§12 四个基本子空间的正交性

12.1 引言

设 A 是一个 $m\times n$ 阶阵，则我们有四个基本子空间 $\quad r(A)=r$

$$N(A) \qquad dim = n-r$$

$$C(A) \qquad dim = r$$

$$\mathbb{R}^n \qquad\qquad \mathbb{R}^m$$

$$C(A^T) \qquad dim = r$$

$$N(A^T) \qquad dim = m-r$$

12.1 引言

例：设 $A=B_1B_2$, 其中 B_1 是 $n\times r$ 阶阵，B_2 是 $r\times n$ 阶阵，后两矩阵秩均为r， 则 A 是一个 $n\times n$ 阶阵，且 $r(A)=r.$

1. A 的每一列是 B_1 的列向量的线性组合，因而 $C(A)\subset C(B_1).$
2. A 的每一行是 B_2 的行向量的线性组合，因而 $C(A^T)\subset C(B_2^T).$
3. B_1 是列满秩阵，则存在可逆 $n\times n$ 阶阵 $E_1, E_1B_1=(I_r\ 0)^T.$

   B_2 是行满秩阵，则存在可逆 $n\times n$ 阶阵 $E_2, B_2E_2=(I_r\ 0).$
4. $C(A)=C(AE_2)=C(B_1(I_r\ 0))=C(B_1).$

因此 $dim C(A)=dim C(B_1)$ ，即 $r(A)=r(B_1)=r.$

12.1 引言

例：设 A 为 $m\times n$ 阶阵，$\mathbf{v}\in C(A^T)\cap N(A)$, 则 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}$ 且 $\mathbf{v}$ 是 A 的行向量转置的线性组合.

设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}=a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m, a_i\in\mathbb{R}$,

则 $A\mathbf{v}=\mathbf{0}\Longrightarrow\alpha_1^T\mathbf{v}=0,\cdots,\alpha_m^T\mathbf{v}=0$

$$\Longrightarrow\mathbf{v}^T\mathbf{v}=0\Longrightarrow\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

即 $C(A^T)\cap N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

同理，$C(A)\cap N(A^T)=\{\mathbf{0}\}$.

12.1 引言

我们将学习关于四个基本子空间的更精确关系.

例: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot C(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}|x,z\in\mathbb{R}\right\}$是$\mathbb{R}^3$的一平面: $x0z$平面.

$$C(A^T)=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix}|x,z\in\mathbb{R}\right\}=C(A)$$

$$N(A)=\left\{c\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}|c\in\mathbb{R}\right\}=y\text{ 轴}\qquad N(A^T)=N(A)=y\text{ 轴}$$

y 轴 $\perp$ $x0z$ 平面 $\Longrightarrow C(A)$ 和 $N(A^T)$ 垂直.

12.1 引言

目标:$C(A^T)$和 $N(A)$是垂直的.

$C(A)$ 和 $N(A^T)$ 是垂直的.

12.2 四个子空间的正交性

我们需要确切定义子空间的垂直（或正交）.

定义：设 S 和 T 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间(subspaces), 我们说 S 垂直于 T (S is perpendicular to T), 如果对于 $\forall \mathbf{v} \in S, \mathbf{w} \in T, \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0.$

这个定义是对称的，即 S 垂直于 $T \Longleftrightarrow T$ 垂直于 S,

记作 $S \perp T$ 或 $T \perp S.$

所以我们也可以说：S 和 T 是正交的(S and T are orthogonal).

12.2 四个子空间的正交性

例：$\mathbb{R}^n$ 和 $\{\mathbf{0}\}$ 是正交的.

例：$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $C(A)=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\\0\end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$, $N(A^T)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\c\\d\end{pmatrix}\middle| c,d\in\mathbb{R}\right\}$.

$C(A)$ 和 $N(A^T)$ 均是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间(平面). $C(A)\perp N(A^T)$.

12.2 四个子空间的正交性

例：$\mathbb{R}^3$ 中 $x0y$ 平面和 $x0z$ 平面不正交. 因为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 属于两平面之交, 但 $(1,0,0)(1,0,0)^T \neq 0$.

Fact：若 $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, 则 $\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in S \cap T, \mathbf{v}^T\mathbf{v} \neq 0$. 因而 S 和 T 不正交.

命题：设 S 和 T 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间, 且 $dim\, S + dim\, T > n$, 则 S 和 T 不正交.

注：若 $dim\, S + dim\, T = n$, S 和 T 也可能不正交. 例如 $\mathbb{R}^2$ 中 S 是直线 $y = x$, T 是 x 轴.

12.2 四个子空间的正交性

定理：设 A 是$m \times n$ 阶阵，则 $C(A)$ 和 $N(A^T)$正交，$C(A^T)$ 和 $N(A)$ 正交.

