第十讲 矩阵的QR分解

一、Givens矩阵与Givens变换

1. 定义：设实数 c 与 s 满足 $c^2+s^2=1$，称

$$
T_{ij} = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & c & & & & s & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & -s & & & & c & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow(i) \\ \\ \\ \\ \leftarrow(j) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\qquad (i<j)
$$

为 Givens 矩阵（初等旋转矩阵），也记作 $T_{ij}=T_{ij}(c,s)$。由 Givens 矩阵所确定的线性变换称为 Givens 变换（初等旋转变换）。

说明:

（1） $c^2+s^2=1$， 故存在θ， 使 $c=\cos(\theta), s=\sin(\theta)$ 。

（2）$y=T_{ij}x$ 中 T_{ij} 确定了将向量 x 变成 y 的一种变换，正是 Givens 变换。二阶情况下， $y=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}x$ 确定的正是平面直角坐标系中绕原点的一个旋转变换（旋转θ度）。

2. 性质

（1） $\left[T_{ij}(c,s)\right]^{-1}=\left[T_{ij}(c,s)\right]^{T}=T_{ij}(c,-s)$， $-s=-\sin(\theta)=\sin(-\theta)$，旋转θ度再反向旋转度θ

$$\det\left[T_{ij}\left(c,s\right)\right]=1$$

（2）设 $x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$， $y=T_{ij}x=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{bmatrix}^T$， 则有

$$\begin{cases}\eta_i=c\xi_i+s\xi_j\\ \eta_j=-s\xi_i+c\xi_j\\ \eta_k=\xi_k \qquad (k\neq i,j)\end{cases}$$

当 $\xi_i^2+\xi_j^2\neq 0$ 时，总可以选 $c=\dfrac{\xi_i}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$，$s=\dfrac{\xi_j}{\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}}$ 使

$$\begin{cases}\eta_i=\sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2}\\ \eta_j=0\end{cases}\rightarrow T_{ij}x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \sqrt{\xi_i^2+\xi_j^2} & \cdots & 0 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$$

定理 1. 设 $x=[\xi_1\quad\xi_2\quad\cdots\quad\xi_n]^T\neq 0$，则存在有限个 Givens 矩阵的乘积 T，使得 $Tx=|x|e_1$

说明:（1）$|x|=\sqrt{\|x\|_2^2}=\sqrt{x^Tx}$ (x 为实向量)，$|x|=\sqrt{x^Hx}$（x 为复向量）。

（2）$e_1=[1\quad 0\quad 0\quad\cdots\quad 0]^T$

[证明]：$\xi_1\neq 0$ 的情形

（1） 构造 $T_{12}(c,s):c=\dfrac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}},s=\dfrac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}$

$$T_{12}x=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} & 0 & \xi_3 & \xi_4 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$$

(2)对 $T_{12}x$ 再考虑 $T_{13}(c,s): c=\frac{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}, s=\frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}$

$$T_{13}T_{12}x=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2} & 0 & 0 & \xi_4 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$$

(3) 依此类推，构造

$$T_{1k}(c,s): c=\frac{\sqrt{\xi_1^2+\cdots+\xi_k^2}}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_k^2}}, s=\frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_k^2}} \quad \textbf{(k=2,3,…..n)}$$

$$T_{1k}\left\langle T_{1k-1}\left\{T_{1k-2}\left[\cdots T_{13}\left(T_{12}x\right)\right]\right\}\right\rangle$$
$$=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_k^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{k+1} & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T$$

直至 **k=n**。令 $T=T_{1n}T_{1n-1}T\cdots T_{12}$，则有

$$Tx=\begin{bmatrix}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots\xi_n^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^T=|x|e_1$$

