

§3. 高斯消元法

3 高斯消元法



C. F. Gauss

高斯消元法以著名德国数学家 **Carl Friedrich Gauss (1777-1855)** 命名. **Gauss** 被认为是历史上最重要的数学家之一，他在数学的众多分支，如数论、代数、分析、微分几何等以及统计学、物理学、天文学、大地测量学、地理学、电磁学、光学等领域都有重要的贡献. **Gauss** 还享有“数学王子”的美誉.

值得一提的是，这种解线性方程组的消元法最早出现在中国古代数学著作《九章算术》中，相关内容在大约公元前150年前就出现了.

3.1 Gauss消元法

先看简单的例子：

$$\text{例3.1} \quad \begin{cases} 1x - 2y = 2 & (1) \\ 3x + 4y = 16 & (2) \end{cases} \xRightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 10y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

3.1 Gauss消元法

$$\text{例3.2} \quad \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 & (1) \\ 6x & +2y & +z & = -1 & (2) \\ -2x & +2y & +z & = 7 & (3) \end{cases} \xrightarrow[(3)-(1)\times(-1)]{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ -1y & -2z & = -4 & (2)' \\ 3y & +2z & = 8 & (3)' \end{cases}$$

$$(3)' - (2)' \times (-3) \xrightarrow{\quad} \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ -y & -2z & = -4 \\ -4z & = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3.1 Gauss消元法

问：什么时候消元法停止呢？

$$\text{例3.3} \quad \begin{cases} 1x - 2y = 2 & (1) \\ 3x - 6y = 16 & (2) \end{cases} \xRightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 0 = 10 \end{cases} \quad \text{无解}$$

$$\text{例3.4} \quad \begin{cases} 1x - 2y = 2 & (1) \\ 3x - 6y = 6 & (2) \end{cases} \xRightarrow{(2)-(1)\times 3} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies x = 2 + 2y \quad \text{无穷多解}$$

3.1 Gauss消元法

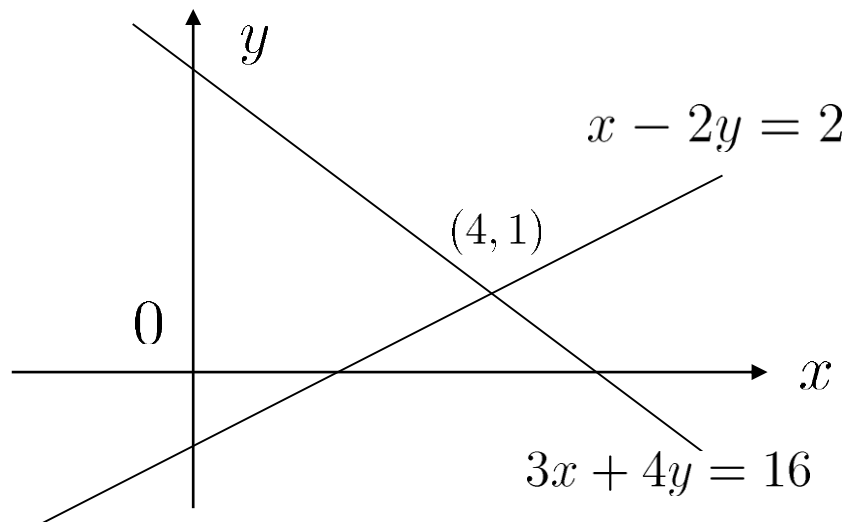
小结：若消元过程中出现 $0 = c \neq 0$ 或 $0 = 0$, 则消元法中止.

