writeup pentru siruri, mai pe fuga asa
Sa vezi ca iarasi fac singurul editorial, oricum problema e destul de standard

Camburu Luca

December 2025

1 dp in $O(n^2)$

De precizat aici ca am incercat mai intai ceva pe 2 dimensiuni, insa mi-am dat seama ca raspunsul este o suma de dp.

Mai mult, nu gaseam ceva care sa omoare probleme mai repede (sau macar sa arate mai bine. Oricum pentru 3/4 din problema, coeficientii sunt cam neconstanti, ceea ce cam da de gandit).

Definesti `d[i]`="Raspunsul pentru cerinta, adica suma produselor elementelor tuturor multimilor ordonate care au suma elementelor."

O recurenta destul de chill e urmatoarea

$$d[i] = \sum_{j=1}^{i} j\, d[i-j].$$

Ce faci de fapt e sa fixezi ultimul element din o posibila multime.

Imagineaza-ti ca ai o multime M care are suma elementelor i.

Acum, vei avea mai multe multimi d-astea, sa le numim M_α.

Tu de fapt faci $M_\alpha \to M_\alpha \cup \{j\}$. Produsul e doar produsul anterior inmultit cu valoarea j. Intrucat inmultirea este distributiva fata de adunare, j-ul nostru se distribuie fiecarui produs deja calculat, deci totul e chill.

Mna, acolo e $i - j$, intrucat vrei sa aiba suma i noua multime, deci ceri multimilor ale caror contributii le stim deja sa aiba aceasta suma.

Alegi $d[0] = 1$, intrucat vrei sa poti sa generezi si multimea $\{i\}$ ca o potentiala solutie.

Asta e $O(n^2)$.

2 imbunatatire 1, adica $O(n)$

Schimbi variabila $k := i - j \Rightarrow j = i - k$.

Stim ca j trecea prin $[1, i]$, asa ca k va trece prin $[0, i - 1]$.

Avem

$$d[i] = \sum_{k=0}^{i-1} (i-k) d[k].$$

$$d[i] = i \sum_{k=0}^{i-1} d[k] - \sum_{k=0}^{i-1} k \, d[k].$$

Astea-s chestii independente de i, asa ca de treci prin toate dp-urile de pana acum (toate starile), vei putea, indiferent de cat de rahacioase sunt, sa le spargi pe caprarii si sa gasesti o recurenta busita (Panaetism).

Niste notatii pentru a simplifica scrierea (si calculul)

$$\begin{cases} s[i] := \sum_{k=0}^{i} d[i] \\ s'[i] := \sum_{k=0}^{i} i \, d[i] \end{cases}$$

Asa ca stim

$$\begin{cases} d[i] = i \, s[i-1] - s'[i-1] \\ s[i] = d[i] + s[i-1] \\ s'[i] = i \, d[i] + s'[i-1] \end{cases}$$

Daca mentii 3 variabile pentru fiecare informatie, e un $O(n)$ teava, zic eu.

Atentie la $i = 0$, ca trebuie definite mai dubios sumele partiale. Ma rog, atentia trebuie sa fie de la cazul cu $O(n^2)$, ca si acolo trebuie ales $d[0] = 1$, iar, aici, arata cam ciudat $s[0] = 1$, dar ma rog.

3 imbunatatire 2, adica $O(\log n)$

Mai bagam niste mate, nu prea mult.

Ne uitam la $i + 1$.

Avem

$$d[i+1] = (i+1)s[i] - s'[i] \overset{\text{de prin definitiile de mai sus}}{=}$$

$$= (i+1)(d[i] + s[i-1]) - i \, d[i] - s'[i-1] =$$

$$= i \, d[i] + i \, s[i-1] + d[i] + s[i-1] - i \, d[i] - s'[i-1] =$$

$$\overset{\text{se reduc niste termeni}}{=} d[i] + s[i-1] + i \, s[i-1] - s'[i-1]$$

$$\overset{\text{definitia pentru } s[i]}{=} s[i] + i\, s[i-1] - s'[i-1] \overset{\text{definitia pentru } d[i]}{=} s[i] + d[i].$$

$$d[i+1] = s[i] + d[i].$$

Mna, nu pot sa zic prea multe. Mi s-a parut misto ca se reduce asa, insa nu pot sa zic prea multe. Un pic magic, posibil sa existe ceva mai natural.

De aici e doar sablon cu inmultire de matrice

Avem

$$\begin{cases} d[i+1] = d[i] + s[i] \\ s[i+1] = d[i+1] + s[i] = d[i] + 2\, s[i] \end{cases}$$

Ca idee, recurenta asta cu coeficienti constanti (cauta despre rezolvarea recurentelor liniare cu coeficienti constanti)are radacini cu $\sqrt{5}$, deci pana mea, nu prea poti sa faci doar o exponentiere.

Ce e mai tampit e ca e posibil ca $\sqrt{5}$ sa existe in $\mathbb{Z}_{10^9+9}$, am sa ma uit peste simbolul Legendre, sa vezi ce amuzant ar fi

Mai bag o sursa de exista

Scrisa altfel recurenta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d[i] \\ s[i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d[i+1] \\ s[i+1] \end{pmatrix}.$$

Primul pas e sa elimini cazul cu $n = 1$ si sa-ti incepi recurenta de acolo. Pentru mai multe detalii, cauta kfib pe infoarena, e fix aceeasi idee. Inmultirea de matrice e asociativa si comutativa in acest caz (fiind aceeasi matrice), asa ca raspunsul tau devine

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d[n] \\ s[n] \end{pmatrix}.$$

De ce $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? Ca astea-s valorile pentru $n = 1$.