§4 线性变换 I

4.1 线性变换的定义和性质

回顾

定义: 设V是一个非空集合,$\mathbb{F}$是一个数域. 在V上定义了加法+: 对任意$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, 有$\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V$; 以及$\mathbb{F}$与V的数乘: 对任意$k \in \mathbb{F}$, $\mathbf{x} \in V$, 有$k\mathbf{x} \in V$, 且满足以下条件:

$$(A1)\ \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V;$$

$$(A2)\ (\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V;$$

$$(A3)\ \exists \mathbf{0} \in V, \text{s.t. } \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V;$$

$$(A4)\ \forall \mathbf{x} \in V, \exists(-\mathbf{x}) \in V, \text{s.t. } \mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0};$$

4.1 线性变换的定义和性质

$$(M1)\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V;$$

$$(M2)\ (kl)\mathbf{x} = k(l\mathbf{x}), \quad \forall k, l \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{x} \in V;$$

$$(M3)\ k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}, \quad \forall k \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V;$$

$$(M4)\ (k + l)\mathbf{x} = k\mathbf{x} + l\mathbf{x}, \quad \forall k, l \in \mathbb{F}, \forall \mathbf{x} \in V,$$

则称V是数域$\mathbb{F}$上的向量空间(或线性空间).

4.1 线性变换的定义和性质

定义: 设V, W是数域$\mathbb{F}$上的向量空间, V到W的映射$T: V \to W$若保持加法和数乘运算, 即

$$\boxed{T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}),\ T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \forall k \in \mathbb{F}}$$

则称$T: V \to W$是一个**线性变换(linear transformation).**

4.1 线性变换的定义和性质

例: 1. 向量空间V到W的**零变换**(即 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in V$)是线性变换, 记为$\mathbf{0}$.

2. 向量空间V上的恒等变换I_V (即$I_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in V$), 称为**恒等变换**.

3. 给定$c \in \mathbb{R}, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto c\mathbf{x}$,称为$\mathbb{R}^3$上的数乘变换. 一般地, 给定$k \in \mathbb{F}, T : V \to V, \mathbf{x} \mapsto k\mathbf{x}$, 称为V上由$k$决定的**数乘变换**.

4. 给定$\mathbf{a} = (1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = x_1 + 3x_2 + 4x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, 则T是线性变换.

4.1 线性变换的定义和性质

5. 设A是$m \times n$实矩阵,$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,则$T(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ 是$\mathbb{R}^n$ 到$\mathbb{R}^m$的线性变换. 若A是$n \times n$ 实矩阵, 则T是$\mathbb{R}^n$ 到自身的线性变换.

6. 设P_n表示次数$\leq n$ 的一元实系数多项式集合,P_{n-1}表示次数$\leq n-1$ 的一元实系数多项式集合,则

$$T(f) = \frac{d}{dx} f(x)$$

是P_n 到P_{n-1}的线性变换.

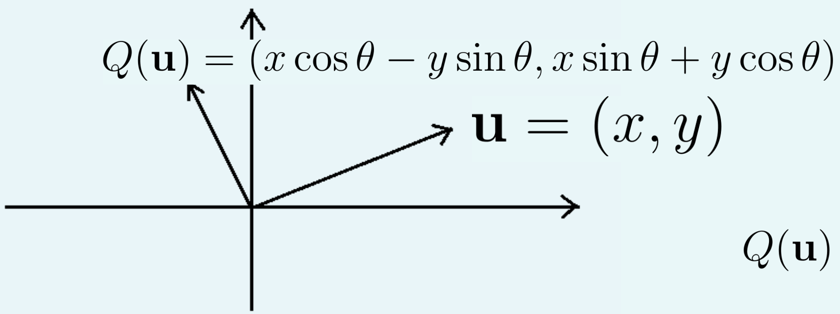
4.1 线性变换的定义和性质

7. 设V表示定义在$\mathbb{R}$上的连续函数集合, 则

$$T(f)=\int_0^x f(t)dt$$

是V到V的一个线性变换.