$\xi_1=0$ 的情形，从第一个不为零的 ξ_i 开始运用上述方法即可。

推论：对于任何非零列向量$x\in R^n$及任何单位列向量$z(|z|=1)$，均存在着有限个 Givens 矩阵的乘积 T，使$Tx=|x|z$。

[证明]：由上述定理，对 x 存在有限个 Givens 矩阵$T_{12}^{(1)},T_{13}^{(1)},\cdots,T_{1n}^{(1)}$的乘积

$$T^{(1)}=T_{1n}^{(1)}T_{1n-1}^{(1)}\cdots T_{13}^{(1)}T_{12}^{(1)}，\quad 使 T^{(1)}x=|x|e_1$$

对 z 同理存在有限个 Givens 矩阵$T_{12}^{(2)},T_{13}^{(2)},\cdots,T_{1n}^{(2)}$的乘积

$$T^{(2)}=T_{1n}^{(2)}T_{1n-1}^{(2)}\cdots T_{13}^{(2)}T_{12}^{(2)}，\quad 使 T^{(2)}z=|z|e_1=e_1$$

$$T^{(1)}x=|x|T^{(2)}z=T^{(2)}(|x|z)\to\left(T^{(2)}\right)^{-1}T^{(1)}x=|x|z$$

即，

$$\Rightarrow\left(T_{1n}^{(2)}T_{1n-1}^{(2)}\cdots T_{12}^{(2)}\right)^{-1}\left(T_{1n}^{(1)}T_{1n-1}^{(1)}\cdots T_{12}^{(1)}\right)x=|x|z$$

其中

$$\left(T_{1n}^{(2)}T_{1n-1}^{(2)}\cdots T_{12}^{(2)}\right)^{-1}\left(T_{1n}^{(1)}T_{1n-1}^{(1)}\cdots T_{12}^{(1)}\right)$$

$$=\left(T_{12}^{(2)}\right)^{-1}\left(T_{13}^{(2)}\right)^{-1}\cdots\left(T_{1n}^{(2)}\right)^{-1}T_{1n}^{(1)}T_{1n-1}^{(1)}\cdots T_{12}^{(1)}$$

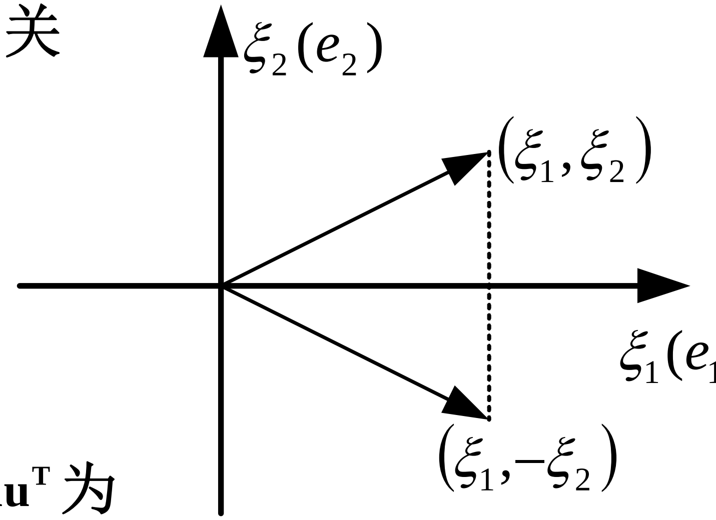
$$=\left(T_{12}^{(2)}\right)^{T}\left(T_{13}^{(2)}\right)^{T}\cdots\left(T_{1n}^{(2)}\right)^{T}T_{1n}^{(1)}T_{1n-1}^{(1)}\cdots T_{12}^{(1)}$$

为有限个 Givens 矩阵的乘积。

二、Householder矩阵与Householder变换

平面直角坐标系中，将向量$\mathbf{x}=[\xi_1\quad \xi_2]^{\mathrm{T}}$关于$\mathbf{e}_1$轴作镜像变换，则得到

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\xi_1\\-\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}=\left(\mathbf{I}-2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}=\mathbf{H}\mathbf{x}$$



