第十四讲 投影矩阵与Moore-Penrose逆

一、投影算子与投影矩阵

设 L、M 为$\mathbf{C}^n$的子空间并构成直和$\mathbf{L}+\mathbf{M}=\mathbf{L}\oplus\mathbf{M}=\mathbf{C}^n$。即$\forall\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$，存在唯一的$\mathbf{y}\in\mathbf{L},\mathbf{z}\in\mathbf{M}$使 x=y+z，称 y 为 x 沿着 M 到 L 的投影。

1. 定义： 将任意$\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$变为其沿着 M 到 L 的投影的变换称为沿着 M 到 L 的投影算子，记为$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$，即$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}\mathbf{x}=\mathbf{y}\in\mathbf{L}$，投影算子是线性变换，其矩阵称为投影矩阵，仍记为$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$。

投影算子将整个空间 $\mathbf{C}^n$变到子空间 L。特别地，若$x\in L$，则$P_{L,M}x=x$；若$x\in M$，则$P_{L,M}x=0$。

2. 引理： 设 n 阶方阵 A 为幂等矩阵，则 $N(A)=R(I-A)$。

证明：$A^2=A \Rightarrow A(I-A)=0$

$\therefore \forall x \in C^n, A(I-A)x = A[(I-A)x]=0 \Rightarrow R(I-A) \subseteq N(A)$

另一方面，$\therefore \forall x \in N(A)$,即$Ax=0$, 则

$x=Ix-0=Ix-Ax=(I-A)x \in R(I-A) \Rightarrow N(A) \subseteq R(I-A)$

$\therefore N(A)=R(I-A)$

［证毕］

3.定理： n 阶方阵 P 成为投影矩阵的充要条件是 P 为幂等矩阵。

证明：充分性

$P^2=P, \forall x \in C^n$,令$y=Px \in R(P), z=(I-P)x \in R(I-P)=N(P)$。

若 $R(P) \cap N(P)=\{0\}$,则$P=P_{R(P),N(P)}$确为投影矩阵，下面证之。

$\forall x \in R(P) \cap N(P),$

一方面，因$x \in R(P)$,存在$u \in C^n$使$x=Pu$

另一方面$x \in N(P)$,即$Px=0$.但$Px=P^2u=Pu=x \to x=0$

$\Rightarrow R(P) \cap N(P)=\{0\}$。

必要性。已知$P=P_{L,M}$，所以

$\forall x\in C^n$，存在唯一分解 $y\in L,z\in M$，使$x=y+z$，且$Px=y$

$\Rightarrow P^2x=Py=y=Px$

因为 x 任意，$\therefore P^2=P$ [证毕]

4. 投影矩阵的构造

设已知$\mathbf{C}^n$的子空间 L、M 构成直和$\mathbf{L}\oplus\mathbf{M}=\mathbf{C}^n$,下面构造$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$。取 L 的一个基$\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ (设 L 为 r 维子空间)，M 的一个基$\{y_1,y_2,\cdots,y_{n-r}\}$（则 M 的维数为 n-r）。由直和关系知$\{x_1,x_2,\cdots,x_r,y_1,y_2,\cdots,y_{n-r}\}$即构成 $\mathbf{C}^n$ 的一个基。故，如令$X=[x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_r]$，$Y=[y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_{n-r}]$，则$[X\quad Y]$为可逆方阵。

另一方面，$\mathbf{x_i}\in\mathbf{L}\rightarrow\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}\mathbf{x_i}=\mathbf{x_i};\mathbf{y_i}\in\mathbf{M}\rightarrow\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}\mathbf{y_i}=\mathbf{0}$

即 $\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}[\mathbf{X}\ \mathbf{Y}]=[\mathbf{X}\ \mathbf{O}]\rightarrow\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}=[\mathbf{X}\ \mathbf{O}][\mathbf{X}\ \mathbf{Y}]^{-1}$

可见，$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$的秩为 r（rank（$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$）= dim R（$\mathbf{P}_{\mathbf{L},\mathbf{M}}$）= dim L）

