2011 矩阵论复习题

1. 设$V = R^+$是正实数集,对于任意的$x, y \in V$,定义x与y的和为

$$x \oplus y = x \cdot y$$

对于任意的数$k \in R$,定义k与x的数乘为

$$k \otimes x = x^k$$

问:对于上述定义加法和数乘运算的集合V,是否构成线性空间,并说明理由.

2. 对任意的 $x, y \in R^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ 定义 x 与 y 的和为

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + x_1 y_1)$$

对于任意的数$k \in R$,定义k与x的数乘为

$$k \otimes x = (kx_1, kx_2 + \frac{k(k-1)}{2} x_1^2)$$

问:对于上述定义加法和数乘运算的集合R^2,是否构成线性空间,并说明理由.

3．设$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, x_i \in R\}$，试证明$S$是$R^3$的子空间，并求$S$的一组基和$\dim S$.

4.设$P_n(R)$表示次数不超过n的全体多项式构成的线性空间,

$$S = \{f(x) \mid f'(0) = 0, f(x) \in P_n(R)\}$$

证明S是$P_n(R)$的子空间,并写出S的一组基和计算$\dim S$.

5. 设T是R^2上的线性变换,对于基向量i和j有

$$T(i) = i + j \quad T(j) = 2i - j$$

1)确定T在基$\{i, j\}$下的矩阵;

2)若$e_1 = i - j \quad e_2 = 3i + j$,确定$T$在基$\{e_1, e_2\}$下的矩阵.

6. 设 T 是 R^3 上的线性变换,对于基 $\{i, j, k\}$ 有

$$T(i+j+k)=j-k \quad T(j+k)=i \quad T(k)=2i+3j+5k$$

1)确定 T 在基 $\{i, j, k\}$ 下的矩阵;

2)求 T 的零空间和像空间的维数.

7.设线性空间 R^3 的两个基为(I): x_1, x_2, x_3， (II): y_1, y_2, y_3，由基(I)到基(II)的过度矩阵为

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$R^3$ 上的线性变换 T 满足

$$T(x_1+2x_2+3x_3)=y_1+y_2$$

$$T(2x_1+x_2+4x_3)=y_2+y_3$$

$$T(x_1+3x_2+4x_3)=y_1+y_3$$

1)求 T 在基(II)下的矩阵;

2)求 $T(y_1)$ 在基(I)下的坐标.

8.在线性空间 $P_3(R)$ 中

$$f_1(x)=a+x+x^2+x^3 \quad f_2(x)=1+ax+x^2+x^3 \quad f_3(x)=1+x+2x^2+x^3$$

讨论 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的线性相关性.

9.在 $R^{2\times2}$ 中求由基(I) $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A_4=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

到基(II) $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B_3=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B_4=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的过渡矩阵.

10.已知 $\alpha_1=(1,2,1,0)$ $\alpha_2=(2,-1,0,1)$ $\beta_1=(-1,1,1,1)$ $\beta_2=(1,-1,3,7)$

设 $V=L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$，求线性空间 V 的维数和基.

11.在 $P_2(R)$ 中，对任意的 $f(x),g(x)\in P_2(R)$ 定义内积为

$$(f(x),g(x))=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

若取 $P_2(R)$ 的一组基 $\{1,x,x^2\}$,试用 $Gram-Schmidt$ 正交化方法,求 $P_2(R)$ 的一组正交基.

12. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1+i & 0 & 0\\ 0 & i & 2\end{pmatrix}$ 的奇异值分解.

13.设 A 为 n 阶实矩阵,证明 A 可表示为一对称矩阵和一反对称矩阵之和.

(提示:若 $A^T=A$,称 A 为对称矩阵。若 $A^T=-A$,称 A 为反对称矩阵)

14. 设 x 和 y 是 $Eucild$ 空间 V 的非零元，它们的夹角是 θ，试证明

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\cdot\|y\|\cos\theta$$

15.设 A 是 $C^{n\times n}$ 上的 n 阶方阵, x 是 C^n 上的 n 维列向量,证明：$\|Ax\|_2\le\|A\|_F\cdot\|x\|_2$.

