§ 11. 计算机图像

1. 引言

我们学习线性代数在计算机图像上的基本应用. 我们熟悉的三维空间的基本变换是：平移(translation), 伸缩 (rescaling), 旋转 （rotation), 投影和反射（projection, reflection).

除了第一个，另外的都是$\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$的线性变换， 如何使平移能写成线性变换，解决的办法是齐次坐标系统(homogeneous coordinate system):

三维空间中一个点的齐次坐标是$(x, y, z, 1)$或$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$,

一个向量的齐次坐标是$(x, y, z, 0)$或$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. 引言

定义 一个函数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$是一个刚体运动(rigid motion), 如果$\forall v, w \in \mathbf{R}^n$, $||f(v) - f(w)|| = ||v - w||$.

定理 $\mathbf{R}^3$上的刚体运动是平移，旋转和反射的合成.

此时，$f(v) = Av + v_0$， 其中A是三阶正交阵。

1. 引言

三阶正交阵的分类： 设A是一个三阶正交阵，则存在实可逆阵P,

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

其中$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

若右边矩阵的$(3,3)$位置取正号，A是一个旋转矩阵，旋转轴是α_3所在直线，
旋转角度是沿α_3方向逆时针转θ角；
若右边矩阵的$(3,3)$位置取负号，A将α_3变为$-\alpha_3$,将α_1,α_2所在平面逆时针旋转θ角。

2.平移

一个平移是一个变换 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\forall\alpha\in\mathbf{R}^n,T(\alpha)=\alpha+\alpha_0$, 其中 $\alpha_0\neq 0\in\mathbf{R}^n$是一个固定的向量.

例1. $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\alpha=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x+2\\y\end{pmatrix}$. 设 (0,0), （1,0), (0,1) 构成一个三角形Δ, $T(\Delta)$是Δ向右平移两个单位.

性质:

(1)平移保持直线、夹角和距离;

(2)平移不是一个线性变换，因为$T(\vec{0})=\alpha_0\neq\vec{0}$.

2. 平移

问题: 如何把平移变换转化为一个线性变换? 即通过矩阵×向量的形式来表达一个平移变换.

答案: 齐次坐标 (homogeneous coordinate).

考虑一个映射$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R}^3$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. 这个映射将$\mathbf{R}^2$中的点映射到它的齐次坐标，这是个嵌入. 使用这种嵌入，回到上例的平移 $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$, 将变为$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. 平移

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$ 即$T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, 将 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ 映成$\begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

一般地, 设$T: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$是一个平移，即$T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ \vdots \\ x_n + a_n \end{pmatrix}$, 其中$\alpha_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$是一个 固定向量.

2. 平移

考虑$T:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}^{n+1}$满足

$$T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&a_1\\0&1&\cdots&0&a_2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&a_n\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_n&\alpha_0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix},$$

则 $T\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+a_1\\ \vdots\\ x_n+a_n\\ 1\end{pmatrix}$, 其中$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}$是$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$的齐次 坐标.

2. 平移

嵌入的几何含义.

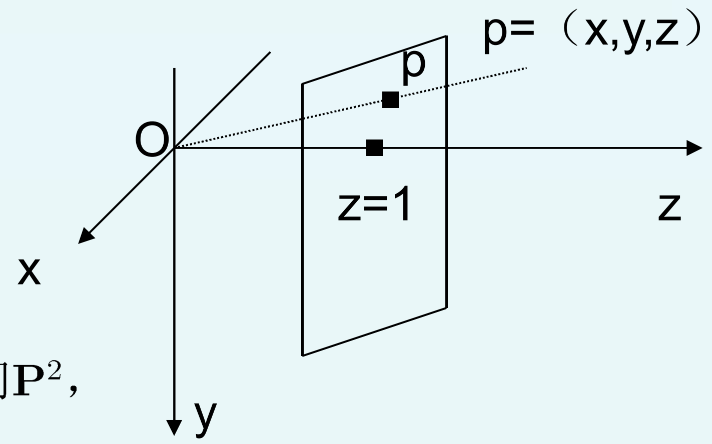
过原点和点$P=(x,y,z)(z\neq 0)$的直线，和平面$z=1$交于一点$P=(\frac{x}{z},\frac{y}{z},1)$, 则$(\frac{x}{z},\frac{y}{z})\in\mathbf{R}^2$的齐次坐标是$(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$即过O和 P的直线.

例如： (6,9,3)是（4,6,2)均是(2,3)的齐次坐标，

在$\mathbf{R}^3$中，定义关系$\alpha,\beta\in\mathbf{R}^3$ 是等价的

$\Leftrightarrow \exists\lambda\neq 0, \alpha=\lambda\beta$, 显然，$\alpha,\beta$等价

$\Leftrightarrow \alpha$ 和 β在一条直线上.