二、正交投影算子与正交投影矩阵

L 为$\mathrm{C^n}$的子空间，其正交补空间$\mathrm{L}^{\perp}=\left\{\mathrm{x}\,\middle|\,(\mathrm{x}，\mathrm{y})=0, \mathrm{x}\in\mathrm{C^n}, \mathrm{y}\in\mathrm{L}\right\}$

1. 定义: 设 L 是$\mathrm{C^n}$的子空间，则称沿着$\mathrm{L}^{\perp}$到 L 的投影算子$\mathrm{P_{L,L^{\perp}}}$为正交投影算子，简记为$\mathrm{P_L}$。正交投影算子的矩阵称为正交投影矩阵，仍记为$\mathrm{P_L}$。

2.两个引理:

（1）对 n 阶方阵 A，$\forall \mathrm{x}\in\mathrm{C^n}$均有$\mathrm{x^H A x}=0$则 A=0。

（2）$N(P^H)=R^{\perp}(P)$

证明：(1)设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，取$x=[0\cdots0\cdots1\cdots0]^T$，则$x^H Ax=a_{ii}=0$；

再取$x=[0\cdots0\quad \zeta_i\quad 0\cdots0\quad \zeta_j\quad 0\cdots0]^T\,(i\neq j)$，则$x^H Ax=\bar{\xi}_i a_{ij}\xi_j+\bar{\xi}_j a_{ji}\xi_i$

$$\left\{\begin{array}{l}\xi_i=\xi_j=1\Rightarrow a_{ij}+a_{ji}=0\\ \xi_i=1,\xi_j=\sqrt{-1}\Rightarrow a_{ij}-a_{ji}=0\end{array}\right.\Rightarrow a_{ij}=a_{ji}=0$$

$$\therefore A=0$$

（2） $\forall x \in N(P^H)$， 即 $P^H x = 0 \Rightarrow x^H P = 0 \Rightarrow \forall y \in C^n, x^H(Py) = 0$

由于 y 任意，所以有：

$$x \perp R(P) \Rightarrow N(P^H) \subseteq R^{\perp}(P)$$

另一方面，设 $x \in R^{\perp}(P)$， 即 $\forall y \in C^n$， 均有 $x^H(Py) = 0 \Rightarrow x^H P = 0$

$$\Rightarrow P^H x = 0 \Rightarrow x \in N(P^H) \Rightarrow R^{\perp}(P) \subseteq N(P^H)$$

$\therefore N(P^H) = R^{\perp}(P)$ [证毕]

3.定理： n 阶方阵 P 为正交投影矩阵的充要条件是 P 为幂等的厄米矩阵。

证明：充分性： 已知 $P^2 = P, P^H = P$

$$\Rightarrow P = P_{R(P),N(P)} = P_{R(P),N(P^H)} = P_{R(P),R^{\perp}(P)} = P_{R(P)}$$

必要性： 已知 $P = P_L$

$\forall x \in C^n$， 可唯一地分解成 $y = Px \in L, z = (I-P)x \in L^{\perp}$， 使得 $x = y + z$

又 $y \in L, z \in L^{\perp} \to y^H z = 0 \to x^H P^H (I-P)x = 0 \xrightarrow{x任意} P^H(I-P) = 0$

$P^H = P^H P = (P^H P)^H = (P^H)^H = P$ ， 即 P 为厄米矩阵。 [证毕]

4. 正交投影矩阵的构造

设 L 的一个基为$\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$， $L^{\perp}$的一个基为$\{y_1,y_2,\cdots,y_{n-r}\}$，则 $x_i^H y_j=0$ 。

令 $X=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_r]$，$Y=[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{n-r}]$，则 $X^H Y=0$

$$\mathrm{P_L}=[\mathrm{X\ O}][\mathrm{X\ Y}]^{-1}=[\mathrm{X\ O}]\left\{[\mathrm{X\ Y}]^{\mathrm{H}}[\mathrm{X\ Y}]\right\}^{-1}[\mathrm{X\ Y}]^{\mathrm{H}}$$

$$=[\mathrm{X\ O}]\begin{bmatrix}\mathrm{X^HX} & \mathrm{X^HY}\\ \mathrm{Y^HX} & \mathrm{Y^HY}\end{bmatrix}^{-1}[\mathrm{X\ Y}]^{\mathrm{H}}=[\mathrm{X\ O}]\begin{bmatrix}\mathrm{X^HX} & 0\\ 0 & \mathrm{Y^HY}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathrm{X^H}\\ \mathrm{Y^H}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\mathrm{X(X^HX)^{-1}}\quad \mathrm{O}\right]\begin{bmatrix}\mathrm{X^H}\\ \mathrm{Y^H}\end{bmatrix}=\mathrm{X(X^HX)^{-1}X^H}$$

