§19 特征值和特征向量

19.1 引言和定义

例：考虑两个一阶线性常微分方程构成的方程组

$$\frac{du_1}{dt} = 4u_1 - 5u_2, \qquad \frac{du_2}{dt} = 2u_1 - 3u_2. \qquad (*)$$

容易用矩阵形式表示这个方程组：

令未知向量 $\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$，系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

则方程组表示为 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}. \quad (*)$

19.1 引言和定义

回顾单个数量方程 $\dfrac{du}{dt} = au,$ 解为 $u(t) = e^{at}u_0,$ 其中 $u_0 = u(0).$

受此启发，对方程组 (*) ，我们来寻求下列形式的解

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{\lambda t}c_1, \\ u_2(t) = e^{\lambda t}c_2. \end{cases}$$

或用向量记法表示为

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

19.1 引言和定义

把预期的这个解代入方程组 $(*)$ 得到

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda t} c_1 = 4e^{\lambda t} c_1 - 5e^{\lambda t} c_2 \\ \lambda e^{\lambda t} c_2 = 2e^{\lambda t} c_1 - 3e^{\lambda t} c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda c_1 = 4c_1 - 5c_2 \\ \lambda c_2 = 2c_1 - 3c_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

或者，把 $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}$ 代入 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$，给出 $\lambda e^{\lambda t}\mathbf{x} = Ae^{\lambda t}\mathbf{x}$，消去公因子后得

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

即

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in N(A - \lambda I).$$

19.1 引言和定义

注：对任意 λ 值，向量 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 总满足 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$. 但 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只能产生 $\mathbf{u}=e^{\lambda t}\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 我们关心的是有非零向量 $\mathbf{x}$ 满足 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ 的特殊的 λ 值.

$N(A-\lambda I)$ 含非零向量 $\Longleftrightarrow$ $A-\lambda I$ 不可逆 $\Longleftrightarrow$ $det(A-\lambda I)=0$

19.1 引言和定义

定义：对方阵 A, 若存在数 λ 和非零向量 $\mathbf{x}$, 满足 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, 则称 λ 为矩阵 A 的特征值(eigenvalue)，称 $\mathbf{x}$ 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量(eigenvector).

数 λ 为方阵 A 的特征值 $\Longleftrightarrow det(A - \lambda I) = 0.$

这个方程称为矩阵 A 的特征方程(characteristic equation).

19.1 引言和定义

回到例子，

$$det(A-\lambda I)=det\begin{pmatrix}4-\lambda & -5\\ 2 & -3-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2).$$

这是关于 λ 的二次多项式，称为 A 的特征多项式(characteristic polynomial).

A的特征值就是特征方程 $det(A-\lambda I)=0$的解, 也即特征多项式 $det(A-\lambda I)=0$ 的根，它们是

$$\lambda_1=-1\,,\lambda_2=2.$$

19.1 引言和定义

要求属于特征值$\lambda_1 = -1$ 和$\lambda_2 = 2$ 的特征向量，只需求相应齐次线性方程组 $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的非零解.

$$\lambda_1 = -1, \quad (A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故 A 的属于$\lambda_1 = -1$ 的所有特征向量为$\{k_1\mathbf{x}_1 | k_1 \in \mathbb{R}, k_1 \neq 0\}$.

19.1 引言和定义

$$\lambda_2 = 2, \quad (A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

故 A 的属于 $\lambda_2 = 2$ 的所有特征向量为 $\{k_2\mathbf{x}_2 | k_2 \in \mathbb{R}, k_2 \neq 0\}$.

注：特征向量不唯一，$N(A - \lambda I)$ (称为相应于特征值 λ 的特征子空间(eigenspace))中任何非零向量都是特征向量. 我们只需求得特征子空间的一组基.

19.1 引言和定义

回到微分方程 $\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}.$

已求得两个特解 $\mathbf{u} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

这两个特解的线性组合

$$\mathbf{u} = C_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

给出原微分方程的通解.

$\Longrightarrow$ 解这类微分方程的关键是求系数矩阵的特征值和特征向量.

19.1 引言和定义

注：1. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 表示特征向量 $\mathbf{x}$ 是使得其被 A 左乘后与自身共线的特殊向量.

2.求矩阵特征值和特征向量的方法：

(1)计算特征多项式 $det(A - \lambda I)$.

(2)求特征方程 $det(A - \lambda I) = 0$ 的解, 即为特征值.

