第十三讲 Penrose 广义逆矩阵(I)

一、Penrose 广义逆矩阵的定义及存在性

对于满秩方阵A，A^{-1}存在，且$AA^{-1}=A^{-1}A=I$，因此

$$\begin{cases} AA^{-1}A = A \\ A^{-1}AA^{-1} = A \\ (AA^{-1})^H = AA^{-1} \\ (A^{-1}A)^H = A^{-1}A \end{cases}$$

1. Penrose 定义： 设$A \in C^{m\times n}$，若$Z \in C^{n\times m}$且使如下四个等式成立：

$$AZA = A, \quad ZAZ = Z, \quad (AZ)^H = AZ, \quad (ZA)^H = ZA$$

则称 Z 为 A 的 Moore-Penrose(广义)逆，记为，$A^{\dagger}$。

而上述四个等式又依次称为 Penrose 方程（i）,(ii) ,(iii) ,(iv)。

2. Moore-Penrose 逆的存在性和唯一性

定理： 任给 $A \in C^{m\times n}$，$\mathbf{A}^{\dagger}$ 均存在且唯一。

证明：存在性。 $\forall A \in C_r^{m\times n}$，均存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V 使

$$\mathbf{U}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{D} = \left[\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & & & & \\ & \sigma_2 & & & \\ & & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & & \sigma_r & \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right]_{m\times n} \quad \text{即} \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^{\mathrm{H}}$$

其中，$\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2$ 是 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ 的全部非零特征值。

此时，令 $Z = V\tilde{D}U^H \in C_r^{n\times m}$，其中

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & & O \\ & & \ddots & & \\ & & & \sigma_r^{-1} & \\ & O & & & O \end{bmatrix}_{n\times m}$$

则

(i) $\mathbf{AZA=(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)(UDV^H)=UD\tilde{D}DV^H=UDV^H=A}$

(ii) $\mathbf{ZAZ=(V\tilde{D}U^H)(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)=V\tilde{D}D\tilde{D}U^H=V\tilde{D}U^H=Z}$

(iii) $\mathbf{(AZ)^H=[(UDV^H)(V\tilde{D}U^H)]^H=(UD\tilde{D}U^H)^H=UD\tilde{D}U^H=AZ}$

(iv) $\mathbf{(ZA)^H=(V\tilde{D}DV^H)^H=V\tilde{D}DV^H=ZA}$

$$\therefore \mathbf{Z=A^\dagger}$$

唯一性：设 **Z ,Y** 均满足四个 **Penrose** 方程，则

$$\mathbf{Z=ZAZ=Z(AZ)^H=ZZ^HA^H=ZZ^H(AYA)^H=Z(AZ)^H(AY)^H=Z(AZ)(AY)}$$
$$\mathbf{=ZAY=(ZA)^HY=A^HZ^HY=A^H\,Z^H(YAY)=A^HZ^H(YA)^HY=A^HZ^HA^HY^HY}$$
$$\mathbf{=(AZA)^HY^HY=A^HY^HY=(YA)^HY=YAY=Y}$$

即满足四个 **Penrose** 方程的 **Z** 是唯一的。

由 $\mathbf{A^\dagger}$ 的唯一性可知：当 A 为满秩方阵时，$\mathbf{A^\dagger=A^{-1}}$。

3. $\{i,j,\cdots,l\}$-逆的定义： $\forall A\in C^{m\times n}$，若 $Z\in C^{n\times m}$ 且满足 **Penrose** 方程中的第 $(i),(j),\cdots,(l)$ 个方程，则称 **Z** 为 **A** 的 $\{i,j,\cdots,l\}$-逆，记为 $A^{(i,j,\cdots,l)}$，其全体记为 $A\{i,j,\cdots,l\}$。$\{i,j,\cdots,l\}$-逆共有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$ 类，但实际上常用的为如下 **5** 类：**A{1}, A{1,2}, A{1,3}, A{1,4}, A{1,2,3,4}**＝$A^{\dagger}$

