1.1 追忆高中往事

在严肃地开始我们的讲义之前，我想先讲几个故事，怀念一下高中的学习生活。

犹记得我与“场”之间的几个故事，其中最让我感动和铭记的是这第一个关于“原电池”的故事。2021年清明假期，当时我上高一下学期，化学里讲“原电池”的知识（尤其是在化学课本和课堂上出现了“电势”一词，这是我们当时老高考高二的物理知识）。当时班里几位同学讨论的一个热点问题是——原电池中的电流是如何产生的？为什么将铜、锌金属片用导线相连后插入电解质溶液中便能产生电流？同学们各自有各自的见解，大家互相讨论、辩论，最终在2021年4月4日中午由GJH同学总结成一篇段文字发表于QQ空间中，简摘如下：

“经过数天奋斗不息，接近一周的讨论，终于解决了这个双液问题。（其实当时大部分说的都是对的，但是没有结合起来，方向也不是特别指明。）

双液原电池是由于铜锌活泼性不同，造成两者之间电势差，……，因此如果没有电解质溶液，是无法形成原电池的。（我 [我] 的理论不完全就是因为这点，因为如果只有金属，没有电解质溶液，只能产生这种趋势）……这基本就是双液原电池的原理了。（YC 、JCH 说的并没有错，只是大部分人当时并没有联系起来。老方 [WHY]，说的是啥我听不明白）

以上如有错误，欢迎纠正”

然而在我看来，这个“双液问题”并没有被“完全解决”。我首先不明白为什么都说铜锌之间存在电势差，但直接将铜锌相连却没有电流产生。当时我心中有一个模糊的电学框架，所以对“铜锌之间存在电势差，却没有电流”表示怀疑。所以我想彻底弄明白什么是电势、铜锌之间所谓的“电势差”究竟是一个什么样的性质。下面摘录一些上述QQ空间文章的评论区中的评论：

— 我: 我说太多你也听不懂，我就简单给你说。
— GJH: 你简单说又没逻辑。
— 我: 要不我下周把物理选修3 - 1给你拿来看看电场是啥。
— GJH: 你要是用电场来解决，这个问题就复杂了。
— YC: nesv
— 我: 我今天晚上发表说说好好给你们讲讲，等我回家。
— GJH: 坐等
— 我: [一个小企鹅喝茶的表情包]

我当晚花了几个小时翻看着物理选修3 - 1第一章“静电场”，然而却没有发表“说说”。我对GJH说要通电话，来给他讲什么是“电势”、“电势差”，不料GJH同学在班级群中宣传说“LD要讲课了，关于原电池，大家来听！”最后竟真的招募了另一位观众——ZCX同学。

我所谓的“讲课”持续了40分钟就被GJH打断了，因为我根本讲不清楚电场，也没有成功解决原电池遗留的困难。（这困难最后的解决是第二天GJH找到的一篇文章，用的高二课本《化学反应原理》第一章中的思想。）

几年过去了，现在看来曾经那次课“讲课”是有收获的，其中之一是我心中埋下了对“场”的认识的种子。什么是场？在讲课中，我对此问题的回答是：“电场是电荷周围的一种东西，其它电荷在其

中能感受到原先那个电荷对它的影响。”。我现在认为这个理解抓住了场的特征——场是空间中的东西，反映出了空间的性质。”

使我加深了对（数学）场的理解的一件事发生在2021年9月30日，国庆节放假的那个离校的下午。笔者家长有事晚到，于是我在教室里闲逛。这时，已经转到高二文科班的GJH来到了这个与他始终紧密联系在一起的中补二班，拿出一本蓝皮书在我眼前晃。是一本大学教材《电磁学》（似乎是陈秉乾著的那个老版本），他说这是他们文科班物理老师的老课本（好像是位朱姓的男老师），说让他参考以写一篇关于电场的文章。我很眼馋，求他把这本《电磁学》借给我看，我回家给他拍照片。在我的苦苦央求下，他同意把书留在我手里，但要给他拍照以便不打扰他写文章。他回家了，我家长还未来，便坐在窗台上看《电磁学》。结果我就看了没几页，就等来了家长，可这本书却忘了带回家，自然也就没有给GJH拍照，GJH当时非常生气。