一般地，可将其推广：

1.定义：设**单位列向量**$\mathbf{u}\in\mathbf{R}^n$，称$\mathbf{H}=\mathbf{I}-2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$为Householder 矩阵（初等反射矩阵），由Householder矩阵所确定的线性变换（$\mathbf{y}=\mathbf{H}\mathbf{x}$）称为Householder变换。

2．性质

$\mathbf{H}^T=\mathbf{H}$（实对称）， $\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{H}^T$（正交）， $\mathbf{H}^2=\mathbf{I}$（对合），

$\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{H}$ （自逆）， $\det\mathbf{H}=-1$

引理：设 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n},\mathbf{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$， 则 $\det\left(\mathbf{I}_m+\mathbf{AB}\right)=\det\left(\mathbf{I}_n+\mathbf{BA}\right)$

[证明]：参考如下的分块矩阵 $\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{B}\\ -\mathbf{A} & \mathbf{I}_m\end{bmatrix}$ 的行列式，有

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{B}\\ -\mathbf{A} & \mathbf{I}_m\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m+\mathbf{AB}\end{bmatrix}=\det\left(\mathbf{I}_m+\mathbf{AB}\right)=\det\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n+\mathbf{BA} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m\end{bmatrix}$$
$$=\det\left(\mathbf{I}_n+\mathbf{BA}\right)$$

$$\therefore \det\left(\mathbf{H}\right)=\det\left[\mathbf{I}+\left(-2\mathbf{uu}^T\right)\right]=1+\mathbf{u}^T(-2\mathbf{u})=1-2=-1$$

$$\bullet\mathbf{H}^T=\left(\mathbf{I}-2\mathbf{uu}^T\right)^T=\mathbf{I}-2\left(\mathbf{u}^T\right)^T\mathbf{u}^T=\mathbf{H}$$

$$\bullet\mathbf{H}^2=\left(\mathbf{I}-2\mathbf{uu}^T\right)\left(\mathbf{I}-2\mathbf{uu}^T\right)=\mathbf{I}-2\mathbf{uu}^T-2\mathbf{uu}^T+4\mathbf{uu}^T\mathbf{uu}^T=\mathbf{I}$$

定理 2. 对于任何非零列向量 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ 及任何单位列向量 $\mathbf{z}\in\mathbf{R}^n$，存在 **Householder** 矩阵 **H**，使得 $\mathbf{Hx}=|\mathbf{x}|\mathbf{z}$。

[证明] 当 $\mathbf{x}=|\mathbf{x}|\mathbf{z}$ 时，选 **u** 满足 $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0$，则 $\mathbf{Hx}=\left(\mathbf{I}-2\mathbf{uu}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x}=\mathbf{x}=|\mathbf{x}|\mathbf{z}$

当 $\mathbf{x}\neq|\mathbf{x}|\mathbf{z}$ 时，选 $\mathbf{u}=\dfrac{\mathbf{x}-|\mathbf{x}|\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-|\mathbf{x}|\mathbf{z}|}$，有

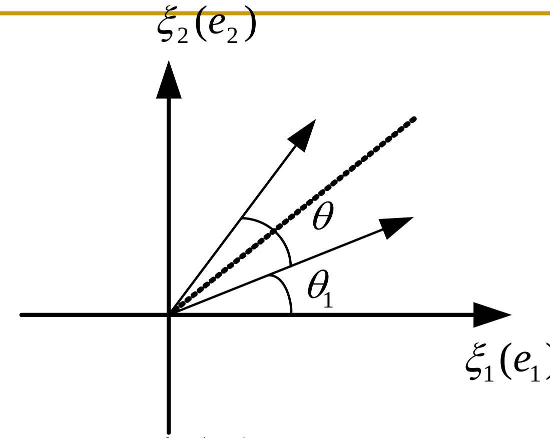
$$|x-|x|z|^2=(x-|x|z)^T(x-|x|z)=x^Tx+|x|^2z^Tz-|x|(z^Tx+x^Tz)$$

