§17 行列式的计算

17.1 行列式计算公式和展开定理

先看一个例子：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

17.1 行列式计算公式和展开定理

$$
= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} + a_{11}a_{23}a_{32}\begin{vmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{vmatrix} + a_{12}a_{21}a_{33}\begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
+ a_{13}a_{21}a_{32}\begin{vmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{vmatrix} + a_{12}a_{23}a_{31}\begin{vmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{vmatrix} + a_{13}a_{22}a_{31}\begin{vmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{vmatrix}
$$

共有 6 项，每项都是不同行不同列的元素乘积，正负号由置换阵的行列式给出.

17.1 行列式计算公式和展开定理

一般项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$, (i_1, i_2, i_3) 是 $(1,2,3)$ 的一个排列.

$$\text{奇排列} \longrightarrow \text{置换阵的行列式} = -1$$

$$\text{偶排列} \longrightarrow \text{置换阵的行列式} = 1$$

例：
$$\begin{vmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{vmatrix} = |P_{(3,1,2)}| = 1 \qquad \begin{vmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{vmatrix} = |P_{(2,1,3)}| = -1$$

注：一个排列经过奇数次对换变为$(1,2,\cdots,n)$，则称其为奇排列.

17.1 行列式计算公式和展开定理

一般地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & a_{1i_1} & \\ a_{2i_2} & \ddots & \\ & & a_{ni_n} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= \sum_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} det(P_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}).$$

共有 $n!$ 项.

17.1 行列式计算公式和展开定理

例：
$$\begin{vmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix}$$
$$=detP_{(3,2,1,4)}+detP_{(4,3,2,1)}=(-1)+1=0$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$ 满足 $r_1+r_3=r_2+r_4$，因此 A 是奇异阵.
$$\Longrightarrow det(A)=0$$

17.1 行列式计算公式和展开定理

用以上公式直接求 $det(A)$ 通常计算量很大.

方法二：将 A 行(列)消去，再写成 $n-1$ 阶行列式的组合，这样可以递归计算.

定义：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, M_{ij} 是 A 划去第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶矩阵. 例如

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}, M_{12}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

$det M_{ij}$ 称为余子式(complement minor).

令 $C_{ij}=(-1)^{i+j}det M_{ij}$, 称其为代数余子式(algebraic complement, cofactor).

17.1 行列式计算公式和展开定理

定理：$$\begin{aligned} detA &= a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \\ &= a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \end{aligned}$$

$\forall i, j = 1, \cdots, n.$

17.1 行列式计算公式和展开定理

例： $H_4=\begin{pmatrix}2&1&&\\1&2&1&\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ $\quad detH_4=2\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}\overset{-2r_2+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\-1&-3&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&1\\-1&-3\end{vmatrix}=5$$

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}\underset{-r_1+r_3}{\overset{-r_1+r_2}{=\!=}}\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=2 \qquad \Longrightarrow detH_4=2\times 5-2=8$$

17.2 典型例题

行列式计算方法：化上(下)三角形法和降阶法.

例：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & -4 & 1\\ 2 & 4 & -6 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

法一：化上三角形法.

$$D\overset{r_1+r_2,-2r_1+r_3}{\underset{-r_1+r_4}{=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 2 & -4 & -3\\ 0 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_4}{=\!=}-\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & -4 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 3\end{vmatrix}$$

17.2 典型例题

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{-2r_2+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-\frac{5}{14}r_3+r_4} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{14} \end{vmatrix} = 57$$

17.2 典型例题

法二：降阶法.

$$D \overset{r_1+r_2,-2r_1+r_3}{\underset{-r_1+r_4}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-2r_3+r_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 0 & -14 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} -19 & 0 \\ -14 & -3 \end{vmatrix} = 57$$

17.2 典型例题

注：利用行列式按行(列)展开定理计算行列式时，一般利用有较多 0 的行(列)展开. 对一般的数字行列式，可将某行(列)化到只剩一非零元时再做降阶处理.

例：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[-2r_2+r_3]{-4r_2+r_1} \begin{vmatrix} -7 & 0 & -17 & -8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -7 & -17 & -8 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -7 & -25 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 10$$

17.2 典型例题

例：计算 4 阶范德蒙(Vandermonde)行列式.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

分析：相邻两行元素较接近. 从末行开始，后一行加上其前行的$(-x_1)$倍，a_{11}下面的元素都变为 0 ，按首列展开后，可提取公因子得到 3 阶范德蒙行列式. 再重复此过程.

17.2 典型例题

解：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & x_4(x_4-x_1)\\ 0 & x_2^2(x_2-x_1) & x_3^2(x_3-x_1) & x_4^2(x_4-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_2 & x_3 & x_4\\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & x_3-x_2 & x_4-x_2\\ 0 & x_3(x_3-x_2) & x_4(x_4-x_2)\end{vmatrix}$$

17.2 典型例题

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

$$\Longrightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i)$$

17.2 典型例题

可以证明 n 阶范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

17.2 典型例题

例：设 A是$m\times n$ 阶阵，B 是$n\times m$阶阵，$m\geq n$. 求证：

$$|\lambda I_m - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I_n - BA|,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

证明：

考虑分块矩阵$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{-Br_1+r_2} \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \xrightarrow{-Bc_2+c_1} \begin{pmatrix} I_m - AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

17.2 典型例题

即：

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m - AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow det\begin{pmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} I_m - AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow |I_n - BA| = |I_m - AB|$$

17.2 典型例题

若 $\lambda \neq 0$,

则 $$\begin{aligned} |\lambda I_m - AB| &= \lambda^m |I_m - \tfrac{1}{\lambda} AB| \\ &= \lambda^m |I_n - \tfrac{1}{\lambda} BA| \\ &= \lambda^{m-n} |\lambda I_n - BA|. \end{aligned}$$