§16 行列式的基本性质

16.1 引言

1.历史：行列式的概念最早是由十七世纪日本数学家关孝和提出来的，他在1683年写了一部叫做《解伏题之法》的著作，意思是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述. 欧洲第一个提出行列式概念的是德国数学家，微积分奠基人之一的莱布尼兹(Leibnitz, 1693年). 1750年克莱姆(Cramer)在他的《线性代数分析导言》中发表了求解线性系统方程的重要基本公式(即人们熟悉的Cramer克莱姆法则).

2.行列式的几何意义概括说来有两个解释：(1) 行列式中的行或列向量所构成的超平行多面体的有向面积或体积；(2)坐标系变换下的图形面积或体积的伸缩因子，即变换矩阵 A 的行列式 $detA$.

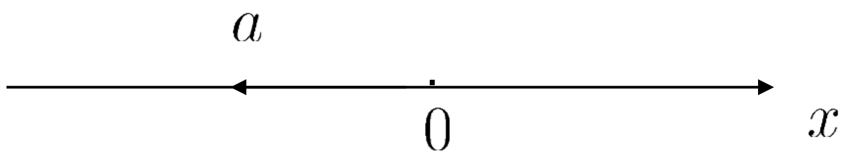
16.1 引言

给定一个 n 阶方阵 A, 我们来定义 A 的行列式 $det(A) = |A|$, 它是一个数. 因此，行列式可以理解成一个函数：

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto |A| = \det(A) \end{aligned}$$

行列式是“有向”长度、面积和体积的推广.

$n = 1$, $M_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $det(a) = a$, a 是一维坐标轴上的有向长度(有正负号).

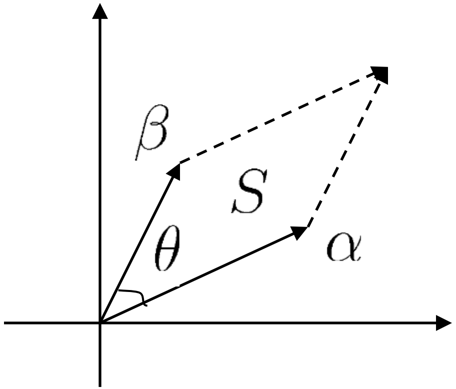


16.2 二阶行列式的几何含义

$$n=2, M_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}, \alpha=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{平行四边形 } S \text{ 的“有向”面积}$$

$$= \pm||\alpha||\cdot||\beta||\sin\theta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



$''\pm''$：从 α 到 β 是顺时针，$''-''$

逆时针，$''+''$

例如：

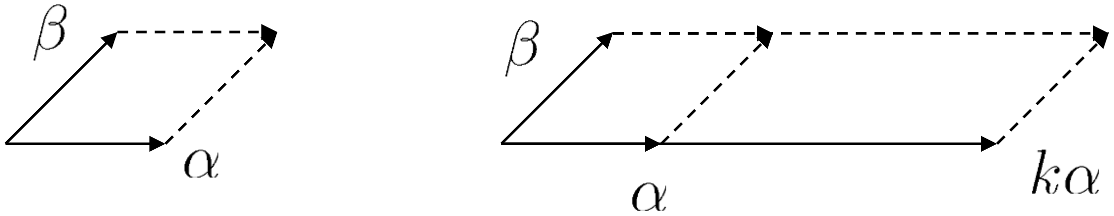
$$det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1, det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

16.2 二阶行列式的几何含义

性质：

(1) $k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix}, k \in \mathbb{R}.$

如图：

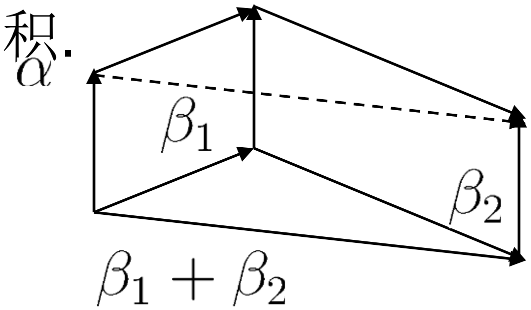


16.2 二阶行列式的几何含义

(2) $$\begin{vmatrix} a & b_1+b_2 \\ c & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}.$$

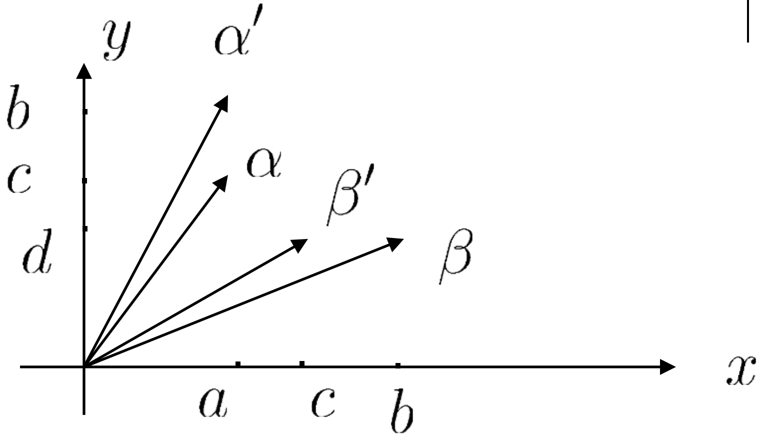
令 $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}.$

则该性质即：α, β_1 张成平行四边形的“有向”面+α, β_2 张成平行四边形的“有向= $\alpha, \beta_1 + \beta_2$ 张成平行四边形的“有向”面积.