线性方程组的解有下列三种情况：

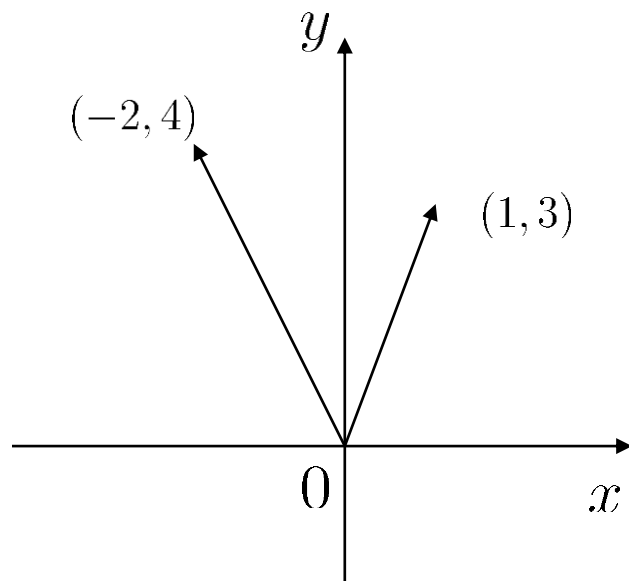
1. 有唯一解；
2. 无解；
3. 有无穷多解.

3.1 Gauss消元法

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + 4y = 16 \end{cases} \quad \text{有唯一解}$$



