第十五讲　广义逆矩阵的应用

一、矩阵方程的相容性条件及通解

定理 1. 矩阵方程 $AXB = D$ 相容（有解）的充要条件是：

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D$$

在相容情况下矩阵方程的通解为：

$$\left\{A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)} \mid Y\text{为阶数合适的任意矩阵}\right\}$$

证明：充分性：

已知 $AA^{(1)}DB^{(1)}B = D$，显然有解 $X = A^{(1)}DB^{(1)}$

必要性：已知 $AXB = D$ 有解，设某个解为 X，即

$$D = AXB = AA^{(1)}AXBB^{(1)}B = AA^{(1)}DB^{(1)}B$$

“通解”有两个含义：（1）解集合中的任何元素为方程的解；（2）方程的任何解均可由集合中的元素表现出来。

（1） 令 $X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYBB^{(1)}$， 代入 $AXB = D$

$$AXB = D + AYB - AYB = D$$

$\therefore$ 集合中的元素为方程的解

（2） 设 X 为方程的解， 即 $AXB = D$

$$X = A^{(1)}DB^{(1)} + X - A^{(1)}DB^{(1)} = A^{(1)}DB^{(1)} + X - A^{(1)}AXBB^{(1)}$$

对应于集合中 $Y = X$ 的情况。 [证毕]

说明：（1）通解中两个 $A^{(1)}$ 及两个 $B^{(1)}$ 完全可以不同。

（2）通解集合中，不同的 Y 完全可能对应同一个解。

推论 1. 线性方程组 $Ax = b$ 有解的充要条件为： $AA^{(1)}b = b$

且通解为 $\left\{A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y \mid y\text{为列向量}\right\}$

推论 2. $A\{1\}$ $(AXA = A\text{的解})$ 为如下集合：

$\left\{A^{(1)}AA^{(1)} + Y - A^{(1)}AYAA^{(1)}\right\}$ （四个 $A^{(1)}$ 可互不相同）

二、极小范数解

引理 1. 方程$Ax=b$若有解，则必存在唯一的极小范数解（对 2-范数），且该解在$R(A^H)$中。

证明：设x是方程$Ax=b$的解，可将其分解为$x=x_0+y$，其中

$$x_0\in R(A^H)=N^{\perp}(A)\rightarrow x_0\perp N(A)，\quad y\in N(A)$$

$$\|x\|_2^2=\|x_0+y\|_2^2=(x_0+y)^H(x_0+y)=x_0^Hx_0+y^Hy \;=\|x_0\|_2^2+\|y\|_2^2\geq\|x_0\|_2^2$$

而$Ax=Ax_0+Ay=Ax_0+0=Ax_0=b$

即：x_0也是方程的解，也就是$R(A^H)$中存在$Ax=b$的解。

假设$R(A^H)$中存在方程$Ax=b$的两个解x_1和x_2，即$Ax_1=Ax_2=b$

$\rightarrow Ax_1-Ax_2=0\rightarrow(x_1-x_2)\in N(A)$ 同时$(x_1-x_2)\in N^{\perp}(A)$

$\therefore(x_1-x_2)\in N(A)\bigcap N^{\perp}(A)=\{0\}$ $\quad\therefore x_1=x_2$

也就是说在$R(A^H)$中方程$Ax=b$只有唯一的解（若方程有解）

$\therefore$ 方程的任何其它解的 2-范数均大于x_0的 2-范数

$\therefore$ x_0是极小范数解 [证毕]

引理 2. $\mathbf{A}\{1,4\}$ 由如下方程的通解构成：$\mathbf{XA}=\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}$，其中 $\mathbf{A}^{(1,4)}$ 是 A 的某一个{1,4}-逆。