证明：设 $\alpha \in N(A^T)$, 则 $\alpha^T A = \mathbf{0}$.

$\Longrightarrow \alpha$ 和 A 的全部列向量垂直.

$\Longrightarrow \alpha \perp C(A)$.

因此，$N(A^T) \perp C(A)$.

将 A 换成 A^T，我们得到 $C(A^T) \perp N(A)$.

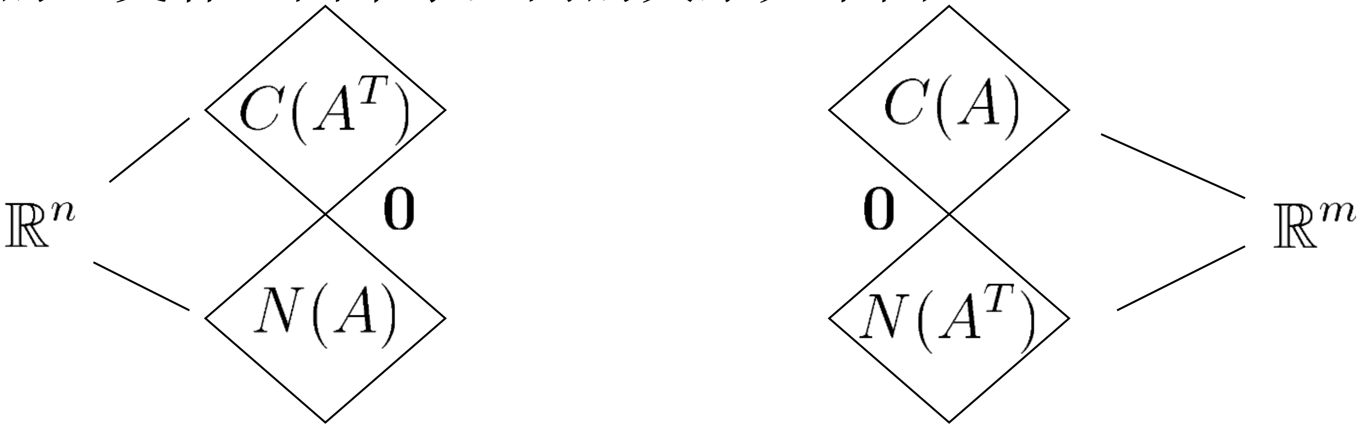
12.3 正交补

四个子空间还有如下的关系：

定理：$C(A^T)+N(A)=\mathbb{R}^n, C(A^T)\perp N(A).$

$$C(A)+N(A^T)=\mathbb{R}^m, C(A)\perp N(A^T).$$

我们说 $C(A^T)$ 是$N(A)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的正交补，$C(A)$ 是$N(A^T)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的正交补，四个子空间的关系如下图：



12.3 正交补

一般地，我们有如下的：

定义：设$V \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子空间，V 在 $\mathbb{R}^n$ 中的正交补定义为集合

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{v} \in V\},$$

记作 $V^\perp$, 显然 $V \perp V^\perp$.

12.3 正交补

验证：$C(A^T) = N(A)^{\perp}$.

证明：已知，$C(A^T) \perp N(A) \Longrightarrow C(A^T) \subset N(A)^{\perp}$.

反之，$\forall \mathbf{v} \in N(A)^{\perp}$, 假设 $\mathbf{v} \notin C(A^T)$, 考虑矩阵 $A_0 = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{v}^T \end{pmatrix}$.

则 $C(A^T) \subsetneqq C(A_0^T)$.

但 $N(A_0) = N(A)$, 即 A_0的列数$-r(A_0) = A$ 的列数$-r(A)$.

则 $r(A) = r(A_0)$, 这与 $C(A^T) \subsetneqq C(A_0^T)$ 矛盾.

12.3 正交补

在过去的内容中，我们已经知道：

若 $A_{m\times n}$ 的秩为 r, 则 $dim\, C(A) = dim\, C(A^T) = r$,

$dim\, N(A) = n - r$, $dim\, N(A^T) = m - r$.

这个定理更细致地刻划了 A 的四个子空间的正交补关系.

注记：若 A 对称，即 $A = A^T$, 则 $\mathbb{R}^n = N(A) + C(A^T)$

$C(A) \perp N(A)$. $\qquad = N(A^T) + C(A)$.

