§10. Fourier级数

1. 引言

一个复杂的函数经常被展开成一些“基本”函数的组合以便于研究.

例如: 若$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内是光滑的，则在此邻域中

$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$.

其中$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 则

$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

右边的无穷和称为泰勒级数.换句话说，当$f(x)$满足某些条件，则$y=f(x)$可以写成

$y=1$, $y=x-x_0$, $y=(x-x_0)^2$,... 这样的一些“基本”函数的“线性组合”. 若$y=f(x)$是周期函数，则“基本”函数换成$y=sinx, y=cosx, y=sinnx, ...$等三角函数 可能更方便.

1. 引言

定义1： 设$f(x)$是周期为2π的piecewise连续函数(即在$[-\pi,\pi]$中只有有限个点不连续，且不连续点的 左右极限存在),它的Fourier级数是

$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k coskx+b_k sinkx)$

其中$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)coskxdx, b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinkxdx, k=0,1,....$

这个级数称为Fourier级数的实形式.

定义2： $f(x)$如上，它的Fourier级数的复形式是$\sum_{-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx}$, 其中$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx.$

在定义1中，使用欧拉公式: $cosx=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, sinx=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$得到

$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{a_k}{2}(e^{ikx}+e^{-ikx})-\frac{ib_k}{2}(e^{ikx}-e^{-ikx})]=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-ib_k}{2}e^{ikx}+\frac{a_k+ib_k}{2}e^{-ikx}.$

令$c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx, k=1,2,3,...,$

$c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{ikx}dx, k=1,2,3,...,$

我们得到定义2. 注: 正如泰勒级数，我们并没有断言$f(x)$等于它的傅里叶级数.

1. 引言

定理： 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，$f(x)$和$f'(x)$均在$[-\pi,\pi]$上是piecewise连续的，则$f(x)$的傅里叶级数收敛，且在任意连续点$x=a$等于$f(a)$，在不连续点$x=a$等于$\frac{1}{2}[\lim\limits_{x\to a^+}f(x)+\lim\limits_{x\to a^-}f(x)]$.

例如 $f(x)=\begin{cases} 0, -\pi\le x<0; \\ 1, 0\le x<\pi. \end{cases}$ $f(x+2\pi)=f(x)$

$\forall x\neq n\pi,\ \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}sin(2k-1)x=f(x)$

$x=n\pi,\ \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}sin(2k-1)x=\frac{1}{2}$

此时 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0.$

2. 内积空间

设V是一个向量空间($\mathbb{R}$上或$\mathbb{C}$上)，V上的一个内积是一个函数(-,-): $V\times V\to\mathbb{R}$ 或($\mathbb{C}$)满足

(1) $\forall u\in V, (u,u)\geq 0$， 且若$(u,u)=0$, 则$u=0$.

(2) $(c_1u+c_2v,w)=c_1(u,w)+c_2(v,w)$,其中$u,v,w\in V, c_1,c_2\in\mathbb{R}$ (或$\mathbb{C}$).

(3) $\overline{(u,v)}=(v,u)$, 其中$u,v\in V$.

注：我们没有假设V是有限维的.

令$||u||=\sqrt{(u,u)}$， 若$||u||=1$, 则u是一个单位向量.

例1: $V=\mathbb{R}^2$， $u=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}, (u,v)=u^Tv=a_1b_1+a_2b_2$ 是一个内积，$||u||=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

若$V=\mathbb{C}^2$， $u,v\in\mathbb{C}, (u,v)=u^T\overline{v}=a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}$ 是一个内积，$||u||=\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}$.

例2: $C[a,b]$是定义在区间$[a,b]$上的全体连续实函数构成的向量空间. 定义$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$.

2. 内积空间

这是$C[a,b]$上的一个内积，我们验证，对于$f(x)\in C[a,b]$, $(f,f)\geq 0$.
$(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^b |f(x)|^2dx\geq 0$. 若$(f,f)=0$， 即$\int_a^b |f(x)|^2dx=0$， 令$F(t)=\int_a^t |f(x)|^2dx, a\leq t\leq b$, 则$F(t)=0$, $F(t)$可导, $F'(t)=|f(t)|^2=0$， 即$f(t)=0, t\in[a,b]$.

