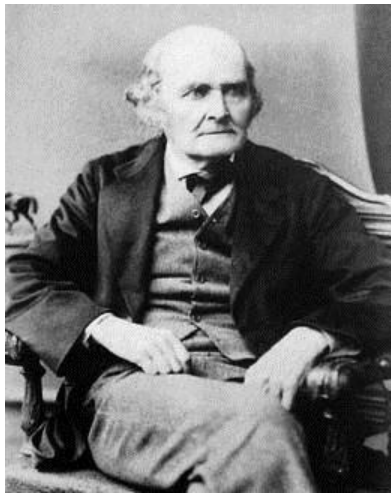


§2. 矩阵与线性方程组



A. Cayley

从历史上看, 矩阵正式作为数学中的研究对象出现, 是在行列式的研究发展起来之后. 英国数学家**Arthur Cayley (1821-1895)**被公认为矩阵论的奠基人, 他提到矩阵概念“或是从行列式的概念而来, 或是作为一个表达方程组的方便的方法而来的”(莫里斯·克莱因《古今数学思想》第33章).

矩阵在数学和物理学等其他科学分支中, 都有着广泛而重要的应用.

2.1 矩阵(matrix)与向量的乘积

例:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 \quad \quad + x_3 = 3 \\ \quad 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \iff x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w}.$$

矩阵 A 与向量 \mathbf{x} 的乘积等于矩阵的列向量的线性组合.

2.1 矩阵与向量的乘积

上述方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

也可表示为

$$\begin{cases} (1, 1, -1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 1 \\ (2, 0, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 3 \\ (0, 2, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 3. \end{cases}$$

这诱导了矩阵乘向量的另一种定义：

设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, 则

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (a_{21}, a_{22}, a_{23}) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (a_{31}, a_{32}, a_{33}) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}.$$

2.1 矩阵与向量的乘积

通过 $A\mathbf{x}$ 的上述两种定义，我们对线性方程组可有两种新理解.

例:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

理解一: 求向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的线性组合, 使之等于 $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

理解二: 求向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 使之与系数矩阵行向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

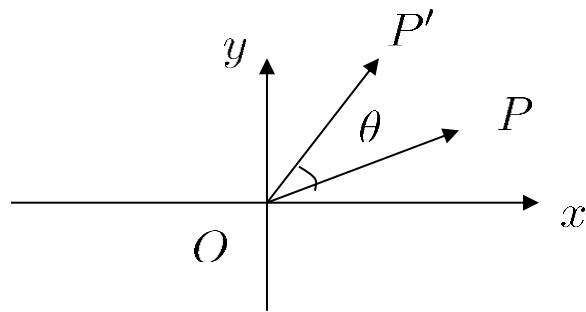
的点积分别为 1, 3, 3.

2.1 矩阵与向量的乘积

例：将平面上所有向量绕原点 O 旋转角度 θ . 则点 $P(x, y)$ 在此旋转变换下得像 $P'(x', y')$ 为

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

这可表示为 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



注：这节涉及到的矩阵都是行数与列数相同的矩阵，即方阵。

2.2 可逆矩阵

线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的情形比数量方程 $ax = b (a, b \in \mathbb{R})$ 要复杂.
若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对任意向量 \mathbf{b} 有唯一解, 则 A 是可逆的(invertible).

例:
$$\begin{cases} x_1 & & & = b_1 \\ -x_1 & +x_2 & & = b_2 \\ & -x_2 & +x_3 & = b_3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

任意给定 b_1, b_2, b_3 , 方程组有唯一解
$$\begin{cases} x_1 & = b_1 \\ x_2 & = b_1 + b_2 \\ x_3 & = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases}$$

故系数矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵.

2.2 可逆矩阵

对线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 若 A 可逆, 则可由常数项 \mathbf{b} 求得 \mathbf{x} .

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = b_1 + b_2 + b_3. \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_S \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

矩阵 S 称为 A 的逆.

2.2 可逆矩阵

设 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, 若 $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 可逆,

则 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的全部线性组合是整个 3 维空间.

此时 $\mathbf{0}$ 写成 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的线性组合只有一种可能:

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w}.$$

这时我们称向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 线性无关(linearly independent). 相应

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

2.2 可逆矩阵

否则 $\mathbf{0}$ 可以写成 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的多种线性组合.

$$\text{如 } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= 0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} \\ &= 1\mathbf{u} + 1\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}. \end{aligned}$$

这种情形下, 称矩阵 $A = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 是奇异的(singular), 向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 是线性相关的(linearly dependent).