特别地，$A^T A$ 是对称阵，此时

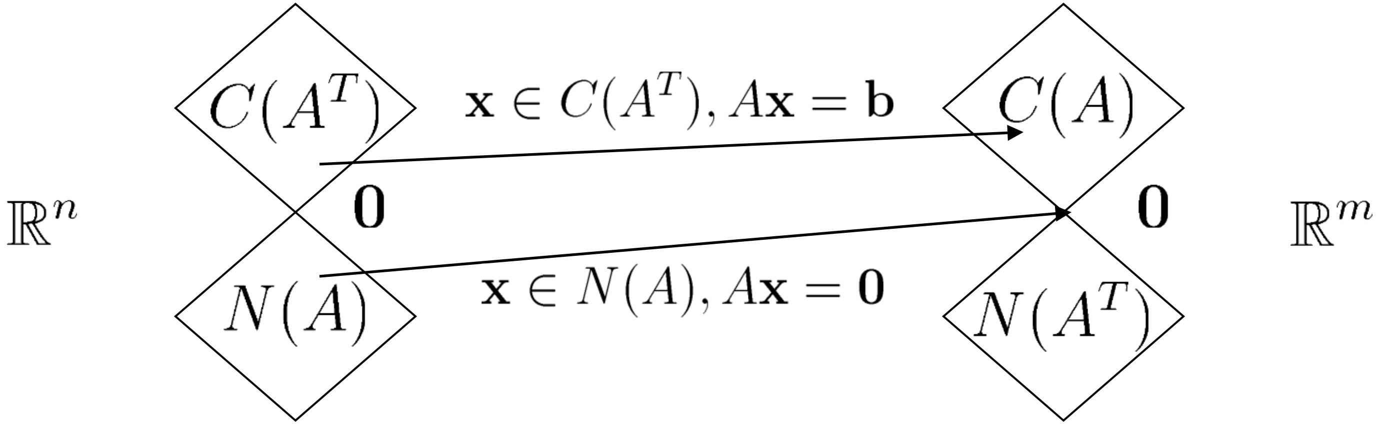
$$N(A) = N(A^T A),\ C(A^T) = C(A^T A).$$

12.3 正交补

考虑一个简单观察：

设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 则 $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, 即
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\longmapsto A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

我们可以提升以上描述定理的简图如下：



12.4 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

定理：若 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解，则 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 在 $C(A^T)$ 中有唯一解.

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 10\end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{则 } C(A^T)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}\text{是 } \mathbb{R}^3 \text{ 中一直线}\\ N(A)=\text{平面 } x+2y+5z=0\end{array}\right\}\quad \mathbb{R}^3=C(A^T)+N(A)$$

$$C(A)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}\ \mathbb{R}^2 \text{ 中一直线}$$

$$N(A^T)=\text{直线 } x+2y=0$$

12.4 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$在行空间中的唯一性

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解 $\iff \mathbf{b}\in C(A)$.

取 $\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{x}_r\in C(A^T)$ 使得 $A\mathbf{x}_r=\mathbf{b}$.

因为 $\mathbf{x}_r\in C(A^T), \exists \mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}, \mathbf{x}_r=A^T\mathbf{y}. \Longrightarrow AA^T\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$

$\Longrightarrow y_1+2y_2=\frac{1}{30}$. 有无穷个 $\mathbf{y}$ 满足 $AA^T\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

但是 $\mathbf{x}_r=A^T\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{30}\\\frac{2}{30}\\\frac{5}{30}\end{pmatrix}$ 唯一!

12.4 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

定理的证明：(来自于以上例子)

1.存在性. 设 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有解，则 $\mathbf{b}\in C(A)$.

但 $C(A)=C(AA^T)$, 因此 $\mathbf{b}\in C(AA^T)$, 即 $\exists\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m, AA^T\mathbf{y}=\mathbf{b}$.

令 $\mathbf{x}_r=A^T\mathbf{y}$, 则 $A\mathbf{x}_r=\mathbf{b}, \mathbf{x}_r\in C(A^T)$.

2.唯一性. 设 $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r'\in C(A^T)$, 且 $A\mathbf{x}_r=\mathbf{b}=A\mathbf{x}_r'$, 则

$$A(\mathbf{x}_r-\mathbf{x}_r')=\mathbf{0}\implies\mathbf{x}_r-\mathbf{x}_r'\in N(A).$$

但是 $\mathbf{x}_r-\mathbf{x}_r'\in C(A^T)$, 即 $\mathbf{x}_r-\mathbf{x}_r'\in C(A^T)\cap N(A)=\{\mathbf{0}\}$.

因此 $\mathbf{x}_r=\mathbf{x}_r'$.

12.4 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

例：$A=(1,-3,-4)_{1\times 3}$.

$$\mathbb{R}^1=N(A^T)+C(A) \qquad \mathbb{R}^3=C(A^T)+N(A)$$

$$C(A^T)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}\middle| c\in\mathbb{R}\right\} \qquad N(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\middle| x-3y-4z=0\right\}$$

$$C(A)=\mathbb{R}^1 \qquad N(A^T)=\{\mathbf{0}\}$$

$$\forall b\in C(A),\ 则\ \mathbf{x}_r=\frac{b}{26}\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}\in C(A^T), A\mathbf{x}_r=b.$$