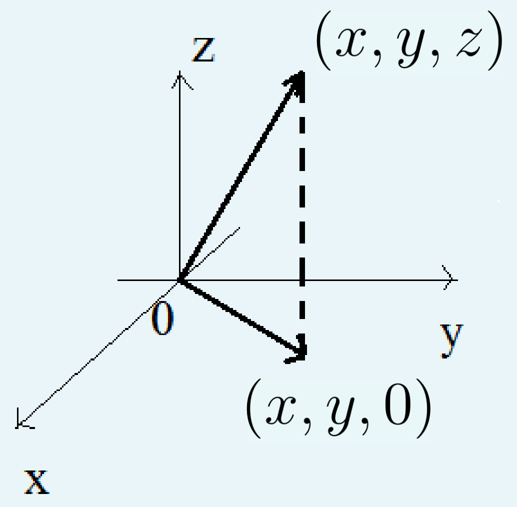
8. 把 $\mathbb{R}^2$ 中向量$\mathbf{u}$逆时针旋转θ角的**旋转变换**Q是线性变换.



$$Q(\mathbf{u})=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ x\sin\theta+y\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

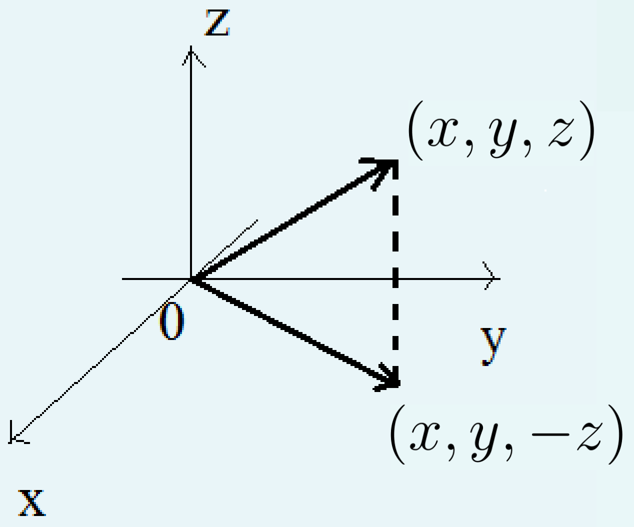
4.1 线性变换的定义和性质

9. $\mathbb{R}^3$到xoy平面的**投影变换**$P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(x,y,z)\mapsto(x,y,0)$, 是线性变换.



4.1 线性变换的定义和性质

10. $\mathbb{R}^3$关于xoy平面的**反射变换**$P:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\mapsto(x,y,-z)$, 是线性变换.



4.1 线性变换的定义和性质

注意, 由定义, 线性变换$T: V \to W$ 有 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

例11. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, T(x) = x + 1$, 不是线性变换.

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 是线性变换 } \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{R}, \text{s.t. } T(x) = k_0 x.$$

例12. $\mathbb{R}^3$到平面z = 1的投影变换$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, y, 1)$ 不是线性变换.

4.1 线性变换的定义和性质

例13. 给定3阶矩阵A, 非零向量 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, 则 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ 不是线性变换.

称变换 $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ 为**仿射变换(affine transformation).**

例14. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1, T(\mathbf{x}) = ||\mathbf{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, 不是线性变换.

因为 $T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \geq ||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| = T(\mathbf{x} + \mathbf{y})$,

$T(k\mathbf{x}) = ||k\mathbf{x}|| = |k|||\mathbf{x}|| \neq k||\mathbf{x}||$, 若k < 0.

4.1 线性变换的定义和性质

由定义立即得线性变换有如下的简单性质:

命题: 设 $T: V \to W$ 是数域$\mathbb{F}$上的向量空间V到W的线性变换, 则

(1) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x}),\ \forall \mathbf{x} \in V.$

(2) $T(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n) = c_1T(\mathbf{x}_1) + c_2T(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{x}_n).$

(3) 若 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ 线性相关, 则 $T(\mathbf{x}_1), \cdots, T(\mathbf{x}_n)$ 也线性相关.

即线性变换保持向量空间的线性关系.