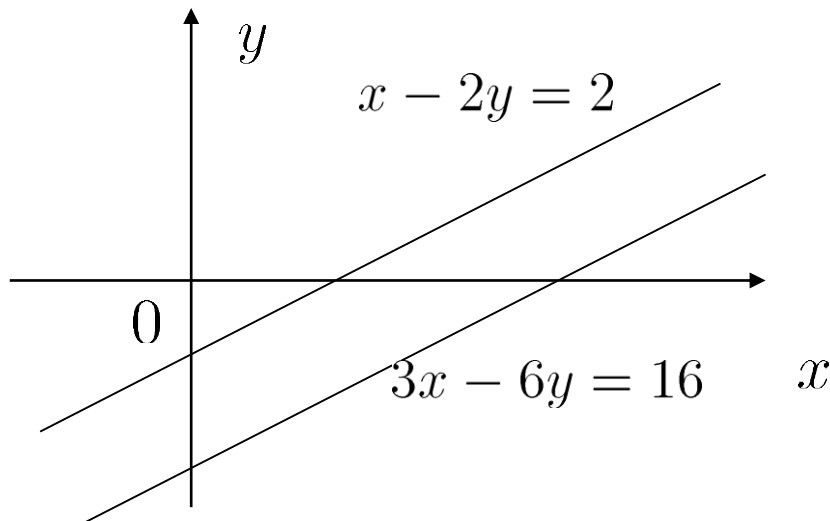
行图：两直线相交，有唯一交点



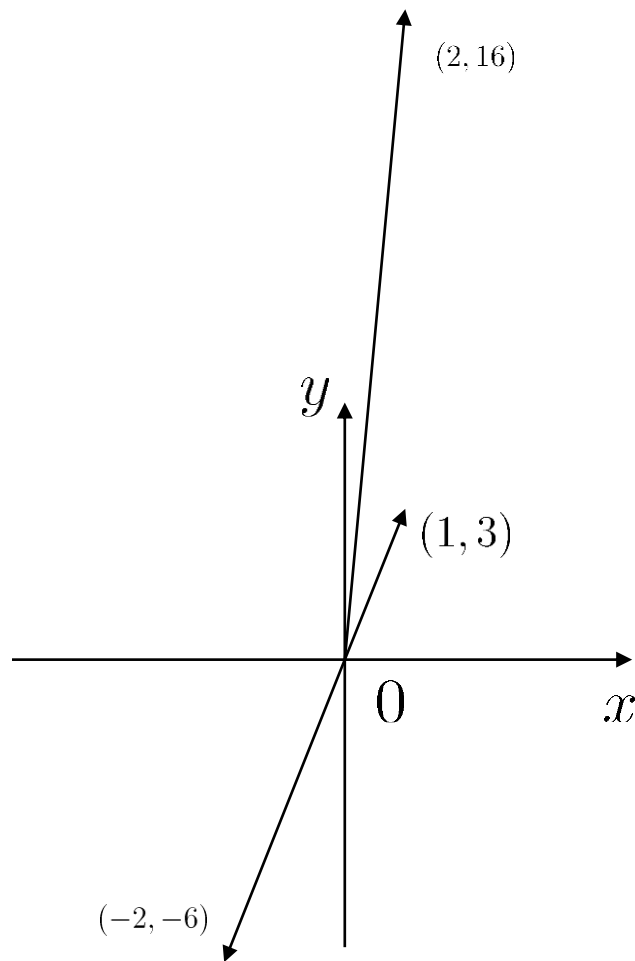
列图：两列向量不共线

3.1 Gauss消元法

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 16 \end{cases} \quad \text{无解}$$



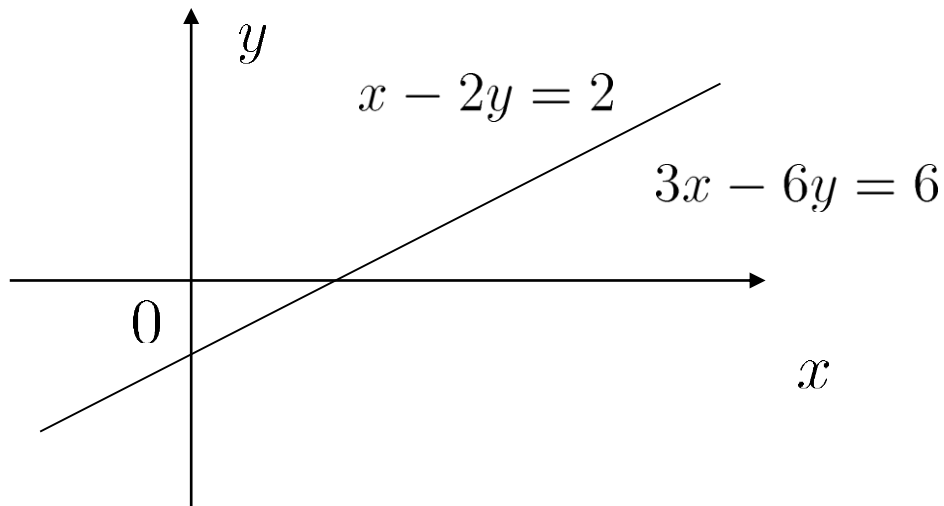
行图：两直线平行，无交点



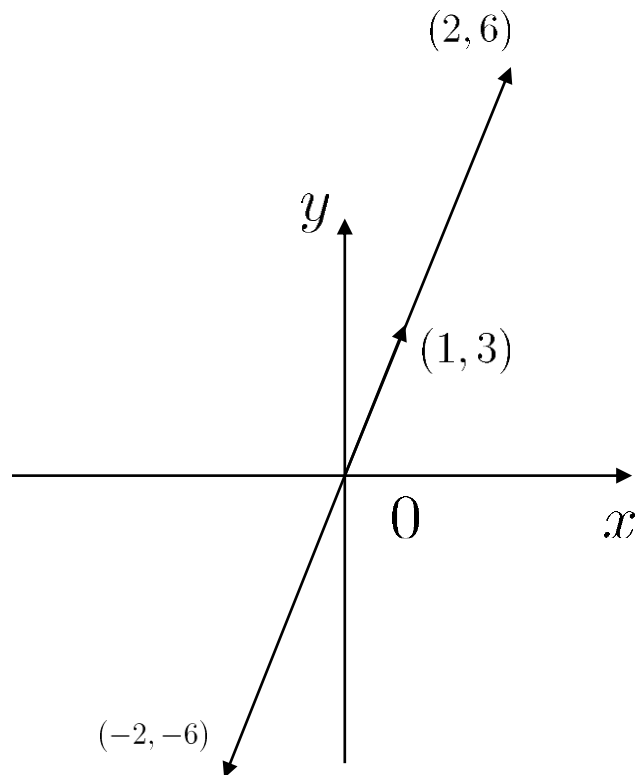
列图：两列向量共线

3.1 Gauss消元法

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = 6 \end{cases} \quad \text{有无穷多解}$$