三、投影矩阵与广义逆矩阵

$$\begin{cases}AXA=A\\ (AX)^H=AX\end{cases}\Rightarrow AX=P_{R(AX)}=P_{R(A)}$$

$$\begin{cases}XAX=X\\ (XA)^H=XA\end{cases}\Rightarrow XA=P_{R(XA)}=P_{R(X)}$$

Moore 广义逆矩阵的定义：设 $A\in C^{m\times n}$ $X\in C^{n\times m}$ **，且** $AX=P_{R(A)}$ **，** $XA=P_{R(X)}$ **，则 X 为 A 的 Moore 广义逆矩阵。事实上，Moore 广义逆矩阵正是** $\mathbf{A}^{\dagger}$ **。**

四、广义逆的计算

1. 利用 Hermite 标准形求{1}-逆和{1,2}-逆

任何矩阵都可由初等行变换化为 **Hermite** 标准形。设 $\mathbf{A}\in\mathbf{C}_{r}^{m\times n}$，存在满秩矩阵 $\mathbf{E}\in\mathbf{C}_{m}^{m\times m}$，使 $\mathbf{EA}=\mathbf{B}$（**Hermite** 标准形）。根据矩阵 **B** 构造置换矩阵 $\mathbf{P}$，使得

$$\mathbf{EAP}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{r} & \mathbf{K}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},\ \text{则}\ \mathbf{A}=\mathbf{E}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{r} & \mathbf{K}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

(1)求{1}-逆的方法

$$\mathbf{A}\{1\}=\left\{\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{r} & \mathbf{M}\\ \mathbf{N} & \mathbf{L}\end{bmatrix}_{n\times m}\mathbf{E}\,\middle|\,\mathbf{KN}=\mathbf{0}\right\}$$ （取阶数合适的 **M、L**）

证明：令$X=P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}E$，则

$$AXA=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}EE^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r+KN & M+KL \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r+KN & (I_r+KN)K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}=A$$

[证毕]

(2) {1,2}-逆

当$X\in A\{1\}$时，由定理可知：$\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}A$是$X\in A\{1,2\}$的充要条件。

$X=P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}E$，$P$、$E$为满秩方阵

$$\therefore \ \mathrm{rank}X = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix} = \mathrm{rank}A = r$$

$$\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_r & M \\ 0 & L-NM \end{bmatrix} \to L-NM=0$$

$$\therefore \ A\{1,2\} = \left\{ P\begin{bmatrix} I_r & M \\ N & L \end{bmatrix}_{n\times m} E \,\middle|\, KN=0, L=NM \right\}$$

2. 由满秩分解求广义逆

对 A 进行满秩分解： $A=FG$， $A\in C_r^{m\times n}$， $F\in C_r^{m\times r}$， $G\in C_r^{r\times n}$

定理： 设 $A\in C_r^{m\times n}$，其满秩分解为 $A=FG$，则

作业 P295 1、4

（1） $G^{(i)}F^{(1)} \in A\{i\}$ $\quad i=1,2,4$

（2） $G^{(1)}F^{(i)} \in A\{i\}$ $\quad i=1,2,3$

（3） $G^{(1)}F^{+} \in A\{1,2,3\}$， $G^{+}F^{(1)} \in A\{1,2,4\}$

（4） $A^{+} = G^{+}F^{(1,3)} = G^{(1,4)}F^{+}$

（5） $A^{+} = G^{+}F^{+} = G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H} = G^{H}(F^{H}AG^{H})^{-1}F^{H}$

证明：利用定义证明（1）（2），由（1）（2）$\Rightarrow$（3）$\Rightarrow$（4）$\Rightarrow$（5）