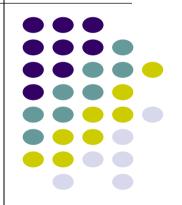
§ 11 四个基本子空间的基与维 数





这次课我们讨论以下四个基本子空间:

设A是一个 $m \times n$ 阶阵, 考虑

列空间(column space)

行空间(row space)

零空间(nullspace)

左零空间(left nullspace)

$$C(A) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

$$C(A^T) = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y} = A^T \mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \}$$

$$N(A) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$

$$N(A^T) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | A^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \}$$
$$= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{x}^T A = \mathbf{0} \}$$



注:

- (1) $C(A^T)$ 是 A 的行向量的全部线性组合.
- (2) C(A) 和 $N(A^T)$ 是 \mathbb{R}^m 的子空间. $C(A^T)$ 和 N(A) 是 \mathbb{R}^n 的子空间.

目标: 求四个基本子空间的基和维数.

设 A 如上,使用消元法

通过 U_0 , A 的主列,即 1,2,4 列为 C(A) 的基.



求 $C(A^T)$ 的基?根据定义 $C(A^T) = C(U_0^T)$,而 $C(U_0^T)$ 的基容易求出.

以上例为例:
$$C(A^{T})$$
的一组基为 $\left\{\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}\right\}$

如何用 A 的行向量给出 $C(A^T)$ 的基?



例:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_2^T - 2\alpha_1^T = \mathbf{0}}$$

可以看出 α_2^T 可用 α_1^T , α_3^T 线性表出, α_1^T , α_3^T 是 $C(A^T)$ 的基.



$$\begin{split}
\left[\mathcal{B} \right] : A &= \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_5^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{\alpha_1^T}{\alpha_3^T} \stackrel{\alpha_3^T}{\alpha_4^T + \alpha_1^T} \\
& \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\alpha_1^T}{\alpha_3^T + \alpha_1^T} = \mathbf{0} \\
& \alpha_4^T - \alpha_1^T - 2\alpha_2^T \\
& \alpha_5^T - 2\alpha_1^T - 4\alpha_2^T - (\alpha_4^T - \alpha_1^T - 2\alpha_2^T) = \mathbf{0} \end{split}$$

可以看出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是 $C(A^T)$ 的基.

注: $C(A^T)$ 的基也可以使用列空间基的求法,即考虑 A^T 的列空间.



求 $N(A^T)$ 的基,两种方法:

(1)求 A^T 的零空间的基础解系.

(1)求
$$A^T$$
 的零空间的基础解系.
(2) $A \longrightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ 前 r 行有主元
即存在可逆阵 $E, EA = U_0$.
$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix}$$

则 $\mathbf{u}_{r+1}^T A = \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{u}_m^T A = \mathbf{0},$ 即 $\mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m$ 是 $N(A^T)$ 的一组基.

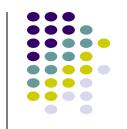
 $(dim N(A^T) = m - r, \mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m \in N(A^T)$ 且线性无关.)



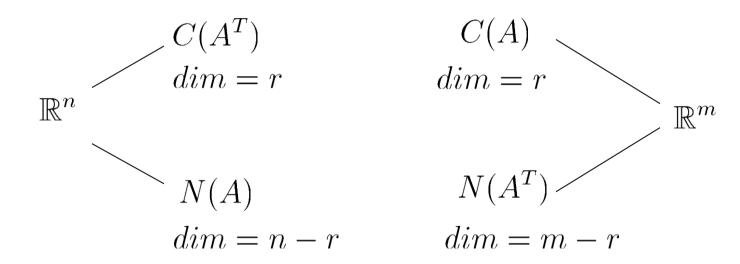
例:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}_{3 \times 5} \qquad \stackrel{-r_1 + r_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

 $\xrightarrow{-r_2+r_3} U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = E_{32}(-1)E_{31}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 因此 $N(A^T)$ 有一组基 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

为了记录 E, 可以考虑 $(A|I_3) \longrightarrow (U_0|E)$.