(3)对每个特征值 λ, 求解齐次线性方程组 $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其所有非零解即为属于 λ 的所有特征向量.

19.2 例

例1：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$不可逆，$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$有非零解：$A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

故 $\lambda = 0$ 是 A 的特征值.

命题：矩阵 A 不可逆 $\Longleftrightarrow$ A 有零特征值.

19.2 例

例2：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda)(\lambda-3).$$

故 A 的全部特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=3.$

19.2 例

对 $\lambda_1 = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

故 A 的属于$\lambda_1 = 0$ 的全部特征向量是 $\{k_1\mathbf{x}_1 | k_1 \in \mathbb{R}, k_1 \neq 0\}$.

19.2 例

对 $\lambda_2 = 1$,

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow (A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

故 A 的属于$\lambda_2 = 1$ 的全部特征向量是$\{k_2\mathbf{x}_2 | k_2 \in \mathbb{R}, k_2 \neq 0\}$.

19.2 例

对 $\lambda_3 = 3$,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow (A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系为 $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

故 A 的属于 $\lambda_3 = 3$ 的全部特征向量是 $\{k_3\mathbf{x}_3 | k_3 \in \mathbb{R}, k_3 \neq 0\}$.

19.2 例

例3：投影矩阵 $P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$ 的特征值为 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=1$.

对 $\lambda_1=0$, $P\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系是 $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$.

故 P 的属于 $\lambda_1=0$ 的全部特征向量是 $\{k_1\mathbf{x}_1|k_1\in\mathbb{R}, k_1\neq 0\}$.

对 $\lambda_2=1$, $P-I=\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}$.

$(P-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系是 $\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

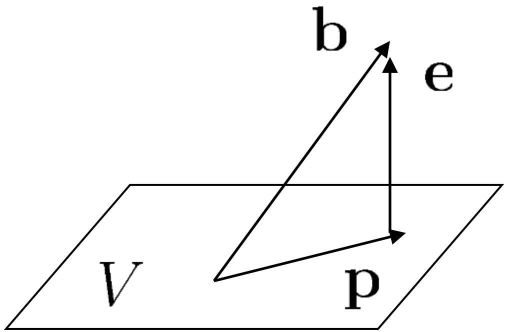
故 P 的属于 $\lambda_2=1$ 的全部特征向量是 $\{k_2\mathbf{x}_2|k_2\in\mathbb{R}, k_2\neq 0\}$.

19.2 例

事实上，设 P 是到子空间 $V \subset \mathbb{R}^n$ 的投影矩阵. 则

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{b} = \mathbf{p} + \mathbf{e},$$

其中 $\mathbf{p} = P\mathbf{b} \in V$.



若 $\mathbf{b} \in V$，则 $P\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

若 $\mathbf{b} \perp V$，则 $P\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

故投影矩阵的特征值是 0 和 1.

19.2 例

例4：反射矩阵 $R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的特征值是 $\lambda_1=1$ 和 $\lambda_2=-1$.

对 $\lambda_1=1$,

$$R-I=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$(R-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系是

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

故 R 的属于$\lambda_1=1$的全部特征向量为 $\{k_1\mathbf{x}_1|k_1\in\mathbb{R},k_1\neq 0\}$.

19.2 例

对 $\lambda_2 = -1$,

$$R + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(R + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个基础解系是

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

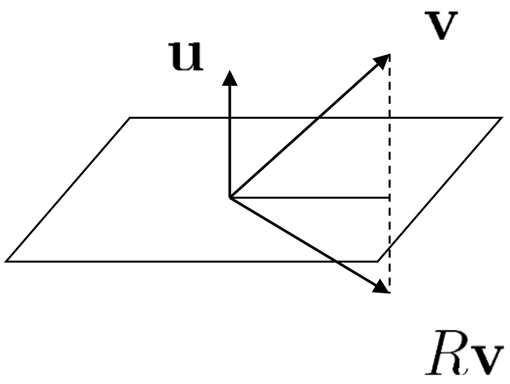
故 R 的属于$\lambda_2 = -1$的全部特征向量为$\{k_2\mathbf{x}_2 | k_2 \in \mathbb{R}, k_2 \neq 0\}$.

19.2 例

事实上，设 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n, ||\mathbf{u}||=1$, 则 $R=I_n-2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$为关于与 $\mathbf{u}$ 正交的超平面的反射矩阵.

$\forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$, 若 $\mathbf{v}\perp\mathbf{u}$, 则 $R\mathbf{v}=\mathbf{v}$.

