第五讲 对角化与Jordan标准形

一、正规矩阵

1. 实对称矩阵与厄米矩阵

实对称矩阵：实矩阵 A $\quad A^{\mathrm{T}} = A$

厄米矩阵：复矩阵 A $\quad A^{\mathrm{H}} = A$

实反对称矩阵：实矩阵 A $\quad A^{\mathrm{T}} = -A$

反厄米矩阵：复矩阵 A $\quad A^{\mathrm{H}} = -A$

2. 正交矩阵和酉矩阵

正交矩阵：实矩阵 A $\quad A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = I$ $\quad$（$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$）

酉矩阵：复矩阵 A $\quad A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}} = I$ $\quad$（$A^{-1} = A^{\mathrm{H}}$）

3. 正交相似变换和酉相似变换

P为正交矩阵， A为实矩阵， $P^{-1}AP$为对A的正交相似变换；
P为酉矩阵， A为复矩阵， $P^{-1}AP$为对A的酉相似变换。

4. 正规矩阵

实矩阵A，若满足$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}}$，则$A$为实正规矩阵；
复矩阵A，若满足$A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$，则$A$为复正规矩阵。

实对称矩阵、实反对称矩阵、正交矩阵均为实正规矩阵；
厄米矩阵、反厄米矩阵、酉矩阵均为复正规矩阵。

二、酉对角化

1. Schur 引理： 设数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n$阶方阵$A$的特征值，则存在酉矩阵$U$，使

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

[证明]：　设x_1是A的属于特征值λ_1的特征向量，即$Ax_1=\lambda_1x_1$，

$u_1=\dfrac{x_1}{|x_1|}$，并由其扩充为一组标准正交向量$u_1,u_2,\cdots,u_n$

$$u_i^{\mathrm{H}}u_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

令$U_0=[u_1\ \ u_2\ \ \cdots\ \ u_n]$，则$U_0$为酉矩阵：

$$U_0^H U_0 = \begin{bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \\ \vdots \\ u_n^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^H u_1 & u_1^H u_2 & \cdots & u_1^H u_n \\ u_2^H u_1 & u_2^H u_2 & \cdots & u_2^H u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^H u_1 & u_n^H u_2 & \cdots & u_n^H u_n \end{bmatrix} = I_n$$

对A进行酉相似变换：

$$U_0^H A U_0 = \begin{bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \\ \vdots \\ u_n^H \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = (u_i^H A u_j)_{n\times n}$$

第一列： $u_i^{\mathrm{H}} A u_1 = u_i^{\mathrm{H}} \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_i^{\mathrm{H}} u_1 = \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ \lambda_1 & i = 1 \end{cases}$

$$U_0^H A U_0 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & (A_1)_{(n-1)\times(n-1)} \\ 0 & \end{array}\right]$$

$$(A_1)_{(n-1)(n-1)} = \begin{bmatrix} u_2^H \\ u_3^H \\ \vdots \\ u_n^H \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^H A u_2 & \cdots & u_2^H A u_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^H A u_2 & \cdots & u_n^H A u_n \end{bmatrix}$$

相似矩阵具有相同的特征值，因此，A_1 的特征值为 $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$。采用相同的方式，可得一个酉矩阵$U_1$，使得

$$U_1^H A_1 U_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & (A_2)_{(n-2)\times(n-2)} \\ 0 & \end{array}\right]$$

依次类推，分别可找到酉矩阵$U_2,U_3,\cdots,U_{n-2}$使

$$U_2^H A_2 U_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_3 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & (A_3)_{(n-3)\times(n-3)} \\ 0 & \end{array}\right]$$

$$\vdots$$

$$U_{n-2}^{\mathrm{H}} A_{n-2} U_{n-2} = \begin{bmatrix} \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

令$U=U_0\begin{bmatrix}1&0\\0&U_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_2&0\\0&U_2\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}I_{n-2}&0\\0&U_{n-2}\end{bmatrix}$