例3. 在例2中，若$C[a,b]$是$[a,b]$上连续复函数的向量空间，则内积定义为:
$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$

设$v_1,v_2\in V$，我们说两个向量正交(或垂直), 如果$(v_1,v_2)=0$. 在$\mathbb{R}^n$中， 我们可以定义标准正交基. 在这里,可以定义V上的标准正交向量系. 设$\{u_1,u_2,...\}$是V 中的一组向量满足$(u_i,u_j)=0, i\neq j$, 则$\{u_1,u_2,...\}$成为一个正交向量系. 进一步， 若 $||u_i||=1, i=1$,则$\{u_1,u_2,...\}$是标准正交向量系.

2. 内积空间

若V是无限维的，标准正交向量系可以看做有限维空间的一组标准正交向量的推广。二者的区别在于，我们必须考虑标准正交向量系中无限个向量的线性组合的收敛性，即

$$S = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k, \quad c_k \text{ 是常数}$$

的含义. 令$S_N = \sum_{k=1}^{N} c_k v_k$, 则$S = lim_{N\to\infty} S_N$, 即当$N \to \infty$, $||S - S_N|| \to 0$.

对于无限维空间V, 一个标准正交向量系$\{v_1, v_2, \cdots\}$若满足对于任意$v \in V$， 有$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$， 则这个标准正交系称为是闭的.

2. 内积空间

例如: $\mathbf{R}^n$上，考虑以上标准内积, 则 $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0, \end{pmatrix}\}$ 是一个标准正交向量系.

$C[a,b]$上，使用以上内积, 则$\{1, x, x^2, ...\}$一般不是一个标准正交向量系.

$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos2x, ...\}$是一个 标准正交向量系$(a=-\pi, b=\pi)$.

验证：$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}coskxdx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{k}sinkx|_{-\pi}^{\pi}) = 0$

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cosnxcosmxdx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}[cos(n+m)x + cos(n-m)x]dx = \begin{cases} 1, n=m \\ 0, n \neq m \end{cases}$

2 . 内积空间

考虑正交向量的好处是什么？

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$是$\mathbb{R}^2$中两个无关向量，

则它们能线性组合出任意2维实向量.

问题： 给定$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, 写出 $\alpha = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x = ?, y = ?$.

2. 内积空间

x 和 y 并不容易写出. 考虑$\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=v_1,\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=v_2\}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}^2$, 则

$\alpha = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$，因为 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$垂直. 即$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=0$ 上式从两边左

乘$\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$得，$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\alpha=c_1\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=c_1||v_1||^2$.

即$c_1=\frac{v^T\alpha}{||v_1||^2}=\frac{\begin{pmatrix}v_1 & \alpha\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}v_1 & v_1\end{pmatrix}}$ 同理： $c_2=\frac{\begin{pmatrix}v_2 & \alpha\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}v_2 & v_2\end{pmatrix}}$

一般地, 我们有

定理 设$\{v_1,...,v_m|v_i\perp v_j, i\neq j\}$且$\alpha=c_1v_1+...+c_mv_m$,则 $c_1=\frac{\begin{pmatrix}v_1 & \alpha\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}v_1 & v_1\end{pmatrix}}$,..., $c_m=\frac{\begin{pmatrix}v_m & \alpha\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}v_m & v_m\end{pmatrix}}$,

且$||\alpha||^2=c_1^2||v_1||^2+...+c_m^2||v_m||^2$ (勾股定理).

2. 内积空间

对于(包含无穷向量的)标准正交向量系$\{v_1, v_2, \cdots\}$我们有相似的结果，但是要考虑收敛性。

设$u \in V$，固定一个自然数N，考虑标准正交向量系的有限子集$\{v_1, v_2, \cdots, v_N\}$
令u_N是u在$\{v_1, v_2, \cdots, v_N\}$生成子空间上投影，即

$$u_N = (u, v_1)v_1 + (u, v_2)v_2 + \cdots + (u, v_N)v_N$$

且$u - u_N \perp u_N$. 由勾股定理$||u||^2 = ||u - u_N||^2 + ||u_N||^2$.

我们有$||u_N|| \leq ||u||$. 当$N \to \infty$, $||u_N||$极限存在, 且$\sum_{k=1}^{\infty}(u, v_k)^2 \leq ||u||^2$. 若$\{v_1, v_2, \cdots, v_N, \cdots\}$是闭的，则$u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, v_k)v_k$, 即当$N \to +\infty$, $||u - u_N|| \to 0$. 我们有$\sum_{k=1}^{\infty}(u, v_k)^2 = ||u||^2$ (广义勾股定理).