特别地, 线性变换总是把直线变成直线, 把三角形变成三角形, 把平行四边形变成平行四边形……

4.2 线性变换的运算

设 $\sigma : V \to W, \tau : V \to W$ 为两个线性变换,$\forall c \in \mathbb{F}$, 则可定义:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma + \tau : V \to W,\ (\sigma+\tau)(\mathbf{v}) := \sigma(\mathbf{v}) + \tau(\mathbf{v}), \\ &c\sigma : V \to W,\ (c\sigma)(\mathbf{v}) := c\sigma(\mathbf{v}), \end{aligned}\right. \qquad \forall \mathbf{v} \in V$$

且 $(\sigma+\tau)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) := \sigma(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) + \tau(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)$

$$= \sigma(\mathbf{v}_1) + \sigma(\mathbf{v}_2) + \tau(\mathbf{v}_1) + \tau(\mathbf{v}_2) = (\sigma+\tau)(\mathbf{v}_1) + (\sigma+\tau)(\mathbf{v}_2), \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V;$$

$$(\sigma+\tau)(k\mathbf{v}) := \sigma(k\mathbf{v}) + \tau(k\mathbf{v}) = k\sigma(\mathbf{v}) + k\tau(\mathbf{v}) = k(\sigma+\tau)(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V;$$

则$\sigma + \tau$ 也是$V \to W$ 的线性变换.

4.2 线性变换的运算

易知, 线性变换的加法满足交换律, 结合律, 即:

$$\forall \text{ 线性变换 } \sigma, \tau, \gamma : V \to W$$

$$\sigma + \tau = \tau + \sigma, \qquad \sigma + (\tau + \gamma) = (\sigma + \tau) + \gamma.$$

零变换$\mathbf{0}$满足:$\mathbf{0} + \sigma = \sigma$.

对每个线性变换$\sigma : V \to W$, 可定义其负变换$-\sigma$,

$$(-\sigma)(\mathbf{v}) := -\sigma(\mathbf{v}), \qquad \forall \mathbf{v} \in V.$$

易知,$-\sigma$也是线性的, 且$\sigma + (-\sigma) = \mathbf{0}$.

4.2 线性变换的运算

线性变换的数乘满足:

$$
\begin{aligned}
1\sigma &= \sigma, \\
(kl)\sigma &= k(l\sigma), \\
k(\sigma+\tau) &= k\sigma + k\tau, \\
(k+l)\sigma &= k\sigma + l\sigma,
\end{aligned}
$$

向量空间V到W的全体线性变换构成一个向量空间, 记为 $\mathcal{L}(V,W)$ 或 $Hom(V,W)$. 特别地, 记向量空间V到自身的全体线性变换构成的向量空间为 $\mathcal{L}(V,V)$ 或 $End(V)$.

4.2 线性变换的运算

定义: 设 $\tau \in \mathcal{L}(U,V)$, $\sigma \in \mathcal{L}(V,W)$. 定义线性变换的乘积 $\sigma\tau : U \to W$ 为:

$$\boxed{(\sigma\tau)(\mathbf{u}) := \sigma(\tau(\mathbf{u})), \quad \forall \mathbf{u} \in U.}$$

直接验证得 $\sigma\tau \in \mathcal{L}(U,W)$.

4.2 线性变换的运算

特别地, 对$\sigma,\tau,\gamma\in\mathcal{L}(V,V)$, $k\in\mathbb{F}$,变换的乘积还有如下性质:

(1). $\sigma(\tau\gamma)=(\sigma\tau)\gamma$;

(2). $\sigma(\tau+\gamma)=\sigma\tau+\sigma\gamma$;

(3). $(\sigma+\tau)\gamma=\sigma\gamma+\tau\gamma$;

(4). $k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau$;

(5). $\sigma I=I\sigma=\sigma$;

(6). $\sigma\mathbf{0}=\mathbf{0}\sigma=\mathbf{0}$.

4.2 线性变换的运算

定义: 设$\sigma \in \mathcal{L}(V,V)$, 若存在$\tau \in \mathcal{L}(V,V)$, 使得

$$\boxed{\sigma\tau = \tau\sigma = I,}$$

则称σ是可逆线性变换, τ 称为 σ 的逆变换.

注: 与矩阵类似, 易证若σ的逆变换存在则必定唯一. 记其逆变换为σ^{-1}, 且有$(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$.

4.2 线性变换的运算

例: 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 考虑由A定义的线性变换 $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, 则$\sigma$ 可逆 $\Leftrightarrow$ A可逆. 且 $\sigma^{-1} : \mathbf{x} \mapsto A^{-1}\mathbf{x}$.