二、{1}-逆的性质

1. 引理： $\mathrm{rank}(AB)\le \min(\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}\,B)$

证明：矩阵的秩＝行秩＝列秩。将 A、B 写成 $(A\in C^{m\times n},\ B\in C^{n\times p})$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=[a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n]$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(1)设$\mathrm{rank}(A)=r$,则必存在 $a_{l_1},a_{l_2},\cdots,a_{l_r}$ $(l_1,l_2,\cdots,l_r$两两不同）成为线性无关的向量组。所以，其它列向量a_i可表示为:

$$a_i=\sum_{k=1}^{r}p_{ik}a_{l_k} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$AB=[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}=[\sum_{i=1}^{n}b_{i1}a_i \quad \sum_{i=1}^{n}b_{i2}a_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n}b_{ip}a_i]$$

可见 AB 的各列向量均为$a_{l_1},a_{l_2},\cdots,a_{l_r}$的线性组合。亦即

$$\mathrm{rank}(AB)\le r=\mathrm{rank}(A)$$

(2) 同理设$\mathrm{rank}(B)=s$,则必存在 $b_{m_1},b_{m_2},\cdots,b_{m_s}$ 成为线性无关的向量组。所以，其它行向量b_i可表示为:

$$b_i=\sum_{k=1}^{s}q_{ik}b_{m_k}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}b_i\\\sum_{i=1}^{n}a_{2i}b_i\\\vdots\\\sum_{i=1}^{n}a_{mi}b_i\end{bmatrix}$$

可见，AB 的各行向量均为$b_{m_1},b_{m_2},\cdots,b_{m_s}$的线性组合，故

$$\mathrm{rank}(AB)\le \mathrm{rank}\ B=s$$

合起来即 $\mathrm{rank}(AB)\le\min\ (\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}\ B\ )$

[证毕]

2. 定理： 设 $A \in C^{m\times n}, B \in C^{n\times P}, \lambda \in C,\ \lambda^{\dagger} = \begin{cases} \lambda^{-1} & \lambda \neq 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}$ 则

(1) $(A^{(1)})^H \in A^H\{1\}$

(2) $\lambda^{\dagger} A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$

(3) S、T 为可逆方阵且与 A 可乘，则

$$T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in (SAT)\{1\}\ ,\ (S \in C_m^{m\times m}, T \in C_n^{n\times n})$$

(4) $\mathrm{rank}(A^{(1)}) \geq \mathrm{rank}A$

(5) $AA^{(1)}$和$A^{(1)}A$均为幂等矩阵且与A同秩　$(P^2 = P)$

(6) $R(AA^{(1)}) = R(A),\quad N(A^{(1)}A) = N(A),\quad R((A^{(1)}A)^H) = R(A^H)$

(7) $A^{(1)}A = I_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = n$

$AA^{(1)} = I_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rank}(A) = m$

(8) $AB(AB)^{(1)}A = A \quad \Leftrightarrow \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(A)$

$B(AB)^{(1)}AB = B \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(B)$

证明：(1) $A^H(A^{(1)})^H A^H=(AA^{(1)}A)^H=A^H \quad \to (A^{(1)})^H\in A^H\{1\}$

(2) $\lambda=0$时， $\lambda A=0_{m\times n}$， $\lambda^{\dagger}A^{(1)}=0_{n\times m}$。显然成立。

$\lambda\neq 0$ 时， $(\lambda A)(\lambda^{\dagger}A^{(1)})(\lambda A)=(\lambda\lambda^{-1}\lambda)(AA^{(1)}A)=\lambda A$

(3) $(SAT)(T^{-1}A^{(1)}S^{-1})(SAT)=S(AA^{(1)}A)T=SAT$

(4) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^{(1)}A)\le \mathrm{rank}(A^{(1)})$