行图：两直线重合



列图：两列向量共线

3.1 Gauss消元法

$$\text{例3.5} \quad \left\{ \begin{array}{rrcr} & y & -z & = 3 & (1) \\ -2x & +4y & -z & = 1 & (2) \\ -2x & +5y & -4z & = -2 & (3) \end{array} \right. \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \left\{ \begin{array}{rrcr} -2x & +4y & -z & = 1 & (1)' \\ & y & -z & = 3 & (2)' \\ -2x & +5y & -4z & = -2 & (3)' \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{(3)' - (1)' \times 1} \left\{ \begin{array}{rrcr} -2x & +4y & -z & = 1 \\ & y & -z & = 3 & (2)'' \\ & y & -3z & = -3 & (3)'' \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{(3)'' - (2)'' \times 1} \left\{ \begin{array}{rrcr} -2x & +4y & -z & = 1 \\ & y & -z & = 3 \\ & & -2z & = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{array} \right.$$

3. 1 Gauss消元法

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

3.1 Gauss消元法

上述求解过程可以推广到含 n 个未知量 n 个方程的情形.

Gauss消元法的步骤:

- (1) 若方程组的第一个主元位置为0, 则交换方程以得到第一个主元;
- (2) 用第一个方程的倍数消去第一个主元下方所有系数;
- (3) 确定第二个主元, 继续以上消元过程;
- (4) 最后得到含一个未知量的方程, 回代得方程组的解.

n 个方程有 n 个主元 \iff 方程组有唯一解.

消元中止 \implies 方程组无解或有无穷多解(即出现 $0 = c \neq 0$ 或 $0 = 0$).

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

$$\text{例3.6} \quad \begin{cases} x & +2y & +z & = 2 & (1) \\ 3x & +8y & +z & = 12 & (2) \\ & 4y & +z & = 2 & (3) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2)-(1) \times 3} \begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ & 2y & -2z & = 6 & (2)' \\ & 4y & +z & = 2 & (3)' \end{cases}$$

$$\xrightarrow{l_{21}=3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)'-(2)' \times 2} \begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ & 2y & -2z & = 6 \\ & & 5z & = -10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{l_{32}=2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

n 个方程 n 个未知量

消元法成功 \iff n 个主元

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

- 若将系数矩阵 A 第二行第二列元素 a_{22} 由“8”换成“6”，则消元法第二步要暂停，需先交换第二三行.

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ 3x & +6y & +z & = 12 \\ & 4y & +z & = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ & & -2z & = 6 \\ & 4y & +z & = 2 \end{cases}$$

- 若将系数矩阵 A 第三行第三列元素 a_{33} 由“1”换成“-4”，则消元法中止，得不到第三个主元.

$$\begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ 3x & +8y & +z & = 12 \\ & 4y & -4z & = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ & 2y & -2z & = 6 \\ & 4y & -4z & = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x & +2y & +z & = 2 \\ & 2y & -2z & = 6 \\ & & 0 & = -10 \end{cases}$$

n 个方程 n 个未知量时,消元法成功 $\iff U$ 是可逆上三角阵 $\iff A$ 是可逆矩阵.

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

已用 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 来描述线性方程组.

目标：用尽可能简洁的方式来描述对方程组消元化简的过程.

回顾：设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为 n 行 n 列的方阵, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 为 n 维向量.

$$\begin{aligned} \text{矩阵乘向量 } A\mathbf{x} &= x_1 \overrightarrow{\text{col}_1} + \cdots + x_n \overrightarrow{\text{col}_n} \\ &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{row}_1} \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\text{row}_n} \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

特别, $A\mathbf{x}$ 的第 i 个分量 $= a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

再看例3.6

消元法第一步：第二个方程减去第一个方程的3倍.