则U是酉矩阵，$U^{\mathrm{H}}U=I$

而$U^HAU=\begin{bmatrix}I_{n-2}&0\\0&U_{n-2}^H\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1&0\\0&U_1^H\end{bmatrix}U_0^HAU_0\begin{bmatrix}1&0\\0&U_1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}I_{n-2}&0\\0&U_{n-2}\end{bmatrix}$

又$U_0^{\mathrm{H}}AU_0=\begin{bmatrix}\lambda_1&*\\0&A_1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&U_1^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&*\\0&A_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&U_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&*\\0&U_1^{\mathrm{H}}A_1U_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&*&*\\0&\lambda_2&*\\0&0&A_2\end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore\quad U^HAU=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&*\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

[证毕]

什么样的矩阵能够通过酉相似变换成为对角阵呢？

2. 定理 1: n阶复矩阵A酉相似于对角阵的充要条件是：A为正规矩阵。

[证明]: 由 **Schur** 引理：存在酉矩阵U使得

$$\Lambda = U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & t_{ij} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad 1 \le i \le j \le n$$

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$的特征值。

$$\Lambda^H = (U^H A U)^H = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \bar{t}_{ij} & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

充分性：已知A为正规阵，即$A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$，要证$t_{ij}=0$

$$\begin{cases} \Lambda\Lambda^{\mathrm{H}} = U^{\mathrm{H}}AA^{\mathrm{H}}U \\ \Lambda^{\mathrm{H}}\Lambda = U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}AU \end{cases} \Rightarrow \Lambda\Lambda^{H} = \Lambda^{H}\Lambda$$

$$\Lambda^{H}\Lambda = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & |\lambda_2|^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Lambda\Lambda^{H} = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 + \sum |t_{1j}|^2 & & \\ & |\lambda_2|^2 + \sum |t_{2j}|^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

由对角元素相等可得$t_{1j}=0$，$t_{2j}=0$，$\cdots$，$t_{nj}=0$

$\therefore \quad t_{ij}=0$

$$\therefore \quad U^{H}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

必要性：　已知存在酉矩阵U使

$$U^H AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda,$$ 要证A为正规矩阵。

$$\begin{cases}\Lambda\Lambda^{\mathrm{H}}=U^{\mathrm{H}}AA^{\mathrm{H}}U\\ \Lambda^{\mathrm{H}}\Lambda=U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}AU\end{cases}$$

$$\because\quad \Lambda\Lambda^{\mathrm{H}}=\Lambda^{\mathrm{H}}\Lambda$$

$$\left(U^{\mathrm{H}}AU\right)\left(U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U\right)=\left(U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U\right)\left(U^{\mathrm{H}}AU\right)$$

$$\therefore\quad U^{\mathrm{H}}AA^{\mathrm{H}}U=U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}AU$$

$\because U$可逆

$\therefore A^{\mathrm{H}}A=AA^{\mathrm{H}}$ [证毕]

说明：

★不能酉对角化的矩阵仍有可能采用其它可逆变换将其对角化，例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$AA^{\mathrm{T}} \neq A^{\mathrm{T}}A$ 　　A不是正规矩阵

但$\lambda(A)=1,3$，两个特征值互异，可以相似变换对角化。

可见，A可以对角化，但不能酉对角化。

定理 2： 设A为n阶实矩阵，且A的特征值均为实数，则A正交相似于对角阵的充要条件是A为正规矩阵。

推论1： 厄米矩阵的特征值均为实数，反厄米矩阵的特征值为零或纯虚数。

[证明] 设A为n阶Hermite矩阵，则A为正规矩阵，存在n阶酉矩阵U使得

$$U^H AU = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \Lambda$$

而 $$\Lambda^H = (U^H AU)^H = U^H A^H U = U^H AU = \Lambda$$

$$\therefore \overline{\lambda_i} = \lambda_i$$

因此，特征值均为实数。

推论2： 设A为n阶正规矩阵（复），λ为A的特征值，x是对应λ的特征向量，则$\overline{\lambda}$是A^H的特征值，对应$\overline{\lambda}$的特征向量仍为x。

