第六讲 Jordon 标准形的变换与应用

一、行列式因子法求Jordan标准形

定理： 设 $A(\lambda)$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，则 $A(\lambda)$ 的行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为：

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)\qquad (k=1,2,\cdots,r)$$

其中 $d_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,r)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子。于是

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),d_2(\lambda)=\frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,d_r(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

求解过程：

1° 求出 $(\lambda I-A)$ 的 n 个行列式因子 $D_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,n)$

2° 求出 A 的不变因子 $d_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,n)$

3° 求出 A 的初等因子组

4° 写出各初等因子对应的 Jordan 块，组合成 Jordan 标准形

例 1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

解：
$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\0&\lambda-1&-2&-3\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{bmatrix}$$

显然有 $D_4(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-4)^4$，又 $\lambda I-A$ 中有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}-2&-3&-4\\\lambda-1&-2&-3\\0&\lambda-1&-2\end{vmatrix}=-4\lambda(\lambda+1)$$

因为 $D_3(\lambda)$ 整除每个 3 阶子式，且有 $D_3(\lambda)|D_4(\lambda)$，所以 $D_3(\lambda)=1$，从而 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$。于是 A 的不变因子为：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,\quad d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$，即 A 只有一个初等因子 $(\lambda-1)^4$，故 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}1&1&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$

二、Jordon标准形变换矩阵的求法

$$P^{-1}AP=J \quad\rightarrow\quad AP=PJ$$

1° 将 P 按 J 的结构写成列块的形式：

$$\begin{array}{cccc} P=[P_1 & P_2 & \cdots & P_r] \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ & m_1\text{列} & m_2\text{列} & & m_r\text{列} \end{array} \rightarrow A[P_1\ \ P_2\ \ \cdots\ \ P_r]=[P_1\ \ P_2\ \ \cdots\ \ P_r]\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow AP_i=P_iJ_i \quad (i=1,2\cdots,r)$$

2° 求解 r 个矩阵方程 $AP_i=P_iJ_i \quad (i=1,2\cdots,r)$

3° 将 r 个 P_i 合成变换矩阵 $P=[P_1\ \ P_2\ \ \cdots\ \ P_r]$

❑方程 $AP_i=P_iJ_i$ 的求解

设 $P_i=[P_{i1}\ \ P_{i2}\ \ \cdots\ \ P_{im_i}]$，则

$$A[P_{i1}\ \ P_{i2}\ \ \cdots\ \ P_{im_i}]=[P_{i1}\ \ P_{i2}\ \ \cdots\ \ P_{im_i}]\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$AP_{i1}=\lambda_iP_{i1} \quad\rightarrow\quad (A-\lambda_iI)P_{i1}=0$$

$$AP_{i2}=P_{i1}+\lambda_iP_{i2}\rightarrow(A-\lambda_iI)P_{i2}=P_{i1} \quad\rightarrow\quad (A-\lambda_iI)^2P_{i2}=0$$

$$\vdots$$

$$AP_{im_i}=P_{im_i-1}+\lambda_iP_{im_i}\rightarrow(A-\lambda_iI)P_{im_i}=P_{im_i-1}\rightarrow \quad (A-\lambda_iI)^{m_i}P_{im_i}=0$$

两种具体做法：(i) 按照 $P_{i1}\rightarrow P_{i2}\rightarrow\cdots\rightarrow P_{im}$ 的顺序求解，即先求出特征向量 P_{i1}，然后由后续方程求出 P_{i2}、P_{i3}、…；(ii)先求 $(A-\lambda_iI)^{m_i}P_{im_i}=0$ 的解向量 P_{im_i}，然后直接得到 $P_{im_i-1}\rightarrow P_{im_i-2}\rightarrow\cdots\rightarrow P_{i1}$。

前一做法由于$(A-\lambda_i I)$为奇异矩阵，每一步均存在多解及无解问题，故各步之间不能完全独立，前一步尚需依赖后一步、再后一步、…，直至最后一步才能完全确定一些待定系数；而后一做法仅出现一次求解方程，其余为直接赋值，无上述问题。但又可能导致低阶P_{im_i}出现零向量的问题。

由于 $P_{i1}=(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}$

$$P_{i2}=(A-\lambda_i I)^{m_i-2}P_{im_i}$$

$$\vdots$$

$$P_{im_{i-1}}=(A-\lambda_i I)P_{im_i}$$

故P_{im_i}应满足：$(A-\lambda_i I)^{m_i}P_{im_i}=0$但$(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}\neq 0$