$\mathbf{R}^3$中的等价类全体（过原点直线）构成一个2维射影空间$\mathbf{P}^2$，

2. 平移

有一个嵌入映射

$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{P}^2$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{R}^2$中的向量的齐次坐标形式是将1换成0，$\mathbf{R}^2 \to \mathbf{P}^2$，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. 平移$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + x_0 \\ y + y_0 \end{pmatrix}$是射影变换$\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$的限制。

3. 伸缩

伸缩: 例如一张图片, 长度变为原来的$\frac{3}{4}$, 宽度为原来的$\frac{1}{2}$, 这个变换矩阵为 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 在三维空间中看矩阵$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & \\ & \frac{3}{4} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, 为了和平移统一, 应该考虑 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{3}{4} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

一般地, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x \\ c_2 y \\ c_3 z \end{pmatrix}$, 矩阵$\begin{pmatrix} c_1 & & \\ & c_2 & \\ & & c_3 \end{pmatrix}$.

射影形式 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x \\ c_2 y \\ c_3 z \\ 1 \end{pmatrix}$, 矩阵$\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & c_3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

4. 旋转（Rotation)

在$\mathbf{R}^2$中， 考 虑 旋 转 变 换 $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x cos\theta - y sin\theta \\ x sin\theta + y cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 即将任一点(x,y)对应的向量逆时针 旋转$\theta$角得到向量$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

如 果 使 用 齐 次 坐 标， 表 达 如 下. $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x cos\theta - y sin\theta \\ x sin\theta + y cos\theta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 旋转（Rotation)

在$\mathbf{R}^3$中的旋转较为复杂，我们先考虑特殊情形：

(1) 设旋转轴为z轴，任意向量$\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3$能分解成 两个向量$\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$关于z轴逆时针旋转$\theta$角得到向量$\begin{pmatrix}x'\\y'\\0\end{pmatrix}$, 则$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$. 向量$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z\end{pmatrix}$即为$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ 绕着z轴逆时针旋转θ角所得.

4. 旋转（Rotation)

(2) 设旋转轴为y轴，任意向量$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$沿着 y轴逆时针旋转$\theta$角得到向量$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. 则

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(3)设旋转轴为x轴， 则关于x轴的逆时针旋转θ角的变换$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$满足 $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

4. 旋转（Rotation)

一般情形. 设$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$是一个单位向量, 即$||\vec{n}|| = 1$,我们考虑如下变换$T$， 以$\vec{n}$为所在直线为旋转轴，沿着$\vec{n}$的方向逆时针旋转 θ角，设 $\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$， $T(\beta) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

(1)以$\vec{n}$为法向量的过原点的平面为$n^T\beta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$, 即在$a_1x + a_2y + a_3z = 0$. 记平面为$\Pi$.

(2)$\vec{\beta}$在Π上投影为$(\mathbf{I} - nn^T)\beta = \beta - (nn^T)\beta$. 即$\beta$ 减去它在$\vec{n}$上的投影. 投影向量即为$\beta_\Pi = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

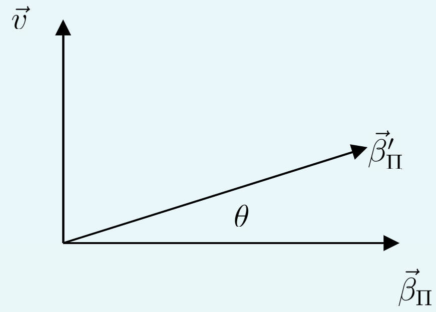
(3)令$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{\beta}_\Pi$， 则 $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3y_0 + a_2z_0 \\ a_3x_0 - a_1z_0 \\ -a_2x_0 + a_1y_0 \end{pmatrix}$.

4. 旋转（Rotation)

(4) $\vec{\beta}_\Pi, \vec{v}$是平面Π的一组基，一组正交基$\vec{\beta}_\Pi$逆时针 旋转θ角，得到向量$\vec{\beta}'_\Pi$,

则$\vec{\beta}'_\Pi = cos\theta\vec{\beta}_\Pi + sin\theta\vec{v} = \begin{pmatrix} (cos\theta)x_0 - (a_3 sin\theta)y_0 + (a_2 sin\theta)z_0 \\ (cos\theta)y_0 + (a_3 sin\theta)x_0 - (a_1 sin\theta)z_0 \\ (cos\theta)z_0 - (a_2 sin\theta)x_0 + (a_1 sin\theta)y_0 \end{pmatrix}$

$= [cos\theta\mathbf{I}_3 + sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.