$$=2(x^Tx-|x|z^Tx)=2(x-|x|z)^Tx$$

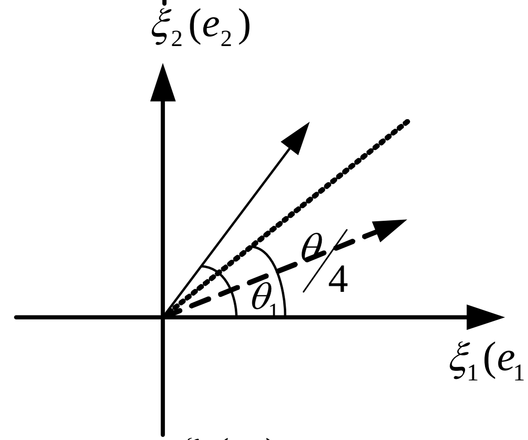
$$\mathbf{Hx}=\left(\mathbf{I}-2\frac{\mathbf{x}-|\mathbf{x}|\mathbf{z}}{|\mathbf{x}-|\mathbf{x}|\mathbf{z}|}\frac{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}-|\mathbf{x}|\mathbf{z}^{\mathrm{T}}}{|\mathbf{x}-|\mathbf{x}|\mathbf{z}|}\right)\mathbf{x}=\mathbf{x}-(\mathbf{x}-|\mathbf{x}|\mathbf{z})=|\mathbf{x}|\mathbf{z}$$

定理 3. 初等旋转矩阵（**Givens** 矩阵）是两个初等反射矩阵的乘积。

从表明上看，似乎一种反射变换即可代替旋转变换。实际上是不对的，因为这样的反射变换对应的对称轴沿 $(\theta_1+\theta_2/2)$ 方向，与 θ_1 有关。



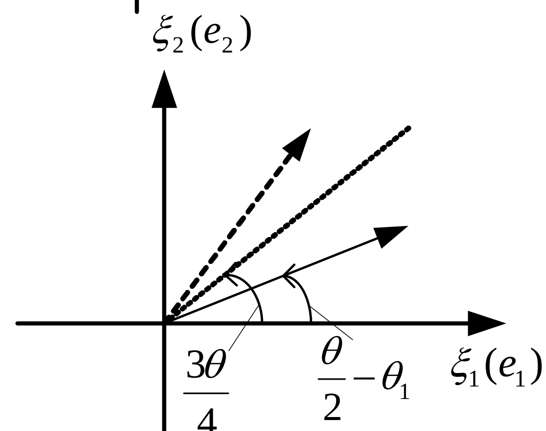
实际上，旋转变换可由这样两次反射变换的作用来代替。



首先，关于沿 $(\theta/4)$ 对称轴作反射变换，则原向量沿 θ_1 方向转至 $(-\theta_1+\theta/2)$。

其次，关于沿 $(3\theta/4)$ 对称轴作反射变换，

则向量反射至 $\left(\frac{\theta}{2}-\theta_1\right)+2\left(\frac{\theta}{4}+\theta_1\right)=\theta_1+\theta$。



☆ 旋转变换可用两个反射变换的连续作用来代替，即 $T_{ij}=H_vH_u$。但是反射变换却不可能用多个旋转变换的连续作用来代替。这是因为 $\det(T_{ij})\equiv 1, \det(H)\equiv -1$。由两个－1 的乘积可得 1，但多个 1 的乘积只能是 1，不是－1。

三、 QR分解

1. 定义： 如果实（复）矩阵 A 可化为正交（酉）矩阵 Q 与实（复）上三角矩阵 R 的乘积，即 $A=QR$，则称上式为 A 的 QR 分解。

2. 定理 4： 设 A 是 n 阶的非奇异矩阵，则存在正交（酉）矩阵 Q 与实（复）上三角矩阵 R 使得 $A=QR$，且除去相差一个对角元素的绝对值（模）全为 1 的对角因子外，上述分解唯一。

