Teoría de la empresa[1]

Derivación de la función de costos

Sup: $f_i(x_{ij}) = \prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}}$

$$\begin{cases} Max\Pi = py - rx \\ s.a. \\ y_i \leq f_i(x_{ij}) \end{cases}$$

Forma operativa:

$$\left\{ \begin{array}{lll} Max\Pi = \sum_i p_i y_i - \sum_j r_j (\sum_i x_{ij}) & \forall i & \forall j \\ s.a. \quad y_i \leq \prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}} \quad \forall i \quad \forall j & & \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} i = 1...n \\ j = 1...m \end{array}$$

I) Resolver

$$L = \sum_i p_i y_i - \sum_j r_j (\sum_i x_{ij}) + \sum_i \lambda_i \left(\prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}} - y_i \right)$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = p_i - \lambda_i \leq 0 \quad \wedge \quad (p_i - \lambda_i) y_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ij}} = -r_j + \lambda_i \alpha_{ij} (\prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}}) x_{ij}^{-1} \leq 0 \qquad \wedge \quad \left(-r_j + \frac{\lambda_i \alpha_{ij} \Pi(.)}{x_{ij}} \right) x_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}} - y_i \geq 0 \qquad \wedge \quad \left(\Pi(.) - y_i \right) \lambda_i = 0$$

Si $y_i > 0$ entonces (1) $p_i = \lambda_i$ y (2) $\lambda_i > 0$

Si $x_{ij} > 0$ entonces (3) $r_j = \dfrac{\lambda_i \alpha_{ij} \Pi(.)}{x_{ij}}$

Dado (2) entonces (4) $y_i = \prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}}$

[1] Del curso de Microeconomía II del Profesor Ruiz, Julio, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires. Versión digital por Caravaggio, Leonardo A.

De (1) y (3):

$$r_j = p_i \frac{\alpha_{ij}\Pi(.)}{x_{ij}}$$

II) Hallar las demandas condicionadas de factores productivos:

$$x_{ij} = x_{ij}(r, y)$$

A) Despejar x_{ij} de (3) $\qquad (5) \quad x_{ij} = \dfrac{\lambda_i \alpha_{ij}\Pi(.)}{r_j}$

B) Sustituir x_{ij} en (4)

$$y_i = \prod_j \left(\frac{\lambda_i \alpha_{ij}\Pi(.)}{r_j} \right)^{\alpha_{ij}}$$

$$y_i = \prod_j \left(\frac{\lambda_i^{\alpha_{ij}} \alpha_{ij}^{\alpha_{ij}} \Pi(.)^{\alpha_{ij}}}{r_j^{\alpha_{ij}}} \right)$$

$$y_i = \lambda_i^{\sum_j \alpha_{ij}} \Pi(.)^{\sum_j \alpha_{ij}} \prod_j \left(\frac{\alpha_{ij}}{r_j} \right)^{\alpha_{ij}}$$

C) Despejo λ_i y $\Pi(.)$ que están en (5) pero no son parte de $x_{ij} = x_{ij}(r, y)$

$$(6) \quad \lambda_i \Pi(.) = \left[y_i \prod_j \left(\frac{r_j}{\alpha_{ij}} \right)^{\alpha_{ij}} \right]^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{ij}} \right)}$$

D) Sustituyo (6) en (5)

$$x_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{r_j} \left[y_i \prod_j \left(\frac{r_j}{\alpha_{ij}} \right)^{\alpha_{ij}} \right]^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{ij}} \right)}$$

$$x_{ij} = \left[\frac{\alpha_{ij}^{\sum_j \alpha_{ij}}}{\prod_j \alpha_{ij}^{\alpha_{ij}}} \frac{\prod_j r_j^{\alpha_{ij}}}{r_j^{\sum_j \alpha_{ij}}} y_i \right]^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{ij}} \right)}$$

