§18 Cramer法则及行列式的几何意义

18.1 引言

这次课我们考虑行列式的几个应用.

我们需要以下定理.

定理：行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}C_{s1} + a_{i2}C_{s2} + \cdots + a_{in}C_{sn} = 0 (i \neq s),$$
$$a_{1j}C_{1t} + a_{2j}C_{2t} + \cdots + a_{nj}C_{nt} = 0 (j \neq t).$$

18.1 引言

理解：

$$D = a_{s1}C_{s1} + \cdots + a_{sn}C_{sn}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$a_{i1}C_{s1} + \cdots + a_{in}C_{sn}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

18.1 引言

综合定理及推论得“代数余子式的重要性质”：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{jk} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}C_{kj} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

例：设 $D = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算 $C_{41} + C_{42} + C_{43} + C_{44}$.

$$= a_{31}C_{41} + a_{32}C_{42} + a_{33}C_{43} + a_{34}C_{44}$$

$$= 0$$

18.1 引言

例：设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}$，求 $C_{31}+C_{32}+C_{33}$ 和 $C_{34}+C_{35}$.

分析：注意到第二、第四行元素的特点，利用行列式按某行展开定理的推论，将 $C_{31}+C_{32}+C_{33}$ 与 $C_{34}+C_{35}$ 分别看成整体，列方程组求解.

解：
$$\begin{cases}a_{21}C_{31}+a_{22}C_{32}+a_{23}C_{33}+a_{24}C_{34}+a_{25}C_{35}=0,\\a_{41}C_{31}+a_{42}C_{32}+a_{43}C_{33}+a_{44}C_{34}+a_{45}C_{35}=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2(C_{31}+C_{32}+C_{33})+(C_{34}+C_{35})=0,\\(C_{31}+C_{32}+C_{33})+2(C_{34}+C_{35})=0.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}C_{31}+C_{32}+C_{33}=0\\C_{34}+C_{35}=0\end{cases}$$

18.2.1 求逆矩阵公式

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 可逆，构造如下矩阵，称为 A 的伴随矩阵(adjoint of A).

$$adj(A)=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

$(adj(A))^T$：A 的代数余子式矩阵.

18.2.1 求逆矩阵公式

例：$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -2 & -6 & 3\\ -7 & 5 & 0\end{pmatrix}$

$$C_{11}=-15, C_{12}=-21, C_{13}=-52,$$
$$C_{21}=5, C_{22}=7, C_{23}=-34,$$
$$C_{31}=12, C_{32}=-14, C_{33}=-20.$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}-15 & 5 & 12\\ -21 & 7 & -14\\ -52 & -34 & -20\end{pmatrix}.$$

18.2.1 求逆矩阵公式

定理：设 A 可逆，则 $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|}$.

上例：$|A| = -154$.

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-154}\begin{pmatrix} -15 & 5 & 12 \\ -21 & 7 & -14 \\ -52 & -34 & -20 \end{pmatrix}.$$

18.2.1 求逆矩阵公式

证明：

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=: (t_{ij})_{n\times n}.$$

其中，$t_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}.$

18.2.1 求逆矩阵公式

由引言中定理，

$$t_{ij} = \begin{cases} det(A), & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

故

$$A \cdot adj(A) = \begin{pmatrix} |A| & & \\ & \ddots & \\ & & |A| \end{pmatrix} = det(A) I_n.$$

18.2.1 求逆矩阵公式

例：若 A 是一个 n 阶阵，求 $adj(A)$ 的秩的可能性.

解：

$$r(A)=n \implies r(adj(A))=n$$

$$r(A)=n-1 \implies A\cdot adj(A)=0$$

故 $adj(A)$ 的列属于 A 的零空间.

而 $dim N(A)=1$，且存在 $C_{ij}\neq 0$, 故 $r(adj(A))=1$.

$$r(A)\leq n-2 \implies A \text{ 的任意 } n-1 \text{ 阶子矩阵不可逆.}$$

$$\implies C_{ij}=0 \implies adj(A)=0.$$

18.2.2 线性方程组的公式解

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为可逆方阵，$\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$. 我们来学习$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的解的公式.

$$n=2,\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\y=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{cases}$$ (难于记忆)

写成行列式的形式

$$x=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}},y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}.$$

18.2.2 线性方程组的公式解

一般地，不使用行列式，公式将非常复杂.

定理(Cramer's rule)：设 A 可逆，$\mathbf{b}$ 如上，令 B_k 是将 A 的第 k 列换成向量 $\mathbf{b}$ 后的矩阵. 则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的唯一解为

$$x_1=\frac{det(B_1)}{det A},\cdots,x_n=\frac{det(B_n)}{det A}.$$

18.2.2 线性方程组的公式解

例：$\begin{cases} x & +2y & +3z & = 17 \\ 3x & +2y & +z & = 11 \\ x & -5y & +z & = -5 \end{cases}$

解：

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad detB_1 = \begin{vmatrix} 17 & 2 & 3 \\ 11 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad detB_2 = \begin{vmatrix} 1 & 17 & 3 \\ 3 & 11 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$detB_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 17 \\ 3 & 2 & 11 \\ 1 & -5 & -5 \end{vmatrix} \Longrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{det(B_1)}{detA}, \frac{det(B_2)}{detA}, \frac{det(B_3)}{detA}\right) = (1,2,4)$$