同一特征值可能出现在不同的 **Jordan** 块中，对于这种情况，按各 **Jordan** 块阶数高低一次进行处理，高阶先处理，低阶后处理，同阶同时处理。

(1)最高阶（没有属于同一特征值的 **Jordan** 块同阶）可按下述方法求出P_{im_i}，即使$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0$但$(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0$的$x$作为$P_{im_i}$。然后由方程$P_{i(j-1)}=(A-\lambda_i I)P_j$依次求出$P_{im_{i-1}},P_{im_{i-2}},\cdots$，直至$P_{i1}$

(2)对于较低阶的 **Jordan** 块，它的P_{im_i}不仅要考虑到满足

$$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0\text{但}(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0,$$

而且还应与前述P_{ij}线性无关。

(3)其它属于同一特征值的 **Jordan** 块处理时，按照（**2**）的原则处理即可。

(4)出现多个属于同一特征值的 **Jordan** 块同阶时，还应考虑线性无关问题。

例 2：求 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形及其变换矩阵。

解：写出特征矩阵

$$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda-3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

第 1～4 行与第 1、2、4、5 列交叉的元素形成的四阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(3\lambda-4)$$

第 1、2、3、5 行与 1、3、4、5 列交叉的元素形成的四阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}=-(\lambda-4)^2$$

这两个子式的公因式为 1，故 $D_4(\lambda)=1 \Rightarrow D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$

第 1～5 行与第 1、2、3、5、6 列交叉的元素形成的五阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-4)^2$$

第 1、2、3、4、6 行与第 1、2、4、5、6 列交叉的元素形成的五阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 4(\lambda-2)^3$$

其它五阶子式均含$(\lambda-2)$因式，故 $D_5(\lambda)=(\lambda-2)$

特征值行列式为 $D_6(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)^3$，从而有

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=1,\quad d_5(\lambda)=(\lambda-2),$$

$$d_6(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)^3$$

初等因子组为

$$(\lambda-2)\ ,\qquad (\lambda-2)^2\ ,\qquad (\lambda-4)^3$$

相应的 Jordan 块为

$$[2]\ ,\qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$\lambda=2$与$\lambda=4$均为三重特征值.

（1）$\lambda_3=4$的 Jordon 矩阵仅有一块，$m_3=3$

$$P_3=\begin{bmatrix}P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}$$

先求P_{33}，P_{33}应满足 $(A-4I)^3P_{33}=0 \quad (A-4I)^2P_{33}\neq 0$

$$(A-4I)=\begin{bmatrix}-2&1&0&-1&-1&0\\1&-2&0&0&-1&1\\-1&-1&0&1&0&-1\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&-1&-1\end{bmatrix}\qquad (A-4I)^2=\begin{bmatrix}5&-3&0&3&0&1\\-3&5&0&-1&0&-3\\0&0&0&0&4&0\\-1&3&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0\\-3&1&0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^3=\begin{bmatrix}-12&8&0&-8&0&-4\\8&-12&0&4&0&8\\0&0&0&0&0&0\\4&-8&0&0&0&4\\0&0&0&0&0&0\\8&-4&0&4&0&0\end{bmatrix}$$

求$(A-4I)^3x=0 \quad (A-4I)^2x=0$ 设$x=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3&\xi_4&\xi_5&\xi_6\end{bmatrix}^T$

$(A-4I)^3x=0$ 其通解为$\xi_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\xi_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\xi_5\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$

$(A-4I)^2x=0$ 其通解为$\xi_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\xi_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

可取$P_{33}=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0]^T$ $\quad P_{32}=(A-4I)P_{33}=\begin{bmatrix}-1&-1&0&1&0&-1\end{bmatrix}^T$

$P_{31}=(A-4I)P_{32}=\begin{bmatrix}0&0&4&0&0&0\end{bmatrix}^T$

（2）对$\lambda_{1,2}=2$存在两个 Jordan 块，$J_1=[2]$，$J_2=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，

