# §11 四个基本子空间的基与维数

# 11.1 四个基本子空间的基

这次课我们讨论以下四个基本子空间：

设 $A$ 是一个 $m \times n$ 阶阵，考虑

列空间(column space) $C(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$

行空间(row space) $C(A^T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y} = A^T\mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$

零空间(nullspace) $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

左零空间(left nullspace) $N(A^T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

$$= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{x}^T A = \mathbf{0}\}$$

# 11.1 四个基本子空间的基

注：

(1) $C(A^T)$ 是 $A$ 的行向量的全部线性组合.

(2) $C(A)$ 和 $N(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

$C(A^T)$ 和 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

目标：求四个基本子空间的基和维数.

# 11.1 四个基本子空间的基

设 $A$ 如上，使用消元法

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} U_0 \xrightarrow{\text{列对换}} \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R \qquad r = r(A)$$

$C(A)$ 的一组基：$A$ 的主列　　$dim\, C(A) = r$

例$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

通过 $U_0, A$ 的主列，即 $1, 2, 4$ 列为 $C(A)$ 的基.

# 11.1 四个基本子空间的基

求$C(A^T)$ 的基？根据定义$C(A^T)=C(U_0^T)$, 而 $C(U_0^T)$ 的基容易求出.

以上例为例:

$C(A^T)$的一组基为 $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

如何用 $A$ 的行向量给出 $C(A^T)$ 的基？

# 11.1 四个基本子空间的基

例： $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\alpha_1^T\\\alpha_2^T-2\alpha_1^T=\mathbf{0}\\\alpha_3^T\end{array}$$

可以看出 $\alpha_2^T$ 可用 $\alpha_1^T,\alpha_3^T$ 线性表出， $\alpha_1^T,\alpha_3^T$ 是 $C(A^T)$ 的基.

# 11.1 四个基本子空间的基

例：$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_5^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\1&2&1&-1\\0&1&1&-1\\1&3&2&1\\2&6&4&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&1&1&-1\\0&1&1&-1\\0&2&2&1\\0&4&4&-1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T+\alpha_1^T\\ \alpha_3^T\\ \alpha_4^T+\alpha_1^T\\ \alpha_5^T+2\alpha_1^T\end{array}\end{array}$$

$$\longrightarrow\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T+\alpha_1^T\\ \alpha_3^T-\alpha_2^T-\alpha_1^T=\mathbf{0}\\ \alpha_4^T-\alpha_1^T-2\alpha_2^T\\ \alpha_5^T-2\alpha_1^T-4\alpha_2^T-(\alpha_4^T-\alpha_1^T-2\alpha_2^T)=\mathbf{0}\end{array}\end{array}$$

可以看出 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是 $C(A^T)$ 的基.

注: $C(A^T)$ 的基也可以使用列空间基的求法，即考虑 $A^T$ 的列空间.

# 11.1 四个基本子空间的基

求 $N(A^T)$ 的基，两种方法：

(1)求 $A^T$ 的零空间的基础解系.

(2) $A \longrightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

前 $r$ 行有主元

后 $m-r$ 行是零向量

即存在可逆阵 $E, EA = U_0$.

$E = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix}$

则 $\mathbf{u}_{r+1}^T A = \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{u}_m^T A = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m$ 是 $N(A^T)$ 的一组基.

($dim\, N(A^T) = m - r$, $\mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m \in N(A^T)$ 且线性无关.)

# 11.1 四个基本子空间的基

例：$A=\begin{pmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\1&3&5&1&9\end{pmatrix}_{3\times5}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&2\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-r_2+r_3}U_0=\begin{pmatrix}1&3&5&0&7\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ $E=E_{32}(-1)E_{31}(-1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

因此 $N(A^T)$ 有一组基 $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

为了记录 $E$, 可以考虑 $(A|I_3)\longrightarrow(U_0|E)$.

# 11.1 四个基本子空间的基

总结：

$C(A^T)$ $\quad dim = r$

$C(A)$ $\quad dim = r$

$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^m$

$N(A)$ $\quad dim = n - r$

$N(A^T)$ $\quad dim = m - r$

# 11.2 维数公式

设 $V$ 是一个向量空间，$W_1, W_2$ 是两个子空间，则 $W_1 \cap W_2$ 和 $W_1 + W_2$ 是 $V$ 的子空间，但 $W_1 \cup W_2$ 一般不是子空间.

