以概率收敛

- $d(x,y) = ||x-y|| = \left(\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

定义: X_n $F_n(x)$ $X \to F(X)$ 以概率收敛

$\lim F_n(x) = F(X)$ $X_n \rightsquigarrow X$

$F_n(x) = P(X_n \le x)$

以概率收敛

1. $\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = P(X \le x)$

   $X \sim N(0,1)$, $X_n \rightsquigarrow N(0,1)$

2. X_n 以概率收敛到 X, 如果对所有 $\varepsilon > 0$

   $P(d(X_n, X) > \varepsilon) \longrightarrow 0$

3. X_n 几乎等于 X.

   如果 $d(X_n, X) \to 0$ with 概率 1, $P(d(X_n, x) \to 0) = 1$.

4. X_n 收敛以 L_p

   $E[||X_n - X||^p] \longrightarrow 0$.

举例

- $X_n \sim N(0, 1/n)$. 随机变量, F是分布函数, $P(X=0)=1$ 点值分布.

  $Z \sim N(0,1)$ $Z = \sqrt{n} X_n$

  $F_n(X) = P(X_n \le x) = P(\sqrt{n} X_n \le \sqrt{n} x)$

  $= P(Z \le \sqrt{n} x)$.

- 下面声明等价

  (i) $P(X_n \le x) \to P(X \le x)$ 对所有 x.

  (ii) $E[g(x_n)] \to E[g(x)]$ 对所有有界而连续函数 g.

  (iii) $E[g(x_n)] \to E[g(x)]$ 对所有 Lipschitz 函数 g.

连续映射

• 令 $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ 的连续在每个点 $P(X\in C)=1$.

(i) 若 $X_n \rightsquigarrow X$, 则 $g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$.

(ii) 若 $X_n \xrightarrow{P} X$, $g(X_n) \rightsquigarrow g(X)$

(iii) 若 $X_n \xrightarrow{almost} X$, $g(X_n) \overset{almost}{\rightsquigarrow} g(X)$.

• 若 X_n, X, Y_n 为 v.s

(1) $X_n \to X$, 则 $X_n \xrightarrow{P} X$.

(2) $X_n \xrightarrow{L^q} X$, 则 $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

(3) $X_n \xrightarrow{P} X$, 则 $X_n \rightsquigarrow X$.

(4). $X_n \xrightarrow{P} C$, $X \overset{P}{\rightsquigarrow} C$

(5) $X_n \xrightarrow{P} X$ and $Y_n \xrightarrow{P} Y$ 边界收敛.

则 $(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} (X, Y)$ 联合收敛.

$X_n \xrightarrow{P} X$ $\not\Downarrow$ $X_n \xrightarrow{almost} X$ → 举例 (1)

• 考虑概率空间 $([0,1], B_{[0,1]}, P)$

令 $X=0$ 对任意正的自然数 n, 存在自然数 m. $n_m = 2^m - 2 + k$.

$0 \le k < 2^{m+1}$,

$$X_n(w) = \begin{cases} 1 & \frac{k}{2^m} \le w \le \frac{k+1}{2^m} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad w\in[0,1]$$

$P(|X_n - X| > \varepsilon) \le P(\{w: \frac{k}{2^m} \le w \le \frac{k+1}{2^m}\}) = \frac{1}{2^m}$ 勒贝格测度.

对任意 $w \in [0,1]$, 给定m, 存在k, $1 \le k \le 2^m$. 有 $\frac{k}{2^{m+1}} \le w \le \frac{k}{2^m}$.

则 $X_{n_m}(w) = 1$ (子序列) $\Rightarrow X_n(w) \ne 0$.

$X_n \xrightarrow{P} X$ $\not\Downarrow$ $X_n \xrightarrow{almost} X$

举例 (2)

• $X = 0$

$$X_n(w) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} < w \le 1 \\ e^n & 0 \le w \le \frac{1}{n}. \end{cases} \qquad \varepsilon\in(0,1)$$

$P(|X_n - X| > \varepsilon) = P(|X_n| \ne 0) = \frac{1}{n}$

$E[|X_n - X|^p] = E[|X_n|^p] = e^{np} \cdot p = \frac{e^{np}}{n} \to \infty$

性质

slutsky 引理

- X_n, X 和 Y_n 是随机变量，如果 $X_n \to X$，并且 $Y_n \to c$.

则

(1). $X_n + Y_n \to X + c$

(2). $X_n Y_n \to cX$.

(3) $Y_n^{-1} X_n \to c^{-1} X$

性质

- 对所有 t，$x \geq 0$，有 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda t} \sum\limits_{k \leq \lambda x} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1_{[0,1]}(t)$ (*)

证明：

若 X 是泊松分布，参数为 λt. $E[X] = \lambda t$ $var[X] = \lambda t$.

(*) 等价于 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} P(X \leq \lambda x) = 1_{[0,1]}(t)$.

当 $t > x$

切比雪夫不等式

$$P(X \leq \lambda x) \leq \frac{E[(X-\lambda t)^2]}{\lambda^2 (t-x)^2} = \frac{\lambda t}{\lambda^2 (t-x)^2}$$

对 $t \leq x$

$$P(X \leq \lambda x) = 1 - P(X - \lambda t > \lambda(x - t))$$

$$\geq 1 - P(|X - \lambda t| > \lambda(x-t)) \to 0.$$