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

我们想用一個矩阵实现这步消元.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

消元法第二步：第三个方程减去第二个方程的 2 倍.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 2b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

- E_{21} 恰是单位矩阵 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第二行减去第一行的 3 倍得到的.
- E_{32} 恰是单位矩阵 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的第三行减去第二行的 2 倍得到的.

称 E_{21}, E_{32} 这样的矩阵为消去矩阵(elimination matrix), 这是一类初等矩阵(elementary matrix).

注：单位矩阵(identity matrix) I 与任何 n 维向量 \mathbf{b} 相乘 $I\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad E_{21} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad E_{21}A = ?$$
$$E_{21}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

需定义矩阵 E_{21} 与 A 的乘法运算, 使上式成立.

这种运算需满足 $A(BC) = (AB)C$

$$AB = A(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) = (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ A\mathbf{b}_3)$$

3.2 消元法的矩阵表示：消去矩阵

定义： $AB = A(\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3) := (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ A\mathbf{b}_3)$.

验证：

- $E_{21}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
- $E_{32} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

小结：消去过程 = 消去矩阵同时左乘系数矩阵 A 和常数项 \mathbf{b} .

3.2 消元法的矩阵表示：置换阵

若主元位置为零，需先交换方程再换元.

再看例3.5

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y - z = 3 \\ -2x + 4y - z = 1 \\ -2x + 5y - 4z = -2 \end{cases} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \\ \Rightarrow & \begin{cases} -2x + 4y - z = 1 \\ y - z = 3 \\ -2x + 5y - 4z = -2 \end{cases} & \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}}_{A_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1} \end{aligned}$$

交换第一、二方程 \longleftrightarrow 交换第一、二行

问：是否存在矩阵 P , 使 $PA = A_1$, $P\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$.

3.2 消元法的矩阵表示：置换阵

- $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足要求.
- P_{12} 为单位矩阵 I 交换第一、二行得到的.
- 将单位阵 I 的第 i, j 行交换得到的矩阵是置换阵(permutation matrix).

小结: $P_{ij}A$ 将矩阵 A 的第 i, j 行交换.

3.2 消元法的矩阵表示：初等行变换和初等矩阵

对方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 消元法涉及以下三种同解变形：

- (1) 把一个方程减去另一个方程的倍数；
- (2) 交换两个方程；
- (3) 用一个非零数乘一个方程。

相应地对增广矩阵 $(A \mid \mathbf{b})$ 作以下三种行变换：

- (1) 把一行减去另一行的倍数；
- (2) 交换两行；
- (3) 用一个非零数乘一行。

由单位矩阵经过一次初等行变换得到的矩阵称为初等矩阵。

3.2 消元法的矩阵表示：初等行变换和初等矩阵

例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 - r_1 \cdot l} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{21}(-l)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \cdot c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_2(c)$$

$E(A \mid \mathbf{b}) = (EA \mid E\mathbf{b})$, E 为初等矩阵.

3.2 消元法的矩阵表示: 初等行变换和初等矩阵

对线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 作消元法, 实质上是对矩阵 $(A \mid \mathbf{b})$ 作消元或换行. 称矩阵 $(A \mid \mathbf{b})$ 为增广矩阵(augmented matrix).

$$\begin{aligned}\text{例: 计算 } E_{31}(-1)P_{12}(A \mid \mathbf{b}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

小结: 对线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的消元过程, 即为一系列初等矩阵左乘增广矩阵 $(A \mid \mathbf{b})$.

3.2 消元法的矩阵表示: 初等行变换和初等矩阵

例3.7 令 $E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 为三阶矩阵.

则 $E_{21}A = A$ 的第二行减去第一行的 4 倍.

$P_{32}A = A$ 的第二行与第三行交换.

3.2 消元法的矩阵表示：初等行变换和初等矩阵

$$AE_{21} = \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} - 4a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 4a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - 4a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \text{ 的第一列减去第二列的4倍}$$

$$AP_{32} = \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix} = A \text{ 的第二列与第三列交换}$$

小结：“左乘换行，右乘换列”。