18.2.2 线性方程组的公式解

定理的证明：A 可逆，$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的唯一解是 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow x_i = \frac{b_1 C_{1i} + b_2 C_{2i} + \cdots + b_n C_{ni}}{det A}$$

18.2.2 线性方程组的公式解

考虑矩阵

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

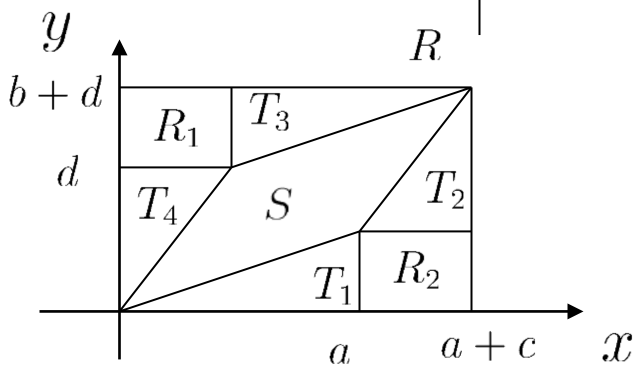
则 B_i 的行列式可沿着第 i 列展开，b_j 的代数余子式恰好是 C_{ji}，即

$$det B_i = b_1 C_{1i} + \cdots + b_n C_{ni}.$$

因此

$$x_i = \frac{det B_i}{det A}.$$

18.3 计算有向长度、面积和体积



考虑右图平行四边形 S

S 的面积为

$$A(S) = A(R) - A(R_1) - A(R_2)$$
$$-A(T_1) - A(T_2) - A(T_3) - A(T_4)$$
$$= |ad - bc|$$

方向："$+$"或"$-$"取决于向量 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 逆(顺)时针转到 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

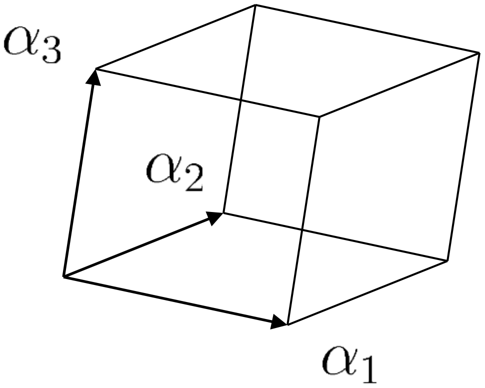
$$S \text{ 的有向面积} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

18.3 计算有向长度、面积和体积

三维情形：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

一个三阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的行列式 $= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 围成的平行六面体的有向体积.



18.3 计算有向长度、面积和体积

特别地，若 α_1, α_2 在 $x0y$ 平面上，则我们有如下推论.

推论：平面 $x0y$ 上三点 $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ 围成三角形的面积为

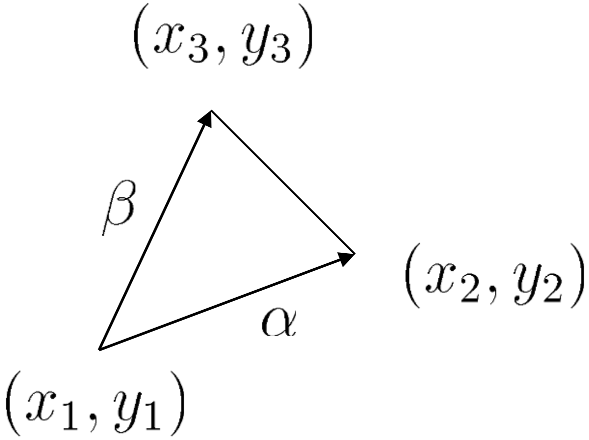
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

18.3 计算有向长度、面积和体积

证明：令 $\alpha = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$



为 α, β 张成平行四边形面积.

18.3 计算有向长度、面积和体积

特别地，若 α_3 和 α_1, α_2 所在平面垂直，则可以通过行列式计算 α_1, α_2 围成平行四边形的面积.

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ 线性无关. 求一个向量 α_3 使得

$$\alpha_3 \perp \alpha_1, \alpha_3 \perp \alpha_2, ||\alpha_3|| = 1?$$

18.3 计算有向长度、面积和体积

设 $\alpha_3=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，则 $\begin{cases}a^2+b^2+c^2=1\\x_1a+y_1b+z_1c=0\\x_2a+y_2b+z_2c=0\end{cases}$

即 $\begin{pmatrix}a&b&c\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

令 $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{pmatrix}$，则 α_1,α_2 无关，$\alpha_3\perp\alpha_1,\alpha_3\perp\alpha_2\Longrightarrow A$ 可逆.

