§5 矩阵的逆

5.1 可逆矩阵的定义

一元一次方程$ax=b$,当 $a\neq 0$ 时两边乘以 $\frac{1}{a}$ 得 $x=\frac{b}{a}$, 且 $\frac{1}{a}$ 具有下列性质：

$$\frac{1}{a}\cdot a = a\cdot\frac{1}{a} = 1.$$

类似地，可引入可逆矩阵的概念：

定义：对方阵 A,若存在矩阵 B, 满足 $AB=BA=I$,则称 A 是可逆的(invertible). 称B是A的逆矩阵(inverse matrix), 记作A^{-1}.

不可逆矩阵也称为奇异矩阵(singular matrix), 而可逆矩阵也称为非奇异矩阵(nonsingular matrix).

注：存在不可逆方阵，如 $0,\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

5.1 可逆矩阵的定义

定义：对方阵 A,若存在矩阵 B, 满足 $AB = BA = I$,则称 A 是可逆的(invertible), 称B是A的逆矩阵(inverse matrix), 记作 A^{-1}.

不可逆矩阵也称为奇异矩阵(singular matrix), 而可逆矩阵也称为非奇异矩阵(nonsingular matrix).

注：存在不可逆方阵，如 $0, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5.2 矩阵可逆的性质

(1)若方阵 A 满足$AB = I, CA = I,$则 $B = C.$ 特别的, 方阵的逆唯一.

证明: $C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B.$

5.2 矩阵可逆的性质

(2)若 A 可逆, 则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$.

证明: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 两边乘 A^{-1}, 得 $\mathbf{x}=A^{-1}A\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$.

5.2 矩阵可逆的性质

(3) $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非零解$\Longrightarrow A$ 不可逆.

(4)2×2 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆$\Longleftrightarrow ad-bc\neq 0$, 且 $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

例：设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $3\times 6-4\times 5=-2\neq 0$, 故$A$ 可逆,

且 $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

5.2 矩阵可逆的性质

(5)对角矩阵 $D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ 可逆 $\Longleftrightarrow d_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$,

且 $D^{-1}=\begin{pmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{pmatrix}$.

(6)若方阵 A, B 满足 $AB=I$, 则 $BA=I$,且 $A^{-1}=B$.

5.2 矩阵可逆的性质

定理:(1)若 A 是可逆矩阵，则A^{-1} 也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A.$

(2)若 n 阶方阵 A 和 B 都可逆,则AB 可逆,且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

(3)若 A 可逆，则 A^T 也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

5.3 初等矩阵的逆

例

$$E_{21}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D_2(c) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{21}(-5)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{21}(5) \quad P_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{12} \qquad D_2(c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1/c & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

小结：初等矩阵 E 都是可逆的, 其逆把 E 变回 I.

5.3 初等矩阵的逆

$$E_{32}(-4)E_{21}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_{21}(-5)^{-1}E_{32}(-4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

例： $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}$，设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

两个方程组有相同系数矩阵,可以一起消元.增广矩阵写成 $\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1\end{array}\right)$

通过初等矩阵来记录消元过程.

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

方法：Gauss-Jordan消元法

$$(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-3r_2} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) = (I \,\vdots\, A^{-1})$$

因此 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

总结：设 A 可逆, 则

$$\left(A \,\vdots\, I_n\right) \longrightarrow \left(I_n \,\vdots\, A^{-1}\right).$$

W. Jordan

德国大地测量学家 Wilhelm Jordan(1842-1899)改进了Gauss消元法.

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

例： 求 $K=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$的逆.

解: $(K \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&0&1&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-(-\frac{1}{2})r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&0&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&-1&\frac{1}{2}&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow{r_3-(-\frac{2}{3})r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&0&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&-1&\frac{1}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+\frac{3}{4}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-1&0&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&0&\frac{3}{4}&\frac{3}{2}&\frac{3}{4}\\0&0&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

$$\xrightarrow{r_1+\frac{2}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\cdot\frac{3}{4}]{r_1\cdot\frac{1}{2},r_2\cdot\frac{2}{3}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)=\left(I \,\vdots\, K^{-1}\right)$$

因此 $$K^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

5.4 Gauss-Jordan消元法求 A^{-1}

由Gauss-Jordan消元法求逆矩阵的过程知：
设 A 可逆, 则 A 可经过一系列初等行变换化成单位矩阵 I. 因此
有初等矩阵 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 使得

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

故 $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1,\ A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$

- A 可逆 $\Longrightarrow$ A 可表示成一系列初等矩阵的乘积.
  $\Longleftrightarrow$
- $\underbrace{E_k \cdots E_1}_{A^{-1}} \left(A \vdots I \right) = \left(I \vdots A^{-1} \right).$

5.5 矩阵可逆与主元个数

由Gauss-Jordan消元法求逆的过程还可以得到

定理：n 阶矩阵 A 可逆 $\Longleftrightarrow$ A 有 n 个主元.