2. 内积空间

总结：标准正交向量系线性生成的向量，容易写出相应的线性组合的系数，我们将这个结论应用到$C[a,b]$. 已知 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}sin2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos2x, ...\}$ 是$C[a,b]$的标准正交向量系，它是闭的. 设$f(x) \in C[a,b]$是这些函数的线性组合：

$f(x) = c_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + c_1\frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx + c_1'\frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx + c_2\frac{1}{\sqrt{\pi}}sin2x + c_2'\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos2x + \cdots$

则$c_0 = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}a_0$

$c_1 = (\frac{1}{\sqrt{\pi}}sinx, f) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}f(x)sinxdx = \sqrt{\pi}b_1$

$c_1' = (\frac{1}{\sqrt{\pi}}cosx, f) = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}f(x)cosxdx = \sqrt{\pi}a_1$

$\vdots$

$c_k = \sqrt{\pi}b_k, c_k' = \sqrt{\pi}a_k.$

2. 内积空间

即等式右边是$f(x)$的傅里叶级数.由勾股定理的广义形式:

$||f(x)||^2 = c_0^2 + c_1^2 + {c_1'}^2 + c_2^2 + {c_2'}^2 + \ldots$

即 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{\pi}{2}a_0^2 + \pi a_1^2 + \pi b_1^2 + \pi a_2^2 + \pi b_2^2 + \ldots$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$

3. 傅里叶级数

设$V=\{f(x)|f(x)$是周期为$T=2L$的实函数，且$f(x)$在$[-L,L]$上是piecewise连续的$\}$, 则V是一个向量空间，有一个内积: $\forall f,g\in V,(f,g)=\int_{-L}^{L}f(x)g(x)dx.$

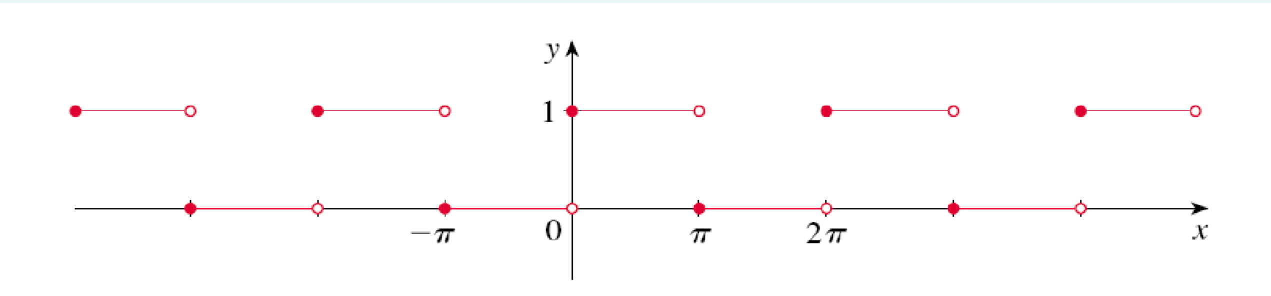
定义: f(x)的Fourier级数是:

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n cos(\frac{n\pi x}{L})+b_n sin(\frac{n\pi x}{L})],$

其中$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)cos(\frac{n\pi x}{L})dx,\ b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)sin(\frac{n\pi x}{L})dx.$