(5) $AA^{(1)}A=A \quad \to \begin{cases} AA^{(1)}A\cdot A^{(1)}=A\cdot A^{(1)} & \to (AA^{(1)})^2=AA^{(1)} \\ A^{(1)}\cdot AA^{(1)}A=A^{(1)}\cdot A & \to (A^{(1)}A)^2=A^{(1)}A \end{cases}$

又 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AA^{(1)}A)\le \mathrm{rank}(AA^{(1)})\le \mathrm{rank}(A)$

$\to \mathrm{rank}(AA^{(1)})=\mathrm{rank}(A)$

同理， $\mathrm{rank}(A^{(1)}A)=\mathrm{rank}(A)$

(6) • $R(A)=\{Ax\mid x\in C^n\}\subset C^m$， $R(AA^{(1)})=\{AA^{(1)}y \mid y\in C^m\}\subset C^m$

$\Rightarrow R(A)\supseteq R(AA^{(1)})\supseteq R(AA^{(1)}A) \quad \to R(A)=R(AA^{(1)})$

•$N(A)=\{x \mid Ax=0, x\in C^n\}\subseteq C^m$,

$N(A^{(1)}A)=\{x \mid A^{(1)}Ax=0, x\in C^n\}\subseteq C^n$

$\Rightarrow \quad N(A)\subseteq N(A^{(1)}A)\subseteq N(AA^{(1)}A)=N(A) \quad \to N(A)=N(A^{(1)}A)$

在$R(AA^{(1)})=R(A)$中，将A换为A^H，$A^{(1)}$换为$(A^{(1)})^H$，则有

$$R(A^H)=R(A^H(A^{(1)})^H)=R((A^{(1)}A)^H)$$

(7) 若已知$AA^{(1)}=I_m$，则

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(AA^{(1)})=\mathrm{rank}(I_m)=m$$

若已知$\mathrm{rank}A=m$，则$\mathrm{rank}(AA^{(1)})=\mathrm{rank}A=m$

即$AA^{(1)}$为m阶满秩可逆方阵,$(AA^{(1)})^{-1}$存在。

又　$AA^{(1)}$幂等：（$(AA^{(1)})^2=AA^{(1)}$，两边同乘以（$(AA^{(1)})^{-1}$，得

$AA^{(1)}=I_m$

(8) $R(A)=\{Ax \mid x\in C^n\}\subseteq C^m$

$$R(AB)=\{ABy \mid y\in C^P\}\subseteq C^m \quad \to R(A)\supseteq R(AB)$$

•对 $AB(AB)^{(1)}A=A \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$

$\Rightarrow$: $\quad \mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(AB(AB)^{(1)}A)\le \mathrm{rank}(AB)\le \mathrm{rank}(A)$

$\quad\to\ \mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}A$

$\Leftarrow$: $\quad \mathrm{rank}A=\dim R(A),\quad \mathrm{rank}(AB)=\dim R(AB)$

故　$R(A)=R(AB)$

即 $\forall\, x\in C^n, \exists\, y\in C^p$, 使

$$Ax = ABy = AB(AB)^{(1)}ABy = AB(AB)^{(1)}Ax$$

$$(\text{注意}\forall x\in C^n) \to AB(AB)^{(1)}A = A$$

对 $B(AB)^{(1)}AB = B \quad \Leftrightarrow \quad \text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$

$$\Rightarrow: \quad \text{rank}B = \text{rank}(B(AB)^{(1)}AB) \le \text{rank}(AB) \le \text{rank}(B)$$

$$\to \quad \text{rank}(AB) = \text{rank}B$$

$$\Leftarrow: \quad R(B(AB)^{(1)}AB) = \{B(AB)^{(1)}ABy \mid y\in C^p\} \subseteq R(B) = \{Bx \mid x\in C^p\}$$

又 $\text{rank}B = \text{rank}(AB) = \text{rank}(AB(AB)^{(1)}AB) \le \text{rank}(B(AB)^{(1)}AB) \le \text{rank}B$

$$\to \text{rank}B = \text{rank}(B(AB)^{(1)}AB) \quad \Rightarrow \quad R(B) = R(B(AB)^{(1)}AB)$$