[证明]：设 A 记为$A=[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$，A 非奇异$\rightarrow \mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$线性无关。

采用 **Gram-schmidt** 正交化方法将它们正交化，可得

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1=\mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1| \\ \mathbf{b}_2=\mathbf{a}_2-\mathbf{k}_{21}\mathbf{b}_1 & \mathbf{q}_2=\mathbf{b}_2/|\mathbf{b}_2| \\ \mathbf{b}_3=\mathbf{a}_3-\mathbf{k}_{31}\mathbf{b}_1-\mathbf{k}_{32}\mathbf{b}_2 & \vdots \rightarrow (\mathbf{q}_i,\mathbf{q}_j)=\delta_{ij} \\ \quad\vdots & \\ \mathbf{b}_n=\mathbf{a}_n-\mathbf{k}_{n1}\mathbf{b}_1-\mathbf{k}_{n2}\mathbf{b}_2-\cdots-\mathbf{k}_{nn-1}\mathbf{b}_{n-1} & \mathbf{q}_n=\mathbf{b}_n/|\mathbf{b}_n| \end{cases}$$

$$\mathbf{k}_{ij}=\frac{(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)}{(\mathbf{b}_j,\mathbf{b}_j)} \leftarrow (\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_j)=0$$

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]\begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \cdots & k_{n1} \\ & 1 & \cdots & k_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]C$$

$$= [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]\begin{bmatrix} |b_1| & & & \\ & |b_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |b_n| \end{bmatrix} C = QR$$

Q 是正交（酉）矩阵

R 是实（复）上三角矩阵

唯一性：采用反证法。设存在两个 **QR** 分解，$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$，则

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{Q}_1\mathbf{D} \qquad \rightarrow \mathbf{D}\text{为上三角矩阵}$$

而 $\mathbf{I} = \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1\mathbf{D})^{\mathrm{H}}(\mathbf{Q}_1\mathbf{D}) = \mathbf{D}^{\mathrm{H}}\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$为酉（正交）矩阵

故，**D** 只能为对角阵。且 **D** 是对角元素绝对值（模）全为 **1** 的对角阵。

定理 5: 设 A 是$m\times n$的实（复）矩阵，且其 n 个列线性无关则 A 具有分解$A=QR$。其中 Q 是$m\times n$阶实（复）矩阵，且满足$Q^TQ=I(Q^HQ=I)$，R 是 n 阶实（复）非奇异上三角矩阵。除了相差一个对角元素的绝对值（模）全为 1 的对角阵因子外，上述分解唯一。

3. 求 QR 分解的方法

方法 1：采用 Givens 方法

1° 对于非奇异矩阵 A，由 $\det A\neq 0$ 知 A 的第 1 列 $b^{(1)}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\end{pmatrix}^T\neq 0$，存在有限个 Givens 矩阵的乘积$T_1$，使得：$T_1 b^{(1)}=\left|b^{(1)}\right|e_1 \quad (e_1\in R^n)$，令$a_{11}^{(1)}=\left|b^{(1)}\right|$。则有

$$T_1A=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

2° 对 $A^{(1)}$，由 $\det A^{(1)} \neq 0$ 知 $A^{(1)}$ 的第 1 列 $b^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{22}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & \cdots & a_{n2}^{(1)} \end{pmatrix}^T \neq 0$，存在有限个 Givens 矩阵的乘积 T_2， 使得： $T_2 b^{(2)} = |b^{(2)}| e_1 \quad (e_1 \in R^{n-1})$

令 $a_{22}^{(2)} = |b^{(2)}|$。则有

$$T_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

第 $n-1$ 步，由 $\det A^{(n-2)} \neq 0$ 知 $A^{(n-2)}$ 的第 1 列 $b^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{n-1,n-1}^{(n-2)} & a_{n,n-1}^{(n-2)} \end{pmatrix}^T \neq 0$，存在 Givens 矩阵 T_{n-1}，使得：

$$T_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{n,n}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