III) Construcción de la función de costos: de $rx \to C = c(ry)$

$$C = \sum_j r_j \left(\sum_i x_{ij} \right)$$

Pero la función de costos en microeconomía aparece vinculada con un producto, en el caso de una empresa multiproducto se plantean múltiples funciones de costos.

$$C_{i=k} = \sum_j r_j x_{kj}$$

Sustitución x_{kj}:

$$C_k = \sum_j r_j \left[\frac{\alpha_{kj}^{\sum_j \alpha_{kj}}}{\prod_j \alpha_{kj}^{\alpha_{kj}}} \frac{\prod_j r_j^{\alpha_{kj}}}{r_j^{\sum_j \alpha_{kj}}} y_k \right]^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)}$$

$$C_k = \sum_{j=1}^{m} r_j \frac{1}{r_j} \left(\frac{\alpha_{kj}^{\sum_j \alpha_{kj}}}{\prod_j \alpha_{kj}^{\alpha_{kj}}} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)} \left(\prod_j r_j^{\alpha_{kj}} y_k \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)}$$

$$C_k = m \left(\prod_j r_j^{\alpha_{kj}} y_k \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)} \sum_j \left(\frac{\alpha_{kj}^{\alpha_{kj}}}{\prod_j \alpha_{kj}^{\alpha_{kj}}} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)}$$

Esta $\Sigma(.)$ tendrá un valor constante respecto de $r \wedge y \therefore$ para simplificar la expresión defino $\phi = m\Sigma(.)$

$$\therefore C_k = \emptyset \left(\prod_j r_j^{\alpha_{kj}} y_k \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)}$$

Costo Medio

$$CM = \frac{CT}{Y}$$

$$CM = \emptyset \left(\prod_j r_j^{\alpha_{kj}} y_k \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} \right)} y_k^{-1}$$

$$CM = \emptyset \left(\prod_j r_j^{\alpha_{kj}} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}}\right)} y_k^{\frac{1-\sum_j \alpha_{kj}}{\sum_j \alpha_{kj}}}$$

Costo Marginal

$$Cmg = \frac{\partial CT}{\partial y}$$

$$Cmg = \left(\prod_j r_j^{\alpha_{kj}} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}}\right)} \frac{1}{\sum_j \alpha_{kj}} y_k^{\frac{1-\sum_j \alpha_{kj}}{\sum_j \alpha_{kj}}}$$

Notar que: $CMg = \left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j} \right) CM$

Relación con los rendimientos a escala (dado que $y = \prod_j x_{ij}^{\alpha_{ij}} \varepsilon H$ de grado $\sum \alpha_{ij}$):

Rendimientos decrecientes a escala: $\sum_j \alpha_j < 1$

$$\left(\frac{1-\sum_j \alpha_j}{\sum_j \alpha_j} \right) > 0 \quad CM \text{ y } CMg \text{ crecientes}$$

$$\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j} \right) > 1 \qquad CMg > CM$$

Rendimientos constantes a escala: $\sum_j \alpha_j = 1$

$$\left(\frac{1-\sum_j \alpha_j}{\sum_j \alpha_j} \right) = 0 \qquad CM \wedge CMg \text{ constantes}$$

