DSA 2017 6.2: Vorbereitungsaufgaben

David Augustin und Urban Seifert

1 Komplexe Zahlen

Aufgabe 1.1

Sei $z_1 = \sqrt{27}/3 + 1\mathrm{i}$ und $z_2 = 2 - 2\mathrm{i}$. Berechne

1. $|z_1|$ und $|z_2|$
2. Den Winkel $\varphi = \mathrm{Arg}[z]$ und die jeweiligen Polar- und Eulerdarstellungen.
3. Berechne $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und z_1/z_2 in der kartesischen Darstellung und Eulerdarstellung.

Aufgabe 1.2

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl. Was folgt, falls $z^* = z$ gilt? Was folgt aus $z^* = -z$? Sei $w \in \mathbb{C}$ eine weitere komplexe Zahl. Zeige, dass $|zw| = |z||w|$ gilt.

Aufgabe 1.3

Die komplexen Zahlen erlauben eine kompakte Behandlung einiger geometrischer Probleme. Dazu wollen wir die Folgenden Betrachtungen anstellen.

1. Überlege Dir, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der gewöhnlichen Addition definiert als $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$ und skalaren Multiplikation $a \cdot z := ax + \mathrm{i}(ay)$ für $a \in \mathbb{R}$ einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ formen (*Hinweis*: Überprüfe die Vektorraum-Axiome).

2. Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ kann durch einen zweidimensionalen reellen Spaltenvektor $\mathbf{z} = (x, y)^T \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Zeige, dass alle Operationen in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ äquivalent mit Operationen in $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ durchgeführt werden können. Man sagt, dass $\mathbb{C}$ *isomorph* zu $\mathbb{R}^2$ ist und schreibt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.

3. Auf $\mathbb{R}^n$ können wir ein *Skalarprodukt* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ zwischen zwei Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ definieren als
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \cos \alpha, \tag{1}$$
wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist. (Spalten- bzw. Zeilenvektoren können formal als $n \times 1$- bzw $1 \times n$-Matrizen aufgefasst werden, sodass $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ mit dem Matrixprodukt eine $(1 \times n) \times (n \times 1) = 1 \times 1$-Matrix (also Zahl) ergibt.) Überlege Dir, welche Bedingungen eine Matrix $\mathbf{O}$ bzw. deren Elemente erfüllen muss, sodass bei der gleichzeitigen Anwendung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{O}\mathbf{x}$ (und analog für $\mathbf{y}$ das Skalarprodukt invariant bleibt, also
$$\langle \mathbf{O}\mathbf{x}, \mathbf{O}\mathbf{y} \rangle \stackrel{!}{=} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle. \tag{2}$$

Hinweis: $\mathbf{Ox}$ kann nun als Produkt einer $n \times n$ mit einer $n \times 1$ Matrix aufgefasst werden. Die Beziehung $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ könnte hilfreich sein.[1]

4. Wir wählen nun $n = 2$. Wieviele freie Parameter kann die Matrix $\mathbf{O}$ haben? (Eine 2×2-Matrix hat 4 Einträge. Wieviele unabhängige Bedingungen für die Einträge folgen aus der obigen Invarianzforderung?) Zeige, dass

$$\mathbf{O}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

für einen beliebigen Winkel α die obige Invarianzforderung erfüllt, also eine orthogonale Matrix ist. Ist die Wahl der Parametrisierung von $\mathbf{O}$ eindeutig? Berechne die Determinante von $\mathbf{O}$.

5. Zeige, dass $\mathbf{O}(\alpha + \beta) = \mathbf{O}(\alpha)\mathbf{O}(\beta)$ gilt. Was bedeutet dies anschaulich? *Hinweis:* Wahrscheinlich sind die Additionstheoreme für sin und cos nützlich, s. Reader.

6. Zeige nun, dass die Drehung eines allgemeinen Vektors, $(x, y)^T \mapsto \mathbf{O}(\alpha)(x, y)^T$, äquivalent dargestellt werden kann durch die Multiplikation einer geeigneten komplexen Zahl $z \mapsto z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. *Hinweis:* Beachte Aufgabenteil 2!

2 Lineare Algebra

Aufgabe 2.1

Berechne die Determinante von

1.
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \tag{4}$$

2.
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Finde eine orthogonale Matrix $\mathbf{O}$, die

$$\mathbf{B} = \mathbf{OAO}^T \tag{6}$$

erfüllt. Nutze dazu die Darstellung (3) und bestimme den Rotationswinkel α. Gibt es ein Argument warum man $\det A = \det B$ erwartet haben sollte, wenn (6) bereits bekannt gewesen wäre? *Hinweis:* Determinanten von Produkten aus Matrizen faktorisieren, also $\det(\Pi_i \mathbf{M}_i) = \Pi_i (\det \mathbf{M}_i)$, wobei $\mathbf{M}_i$ beliebige Matrizen sind. Zudem können Matrizen in einer Determinante permutiert werden, also $\det(\mathbf{ABC}) = \det(\mathbf{BCA}) = \det(\mathbf{CAB})$.