16.2 二阶行列式的几何含义

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$



(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \beta' = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

α, β 围成“有向”面$=$ α', β' 围成“有向”面积

16.3 一般行列式的定义

我们定义一般情形

$$\begin{aligned} det = |\cdot| : \{n\text{ 阶方阵}\} = M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto det(A) = |A| \end{aligned}$$

满足：

(1) $|I_n| = det(I_n) = 1.$

(2)设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), B = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, k\alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n),$

则 $det(B) = k\, det(A).$

16.3 一般行列式的定义

(3)设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), A'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i',\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n)$,
$B=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_i+\alpha_i',\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n)$,
则 $det(B)=det(A)+det(A')$.

(4) $det(A)=det(A^T)$.

(5)设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 交换 A 的任意两列得到矩阵 A'，则

$det(A)=-det(A')$.

注：由(4)，以上性质对行也成立.

16.3 一般行列式的定义

$det(A)=|A|$ 是 A 的 n 个列向量围成的“有向”面积.

例： $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(5),(1)}{=} -1,$

即 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 构成的平行六面体的“有向”体积 -1.

16.3 一般行列式的定义

推论一：设 A 的两行(列)成比例，则 $detA = 0.$

证明：设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$

不妨设 $\alpha_2 = k\alpha_1, k \in \mathbb{R}.$

由性质(2), $detA = k\, det(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n).$

由性质(5), $det(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = -det(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_n).$

故 $detA = 0.$

16.3 一般行列式的定义

推论二：将 A 的某一行(列)乘上一倍数加到另一行(列)，得到矩阵 A'，则 $detA = detA'$.

例：$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{kr_1+r_2} \begin{pmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{pmatrix} = A'$$

$$A' = E_{21}(k)A,\ detA' = detA.$$

总结：以上所有关于行列式的性质对应着 A 的三种初等行(列) 变换对行列式的影响.

16.4 行列式和初等变换

设 A 是 n 阶方阵，考虑三种行变换：

$$A \xrightarrow{kr_i+r_j} A' \quad A' = E_{ji}(k)A, detA' = detA.$$

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} A' \quad A' = P_{ij}A, detA' = -detA.$$

$$A \xrightarrow{kr_i} A' \quad A' = E_i(k)A, detA' = k\, detA.$$

我们计算 $E_{ji}(k), P_{ij}$ 和 $E_i(k)$ 的行列式(上面各式中令 $A = I_n$):

$$detE_{ji}(k) = 1,\ detP_{ij} = -1,\ detE_i(k) = k.$$

16.4 行列式和初等变换

我们有如下定理.

定理：设 A 通过初等行变换 E, 得到 A', 即 $A' = EA$,
则 $|A'| = |E| \cdot |A|$.

证明：设 $E = E_1 \cdots E_k$, E_i 是以上三种初等行变换之一.

$$
\begin{aligned}
\text{则}\quad |EA| = |E_1(E_2 \cdots E_k A)| &= |E_1||E_2 \cdots E_k A| \\
&= \cdots = |E| \cdot |A|.
\end{aligned}
$$

16.4 行列式和初等变换

推论一：设 A 是一 n 阶方阵，$|A| \neq 0 \Longleftrightarrow A$ 可逆.

推论二：设 A, B 是两 n 阶方阵，则 $|AB| = |A| \cdot |B|$.

推论一的证明：若 A 不可逆，则存在行变换 E, 使得 $EA = U$ 是一阶梯阵(最后一行为零行).

则 $0 = detU = detE \cdot detA$.

而 E 可逆，$E = E_1 \cdots E_k, |E| = |E_1| \cdots |E_k| \neq 0$.

故 $detA = 0$.

16.4 行列式和初等变换

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = E_{32}(-1)E_{31}(-3)E_{21}(-2)A \Longrightarrow |A| = |U|.$$

如何求 $|U| = detU$?

16.4 行列式和初等变换

例：设 $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$，则 $detR = |R| = r_{11}r_{22}r_{33}$.

证明：

$$R \xrightarrow{\text{第一种行变换}} R' = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & 0 \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}$$

则 $det(R) = det(R') = r_{11}r_{22}r_{33}det(I_3) = r_{11}r_{22}r_{33}$.

16.4 行列式和初等变换

例：$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明：左边 $$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

16.4 行列式和初等变换

注：$|A+B| \neq |A|+|B|,\ |kA| \neq k|A|, k \in \mathbb{R}, n \geq 2.$

例：设 A可逆，则 $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}.$

例：设 A是一个正交阵，则 $det A = \pm 1.$

例如

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, |A| = -1.$$