幸运的是，这“没几页”的浏览让我捡到了宝。我从某一页中得知了一个对于一个刚上高二的学生来说既费解又令人惊奇的概念（或者说是思想）——“若空间中每一点都对应了一个矢量，则称空间中存在一矢量场；若空间中每一点都对应了一个标量，则称空间中存在一标量场。”相比之下，上述标量场的概念更令我费解。文中举了些例子“例如电场是矢量场；温度、电势则是标量场。”电场是矢量场令人欣然接受，这与我之前对电场的理解不谋而合——之前我认为的“空间中被激发出的东西”现在看来就是“空间中对应的矢量”。但“温度和电势是标量场”在当时看来则是新鲜的、难以一下子接受的。我欣然接受“ 标量场”观念是在大一时，在深刻体会了数学中“映射”概念之后。现在看来，上述对场的表述是一种数学或几何上的描述。

在2022年4月，一次“天一大联考”之后的晚自习，我不想写作业，于是整晚投入了一篇文章的写作之中，文章的名称是《论场和势》，这篇文章现在还在我的笔记本里。

当时我很想总结一下自己已知的关于电磁场的知识与想法。这篇文章是有收获的——我理解了“$E = -\nabla\varphi$”这个公式，但在文章中我错误地说明了“散度”和“旋度”的概念。

最后一个故事发生在2023年1月，过年前。当时老师在钉钉里发了一个文档，里面有一栏是“寒假学生研究性学习……”这勾起了我研究的热情。于是我在钉钉同学群中打广告，招募队友。终于成功招募了三名同学——YZY、WHY、JYT。

我们研究性学习的课题打算取自物理教材的后面“研究性学习”部分提供的课题。经过比较考量，我们最终选择了《必修二》中的“潮汐的成因与现象”，因为这一课题不用做实验，理论性最强、最好出成果。我们的分工是：我与YZY负责分析潮汐现象的成因；WHY负责分析潮汐发电技术；JYT负责上网搜集中国潮汐发电站的资料与图片。

然后WHY发给了我他的成果，一张A4纸的内容。后来杨也给我发来了他的想法，有公式和配图，还有JYT的图片。我整合了众人的成果，参考了一些其它资料，结合自己的思考，写下了文章的第一个版本。第一版用惯性力与非惯性系解释了潮汐现象的成因。但是，我对惯性力与非惯性系这样的解释不满意，认为这样的物理图象不让人信服、让人有所疑虑。尤其是地球在自转时，这惯性力是怎么保持的呢？（换句话说，这惯性力是怎么在地球自转的情况下产生这样的潮汐规律的呢？）这难以想象、也难以理解。

突然，“场”的概念在脑海中闪出。我猛地意识到，若用场的观念去解释潮汐，上面那个问题所带来的疑虑与不安便可以消除。于是我又着手写了第二版的论文。一开篇便开宗明义地引入了“场”的

概念与所谓的“引潮力场”。这样，在地球参考系下，空间的性质变得明朗起来——空间中分布着力场，在力场的作用下，海水涨落形成潮汐。这力场被“冻结”在地球周围的空间之中，是空间的属性，自然与地球是否自转无关。潮汐正是在这力场的作用下，和地球自转的共同作用下形成的一种周期现象。事实上，这次思考令我留下了一个观念——非惯性系就相当于惯性系加上一个力场。

我欣然将这些想法同YZY分享，并与他进行了讨论。可惜的是，这篇名为《论潮汐》的文章没有上交学校，因为当时临近一模。总之，“场”的确是一个优秀的物理图象。把非惯性系处理为“力场”，的确能得到直观的图象、省去不少思维负担。

那时我们掌握的知识并不多，却真切地体会到了学习到新东西的最纯粹的喜悦。那是一段永远值得怀念的时光。

（原文写于2024.5.25，并且修改于2025.4.28）

2.1 指标法与并矢

学习了微积分之后，我们已经有了矢量场论中基本的概念，如梯度、散度、旋度。在矢量分析中会遇到各种各样的矢量运算、算符运算与公式推演。这些数学工作用先前的传统方法必然显得冗杂、繁琐，我们需要新的数学工具，它就是指标法（名字是我本人起的，我不知道有无官方名称）。指标法大大提高了我们学习电动力学的“生产力”。

