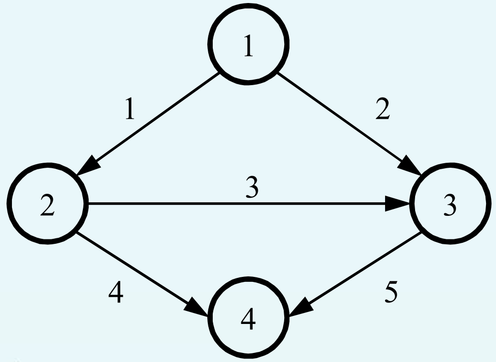
$\forall x \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$

$$x^T K x = \sum (-\mathrm{K}_{\mathrm{ij}})(\mathrm{x_i} - \mathrm{x_j})^2 \geq 0$$

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

如右图

$$\text{关联矩阵}A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$



（1）A的零空间$\mathrm{N}(A)$

可以看出A的每行元素之和为0，因此 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=0$

即 $c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\in \mathrm{N}(A), \forall c\in \mathrm{R}$

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

上图假设是一个电路图， u_1, u_2, u_3, u_4是各顶点电势 $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}$

则 $A\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_2-u_1\\u_3-u_1\\u_3-u_2\\u_4-u_2\\u_4-u_3\end{pmatrix} \longleftarrow$ 各边的电势差

Au=0意味着各边电势差为0，电路中无电流，即各点电势相同

即 $u=u_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 因此 $N(A)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\middle| c\in R\right\}$ 即dim $N(A)$=1.

$\Longrightarrow$ rank (A)=顶点数-1　　本例，r(A)=3.

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

（2）A的列空间$C(A)$

$C(A)=\{Ax|x\in R^n\}$ $Ax=b$有解 $\longleftrightarrow$ $b\in C(A)$

dim $C(A)$=n-1，因此A有n-1个无关的列向量.
事实上A的任意n-1个列向量是线性无关的.

设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$，不妨假设$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}$线性相关.则存在$c_1,c_2,\dots,c_{n-1}$
$\in R$不全为0，$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_{n-1}\alpha_{n-1}=0$，因此

$$A\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-1}\\0\end{pmatrix}=0 \quad 即\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_{n-1}\\0\end{pmatrix}\in N(A) \quad 但N(A)=\left\{\begin{pmatrix}c\\c\\\vdots\\c\end{pmatrix}\middle| c\in R\right\} \quad 矛盾$$

因此A的任意n-1个列向量均可作为$C(A)$的一组基.

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

对于上图，Ax=b 即

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = b_1 \\ -x_1 + x_3 = b_2 \\ -x_2 + x_3 = b_3 \\ -x_2 + x_4 = b_4 \\ -x_3 + x_4 = b_5 \end{cases}$$

可以看出$b \in C(A) \longrightarrow b_1 + b_3 = b_2, b_3 + b_5 = b_4, b_2 + b_5 = b_1 + b_4$

$$\updownarrow$$

$b_1 - b_2 + b_3 = 0, b_3 - b_4 + b_5 = 0$

我们已知Ax的每个分量代表各边电势差

$b_1 - b_2 + b_3 = 0$

即1,2,3边电势差之和=0.而1,2,3边构成一个回路，这恰好是Kirchhoff电压定律（KVL），同理$b_3 - b_4 + b_5 = 0$.

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

我们有

$$\mathrm{b} \in \mathrm{C}(A) \longrightarrow \quad \mathrm{b}\text{满足}\mathrm{b}_1 - \mathrm{b}_2 + \mathrm{b}_3 = 0, \mathrm{b}_3 - \mathrm{b}_4 + \mathrm{b}_5 = 0$$

即 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \mathrm{b}_3 \\ \mathrm{b}_4 \\ \mathrm{b}_5 \end{pmatrix} = 0$

矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$称为回路矩阵.
它的每一行给出一个极小回路，列指标为边.
若边i在回路中，且和回路的逆时针方向一致，取$+1$，相反，则取-1.
一个直接观察$BA = 0(\mathrm{KVL})$.