[1] Dies ergibt sich aus der Definition des Matrizenprodukts in Komponenten

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}.$$

Transponieren heißt nun Zeilen- und Spalten vertauschen (und somit ersten und zweiten Index), sodass $((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}(A^T)_{kj}(B^T)_{ik} = \sum_{k=1}^{n}(B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = (B^TA^T)_{ij}$ ist.

Aufgabe 2.2

Berechne i) die Determinante und ii) Spur der folgenden Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

iii) Bestimme die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$. Wie lautet die Determinante der inversen Matrix?

Aufgabe 2.3

Sei eine 2×2 Matrix $\mathbf{A}$ definiert mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Determinante und Spur von $\mathbf{A}$? Berechne die Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\mathbf{v}$ von $\mathbf{A}$, die jeweils

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

erfüllen. Nach obiger Gleichung ist $c\mathbf{v}$ mit $c \in \mathbb{R}$ auch ein Eigenvektor, wenn $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist. Wie lauten die auf den Betrag 1 normierten Eigenvektoren von $\mathbf{A}$? Schreibe diese normierten Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ spaltenweise in eine Matrix $\mathbf{O} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Berechne nun $\mathbf{O}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{O}$. Was fällt Dir auf? Wie lauten Determinante und Spur der neuen Matrix?

Aufgabe 2.4

Sei nun $\mathbf{A}$ eine beliebige reelle $n \times n$ Matrix. Eigenwerte λ_i und die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_i \neq 0$ mit $i = 1, \ldots, n$ erfüllen per Definition

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i.$$

1. (Wieso bedeutet $\lambda = 0$, dass $\mathbf{A}$ keine Inverse besitzt?) Wir nehmen nun an, dass $\det\mathbf{A} \neq 0$, also $\mathbf{A}$ eine Inverse besitzt. Zeige, dass die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ durch $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_n$ gegeben sind.
2. Zeige, dass alle Eigenwerte von orthogonalen Matrizen mit $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ als komplexe Zahlen mit Betrag 1 geschrieben werden können, also $\lambda_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_i}$ mit $\alpha_i \in [0, 2\pi)$. *Hinweis:* Betrachte die Beträge $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$ und analog $|\mathbf{O}\mathbf{v}|$ und nutze aus, dass die Norm $|\cdot| \geq 0$ ist.

Aufgabe 2.5

Seien σ_1, σ_2 und σ_3 komplexe 2×2-Matrizen gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Berechne für die obigen Matrizen σ_i^* (also komplex konjugieren der einzelnen Elemente) und σ_i^T. Berechne auch $\sigma_i^\dagger = (\sigma_i^*)^T$.[2] Was fällt Dir auf?

[2] $\mathbf{A}^\dagger := (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$ nennt man die *adjungierte Matrix*. (Wieso ist die Reihenfolge von komplex konjugieren und transponieren irrelevant?)

2. Berechne die Quadrate der Matrizen und $\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_2\sigma_3$ und $\sigma_3\sigma_1$. (Wieso ist die explizite Berechnung von $\sigma_2\sigma_1$ usw. nicht notwendig? *Hinweis:* Betrachte den Operator † und den vorherigen Aufgabenteil.)

3. Wie lauten die Eigenwerte und zugehörigen (orthonormierten) Eigenvektoren von σ_3? Berechne die Wirkung von σ_1 und σ_2 auf diese Eigenvektoren. Zeige außerdem, dass für $\sigma^+ := (\sigma_1 + \mathrm{i}\sigma_2)/2$ und $\sigma^- := (\sigma_1 - \mathrm{i}\sigma_2)/2$ die Beziehung $(\sigma^+)^\dagger = \sigma^-$ gilt. Berechne die Wirkung von $\sigma^3\sigma^+$ und $\sigma^3\sigma^-$ auf die obigen Vektoren.

3 Differential- und Integralrechnung

Aufgabe 3.1

Bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1+x^4}{1-x^4} \\
f_2(x) &= \sinh x, \quad \text{mit} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\
f_3(x) &= \cosh x, \quad \text{mit} \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \\
f_4(x) &= a^{2x}, \; a = \text{const.}
\end{aligned}$$

Die Funktionen sinh und cosh heißen *Sinus- und Cosinushyperbolicus*. Nutze die oben angegebene Darstellung für $\sinh x$ und $\cosh x$, um zu zeigen, dass

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{8}$$

gilt. Kennst Du eine ähnliche Relation für $\sin x$, $\cos x$?

Aufgabe 3.2

Bestimme die folgenden Integrale mithilfe von Substitution und/oder partieller Integration.

Hinweis: Beachte den Unterschied zwischen einem *bestimmten* Integral, also mit Grenzen a, b und der Stammfunktion F

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

und einem *unbestimmten Integral*, bei dem keine Grenzen angegeben werden. Da eine Stammfunktion immer nur bis auf eine Konstante C eindeutig ist, schreibt man daher für ein unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1. $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x^2+5}\ \mathrm{d}x$
2. $\int \ln x\ \mathrm{d}x$ *Tipp:* Schreibe $\ln x = 1 \cdot \ln x$ und nutze partielle Integration.
3. $\int \frac{\ln x}{x^5}\ \mathrm{d}x$
4. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$ *Tipp:* Überlege Dir eine geschickte Substitution, sodass Du den Satz des Pythagoras für die trigonometrischen Funktionen verwenden kannst.