第八讲 矩阵函数与矩阵微分方程

一、矩阵的微分和积分

1. 矩阵导数定义： 若矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 是变量 t 的可微函数，则称 $A(t)$ 可微，其导数定义为

$$\frac{dA}{dt}=A'(t)=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{m\times n}$$

由此出发，函数可以定义高阶导数，类似地，又可以定义偏导数。

2. 矩阵导数性质： 若 $A(t),B(t)$ 是两个可进行相应运算的可微矩阵，则

（1）$\dfrac{d}{dt}[A(t)\pm B(t)]=\dfrac{dA}{dt}\pm\dfrac{dB}{dt}$

（2） $\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$

（3） $\frac{d}{dt}[a(t)A(t)]=\frac{da}{dt}A+a\frac{dA}{dt}$

（4） $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)=Ae^{tA}=e^{tA}A \qquad \frac{d}{dt}\left(\cos\left(tA\right)\right)=-A\sin\left(tA\right)$

$\frac{d}{dt}\left(\sin\left(tA\right)\right)=A\cos\left(tA\right)$

对$\frac{d}{dt}(e^{tA})=Ae^{tA}=e^{tA}A$加以证明。

证明:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA})=\frac{d}{dt}(I+tA+\frac{1}{2!}t^2A^2+\frac{1}{3!}t^3A^3+\cdots)=A+tA^2+\frac{1}{2!}t^2A^3+\cdots$$

$$=A(I+tA+\frac{1}{2!}t^2A^2+\cdots)=Ae^{tA}$$

$$=(I+tA+\frac{1}{2!}t^2A^2+\cdots)A=e^{tA}A$$

[证毕]

3. 矩阵积分定义： 若矩阵$A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$的每个元素$a_{ij}(t)$都是区间$[t_0,t_1]$上的可积函数，则称$A(t)$在区间$[t_0,t_1]$上可积，并定义$A(t)$在$[t_0,t_1]$上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

4. 矩阵积分性质

（1）$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)\pm B(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\pm\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt$

（2）$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)B]dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)B,\quad \int_{t_0}^{t_1}[AB(t)]dt=A\left(\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt\right)$

（3）$\frac{d}{dt}\int_a^t A(s)ds=A(t),\quad \int_a^b A'(t)dt=A(b)-A(a)$

二、一阶线性常系数齐次微分方程组

设有一阶线性常系数齐次微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

式中 t 是自变量，$x_i = x_i(t)$ 是 t 的一元函数 $(i = 1,2,\cdots,n)$, $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 是常系数。令

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则原方程组变成如下矩阵方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t)$$

其解为

$$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}c \xrightarrow{\text{更一般的}} x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$$

对该解求导，可以验证

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{tA}c = Ax(t)$$ 且 $t = 0$ 时， $x(t) = e^{0A}c = Ic = c = x(0)$

表明 $x(t)$确为方程的解。

例 1. 求解微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 \end{cases}$，初始条件为 $x(0) = \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix}$

解： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$， $f(A) = e^{tA} \quad \rightarrow \quad f(\lambda) = e^{t\lambda}$

1° 求出 A 的特征多项式，$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+1)=(\lambda-j)(\lambda+j)$，

$$\lambda_1=j,m_1=1;\lambda_2=-j,m_2=1$$

2° 定义待定系数的多项式 $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$

3° 解方程

$$g(\lambda_1)=f(\lambda_1)=e^{jt}=\cos t+j\sin t=c_0+jc_1$$

$$g(\lambda_2)=f(\lambda_2)=e^{-jt}=\cos t-j\sin t=c_0-jc_1$$

$$\begin{cases}c_0=\cos t\\ c_1=\sin t\end{cases}$$

4° $g(A)=c_0I+c_1A=\begin{bmatrix}\cos t & 0\\ 0 & \cos t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \sin t\\ -\sin t & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$

$$=f(A)=e^{tA}$$

$$x(t)=e^{tA}x(0)=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1(0)\\ \xi_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1(0)\cos t+\xi_2(0)\sin t\\ -\xi_1(0)\sin t+\xi_2(0)\cos t\end{pmatrix}$$

三、一阶线性非齐次常系数微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

令 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^{\mathrm{T}}$

$$b(t) = [b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)]^{\mathrm{T}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

方程组化为矩阵方程 $\dfrac{dx}{dt} = Ax + b$

设 $\tilde{x}$ 为该方程的一个特解，则

$$\frac{d}{dt}(x-\tilde{x}) = A(x-\tilde{x})$$

则 $x-\tilde{x} = e^{tA}c \Rightarrow x = e^{tA}c + \tilde{x}$

采用常系数变易法求 $\tilde{x}$，即设 $\tilde{x} = e^{tA}c(t)$，代入方程得：

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{tA})c(t) + e^{tA}\frac{dc}{dt} = Ae^{tA}c(t) + e^{tA}\frac{dc}{dt}$$

$$= A\tilde{x} + e^{tA}\frac{dc}{dt} = A\tilde{x} + b \Rightarrow \frac{dc}{dt} = e^{-tA}b(t)$$

$$\therefore \quad c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds$$

$$\therefore \quad x = e^{tA}c + \tilde{x} = e^{tA}c + e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds = e^{tA}\left[c + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}b(s)ds\right]$$

例 2. 求解非齐次微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + 1 \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 + 2 \end{cases}，\quad 初始条件为\ x(0) = \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix}$$

解：$e^{(t-s)A} = \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix}$

$$\int_0^t e^{(t-s)A} b(s)ds = \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} \int_0^t (\cos(t-s) + 2\sin(t-s))ds \\ \int_0^t (-\sin(t-s) + 2\cos(t-s))ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t - 2\cos t + 2 \\ \cos t + 2\sin t - 1 \end{pmatrix}$$

所以微分方程组的解为：

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t - 2\cos t + 2 \\ \cos t + 2\sin t - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1(0)\cos t + \xi_2(0)\sin t + \sin t - 2\cos t + 2 \\ -\xi_1(0)\sin t + \xi_2(0)\cos t + \cos t + 2\sin t - 1 \end{pmatrix}$$

说明：高阶常微分方程常可以化为一阶常微分方程组来处理，

如： $$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f$$

令 $x_1=y, x_2=\frac{dy}{dt}$，则可得

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=x_2 \\ \frac{dx_2}{dt}=\frac{1}{a}(f-cx_1-bx_2)=-\frac{c}{a}x_1-\frac{b}{a}x_2+\frac{f}{a} \end{cases}$$

一般地，n 阶常微分方程可以化为 n 个一阶常微分方程组成的方程组。

作业：**p170-171 5、9; p177 3、4**