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

（3）A的左零空间$\mathrm{N}(A^T)$

由定义$\mathrm{N}(A^T) = \{\mathrm{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{m}} | A^T \mathrm{y} = 0\}$

对于我们的例子

$$A^T y = 0 \qquad \begin{cases} -y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 - y_3 - y_4 = 0 \\ y_2 + y_3 - y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 = 0 \end{cases}$$

由于物理意义，y_i是边i上的电流，上述等式是每一顶点流入电流=流出电流，即Kirchhoff电流定律（KCL）.

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

已经知道BA=0，B为回路矩阵，则$A^TB^T=0$.即B的每一行（代表一个回路，称为回路向量）是$N(A^T)$的向量.

$$A^T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=0 \qquad A^T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$$

定理$N(A^T)=C(B^T)$，$N(B)=C(A)$

由定理，回路向量构成$N(A^T)$的一组基

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

（4）A的行空间$C(A^T)$

已知$r(A)=n-1 \Rightarrow \dim C(A^T)=n-1$

$$C(A^T)\perp N(A) \Rightarrow C(A^T)=\left\{\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix}\middle| f_1+\cdots+f_n=0\right\}$$

我们的例子

$$C(A^T)=\{A^Ty|y\in R^n\}=\left\{\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots \\ f_4\end{pmatrix}\middle| f_1+\cdots+f_4=0\right\}$$

下面我们给出$C(A^T)$的一组基.

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

给定一个连通图，有n个顶点，m条边，则$m \geq n-1$. 一个树图是一个连通图，满足$n-1=m$. 它不含回路.

给定一个连通图，可以得到很多树图作为子图. 关于我们的例子$① \xrightarrow{1} ②$就是一个树子图. 若树子图包含图的所有顶点，称为极大树子图. 例如$① \xrightarrow{1} ② \xrightarrow{3} ③ \xrightarrow{5} ④$是极大树子图，它的关联矩阵是原图的相应行（对应树的边）构成的子矩阵.

例如

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{子矩阵}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A_0$$

8.4 关联矩阵的四个基本子空间

A_0是行满秩的，因为A_0是$n-1$行，n列，$r(A_0)=n-1$.

$C(A^T)$的一组基$\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$来自于$A_0$的行$\xrightarrow{\text{对应}}$一个极大树子图.

例如：①$\xrightarrow{2}$③$\xrightarrow{5}$④$\xleftarrow{4}$②是另一极大树子图.

因此A的2,4,5行$\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$构成$C(A^T)$的一组基.

8.5 注记

我们证明定理：N(B)=C(A)

已知$C(A) \subseteq N(B)$（Kirchhoff电压定律）

设$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{e}_\mathrm{m} \end{pmatrix} \in \mathrm{N}(B)$，取定图的一个极大树子图T，固定T上一顶点作为基点，任意顶点k，在T上有唯一一条路连接k到基点，则定义k的电势$\mathrm{u_k}$为路上各边电势之和(若边和路的方向一致，取正号，相反方向，取负号)则使用$\mathrm{e} \in \mathrm{N}(B)$可以检查任意边j上电势差$\mathrm{e_j} = \mathrm{u_k} - \mathrm{u_l}$，其中k为j的起点，l为j的终点，我们得到

$$\mathrm{e} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{e}_\mathrm{m} \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} \mathrm{u}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{u}_\mathrm{n} \end{pmatrix} \in \mathrm{C}(A)$$

8.5 注记

给定一个连通图，有n个顶点，m条边，设有l个极小回路.
则欧拉公式给出

$$n-m+l=1.\text{即}l=m-(n-1)$$

例如我们的例子：

$$4-5+2=1$$

设回路矩阵B的秩为r_B，因为$N(B)=C(A)\rightarrow m-r_B=n-1\rightarrow r_B=l.$
即B是行满秩的.