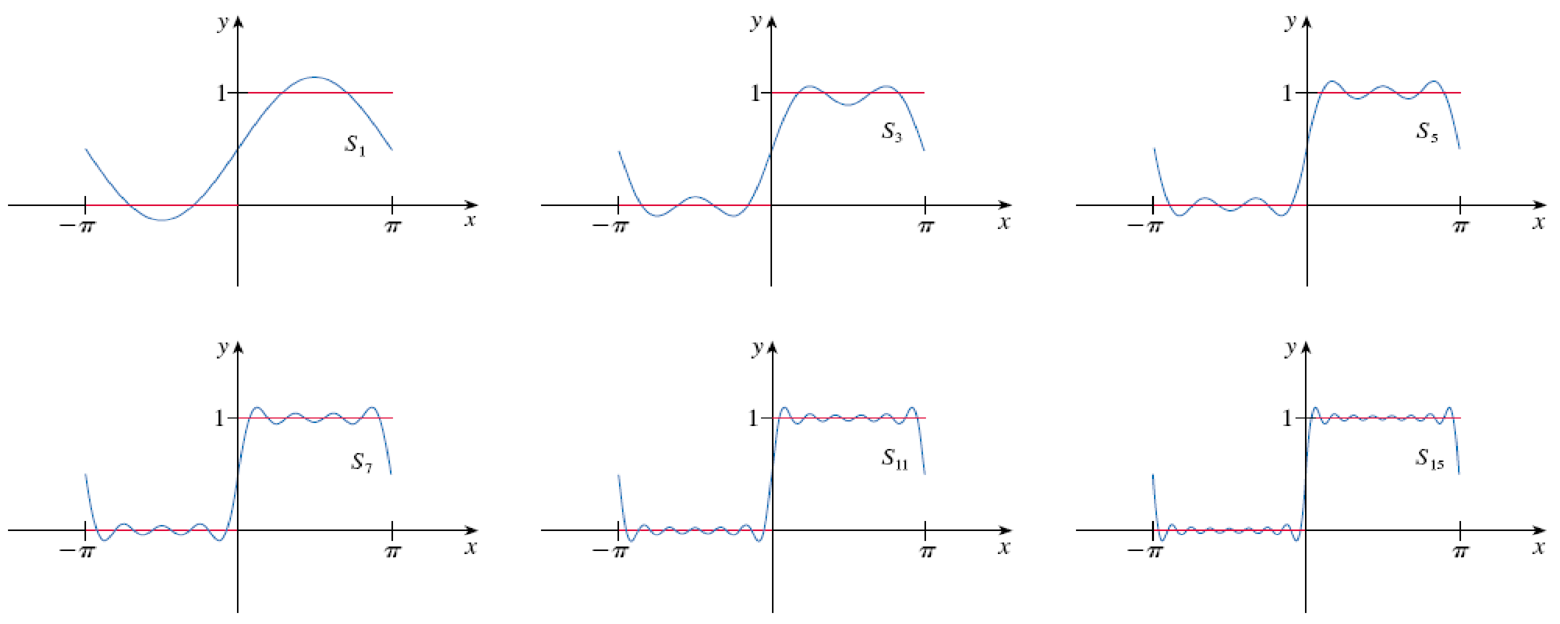
意义：一个周期函数能使用“基本”的三角函数叠加出来。

例 $f(x)$是一个周期为2π的函数满足：当$-\pi\le x<0$, $f(x)=0$, 当$0\le x<\pi$, $f(x)=1$.



3. 傅里叶级数

令$S_N(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}sinx++\frac{2}{\pi}sin3x\cdots+\frac{2}{n\pi}sinNx,\ N$是奇数.

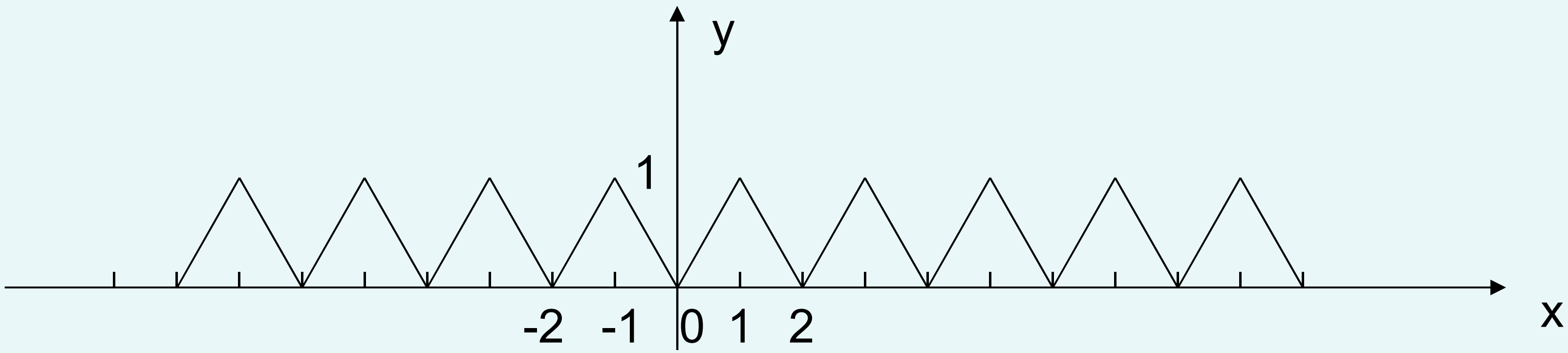


本例选自如下网址：www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS Early Transcendentals/upfiles/FourierSerie

3. 傅里叶级数

我们计算一个piecewise周期函数的Fourier级数展开形式.