最后，$\beta' = \vec{\beta}'_\Pi + (nn^T)\beta = [cos\theta\mathbf{I}_3 + sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}](\mathbf{I}_3 - nn^T)\beta + (nn^T)\beta$, 令$A = [cos\theta\mathbf{I}_3 + sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}](\mathbf{I}_3 - nn^T) + (nn^T)$

则$\beta' = A\beta$.其中 $A = cos\theta\mathbf{I}_3 + (1 - cos\theta)nn^T + sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} cos\theta + a_1^2(1-cos\theta) & a_1a_2(1-cos\theta) - a_3 sin\theta & a_1a_3(1-cos\theta) + a_2 sin\theta \\ a_1a_2(1-cos\theta) + a_3 sin\theta & cos\theta + a_2^2(1-cos\theta) & a_2a_3(1-cos\theta) - a_1 sin\theta \\ a_1a_3(1-cos\theta) - a_2 sin\theta & a_2a_3(1-cos\theta) + a_1 sin\theta & cos\theta + a_3^2(1-cos\theta) \end{pmatrix}$$

4. 旋转（Rotation)

更确切地，我们记$R(\vec{n},\theta)=A$.

性质：(1)$R(\vec{n},\theta_1)R(\vec{n},\theta_2)=R(\vec{n},\theta_1)\bullet R(\vec{n},\theta_2)=R(\vec{n},\theta_1+\theta_2)$

(2)$R(\vec{n},2\pi k+\theta)=R(\vec{n},\theta_1),k=0,\pm1,\pm2,...$

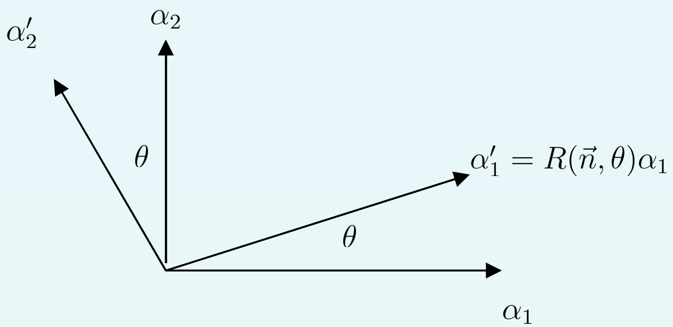
(3)$R(\vec{n},\theta)^{-1}=R(\vec{n},-\theta)=R(-\vec{n},\theta)$

(4) 设平面Π : $a_1x+a_2y+a_2z=0$与$\vec{n}$垂直，取 $\alpha_1,\alpha_2\in\Pi$, 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\vec{n}$ 是$\mathbf{R}^3$的一组标准正交基，且符合右手法则. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\vec{n})$， 则$P$是一个正交阵，我们有 $P\vec{e}_3=\vec{n}$, $P^{-1}R(\vec{n},\theta)P=R(\vec{e}_3,\theta)$. 其中， $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $R(\vec{e}_3,\theta)=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\theta & 0\\ sin\theta & cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4. 旋转（Rotation)

的确，$\alpha_1' = R(\vec{n},\theta)\alpha_1 = cos\theta\alpha_1 + sin\theta\alpha_2$

$\alpha_2' = R(\vec{n},\theta)\alpha_2 = -sin\theta\alpha_1 + cos\theta\alpha_2$, 正如下图



由（4）， $R(\vec{n},\theta)$有特征值$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = e^{i\theta}, \lambda_3 = e^{-i\theta}$, 其中$\vec{n}$是$R(\vec{n},\theta)$关于$\lambda_1 = 1$的特征向量.

我们也可以使用齐次坐标形式：$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} R(\vec{n},\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\vec{n},\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix}$

5. 投影和反射(projection and reflection)

设π_0为一平面过原点，法向量为n, $||n|| = 1$, 则π_0的方程为 $n^T v = 0$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, 将$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ 映到它在π_0上的投影. 我们写出T的矩阵表示(投影矩阵).

$\forall \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, 则$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中$\alpha_1$和$n$在一条线上,$\alpha_2$和$n$垂直. 则$T(\alpha) = \alpha_2$.

设$\alpha_1 = \lambda n$, 则$n^T \alpha_1 = \lambda$, $n^T \alpha = n^T \alpha_1 \Rightarrow \lambda = n^T \alpha$. $\alpha_2 = T(\alpha) = \alpha - (n^T \alpha) n = \alpha - (nn^T)\alpha = (\mathbf{I} - nn^T)\alpha \Rightarrow T$的矩阵表示为$\mathbf{I} - nn^T$.

例如： 关于平面$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z = 0$的投影矩阵.

$$\mathbf{I} - nn^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$ 注：$||n|| = 1$.

5. 投影和反射(projection and reflection)

性质：$\mathbf{I}-nn^T$是一幂等对称阵.