由于线性变换的乘法满足结合律, 故可定义线性变换 $\sigma \in \mathcal{L}(V, V)$ 的正整数幂

$$\boxed{\sigma^m := \underbrace{\sigma \cdot \sigma \cdots \sigma}_{m\text{个}}.}$$

规定$\sigma^0 = I$.
容易验证, 对任意非负整数m, n有

$$\sigma^m \cdot \sigma^n = \sigma^{m+n}, \qquad (\sigma^m)^n = \sigma^{mn}.$$

4.2 线性变换的运算

当σ 可逆时,定义σ 的负整数幂

$$\boxed{\sigma^{-m} = (\sigma^{-1})^m, \qquad m\text{是正整数}.}$$

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 是数域$\mathbb{F}$上的一元多项式,
$\sigma \in \mathcal{L}(V, V)$. 定义

$$f(\sigma) = a_0 I + a_1 \sigma + \cdots + a_m \sigma^m,$$

称为线性变换σ 的多项式. 显然, $f(\sigma) \in \mathcal{L}(V, V)$.

4.3 线性变换的矩阵表示

设V和W分别是数域$\mathbb{F}$上n维, m维向量空间,$T: V \to W$是V到W的线性变换. 在V中取一组基$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$, 则$\forall \mathbf{v} \in V$, 有$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. 于是,$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$.

若要描述$T(\mathbf{v})$, 只需要描述$T(\mathbf{v}_1), \cdots, T(\mathbf{v}_n)$.

4.3 线性变换的矩阵表示

在W中取一组基$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$. 则

$$\begin{cases} T(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m, \\ T(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m, \\ \qquad\qquad \vdots \\ T(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m, \end{cases}$$

4.3 线性变换的矩阵表示

即

$$T(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) = (T(\mathbf{v}_1) \cdots T(\mathbf{v}_n)) = (\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_m) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A}$$

称$m \times n$矩阵A为线性变换T在V中给定基$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$和W中给定基 $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$ 下的矩阵表示.

注： A中第j列恰是$T(\mathbf{v}_j)$在基$\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$下的坐标.

4.3 线性变换的矩阵表示

例: 设 $P_3=\{$次数 ≤ 3的一元实系数多项式$\}$, 取基$1,x,x^2,x^3$.

设 $P_2=\{$次数 ≤ 2的一元实系数多项式$\}$, 取基$1,x,x^2$.

则求导变换$T:P_3\to P_2, p(x)\mapsto \dfrac{d}{dx}p(x)$, 有

$$T(1)=0,\quad T(x)=1,\quad T(x^2)=2x,\quad T(x^3)=3x^2.$$

故

$$T(1\ x\ x^2\ x^3)=(1\ x\ x^2)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}.$$

4.3 线性变换的矩阵表示

例: 设 P_3, P_2 及基定义如上例, 则不定积分变换

$$T = \int_0^x : P_2 \to P_3, p(x) \mapsto \int_0^x p(t)dt$$

有 $T(1) = x, \quad T(x) = \frac{x^2}{2}, \quad T(x^2) = \frac{x^3}{3}.$

故 $T(1\ x\ x^2) = (1\ x\ x^2\ x^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

4.3 线性变换的矩阵表示

例: 设$M_2(\mathbb{R})$ 表示所有2阶实矩阵的集合.

$T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), A \mapsto A^T$ 是线性变换. 取$M_2(\mathbb{R})$的一组基为

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $T(E_{11}) = E_{11}, \quad T(E_{12}) = E_{21}, \quad T(E_{21}) = E_{12}, \quad T(E_{22}) = E_{22}.$

故 $T(E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22}) = (E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4.3 线性变换的矩阵表示

例: 设线性变换$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 在$\mathbb{R}^3$的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$ 求T在基$\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$ 下的矩阵.