总结:





设 V 是一个向量空间, W_1, W_2 是两个子空间,则 $W_1 \cap W_2$ 和 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间,但 $W_1 \cup W_2$ 一般不是子空间.

例如: y = x 和 x = 0 均是 \mathbb{R}^2 的一维子空间.

但它们的并不是子空间.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2, \boxtimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \not\in W_1 \cup W_2.$$

这些空间的维数有如下关系:

 $dim W_1 + dim W_2 = dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2).$

例如(上例): $W_1 \cap W_2 = \{0\}, W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ 满足公式.



例: $M_3(\mathbb{R}) = \{3$ 阶实矩阵 $\} = V$ $W_1 = \{3$ 阶对称矩阵 $\}$ $W_2 = \{3$ 阶上三角矩阵 $\}$ 检查 $dim V = 9, dim W_1 = 6, dim W_2 = 6.$ $W_1 \cap W_2 = \{3$ 阶对角阵 $\}$ $dim W_1 \cap W_2 = 3$ $W_1 + W_2 = M_3(\mathbb{R})$ $dim(W_1 + W_2) = 9$

例: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ 的解集 = $\{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x | c_i \in \mathbb{R}\}.$

它是一个空间, dim = 2, 一组基为 $\{\cos x, \sin x\}$.



例: 设
$$\alpha_1 = (1,2,1)^T$$
, $\alpha_2 = (1,1,-1)^T$, $\alpha_3 = (1,3,3)^T$, $\beta_1 = (2,3,-1)^T$, $\beta_2 = (1,2,2)^T$, $\beta_3 = (1,1,-3)^T$.

考虑
$$W_1 = \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 | c_i \in \mathbb{R}\},$$
 $W_2 = \{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 | c_i \in \mathbb{R}\}.$ 对 W 利果

求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的一组基.



解:

$$W_1 + W_2 = \{a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 | a_i, b_i \in \mathbb{R}\}.$$

行变换
$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
 主列为 A 的 $1, 2, 4$ 列,即 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 是 $W_1 + W_2$ 的基.



任取 $\alpha \in W_1 \cap W_2$.

可设 $k_3 = \mu_3 = 0$,因为 α_1, α_2 表出 $\alpha_3; \beta_1, \beta_2$ 表出 β_3 .

解方程组
$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
 求得
$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

则 $\alpha = c(2\alpha_1 + \alpha_2) = c(\beta_1 + \beta_2)$.



因此
$$2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 是 $W_1 \cap W_2$ 的一组基.

验证维数公式:
$$dim W_1 = dim W_2 = 2$$
, $dim(W_1 + W_2) = 3$, $dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

11.3 例题



例:设
$$A$$
为 n 阶方阵,则存在可逆阵 P,Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = r(A)$$

$$\Leftrightarrow P = \begin{pmatrix} (P_1)_{r \times n} \\ (P_2)_{(n-r) \times n} \end{pmatrix}, \quad Q = ((Q_1)_{n \times r}, (Q_2)_{n \times (n-r)}).$$

$$\Rightarrow P_1AQ_1 = I_r, P_1AQ_2 = 0 \Rightarrow P_1AQ = (I_r 0)$$

$$P_2AQ_1 = 0, P_2AQ_2 = 0 \Rightarrow PAQ_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

11.3 例题

$$P_1AQ = (I_r \ 0)$$
 $PAQ_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$

因此 Q的后 n-r列是 N(A)的一组基; P的后 n-r 行是 $N(A^T)$ 的一组基.

$$C(A) = C(AQ_1)$$
. (因为 $C(AQ_1) \subset C(A)$, 且 $dimC(AQ_1) = r(AQ_1) = r$.) 故 AQ_1 列满秩,它的 r 列是 $C(A)$ 的一组基.

同理 $C(A^T) = C(A^T P_1^T)$, $P_1 A$ 行满秩, 它的 r 行是 $C(A^T)$ 的一组基.



11.3 例题



例:设 A, B均为 $m \times n$ 阶阵,且它们的 4个子空间均相等.进一步设 $A = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

则 F = G.

这是因为 A, B的行空间重合,则 A的第 1行 = B的行向量的线性组合 = B的第 1行. 以此类推.