若 $\mathbf{v}//\mathbf{u}$, 则 $R\mathbf{v}=-\mathbf{v}$.



故反射矩阵 R 的特征值是 1和-1.

且相应的两个特征子空间正交.

19.2 例

例5：$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 为上三角矩阵，则

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ 0 & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda).$$

故 A 的特征值为其对角元 $a, d.$

事实上，三角矩阵的特征值为其所有对角元.

19.2 例

例6：旋转 90° 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\forall \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R},\ A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\neq\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

A 无实特征值.

19.2 例

但

$$A\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, i = \sqrt{-1}.$$

故

$\{k_1\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} | k_1 \in \mathbb{C}, k_1 \neq 0\}$ 是 A 的属于 $\lambda_1 = i$ 的全部特征向量.

$\{k_2\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} | k_2 \in \mathbb{C}, k_2 \neq 0\}$ 是 A 的属于 $\lambda_2 = -i$ 的全部特征向量.

19.2 例

例7：Markov矩阵 $A=\begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{pmatrix}$.

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}0.8-\lambda & 0.3\\ 0.2 & 0.7-\lambda\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(\lambda-1)(2\lambda-1).$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=\frac{1}{2}$.

对 $\lambda_1=1,\ A-I=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.3\\ 0.2 & -0.3\end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow (A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有一个基础解系为 $\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$.

故 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的全部特征向量为 $\{k_1\mathbf{x}_1 | k_1\in\mathbb{R}, k_1\neq 0\}$.

19.2 例

对 $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $A - \dfrac{1}{2} I = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow (A - \frac{1}{2} I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有一个基础解系为 $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

故 A 的属于 $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ 的全部特征向量为$\{k_2\mathbf{x}_2 | k_2 \in \mathbb{R}, k_2 \neq 0\}$.

注：1 是Markov矩阵的特征值.

19.3 特征值的性质

一般的，复数域上 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 的特征多项式

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} =: f(\lambda)$$

是一个关于 λ 的 n 次多项式.

$f(\lambda)=0$ 在复数域上有 n 个根(可能有重根).

19.3 特征值的性质

例：$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. $det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1.$

$\Longrightarrow A$ 有特征值 $\lambda_1=i,\lambda_2=-i.$

例：若 λ 是矩阵 A 的一个特征值，则λ^2 是A^2 的一个特征值，$\lambda+m$ 是 $A+mI$ 的一个特征值.

事实上，若 $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, 则 $A^2\mathbf{x}=\lambda A\mathbf{x}=\lambda^2\mathbf{x}$, 且

$(A+mI)\mathbf{x}=A\mathbf{x}+m\mathbf{x}=(\lambda+m)\mathbf{x}.$

19.3 特征值的性质

一般的，

命题：设 λ 是矩阵 A 的一个特征值.

1.设 $p(x)$ 为关于 x 的多项式函数，则 $p(\lambda)$ 是矩阵 $p(A)$ 的一个特征值.

2.若 A 可逆，则 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的一个特征值.

证明：只证2, 已知 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 则

$$\mathbf{x} = A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$$

$$\Longrightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}.$$

19.3 特征值的性质

定理：设 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})$有 n 个特征值(可能重复) $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,

则
$$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}=:trA,$$
$$\lambda_1\cdots\lambda_n=detA.$$

19.3 特征值的性质

证明：
$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

按第一行展开，得
$$det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})C_{11} - a_{12}C_{12} - \cdots - a_{1n}C_{1n}.$$

除了 C_{11} 外, $C_{12}, \cdots, C_{1n}$ 均为关于 λ 的次数 $\leq n-2$ 的多项式.

递推讨论 C_{11} 知, $det(\lambda I - A)$ 关于 λ^{n-1} 的系数是 $-(a_{11} + \cdots + a_{nn})$.

而 $det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ 关于 λ^{n-1} 的系数是
$$-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

故 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$

19.3 特征值的性质

最后，在 $det(\lambda I - A)$ 中令 $\lambda = 0$ 得

$$(-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n = (-1)^n det(A).$$

故

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = det(A).$$

19.3 特征值的性质

例：一个3 阶置换阵 P 的行列式 $= \pm 1$ (P是正交阵).

$$trP = \begin{cases} 3, & P = I \\ 1, & \text{一次行交换} \\ 0, & \text{二次行交换} \end{cases}$$

例如，$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$trP = 1, detP = -1. \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$