即，$\forall\, x\in C^p$，$\exists\, y\in C^p$，使 $B(AB)^{(1)}ABy = Bx$。故

$$Bx = B(AB)^{(1)}ABy = B(AB)^{(1)}AB(AB)^{(1)}ABy = B(AB)^{(1)}ABx$$

[证毕]

3. 定理： 矩阵 A 当且仅当 A 为满秩方阵时具有唯一的{1}逆：

$$A^{(1)} = A^{-1}$$

三、{1}-逆与{1,2}-逆

1. 定理： 设 $Y,Z\in A\{1\}$，则 $YAZ\in A\{1,2\}$

证明：已知 $AYA=AZA=A$ 故

(i) $A(YAZ)A=AZA=A$

(ii) $(YAZ)A(YAZ)=YAYAZ=YAZ$

[证毕]

2. 定理： 给定矩阵 A 及 $Z\in A\{1\}$，则 $Z\in A\{1,2\}$ 的充要条件是

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}Z$$

证明：必要性。已知 $Z\in A\{1,2\}$，则

$AZA=A;\ ZAZ=Z$

由 $\mathrm{rank}(A^{(1)})\geq\mathrm{rank}A$ 知 $\mathrm{rank}Z\geq\mathrm{rank}A$，$\mathrm{rank}A\geq\mathrm{rank}Z$

$\therefore \mathrm{rank}Z=\mathrm{rank}A$

充分性：　$\because R(ZA) \subseteq R(Z)$，　而 $\mathrm{rank}Z=\mathrm{rank}A$，$Z \in A\{1\}$

$\therefore$　$\mathrm{rank}(ZA)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(Z)$　$\to R(ZA)=R(Z)$

$\forall e \in C^m$，$\exists u \in C^n$，使 $ZAu = Ze$

$\to$　$ZA[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m] = Z[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_m]$

令 $[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_m] = I_m$，$[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_m] = U$

$\Rightarrow \exists U$ 使 $Z=ZAU$

故　$ZAZ=ZA(ZAU)=ZAU=Z$

$\therefore Z$ 满足 Penrose 方程(ii)，　$\therefore Z \in A\{1,2\}$

[证毕]

四、$\{1\}$-逆与 $\{1,2,3\}$ -逆、$\{1,2,4\}$ -逆

1. 引理： 对任意矩阵 A 均有

$$\mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(AA^H)$$

证明： $\forall x \in N(A)$ 即 $Ax=0$，则 $A^H Ax=0$ $\rightarrow N(A) \subseteq N(A^H A)$

另一方面 $\forall x \in N(A^H A)$，则 $x^H A^H Ax = 0 = (Ax)^H (Ax)$

$\Rightarrow Ax = 0 \rightarrow N(A^H A) \subseteq N(A)$

$\therefore N(A^H A) = N(A)$ ，又 $A^H A$ 与 A 的列数均为 n，

$\dim N(A) = n - \mathrm{rank} A$， $\dim N(A^H A) = n - \mathrm{rank}(A^H A)$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^H A) = \mathrm{rank} A$.

$A \leftrightarrow A^H$ ，则 $\mathrm{rank}(AA^H) = \mathrm{rank} A^H = \mathrm{rank} A$ [证毕]

2. 定理： 给定矩阵 A，则 $Y = (A^H A)^{(1)} A^H \in A\{1,2,3\}$

$Z = A^H (AA^H)^{(1)} \in A\{1,2,4\}$

证明：显然 $R(A^H A) \subseteq R(A^H)$，又由引理可知

$R(A^H A) = R(A^H)$ ，即存在 U 使

$A^H = A^H AU \rightarrow A = U^H A^H A$

$AYA = (U^H A^H A)[(A^H A)^{(1)} A^H]A \overset{(i)}{=} U^H A^H A = A$ 满足(i) $\rightarrow Y \in A\{1\}$

$\therefore \mathrm{rank} Y \geq \mathrm{rank} A$

又 $\mathrm{rank}Y=\mathrm{rank}\left(\left(A^H A\right)^{(1)} A^H\right) \le \mathrm{rank}A^H=\mathrm{rank}A$.