即存在不全为 0 的数 c, d, e 使 $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

2.2 可逆矩阵

例（循环差分矩阵）

给定 $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = b_1 \\ x_2 - x_1 = b_2 \\ x_3 - x_2 = b_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

若 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c 为任意实数. (无穷多解)

若 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 则方程组无解.

2.2 可逆矩阵

从几何上看, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 线性相关,

它们的全部线性组合是平面 $x + y + z = 0$.

总结:

若方阵 A 的列向量线性无关, 则 A 可逆, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

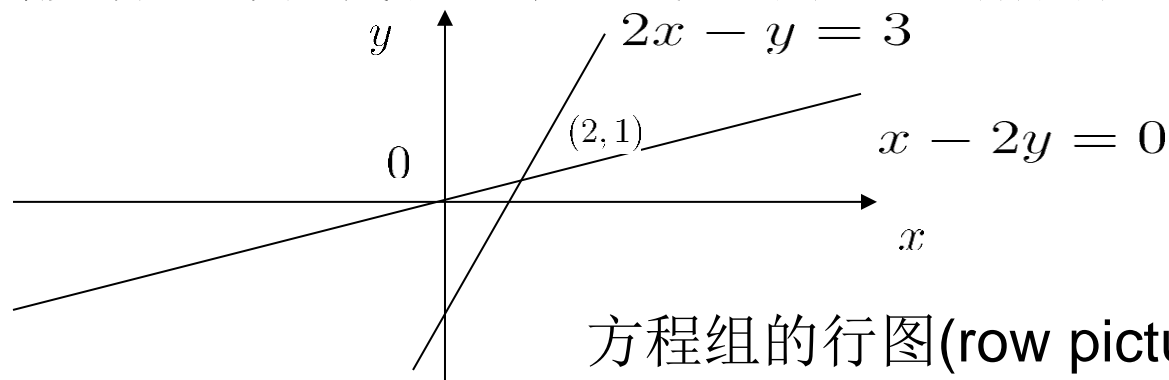
若方阵 A 的列向量线性相关, 则 A 奇异, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有无穷多解.

2.3 线性方程组的行图和列图

给定一个线性方程组 $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$ (2个方程, 2个未知量)

(1)它可以写成矩阵形式 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(2)从行(row)的角度看, 每行代表一条直线, 方程组的解为两直线的交点.

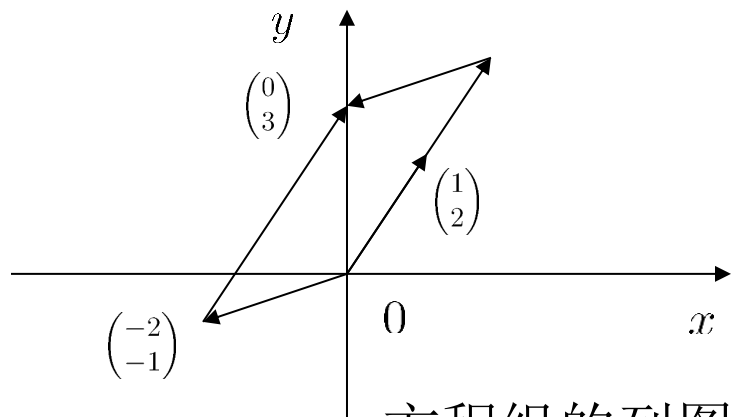


方程组的行图(row picture)

2.3 线性方程组的行图和列图

(3)从列(column)的角度看, 方程组可改写为 $x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

解方程组 \iff 求 $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 关于系数矩阵列向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 的线性组合.



可以看出 $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

所以方程组的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

方程组的列图(column picture)

2.3 线性方程组的行图和列图

(4) 系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ 是可逆的.

考虑 $\begin{cases} x - 2y = b_1 \\ 2x - y = b_2 \end{cases}$, 求得 $\begin{cases} x = \frac{-b_1 + 2b_2}{3} \\ y = \frac{-2b_1 + b_2}{3} \end{cases}$ (唯一解) .


$$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

2.3 线性方程组的行图和列图

一般地, 设 $A = (\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n)$ 为 $n \times n$ 矩阵, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的每行表示一条直线 ($n = 2$), 或一张平面 ($n = 3$) 或一张超平面 ($n > 3$).

解方程组 \iff 考察这些直线或平面或超平面是否有交点 

\iff 求 x_1, \cdots, x_n 满足 $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{b}$. 