例. $f(x) = |x|$， 当$-1 \le x \le 1$, $f(x+2) = f(x)$， 正如下图



$$a_0 = \int_{-1}^{1} |x| dx = \int_{-1}^{0} (-x) dx + \int_{0}^{1} x dx = \frac{-1}{2} x^2 |_{-1}^{0} + \frac{1}{2} x^2 |_{0}^{1} = 0$$

3. 傅里叶级数

当$n \geq 1$, $a_n = \int_{-1}^{1} |x|cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 |x|cos(n\pi x)dx = 2[\frac{x}{n\pi}sin(n\pi x)]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 |x|sin(n\pi x)dx$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0, n = 2k \\ -\frac{4}{n^2\pi^2}, n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

因此$f(x)$的Fourier级数是 $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}cos(\pi x) - \frac{4}{9\pi^2}cos(3\pi x) - \frac{4}{25\pi^2}cos(5\pi x) - ...$

由引言中最后的定理，f(x)等于它的Fourier级数:

$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}cos((2k-1)\pi x), \forall x.$

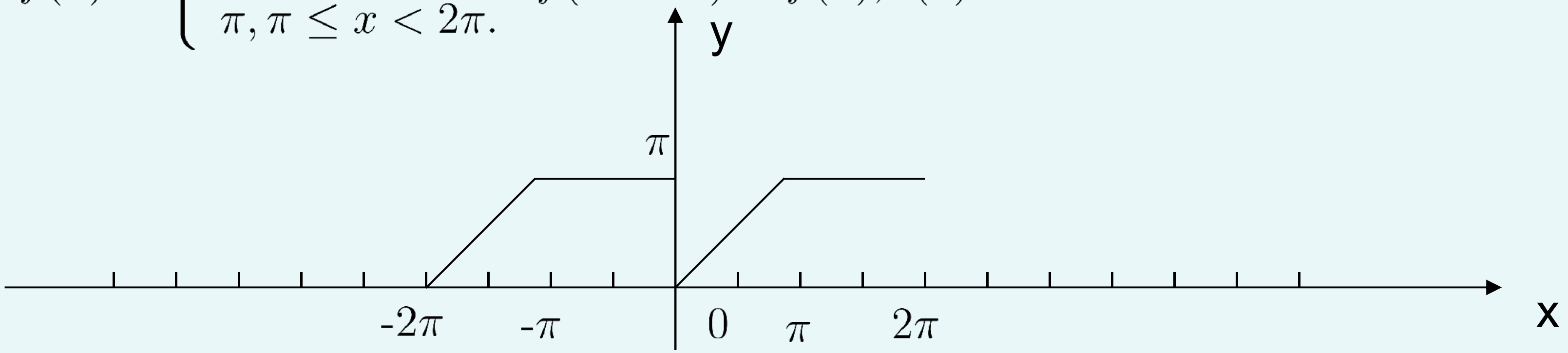
$|x| = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}cos((2k-1)\pi x), -1 \leq x \leq 1.$

令$x = 1$, 即$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + ...$

定理 如果$f(x)$是一个偶函数，则$f(x)$的Fourier级数满足$b_n = 0$. 若$f(x)$是一个奇函数，则$f(x)$的Fourier级数满足$a_n = 0$.

3. 傅里叶级数

例. $f(x) = \begin{cases} x, 0 < x < \pi \\ \pi, \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$ $f(x \pm 2\pi) = f(x)$, f(x)的图像如下：



$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} = \frac{\pi}{2} + \pi.$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xcosnxdx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \pi cosnxdx = \frac{1}{\pi}[[\frac{xsinnx}{n}]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{sinnx}{n}dx] + [\frac{sinnx}{n}]_{\pi}^{2\pi}$

$= \frac{1}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1).$

$b_n = -\frac{1}{n}.$ $f(x) = \frac{3}{4}\pi - \frac{2}{\pi}[cosx + \frac{1}{3^2}cos3x + \frac{1}{5^2}cos5x + ...] - [sinx + \frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{3}sin3x + ...].$

取 $x = \frac{\pi}{2}$，得到$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi - (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...)$ 即 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$

3. 傅里叶级数

Fourier级数的复形式.