分别对应P_1，$P_2=\begin{bmatrix}P_{21}&P_{22}\end{bmatrix}$

从P_{22}入手：$(A-2I)^2P_{22}=0$，$(A-2I)P_{22}\neq 0$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}0&1&0&-1&-1&0\\1&0&0&0&-1&1\\-1&-1&2&1&0&-1\\0&-1&0&1&1&0\\0&0&0&0&2&0\\1&0&0&0&-1&1\end{bmatrix}\quad (A-2I)^2=\begin{bmatrix}1&1&0&-1&-4&1\\1&1&0&-1&-4&1\\-4&-4&4&4&4&-4\\-1&-1&0&1&4&-1\\0&0&0&0&4&0\\1&1&0&-1&-4&1\end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^2x=0\ \rightarrow\ x=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3&\xi_4&\xi_5&\xi_6\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&0&\xi_1+\xi_2+\xi_6&0&\xi_6\end{bmatrix}^{T}$$

$$(A-2I)x=0\ \rightarrow\ x=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3&\xi_4&\xi_5&\xi_6\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}\xi_1&\xi_2&0&\xi_2&0&-\xi_1\end{bmatrix}^{T}$$

取$P_{22}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0&0&0\end{bmatrix}^{T}$，$P_{21}=(A-2I)P_{22}=\begin{bmatrix}-1&1&0&-1&0&-1\end{bmatrix}^{T}$

P_1：$(A-2I)P_1=0$　P_1与P_{21}应线性无关，可取$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}^{T}$

（3）合成变换矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&1&-1&0&-1&0\\0&-1&1&0&-1&0\\0&0&0&4&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\-1&-1&0&0&-1&0\end{bmatrix}\qquad P^{-1}\text{存在}$$

可以验证：$P^{-1}AP=J$

三、Jordan标准形的幂及多项式

❑Jordan标准形的幂

$$J^k=\begin{bmatrix}J_1^k&&&\\&J_2^k&&\\&&\ddots&\\&&&J_s^k\end{bmatrix}$$

设 $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$，则 $J_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & C_k^2 \lambda_i^{k-2} & \cdots & C_k^{m_i-1} \lambda_i^{k-m_i+1} \\ & \lambda_i^k & C_k^1 \lambda_i^{k-1} & \cdots & C_k^{m_i-2} \lambda_i^{k-m_i+2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & C_k^1 \lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^k & \frac{1}{1!}(\lambda^k)' & \frac{1}{2!}(\lambda^k)'' & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}(\lambda^k)^{(m_i-1)} \\ & \lambda^k & \frac{1}{1!}(\lambda^k)' & \cdots & \frac{1}{(m_i-2)!}(\lambda^k)^{(m_i-2)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{1!}(\lambda^k)' \\ & & & & \lambda^k \end{bmatrix}\Bigg|_{\lambda=\lambda_i}$$

其中，$C_k^t = \dfrac{k!}{t!(k-t)!}$，

且规定 $C_k^t = 0 \quad (t > k)$。

❑Jordan标准形的多项式

设有多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$.则

$$f(J) = \sum_{k=0}^{m} a_k J^k = a_0 I + a_1 J + \cdots + a_m J^m = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

又 $f(\lambda_i) = a_0 + a_1 \lambda_i + \cdots + a_m \lambda_i^m = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_i^k$

$$f'(\lambda_i) = a_1 + 2a_2 \lambda_i + \cdots + m a_m \lambda_i^{m-1} = \sum_{k=1}^{m} k a_k \lambda_i^{k-1}$$

……

$$f^{(m)}(\lambda_i) = m! a_m$$

$$f^{(m+l)}(\lambda_i) = 0, (l = 1, 2, ...)$$

故

$$f(J_i)=a_0\begin{bmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\\0&&&1\end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix}\lambda_i&1&&&0\\&\lambda_i&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda_i&1\\0&&&&\lambda_i\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}\lambda_i^2&2\lambda_i&1&&0\\&\lambda_i^2&2\lambda_i&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&\lambda_i^2&2\lambda_i\\0&&&&\lambda_i^2\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\left.\begin{bmatrix}f(\lambda)&f'(\lambda)&\frac{1}{2!}f''(\lambda)&\cdots&\frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda)\\&f(\lambda)&f'(\lambda)&\cdots&\frac{1}{(m_i-2)!}f^{(m_i-2)}(\lambda)\\&&&\ddots&\vdots\\&&&\ddots&f'(\lambda)\\&&&&f(\lambda)\end{bmatrix}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

这就是说，$f(J_i)$仍为上三角矩阵，在与主对角线平行的斜线上各元素均相等，其第一行元素依次为：

$$f(\lambda_i)\quad f'(\lambda_i)\quad \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i)\quad \cdots\quad \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

若 $A=P^{-1}JP$，则 $f(A)=P^{-1}f(J)P$ 计算十分方便,无需再采用矩阵乘积。