例如：$y = x$ 和 $x = 0$ 均是 $\mathbb{R}^2$ 的一维子空间.

但它们的并不是子空间.

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in W_2$, 但 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$.

这些空间的维数有如下关系：

$$dim\, W_1 + dim\, W_2 = dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2).$$

例如(上例)：$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}, W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ 满足公式.

# 11.2 维数公式

例：$M_3(\mathbb{R}) = \{3\text{阶实矩阵}\} = V$

$W_1 = \{3\text{阶对称矩阵}\}$ $\qquad$ $W_2 = \{3\text{阶上三角矩阵}\}$

检查 $dim\, V = 9, dim\, W_1 = 6, dim\, W_2 = 6.$

$W_1 \cap W_2 = \{3\text{ 阶对角阵}\}$ $\qquad$ $dim\, W_1 \cap W_2 = 3$

$W_1 + W_2 = M_3(\mathbb{R})$ $\qquad$ $dim(W_1 + W_2) = 9$

例：$\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ 的解集 $= \{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x | c_i \in \mathbb{R}\}.$

它是一个空间，$dim = 2$，一组基为 $\{\cos x, \sin x\}.$

# 11.2 维数公式

例：设 $\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(1,1,-1)^T,\alpha_3=(1,3,3)^T,$

$\beta_1=(2,3,-1)^T,\beta_2=(1,2,2)^T,\beta_3=(1,1,-3)^T.$

考虑 $W_1=\{c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3|c_i\in\mathbb{R}\},$

$W_2=\{c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3|c_i\in\mathbb{R}\}.$

求 $W_1+W_2$ 和 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

# 11.2 维数公式

解：

$$W_1+W_2=\{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3|a_i,b_i\in\mathbb{R}\}.$$

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$　　$C(A)=W_1+W_2$

$$A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&2&1&1\\0&-1&1&-1&0&-1\\0&0&0&-1&1&-2\end{pmatrix}$$

主列为 $A$ 的1, 2, 4 列，即

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 是 $W_1+W_2$ 的基.

# 11.2 维数公式

任取 $\alpha \in W_1 \cap W_2$,

设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \mu_3\beta_3, k_i, \mu_i \in \mathbb{R}.$

可设 $k_3 = \mu_3 = 0$，因为 $\alpha_1, \alpha_2$ 表出 $\alpha_3$; $\beta_1, \beta_2$ 表出 $\beta_3$.

解方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ 求得 } \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

则 $\alpha = c(2\alpha_1 + \alpha_2) = c(\beta_1 + \beta_2).$

# 11.2 维数公式

因此 $2\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$ 是 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

验证维数公式： $dim\,W_1=dim\,W_2=2,$

$$dim(W_1+W_2)=3, dim(W_1\cap W_2)=1.$$

# 11.3 例题

例：设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，则存在可逆阵 $P,Q$ 使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r=r(A)$$

令 $P=\begin{pmatrix} (P_1)_{r\times n} \\ (P_2)_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$, $\quad Q=((Q_1)_{n\times r},(Q_2)_{n\times(n-r)})$.

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} P_1AQ_1=I_r, & P_1AQ_2=0 \\ P_2AQ_1=0, & P_2AQ_2=0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} P_1AQ=(I_r\ \ 0) \\ PAQ_1=\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

# 11.3 例题

$$P_1AQ = (I_r \ \ 0) \qquad PAQ_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此 $Q$ 的后 $n-r$ 列是 $N(A)$ 的一组基;

$P$ 的后 $n-r$ 行是 $N(A^T)$ 的一组基.

$C(A)=C(AQ_1)$. ( 因为 $C(AQ_1)\subset C(A)$, 且 $dim C(AQ_1)=r(AQ_1)=r$. ) 故 $AQ_1$列满秩，它的 $r$ 列是 $C(A)$ 的一组基.

同理 $C(A^T)=C(A^TP_1^T)$, $P_1A$ 行满秩，它的 $r$ 行是$C(A^T)$的一组基.

# 11.3 例题

例：设 $A, B$ 均为 $m\times n$阶阵，且它们的 4个子空间均相等. 进一步设

$$A=\begin{pmatrix} I & F\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} I & G\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

则 $F=G.$

这是因为 $A, B$的行空间重合，则 $A$的第 1行 $=B$的行向量的线性组合 $=B$的第 1行. 以此类推.