解: 由已知

$$\begin{aligned}T(\alpha_1)&=\alpha_1-\alpha_2,\\ T(\alpha_2)&=2\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\\ T(\alpha_3)&=\alpha_2+2\alpha_3.\end{aligned}$$

4.3 线性变换的矩阵表示

故

$$T(\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1) = (T(\alpha_3)\ T(\alpha_2)\ T(\alpha_1)) = (\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

定理: 设$\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$是n维向量空间V的一组基, $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m$是m维向量空间W的一组基, A是任一$m \times n$矩阵,则有唯一的线性变换$\sigma$满足

$$\boxed{\sigma(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1 \cdots \mathbf{w}_m)A}$$

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

证明: 以矩阵A的第j列元素$a_{ij}(i=1,\cdots,m)$作为坐标, 构造向量β_j

$$\beta_j = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{w}_m \quad (j=1,\cdots,n).$$

则存在线性变换σ满足

$$\sigma(\mathbf{v}_j) = \beta_j \quad (j=1,\cdots,n).$$

于是

$$\sigma(\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n) = (\beta_1 \ \cdots \ \beta_n) = (\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_m)A.$$

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

即有线性变换σ在V的基$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$和W的基$\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_m$下的矩阵是给定的$m\times n$矩阵A.

若$\sigma,\tau\in\mathcal{L}(V,W)$都满足

$$\sigma(\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_n)=(\mathbf{w}_1\ \cdots\ \mathbf{w}_m)A=\tau(\mathbf{v}_1\ \cdots\ \mathbf{v}_n),$$

则

$$\sigma(\mathbf{v}_1)=\tau(\mathbf{v}_1),\sigma(\mathbf{v}_2)=\tau(\mathbf{v}_2),\cdots,\sigma(\mathbf{v}_n)=\tau(\mathbf{v}_n).$$

故$\sigma=\tau$.

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

分别取定向量空间V和W的基后,

$$\mathcal{L}(V,W) \longleftrightarrow M_{m\times n}$$

$$\sigma \longleftrightarrow A_{m\times n}$$

$$\tau \longleftrightarrow B_{m\times n}$$

$$\sigma+\tau \longleftrightarrow A+B$$

$$k\sigma \longleftrightarrow kA$$

定理: 设V是n维向量空间,W是m维向量空间,则$\mathcal{L}(V,W)$与$M_{m\times n}$线性同构.

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

定理 (线性变换的乘积与矩阵的乘积) 设 $\tau \in \mathcal{L}(U, V), \sigma \in \mathcal{L}(V, W)$, $\{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_p\}, \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}, \{\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_m\}$分别为向量空间U, V, W的基. 设$\sigma, \tau$ 在给定基下的矩阵分别为A, B, 则$\sigma\tau$ 在给定基下的矩阵为AB.

证明: 由
$$\sigma(\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n) = (\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_m)A;$$
$$\tau(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_p) = (\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n)B,$$
则
$$\sigma\tau(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_p) = \sigma(\tau(\mathbf{u}_1 \ \cdots \ \mathbf{u}_p)) = \sigma((\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n)B)$$
$$= \sigma(\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n)B = ((\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_m)A)B = (\mathbf{w}_1 \ \cdots \ \mathbf{w}_m)AB.$$

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

推论: 设 $\sigma \in \mathcal{L}(V,V)$ 为可逆线性变换, 且 σ 在V的某一组基下的矩阵为A, 则 σ^{-1}在这组基下的矩阵为A^{-1}.

证明: 由 σ 可逆,则有σ^{-1}使得$\sigma\sigma^{-1} = I$.

于是在给定基下的矩阵B应满足AB = I.

故 $B = A^{-1}$.

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

例: 设线性变换 $\tau:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $\tau(x,y,z)=(x+y,y-z)$, 线性变换$\sigma:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为 $\sigma(u,v)=(2u-v,u)$. 求线性变换$\sigma\tau:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 在$\mathbb{R}^3$与 $\mathbb{R}^2$的标准基下的矩阵.

解: 注意到

$$\sigma\tau(x,y,z)=\sigma(\tau(x,y,z))=\sigma(x+y,y-z)=(2x+y+z,x+y),$$

故在$\mathbb{R}^3$的标准基$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 与$\mathbb{R}^2$的标准基

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下有

$$\sigma\tau(e_1\ e_2\ e_3) = (\delta_1\ \delta_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

又注意到 $\sigma(\delta_1\ \delta_2) = (\delta_1\ \delta_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$，以及

4.4 线性变换与矩阵之间的关系

$$\sigma(e_1\ e_2\ e_3) = (\delta_1\ \delta_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

所以有AB = C.

$$\boxed{\text{“有限维向量空间上的线性变换”} \quad \longleftrightarrow \quad \text{“矩阵”}.}$$