即 $\mathrm{rank}Y=\mathrm{rank}A \quad \to Y \in A\{1,2\}$

$$AY=(U^H A^H A)(A^H A)^{(1)} A^H=U^H A^H A (A^H A)^{(1)} A^H AU$$

$$=U^H (A^H A)U=(AY)^H$$

$\Rightarrow Y \in A\{3\}$ 即 $Y \in A\{1,2,3\}$ [证毕]

五、关于 A^+

1. 定理：给定矩阵 A， $A^+ = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$

证明：(1) 设 $X = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$， 则 $X \in A\{1,2\}$

(2) $AX = AA^{(1,4)}AA^{(1,3)} = AA^{(1,3)} = (AA^{(1,3)})^H = (AX)^H$

(3) $XA = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}A = A^{(1,4)}A = (A^{(1,4)}A)^H = (XA)^H$

$\therefore X \in A\{1,2,3,4\} = A^+$

[证毕]

2. 定理： 给定矩阵 A，则

(1) $\operatorname{rank} A^{+} = \operatorname{rank} A$

(2) $(A^{+})^{+} = A$

(3) $(A^{H})^{+} = (A^{+})^{H}$ ， $(A^{T})^{+} = (A^{+})^{T}$

(4) $(A^{H}A)^{+} = A^{+}(A^{H})^{+}$ ， $(A\ A^{H})^{+} = (A^{H})^{+}A^{+}$

(5) $A^{+} = (A^{H}A)^{+}A^{H} = A^{H}(AA^{H})^{+}$

(6) $R(A^{+}) = R(A^{H}), N(A^{+}) = N(A^{H})$

证明：(1) $A^{+} \in A\{1,2\} \rightarrow$ $\operatorname{rank} A^{+} = \operatorname{rank} A$

(2)Penrose 方程中 (i)$\leftrightarrow$(ii), (iii)$\leftrightarrow$(iv) 互为对称

故 $(A^{+})^{+} = A$

(3)直接采用四个方程验证即可。

(4)同上。

(5)证 X=$(A^{H}A)^{+}A^{H}$ ，由定理 3 知 $X \in A\{1,2,3\}$,且

XA=$(A^{H}A)^{+}A^{H}A = ((A^{H}A)^{+}A^{H}A)^{H} = (XA)^{H}$

$\therefore X = A\{1,2,3,4\}$

(6) $R(A^+) = R(A^H(AA^H)^+) \subseteq R(A^H)$

$N(A^+) = N((A^H A)^+ A^H) \supseteq N(A^H)$，而 $\operatorname{rank} A^+ = \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^H$

$\therefore R(A^+) = R(A^H), N(A^+) = N(A^H)$ [证毕]

推论 1： 若 $A \in C_n^{m\times n}$(列满秩矩阵)，则 $A^+ = (A^H A)^{-1} A^H$

$A \in C_m^{m\times n}$(行满秩矩阵)，则 $A^+ = A^H (AA^H)^{-1}$

推论 2： 对非零列向量α，$\alpha^+ = \left(\alpha^H\alpha\right)^{-1}\alpha^H$；

对非零行向量 β，$\beta^+ = \beta^H\left(\beta\beta^H\right)^{-1}$；$\alpha^H\alpha, \beta\beta^H$均为数。

说明：A,B 可逆，则 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,但一般$(AB)^+ \neq B^+A^+$

如 $A = [1 \quad 0]$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$， $AB = [1]$, $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$(AB)^+ = [1]$， $A^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $B^+A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

作业：P 306-307 3、4、5、 6、8、11、12