18.3 计算有向长度、面积和体积

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad adj(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \alpha_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{pmatrix} = \frac{\pm \mathbf{u}}{||\mathbf{u}||}$$

其中，$\mathbf{u} = (\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix})^T.$

18.3 计算有向长度、面积和体积

于是我们有

平行四边形面积 $=$ 平行六面体的体积(高 $=1$)

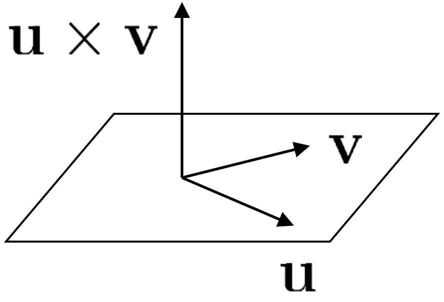
$$= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & a \\ y_1 & y_2 & b \\ z_1 & z_2 & c \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_3^T \mathbf{u} = \pm \alpha_3^T (||\mathbf{u}||\alpha_3) = \pm ||\mathbf{u}||$$

$\pm$ 号：α_3 的选取有两种可能.

18.3 计算有向长度、面积和体积

定义：给定两个向量 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 是一个和 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 均垂直的向量，且 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 形成一个右手系, $||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||$ 等于 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 围成的平行四边形的面积. 称 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 为 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的叉积 (cross product)或外积(exterior product).



18.3 计算有向长度、面积和体积

定理：$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{pmatrix} u_2v_3-u_3v_2 \\ u_3v_1-u_1v_3 \\ u_1v_2-u_2v_1 \end{pmatrix}$，记作 $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 是 x,y,z 轴上单位向量.

性质：1. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-\mathbf{v}\times\mathbf{u}$. $(\Longrightarrow \mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0})$

2. $(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\times\mathbf{v}=\mathbf{u}_1\times\mathbf{v}+\mathbf{u}_2\times\mathbf{v}$.

18.3 计算有向长度、面积和体积

例：$\mathbf{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\mathbf{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$

验证 $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}.$

例：$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}.$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(3\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(\mathbf{i}+4\mathbf{j})=12\mathbf{k}-2\mathbf{k}=10\mathbf{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$$

18.3 计算有向长度、面积和体积

注：$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 的三个坐标是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 在三个坐标平面上的投影向量形成的平行四边形的面积. 例如 $u_1v_2-u_2v_1$ 是在 $x0y$ 平面上的投影面积.

定义：给定三个向量 $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \mathbf{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$，它们的混合积或三重积(triple product)定义为 $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$，即 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 的点积.

18.3 计算有向长度、面积和体积

定理：$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

实际上，$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

18.3 计算有向长度、面积和体积

推论一：$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{v}.$

推论二：$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 形成平行六面体的有向体积.

$\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 在一个平面上 $\Longleftrightarrow (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=0$

推论三：1.过两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的直线方程为 $\begin{vmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0.$

2.过三点 $(x_i,y_i,z_i), i=1,2,3$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}=0.$$

18.3 计算有向长度、面积和体积

推论三的证明：

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 共线 $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ 共面.

2. $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z & 0 \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z & 0 \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 在 $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$ 所在平面 $\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_i - x \\ y_i - y \\ z_i - z \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3$ 共面.

18.4 和QR分解的联系

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\alpha_i\in\mathbb{R}^3, A$ 可逆.

Gram-Schmidt正交化给出 $A\longrightarrow Q=(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$

$$A=QR,\ R=\begin{pmatrix}||\mathbf{e}_1|| & * & * \\ 0 & ||\mathbf{e}_2|| & * \\ 0 & 0 & ||\mathbf{e}_3||\end{pmatrix}.$$

$||\mathbf{e_1}||$ 是 α_1 的长度.

$||\mathbf{e_2}||$ 是平行四边形关于底 α_1 上的高.

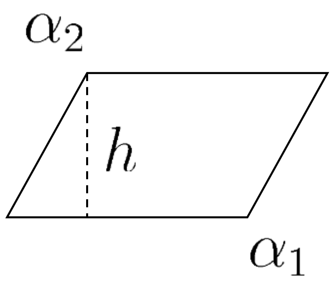
$||\mathbf{e_3}||$ 是平行六面体在 α_1,α_2 形成的底上的高.

$|detA|=||\mathbf{e_1}||\cdot||\mathbf{e_2}||\cdot||\mathbf{e_3}||=$ 平行六面体体积绝对值.

18.4 和QR分解的联系

给定 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^3$, 前面我们使用外积计算了 α_1, α_2 形成的平行四边形的面积. 这里我们使用 QR 分解.

令 $A_0 = (\alpha_1, \alpha_2)_{3\times 2}$, 设 α_1, α_2 线性无关(A_0 列满秩).



$$A_0 = Q_{3\times 2} R_{2\times 2} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \begin{pmatrix} ||\mathbf{e}_1|| & * \\ 0 & ||\mathbf{e}_2|| \end{pmatrix}.$$

$||\mathbf{e}_1|| = ||\alpha_1||, ||\mathbf{e}_2|| =$ 高 h.

$$A_0^T A_0 = R^T R \Longrightarrow det(A_0^T A_0) = det(R^T R) = [det(R)]^2$$
$$= [||\mathbf{e}_1|| \cdot ||\mathbf{e}_2||]^2 = S^2$$

定理: $S^2 = det(A_0^T A_0)$.