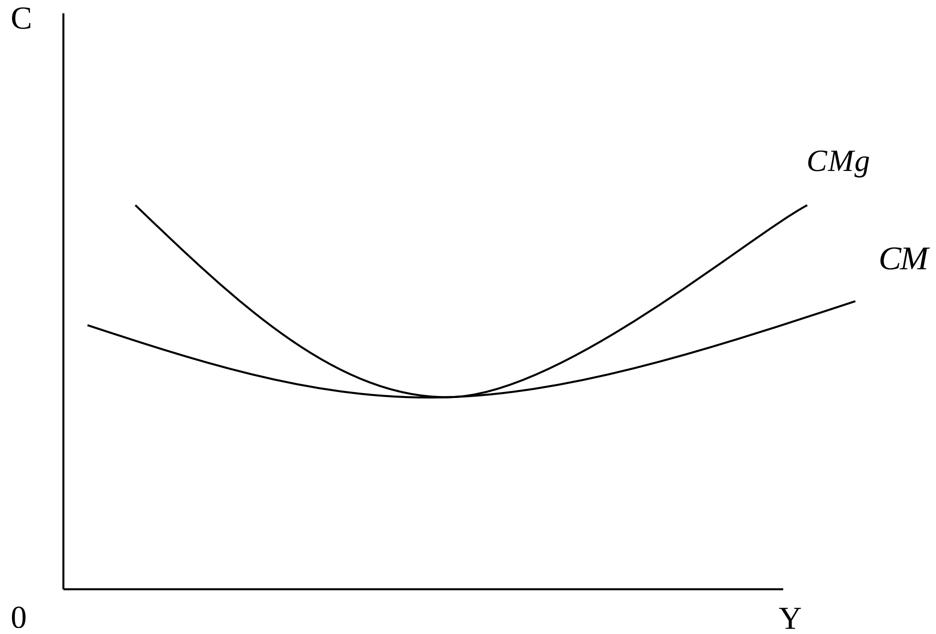
$$\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j} \right) > 1 \qquad CM = CMg$$

Rendimientos crecientes a escala: $\sum_j \alpha_j > 1$

$$\left(\frac{1-\sum_j \alpha_j}{\sum_j \alpha_j}\right) < 0 \qquad CM \wedge CMg \text{ decrecientes}$$

$$\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j}\right) < 1 \qquad CMg < CM$$

Para las funciones "productivas" homogéneas el CM y el CMg alcanzan sus mínimos en el mismo nivel de producción.



Convexidad de $C(.)$ en y: $\partial^2 C > 0$

$$\frac{\partial^2 C(.)}{\partial y^2} > 0$$

$$\frac{\partial CMg}{\partial y} > 0$$

La convexidad implica CMg crecientes.

$$\frac{\partial\left(\phi\left(\prod_j r_j^{\alpha_j}\right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j}\right)}\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j}\right) y^{\left(\frac{1-\sum \alpha_j}{\sum \alpha_j}\right)}\right)}{\partial y} = \phi \prod_j r_j^{\alpha_j} \frac{1}{\sum_j \alpha_j}\left(\frac{1-\sum \alpha_j}{\sum \alpha_j}\right) y \left(\frac{1-2\sum \alpha_j}{\sum \alpha_j}\right)$$

$$\frac{\partial^2 C(.)}{\partial y^2} = \phi\left(\prod_j r_j^{\alpha_j}\right)^{\left(\frac{1}{\sum_j \alpha_j}\right)} \left[\frac{1-\sum \alpha_j}{\left(\sum \alpha_j\right)^2}\right] y \left(\frac{1-2\sum \alpha_j}{\sum \alpha_j}\right)$$

Por lo que el signo de $\frac{\partial^2 C(.)}{\partial y^2}$ depende del signo de $1-\sum \alpha_j$

$C(.)$ será estrictamente convexa ($\frac{\partial^2 C(.)}{\partial y^2} > 0$)

$$1-\sum \alpha_j > 0$$
$$1 > \sum \alpha_j$$

Rendimientos decrecientes a escala

$C(.)$ será convexa (pero no estrictamente) ($\frac{\partial^2 C(.)}{\partial y^2} = 0$)

$$1-\sum \alpha_j = 0$$
$$1 = \sum \alpha_j$$

Rendimientos constantes a escala

$C(.)$ no será convexa (será cóncava) ($\frac{\partial^2 C(.)}{\partial y^2} < 0$)

$$1-\sum \alpha_j < 0$$
$$1 < \sum \alpha_j$$

Rendimientos crecientes a escala

$\therefore$ La convexidad de $C(.)$ en y excluye los rendimientos crecientes a escala (notar que la concavidad de $C(.)$ en r no depende de la tecnología, mientras esta convexidad en y sí depende de la tecnología).