三、Jordan标准形

1. Jordan标准形的存在定理

任何方阵A均可通过某一相似变换化为如下 Jordan 标准形：

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$称为 Jordan 块矩阵。$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$为$A$的特征值，可以是多重的。

说明：

★ $J_i(\lambda_i)$ 中的特征值全为 λ_i，但是对于不同的 i、j，有可能 $\lambda_i=\lambda_j$，即多重特征值可能对应多个 Jordan 块矩阵。

★ Jordan 标准形是"唯一"的，这种唯一性是指：各 Jordan 块矩阵的阶数和对应的特征值是唯一的，但是各 Jordan 块矩阵的位置可以变化。

2.多项式矩阵（λ-矩阵）

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为 λ 的多项式矩阵，其中矩阵元素 $a_{ij}(\lambda)$ 为 λ 的多项式。

❑多项式矩阵的初等变换

（1） 互换两行（列）

（2） 以非零常数乘以某行（列） [不能乘以λ的多项式 或零，这样有可能改变原来矩阵的秩和属性]

（3） 将某行（列）乘以λ的多项式加到另一行（列）

❑多项式矩阵的标准形式

采用初等变换可将多项式矩阵化为如下形式：

$$A(\lambda) \to \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中，多项式$d_i(\lambda)$是首一多项式（首项系数为 1，即最高幂次项的系数为 1），且$d_1(\lambda)|d_2(\lambda)$、$d_2(\lambda)|d_3(\lambda)$、$\cdots$、$d_{r-1}(\lambda)|d_r(\lambda)$，即$d_i(\lambda)$是$d_{i+1}(\lambda)$的因式。

说明：

★ 多项式矩阵的标准形式不随所采用的初等变换而变，故称 $d_i(\lambda)$ 为不变因子。

★ 不变因子又可采用如下方法求得：设 $D_i(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的所有 i 阶子行列式的最大公因式，则 $d_i(\lambda)=\dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$，$D_0(\lambda)=1$。

$D_i(\lambda)$ 称为 i 阶行列式因子。

★ 将每个不变因子化为不可约因式，这些不可约因式称为 $A(\lambda)$ 的初等因子，全体初等因子称为初等因子组。例如：

$$d_1(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)\rightarrow(\lambda-2)^2\text{和}(\lambda-3)$$

$$d_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^5\rightarrow(\lambda-2)^2\text{和}(\lambda-3)^5$$

初等因子组中应包括两个 $(\lambda-2)^2$。

3. Jordan标准形的求法

1° 求出特征矩阵$(\lambda I-A)$的初等因子组，设为$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$、$(\lambda-\lambda_2)^{m_2}$、…、$(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$可能有相同的，指数$m_1,m_2,\cdots,m_s$也可能有相同的，且$m_1+m_2+\cdots+m_s=n$。

2° 写出各 Jordan 块矩阵（一个初等因子对应一个 Jordan 块矩阵）

$$(\lambda-\lambda_i)^{m_i}\to J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

3° 合成 Jordan 矩阵：
$$J=\begin{bmatrix}J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s\end{bmatrix}$$

例 1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

解:

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ 1 & 1 & \lambda-3\end{bmatrix}\xrightarrow[{[2]+[3]}]{[1]-(\lambda-3)[3]}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & -2\\ 1-(\lambda-3)^2 & (\lambda-2) & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(3)-(\lambda-3)(1)]{(2)+2(1)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)(\lambda-4) & (\lambda-2) & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{(3)-(2)}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{[1]-2[2]}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[{[1]\leftrightarrow[3]}]{(3)\times(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

可见，A 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1$， $d_2(\lambda)=(\lambda-2)$， $d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$，
而 A 的初等因子为

$$(\lambda-2),\quad (\lambda-2)^2$$

故 A 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

作业：P79 19（1）（3）

P106 1(1)(2)，2，4，5，10