证明：$\Longleftarrow$)若 n 阶方阵 A 有 n 个主元, 则方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{e}_i(1\le i\le n)$

分别有唯一解 $\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n$. 则 $A(\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n)=I$, 得 A 的右逆.

此时, A可经过一系列初等行变换化为单位矩阵, 即存在初等矩阵

$E_1,E_2,\cdots,E_k$,使得 $E_k\cdots E_1A=I$, 于是得 A 的左逆.

对方阵 A, 右逆 $=$ 左逆 $=$ 逆, 故 A 可逆.

5.5 矩阵可逆与主元个数

$\Longrightarrow$) 设 A 可逆, 即存在矩阵 B, 使 $AB = BA = I$.
假设 A 没有 n 个主元, 则对 A 用初等行变换必产生一个零行, 即存在初等矩阵的乘积 E 使 EA 有零行.
于是 $(EA)B = E(AB) = E$ 也有零行, 这与 E 是初等矩阵的乘积矛盾.
因此 n 阶可逆方阵 A 必有 n 个主元.

由证明过程知
定理：若对 n 阶方阵 A 有 $AB = I$, 则 $BA = I$, 且 $B = A^{-1}$.

5.6 下三角矩阵的逆

主对角线下(上)方元素全为零的方阵称为上(下)三角矩阵.

例:$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ a_2b_1 + a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

一般地，不难证明：

定理：两个n阶下(上)三角矩阵 A 与 B 的乘积仍为下(上)三角矩阵，且AB 的主对角元等于 A与 B 的相应主对角元的乘积.

5.6 下三角矩阵的逆

例: 设 $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&5&1\end{pmatrix}$, 求$L^{-1}$.

解: $(L \vdots I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\4&5&1&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-3&1&0\\0&5&1&-4&0&1\end{array}\right)$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-3&1&0\\0&0&1&11&-5&1\end{array}\right)=(I \vdots L^{-1}).$$

因此 $L^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\11&-5&1\end{pmatrix}$.

5.6 下三角矩阵的逆

一般地，

定理：下三角矩阵可逆 $\Longleftrightarrow$ 主对角元素都非零.

可逆下三角矩阵的逆也是下三角阵.

若原矩阵对角元素都是 1,则逆的对角元也都是1.

5.7 分块矩阵的消元和逆

考虑分块矩阵$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right)$,其中$A$可逆.
则可进行分块矩阵的初等行变换, 使之变成分块上三角矩阵:

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

使用分块初等矩阵, 即有

$$\left(\begin{array}{c:c} I & 0 \\ \hdashline -CA^{-1} & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline 0 & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

5.7 分块矩阵的消元和逆

为把一般分块矩阵变为分块上三角矩阵, 称下列三种变换为分块矩阵的初等行变换：

1.把一个块行减去另一块行左乘以 P;

2.两个块行互换位置;

3.用一个可逆矩阵左乘某一块行.

类似有分块矩阵的初等列变换, 则需要用矩阵作右乘.

5.7 分块矩阵的消元和逆

相应得分块初等矩阵, 如

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C-PA & D-PB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & PB \\ C & D \end{pmatrix}$$

5.7 分块矩阵的消元和逆

例：设 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$ 为可逆的分块上三角矩阵, 其中A_{11} 是$p\times p$矩阵, A_{22} 为 $q\times q$矩阵. 求 A^{-1}.

解：用 B 表示 A^{-1}且把它分块使 $\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}$.

故有
$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=I_p,\quad A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=0,$$
$$A_{22}B_{21}=0,\quad A_{22}B_{22}=I_q.$$

由此解得 $B_{22}=A_{22}^{-1}, B_{21}=0, B_{11}=A_{11}^{-1}, B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$.

于是 $A^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$.

- 分块上三角矩阵可逆 $\Longleftrightarrow$ 主对角线上各分块都是可逆的.