最后，令

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-2} & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-3} & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_{n-2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{T}_2 \end{bmatrix} \mathrm{T}_1$$，则有

$$\mathbf{TA}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix}=\mathbf{R}\rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}=\mathbf{QR}$$

其中，**R** 为上三角矩阵，$Q=T^{-1}$ 为正交矩阵

方法 2：采用 Householder 变换

1° 由 $\det A\neq 0$ 知 **A** 的第 1 列 $b^{(1)}=\left(a_{11} \quad a_{21} \quad \cdots \quad a_{n1}\right)^{T}\neq 0$，存在 **Householder** 矩阵 H_1，使得：$H_1 b^{(1)}=\left|b^{(1)}\right|e_1 \quad (e_1\in R^n)$，令 $a_{11}^{(1)}=\left|b^{(1)}\right|$，则有

$$H_1 A=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

2° 由 $\det A^{(1)} \neq 0$ 知 $A^{(1)}$ 的第 1 列 $b^{(2)} = \left(a_{22}^{(1)} \quad a_{32}^{(1)} \quad \cdots \quad a_{n2}^{(1)}\right)^T \neq 0$，存在 Householder 矩阵 H_2，使得：$H_2 b^{(2)} = \left|b^{(2)}\right| e_1 \qquad (e_1 \in R^{n-1})$

令 $a_{22}^{(2)} = \left|b^{(2)}\right|$，则有

$$H_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(2)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

第 $n-1$ 步，由 $\det A^{(n-2)} \neq 0$ 知 $A^{(n-2)}$ 的第 1 列 $b^{(n-1)} = \left(a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \quad a_{n,n-1}^{(n-2)}\right)^T \neq 0$，存在 Householder 矩阵 H_{n-1}，使得：

$$H_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} a_{n-1,n-1}^{(n-1)} & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{n,n}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

最后，令

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-2} & 0 \\ 0 & \mathrm{H}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-3} & 0 \\ 0 & \mathrm{H}_{n-2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{H}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{H}_2 \end{bmatrix} \mathrm{H}_1,$$

$$H_{l+1} = I_{n-l} - 2uu^T\,(u \in R^{n-l}, u^T u = 1)，\text{则}$$

$$\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & H_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uu^T \end{bmatrix} = I_n - 2\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0^T & u^T \end{bmatrix} = I_n - 2vv^T$$

$$\mathrm{SA} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} = \mathrm{R}，\quad \mathrm{S}^{-1} = \mathrm{Q}\text{为正交矩阵}$$

方法 3：Gram-schmidt 正交归一化方法

$\mathrm{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$，各列向量线性无关可进行正交化

$$q_1 = a_1 / |a_1| \qquad y_1 = a_1$$

$$q_2 = \frac{a_2 + k_{21} q_1}{|a_2 + k_{21} q_1|}, k_{21} = -\langle a_2, q_1 \rangle \qquad y_2 = a_2 + k_{21} q_1$$

$\vdots$

$$q_l = \frac{a_l + \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} q_j}{\left| a_l + \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} q_j \right|}, k_{lj} = -\langle a_l, q_j \rangle \qquad y_l = a_l + \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} q_j$$

$$q_i^H q_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \rightarrow Q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]$$，满足 $Q^T Q = I$

进行改写：

$$a_1 = q_1 |y_1|$$

$$a_2 = q_2 |y_2| - k_{21} q_1$$

$$\vdots$$

$$a_l = q_l |y_l| - \sum_{j=1}^{l-1} k_{lj} q_j$$

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n] \begin{bmatrix} |y_1| & -k_{21} & -k_{31} & \cdots & -k_{n1} \\ & |y_2| & -k_{32} & \cdots & -k_{n2} \\ & & |y_3| & \cdots & \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & |y_n| \end{bmatrix}$$

$$= QR$$

作业：p219-220，1、7、8