设π_{v_0}不过原点，经过$v_0 \neq 0 \in \mathbf{R}^3$, $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, 考虑$T_{v_0}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, 将$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ 映射到它在π_{v_0}上投影，这不是一个线性变换，为了写出矩阵，考虑射影形式. π_{v_0}的方程为$n^T(v-v_0)=0$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \overset{T_{-v_0}}{\to} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} \mathbf{I}-nn^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\to} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \overset{T_{v_0}}{\to} \begin{pmatrix} u+x_0 \\ v+y_0 \\ z+z_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} u+x_0 \\ v+y_0 \\ z+z_0 \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$在$\pi_{v_0}$上的投影. 即相应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}-nn^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. 投影和反射(projection and reflection)

例 考虑平面$x+y+z=1$, 求原点在其上的投影.

解答：$n=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, 求得 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

5. 投影和反射(projection and reflection)

关于一个平面 π_{v_0}的反射.

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - nn^T)[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}] + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

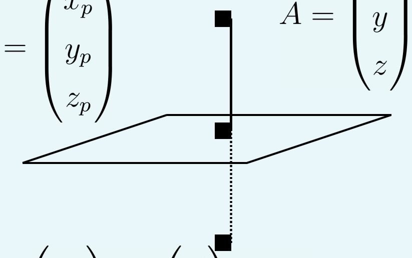
$$\vec{O}A_F = \vec{O}A + 2\vec{A}A_p = (\mathbf{I} - 2nn^T)[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}]$$

关于反射的矩阵为$\mathbf{I} - 2nn^T$(平面过原点).

若平面不过原点 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{I} & v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} - 2nn^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -v_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

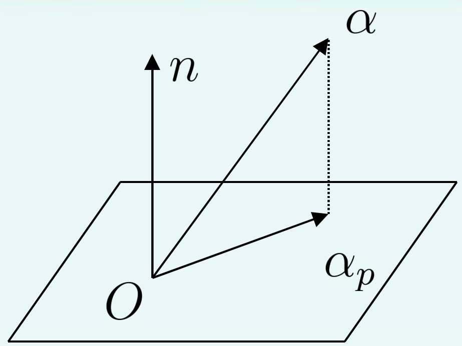
投影点 $A_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix}$



反射点 $\begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_R$

5.投影和反射(projection and reflection)

$$\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ 平面 n^Tv=0,\ v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ n=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\ ||n||=1.\qquad \left.\begin{array}{c}\alpha-\alpha_p=\lambda n 或者 n^T(\alpha-\alpha_p)=\lambda\\ n^T\alpha_p=0\end{array}\right\}$$



$$\Rightarrow \lambda=n^T\alpha.\ 即 \alpha_p=\alpha-(nn^T)\alpha=(\mathbf{I}-nn^T)\alpha.$$

$$平面 n^T(v-v_0)=0,\ v,n 同上，\quad v_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{c}\alpha-\alpha_p=\lambda n\\ n^T\alpha_p-v_0=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow n^T(\alpha-v_0)=\lambda.$$

$$即 \alpha_p=\alpha-nn^T(\alpha-v_0)=(\mathbf{I}-nn^T)(\alpha-v_0)+v_0.$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{pmatrix}\xrightarrow{\mathbf{I}-nn^T}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}u+x_0\\v+y_0\\w+z_0\end{pmatrix}.$$

$$\alpha\to\alpha-v_0\to(\mathbf{I}-nn^T)(\alpha-v)\to\alpha_p$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{-v_0}}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{pmatrix}\mathbf{I}-nn^T&0\\0&1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}u\\v\\w\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{v_0}}\begin{pmatrix}u+x_0\\v+y_0\\w+z_0\\1\end{pmatrix}.$$

5.投影和反射(projection and reflection)

二阶反射阵

设$l \subseteq \mathbf{R}^2$是一条过原点直线，我们考虑关于镜面l的反射变换 $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$，$T(\alpha) = R_l\alpha$, R_l为 反射矩阵. l和x轴的逆时针夹角为θ（即x轴逆时针旋转θ角和l重合）. 令$B = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}$. u是l上单位向量，v是和l垂直的单位向量l(逆时针夹角为90度), 则$Be_1 = u$, $Be_2 = v$.

由R_l的定义$R_lu = u, R_lv = -v$.

即$R_lBe_1 = Be_1, RBe_2 = -Be_2$.

$\Rightarrow (B^{-1}R_lB)e_1 = e_1, (B^{-1}R_lB)e_2 = e_2$, $\Rightarrow B^{-1}R_lB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow R_l = B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B^{-1} = \begin{pmatrix} cos2\theta & sin2\theta \\ sin2\theta & -cos2\theta \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是关于镜面$x$轴的反射. 上式说明不同镜面的 反射矩阵相似.

设l_1和l_2是两个镜面, u_1, u_2是乡音的单位向量. 若存在正交阵B, $Bu_1 = u_2$, 则反射矩阵的关系$B^{-1}R_2B = R_1$