证明：设 X 为上述方程的解，则

(i) $\mathbf{AXA}=\mathbf{AA}^{(1,4)}\mathbf{A}=\mathbf{A}$

(iv) $\mathbf{XA}=\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}$ 是厄米矩阵

∴ X 是 A 的一个{1,4}-逆

反之，若 X 是 A 的一个{1,4}-逆，则

$$\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}\overset{(i)}{=}\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{AXA}\overset{(iv)}{=}\left(\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}\right)^{H}\left(\mathbf{XA}\right)^{H}=\left(\mathbf{XAA}^{(1,4)}\mathbf{A}\right)^{H}=\left(\mathbf{XA}\right)^{H}=\mathbf{XA}$$

[证毕]

定理 2. 设方程 $Ax=b$ 相容，则 $x=A^{(1,4)}b$ 是方程的极小范数解；反之，若对任意 $b\in R(A)$，存在 X 使得 Xb 成为该方程的极小范数解，则 $X\in A\{1,4\}$。

证明：由推论 1 知 $A^{(1)}b$ 是 $Ax=b$ 的解

$A^{(1,4)}\in A\{1\}\quad \therefore x=A^{(1,4)}b$ 是方程的解。

若 $Ax=b$ 相容，则 $b\in R(A)$，存在 $u\in C^n$，使 $b=Au$

$\therefore A^{(1,4)}b=A^{(1,4)}Au=(A^{(1,4)}A)^H u=A^H(A^{(1,4)})^H u\in R(A^H)$

$\therefore x=A^{(1,4)}b$ 是方程组的唯一极小范数解。

反之，若对所有 $b\in R(A)$，$x=Xb$ 都是 $Ax=b$ 的极小范数解，则有 $Xb=A^{(1,4)}b$，依次取 b 为 A 的各列，合起来得：

$$XA=A^{(1,4)}A$$

$$\therefore X\in A\{1,4\}$$

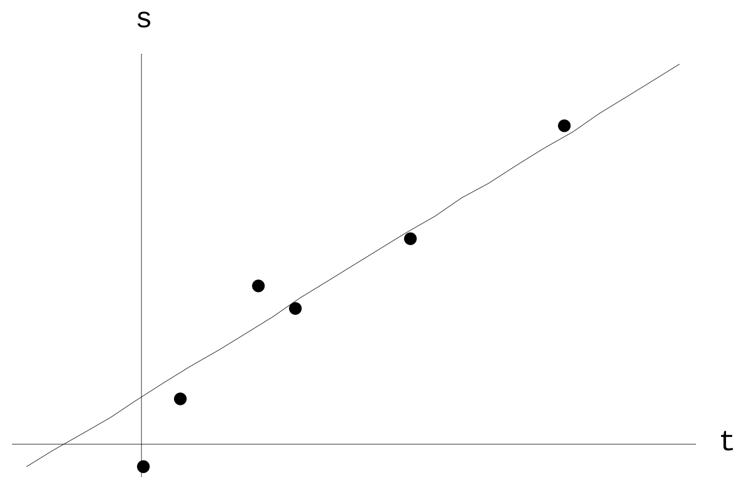
[证毕]

定理 3. 设 $A\in C^{m\times n}$，则 $A\{1,4\}=\left\{A^{(1,4)}+Z(I-AA^{(1,4)})\mid Z\in C^{m\times n}\right\}$

三、矛盾方程的最小二乘解

1. 矛盾方程

Ax=b 实际无解，不相容



如右图，假定规律为：$s=c_1t+c_2$

但由于误差， $s_i \neq c_1t_i+c_2$

2. 矛盾方程的最小二乘解

对于矛盾方程Ax=b，最小二乘法是求其“解”的一种方法，即求使 $\|Ax-b\|_2 = \min$ 的解。

引理： 设 $A \in C^{m\times n}$,A{1,3} 由如下方程的通解构成：

$$AX = AA^{(1,3)} \rightarrow A\{1,3\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)}A)Z \mid Z \in C^{n\times m}\}$$ 其中，$A^{(1,3)}$为