16.设 $A\in C^{m\times n}$,并且满足 $A^HA=E$,计算 $\|A\|_2$ 和 $\|A\|_F$.

17.已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}$，求 A 的最大值分解。

18.设 $A\in C^{m\times n}$，1）证明：$rank(A^HA)=rank(A)$;

2) 证明：A^HA 是半正定矩阵或正定矩阵。

19.求下列矩阵的谱阵和谱分解

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

20.设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 n 阶单纯矩阵 A 的重数为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 的特征值, $\sum_{i=1}^{s}r_i=n$

E_i 是 A 的对应于 λ_i 的谱阵,证明

1) $E_iE_j=0\quad(i\ne j,\quad i,j=1,2,\cdots,s)$

2) $\sum_{i=1}^{s}E_i=E$

21.设函数矩阵 $A=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$, 求 $\frac{d}{dt}A(t)$, $\frac{d}{dt}(\det A(t))$ 和 $\det(\frac{d}{dt}A(t))$.

22.证明 1) $\frac{d}{dt}(A^{-1}(t))=-A^{-1}(t)\cdot\frac{d}{dt}A(t)\cdot A^{-1}(t)$

2) $\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}=e^{At}A$

23.已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 7 & i & 8\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix}5\\ 4\\ 8\end{pmatrix}$, 求 $\|x\|_1,\|x\|_\infty,\|Ax\|_1,\|Ax\|_\infty,\|A\|_1,\|A\|_\infty$

24.设 $\|\bullet\|_a$ 是 $C^{n\times n}$ 的一种矩阵范数, B 和 D 是 n 阶可逆矩阵,且

$\|B^{-1}\|_a\le 1$, $\|D^{-1}\|_a\le 1$,试证明对任意的 $A\in C^{n\times n}$

$$\|A\|_b=\|BAD\|_a$$

也是 $C^{n\times n}$ 的一种矩阵范数.

25. 已知 $\|\bullet\|_a$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数， y_0 是 C^n 中的某非零列向量， $\forall x\in C^n$ 设

$\|x\|=\|xy_0^H\|_a$ 证明它是 C^n 上的向量范数，并且与矩阵范数 $\|\bullet\|_a$ 相容。

26.设 A 是 $C^{n\times n}$ 上的 n 阶方阵, x 是 C^n 上的 n 维列向量,证明：$\|Ax\|_F\le\|A\|_F\cdot\|x\|_2$

27.设 $A\in C^{m\times n}$，B 和 D 是酉矩阵, 证明: $\|A\|_F=\|BA\|_F=\|AD\|_F=\|BAD\|_F$

28.已知 $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos a & \sin a\\ -\sin a & \cos a\end{pmatrix}$ 其中 $a\in R$ 且 $a\ne 0$, 证明: $e^A=B$.

29.已知 $A=\begin{pmatrix}3 & i\\ -i & 3\end{pmatrix}$, 1)证明 A 是 $Hermite$ 矩阵; 2)求方阵函数 $\cos A$.

30.已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

1)求 A 的 $Jordan$ 标准形 J; 2)求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=J$

31.已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&1&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{pmatrix}$, 求$\sin A$和$\sin(At)$.

32.设A为n阶方阵,求证$\det(e^{A})=e^{tr(A)}$特别地当A为反对称矩阵时有$\det(e^{A})=1$

33.设$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$, 求方阵函数$e^{A}$和$e^{At}$.

34.证明:线性方程组$Ax=b$(其中$A\in C^{m\times n}\quad b\in C^{m}$)有解的充分必要条件是$AA^{+}b=b$

35.已知$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\end{pmatrix}$, 求$A$的广义逆矩阵$A^{+}$.

36. 已知$A=\begin{pmatrix}i&1&i\\i&1&0\end{pmatrix}$, 求$A$的广义逆矩阵$A^{+}$.

37.设$A=BC$是A的最大秩分解, 证明: $A^{+}=C^{+}B^{+}$

38.求微分方程组

$$\frac{dx_1}{dt}=3x_1-x_2+x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-x_1+5x_2-x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt}=x_1-x_2+3x_3$$

的通解.