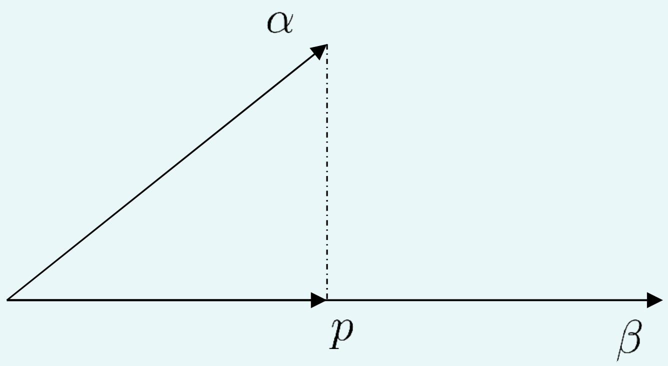
设$f(x)$如上，周期为$T=2L$, $f(x)$的Fourier展开有复形式：

$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{\frac{ik\pi}{L}x}$,

其中，$c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{\frac{-ik\pi}{L}x}dx=(f(x),e^{\frac{ik\pi}{L}x})\frac{1}{2L}=\frac{(f(x),e^{\frac{ik\pi}{L}x})}{(e^{\frac{ik\pi}{L}x},e^{\frac{ik\pi}{L}x})}$.

4. 投影

给定$\alpha, \beta \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 则$\alpha$在$\beta$的投影 $p = (\frac{\beta\beta^T}{\beta^T\beta})\alpha = (\frac{\alpha^T\beta}{\beta^T\beta})\beta$.
这能推广到带内积的向量空间上. 设V是一个向量空间，有一个内积$(-,-)$, $V \times V \to \mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$).
$\alpha, \beta \in V$, 设α在β上的投影为p, 则$p = t\beta, t \in \mathbb{R}$(或$\mathbb{C}$) 且$\alpha - p \perp \beta$ 即 $(\alpha - p, \beta) = 0 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = t(\beta, \beta) \Rightarrow t = \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$.
因此$p = \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$



4. 投影

设$f(x)$是一个piecewise连续函数，周期为$T=2\pi$, 则$f(x)$在$cosnx$的投影为
$\frac{(f(x),cosnx)}{(cosnx,cosnx)}cosnx=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx}{\int_{-\pi}^{\pi}cos^2nxdx}cosnx=a_ncosnx.$
考虑$f(x)$的Fourier级数的复形式$\sum_{-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}$， 则$c_ke^{ikx}$就是$f(x)$在$e^{ikx}$上的投影. 因为
$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{(f(x),e^{ikx})}{(e^{ikx},e^{ikx})}.$

5. 关于Fourier变换的注记

Fourier级数和Fourier变换是Fourier分析的主要部分.

设$f(t)$周期为$T=2L$, 则$f(t)$的Fourier级数展开为 $f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ik\pi}{L}t}, c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{\frac{-ik\pi}{L}t}dt$ (c_k是$f(t)$在$e^{\frac{ik\pi}{L}t}$上的投影.)

现在，考虑定义在$(-\infty,+\infty)$上的非周期函数$f(t)$, 它有Fourier级数展开形式吗？

给定$L>0$, 定义$f_L(t)=f(t)$, $|t|<L$且$f_L(t)=0,|t|\geq L$. 假设$L\to\infty$时，$f_L(t)$(一致)趋近于$f(t)$. 函数$f_L(t)$能被周期延拓，即令$F_L(t)=\begin{cases} f(t), -L<t\leq L, \\ F_L(t+2L), T=2L, \end{cases}$ 则$F_L(t)$有Fourier级数.

5. 关于Fourier变换的注记

当$-L<t<L$, $f(t)=f_L(t)=F_L(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(L)e^{\frac{ik\pi}{L}t}$, $c_k(L)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(t)e^{\frac{-ik\pi}{L}t}dt$

因为$f_L(t)=0, |t|>L$, $c_k(L)=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f_L(t)e^{\frac{-ik\pi}{L}t}dt=\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}f_L(t)e^{\frac{-ik\pi}{L}t}dt.$

令$\widetilde{f}_L(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_L(t)e^{-i\omega t}dt$, 令$\omega_k=\frac{k}{L}\pi$， 则 $c_k(L)=\frac{1}{2L}\widetilde{f}(\frac{k}{L})=\frac{1}{2L}\widetilde{f}(\omega_k)=\frac{1}{2\pi}\widetilde{f}(\omega_k)(\omega_{k+1}-\omega_k)$,

我们得到Fourier展开的新形式：

$$f_L(t)=F_L(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\widetilde{f}_L(\omega_k)e^{i\omega_k t}\triangle\omega_k$$

其中展开系数： $\widetilde{f}_L(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f_L(t)e^{-i\omega t}dt$, $\triangle\omega_k=\omega_{k+1}-\omega_k.$

当$L\to+\infty$, $\triangle\omega\to 0$, $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$ $\widetilde{f}(\omega)$是$f(t)$的Fourier变换,$f(t)$是$\widetilde{f}(\omega)$的逆Fourier变换.