A{1,3}中的某个矩阵。

证明：设 $AX=AA^{(1,3)}$相容，设 X 是其某个解，则

$AXA=AA^{(1,3)}A=A$

$(AX)^H=(AA^{(1,3)})^H=AA^{(1,3)}=AX$

$\therefore X\in A\{1,3\}$

设 $X\in A\{1,3\}$，则

$AX=AA^{(1,3)}AX=(AA^{(1,3)})^H(AX)^H=(A^{(1,3)})^H A^H X^H A^H=(A^{(1,3)})^H A^H$

$=(AA^{(1,3)})^H=AA^{(1,3)}$

$\therefore X$ 为 $AX=AA^{(1,3)}$的解。

$$\therefore\quad A\{1,3\}=\left\{\text{方程}AX=AA^{(1,3)}\text{的所有解}\right\}$$

$$=\left\{A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Z\,\middle|\,Z\in C^{n\times m}\right\}$$

[证毕]

定理 4: 矩阵方程 Ax=b 的最小二乘解为 $x = A^{(1,3)}b$，其中 $A^{(1,3)}$ 为 A 的任何一个{1,3}-逆矩阵，反之，存在 X，对于任何 $b \in C^m$ 均有 Xb 成为 Ax=b 的最小二乘解，则 $X \in A\{1,3\}$。

证明:

$$Ax - b = (Ax - P_{R(A)}b) + (P_{R(A)}b - b)$$

$$(Ax - P_{R(A)}b) \in R(A), (P_{R(A)}b - b) = -(I - P_{R(A)})b = -P_{R^{\perp}(A)}b \in R^{\perp}(A)$$

所以，$\|Ax - b\|_2^2 = \|Ax - P_{R(A)}b\|_2^2 + \|P_{R(A)}b - b\|_2^2 \geq \|b - P_{R(A)}b\|_2^2$，

故 $\|Ax - b\|_2^2$ 取得极小值的充要条件是 x 为方程 $Ax = P_{R(A)}b$ 的解。

任取 $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$，有 $AA^{(1,3)} = P_{R(A)}$。对于 $x = A^{(1,3)}b$，有 $Ax = AA^{(1,3)}b = P_{R(A)}b$

所以，$x = A^{(1,3)}b$ 是方程的最小二乘解。

反之，若对所有 $b \in C^m$，x=Xb 满足 $Ax = P_{R(A)}b$，即 $AXb=P_{R(A)}b$，

则 $AX=P_{R(A)}$，容易推得 $X \in A\{1,3\}$。 [证毕]

推论：x 是方程 $Ax=b$ 的最小二乘解的充要条件是：x 为方程 $A^HAx=A^Hb$ 的解。

证明： $b=P_{R(A)}b+(I-P_{R(A)})b=P_{R(A)}b+P_{N(A^H)}b$

x 是方程的最小二乘解的充要条件是：$Ax=P_{R(A)}b$

$\therefore Ax-b=-P_{N(A^H)}b\in N(A^H)$

$\therefore A^H(Ax-b)=0 \quad \therefore A^HAx=A^Hb$ [证毕]

四、矛盾方程的极小范数最小二乘解

定理：设 $A\in C^{m\times n}, b\in C^m$，则 $x=A^+b$ 是方程 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解。反之，若存在 $X\in C^{n\times m}$，若对于所有 $b\in C^m$，$x=Xb$ 均成为方程 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解，则 $X=A^+$。

证明：最小二乘解满足 $\mathbf{Ax}=\mathbf{AA}^{(1,3)}\mathbf{b}$，其极小范数解唯一，

且为 $x = A^{(1,4)}(AA^{(1,3)}b) = A^{+}b$，反之，$\forall \mathbf{b} \in \mathbf{C}^{m}, \mathbf{Xb}$ 均成为唯一的

极小范数最小二乘解 $A^{+}b$，所以：$\mathbf{X}=\mathbf{A}^{+}$。

[证毕]

作业：**P332 2 3(1)(2)；P343－344，1，2，5**