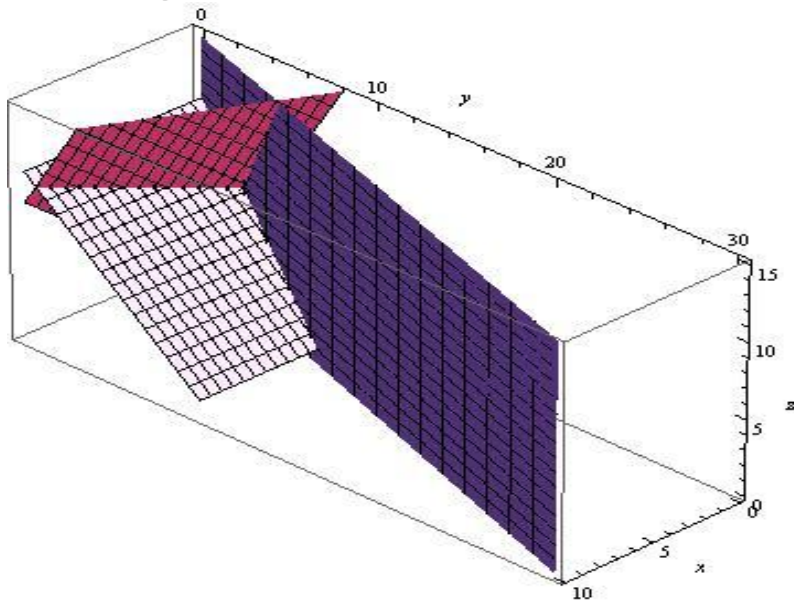
方程组对任意 \mathbf{b} 有唯一解 $\iff A$ 可逆

此时 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ (\mathbf{x} 可表示为 A^{-1} 的列向量的线性组合).

2.3 线性方程组的行图和列图

例
$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ y + z = 11 \end{cases} \quad \text{矩阵形式} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

行图



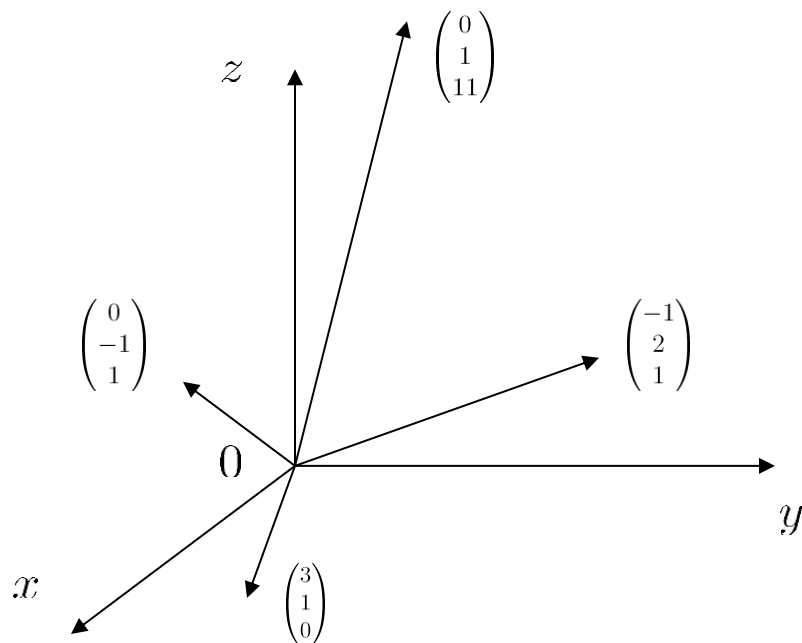
每行方程确定三维空间

中的一个平面,点 $(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}, \frac{37}{5})$

是三个平面的交点.

2.3 线性方程组的行图和列图

列图 方程组 $\Longleftrightarrow x \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$



三个列向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
不共面, 其线性组合可产生任意
三维列向量.

2.3 线性方程组的行图和列图

A 可逆:

$$\begin{cases} 3x & -y & & = b_1 \\ x & +2y & -z & = b_2 \\ & y & +z & = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

有唯一解:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix} .$$

2.3 线性方程组的行图和列图

例:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 4 \\ x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 5y + 2z = 8 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

系数矩阵 A 的三个列向量与向量 $(1, 1, -1)$ 点积都为 0, 但常数项 $(4, 5, 8) \cdot (1, 1, -1) = 1 \neq 0$, 故常数项不能表示为 A 的列向量的线性组合. 所以方程组无解.