

- 1 拉格朗日乘数法是一种寻找多元函数在一组约束下的极值的方法；
- 2 通过引入拉格朗日乘子，可以将"d"个变量与 k 个约束条件的最优化问题转化为具有 d+k 个变量的无约束优化问题求解；
- 3 先考虑一个等式约束的优化问题，假定  $x$  为  $d$  为向量，欲寻找  $x$  的某个取值  $x^*$ ，是目标函数  $f(x)$  最小且满足  $g(x)=0$  的约束，从集合角度看，该问题的目标是在  $g(x)=0$  确定的  $d-1$  维曲面上寻找是目标函数  $f(x)$  最小的点；
  - 3.1 对于约束曲面上的任意点  $x$ ，该点的梯度  $dg(x)$  正交于约束曲面；
  - 3.2 在最优点  $x^*$ ，目标函数在该点的梯度  $df(x^*)$  正交于约束曲面；

#### 4 公式

$$\min f(w) \quad s.t. \quad g_i(w) \leq 0, \quad h_i(w) = 0$$

$$\text{Lagrange: } \ell(w, \alpha, \beta) = f(w) + \sum \alpha_i * g_i(w) + \sum \beta_i * h_i(w)$$

$$\text{Define: } \theta_p(w) = \max(\ell(w, \alpha, \beta)); \quad p^* = \min_w \max_{\alpha, \beta} \ell(w, \alpha, \beta)$$

- ① If  $g_i(w) > 0$  then  $\theta_p(w) = \infty$ ;
- ② If  $h_i(w) \neq 0$  then  $\theta_p(w) = \infty$ ;
- ③ otherwise  $\theta_p(w) = f(w)$ ;