下面首先要交待指标法中要用的几个惯例与符号。

2.1.1 Einstein求和约定

今后我们约定，凡是某项中出现两重复指标求和的形式时，均省略去求和号。这是一种官方约定，称为Einstein求和约定。

例1. 设有两个矢量$\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{B}=(b_1,b_2,b_3)$，则它们的内积为：

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=a_ib_i$$

最后一个等号我们就启动了Einstein求和约定。注意，今后讨论中我们均这样做，除非特别声明。

2.1.2 Kronecker符号与Levi - Civita符号

定义Kronecker符号：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}\tag{2.1}$$

定义Levi - Civita符号：

$$\varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n}=\begin{cases}-1, & \tau(p_1\cdots p_n){:}Gp\\ 0, & p_i=p_j\ (\exists i,j=1,2,\cdots,n)\\ 1, & \tau(p_1\cdots p_n){:}vp\end{cases}\tag{2.2}$$

其中$\tau(p_1\cdots p_n)$为排列$p_1\cdots p_n$的逆序数，这在线性代数中是一个基本概念。

若我们推广排列和逆序数之定义，可以直接记为：

$$\varepsilon_{p_1p_2\cdots p_n}=(-1)^{\tau(p_1\cdots p_n)}$$

2.1.3 矢量分析中的公式推演

下面我们用指标法推演电磁学常用数学公式。声明：以下所有场（矢量场与标量场）均为连续可微的场，除非特别声明。

①行列式

n阶行列式之传统定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{2.3}$$

(请注意，这里p有重复指标，l没有重复)

利用新的Levi - Civita符号改写之：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{p_1 p_2 \cdots p_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

物理中所需要的多为3阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$$

例2. 写出3阶行列式的非Einstein求和形式的公式。本例可以为一个辅助，辅助读者接受Einstein求和。

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} \\
&= \varepsilon_{1jk} a_{11} a_{j2} a_{k3} + \varepsilon_{2jk} a_{21} a_{j2} a_{k3} + \varepsilon_{3jk} a_{31} a_{j2} a_{k3} \\
&= \varepsilon_{12k} a_{11} a_{22} a_{k3} + \varepsilon_{13k} a_{11} a_{23} a_{k3} \\
&+ \varepsilon_{21k} a_{12} a_{21} a_{k3} + \varepsilon_{23k} a_{12} a_{23} a_{k3} \\
&+ \varepsilon_{31k} a_{13} a_{21} a_{k3} + \varepsilon_{32k} a_{13} a_{22} a_{k3} \\
&= \varepsilon_{123} a_{11} a_{22} a_{33} + \varepsilon_{132} a_{11} a_{23} a_{32} \\
&+ \varepsilon_{213} a_{12} a_{21} a_{33} + \varepsilon_{231} a_{12} a_{23} a_{31} \\
&+ \varepsilon_{312} a_{13} a_{21} a_{32} + \varepsilon_{321} a_{13} a_{22} a_{31} \\
&= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}
\end{aligned}$$

一个建议是：若你无法理解下面几页的公式推演，就在你的脑海中进行这个展开成一长串的过程，然后利用这个展开后的长串去理解我们所进行的一些操作。这常常会起到帮助。

②矢量叉乘、三重积与三重矢积

(1)矢量叉乘：

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i A_j B_k \tag{2.4}$$

(2) 三重积：

$$\begin{aligned}(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}&=(\vec{A}\times\vec{B})_i C_i=(\varepsilon_{ijk}A_j B_k)C_i\\&=\varepsilon_{ijk}C_i A_j B_k\end{aligned}$$

把ε_{ijk}的i，j，k 3个指标进行偶对换，其符号不变，故我们能得到一个有用的公式：

$$\varepsilon_{ijk}C_i A_j B_k=\varepsilon_{jki}A_j B_k C_i=\varepsilon_{kij}B_k C_i A_j$$

即：

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B} \tag{2.5}$$

(3) 三重矢积

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i A_j(\vec{B}\times\vec{C})_k\\&=\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i A_j\varepsilon_{kmn}B_m C_n\end{aligned}$$

下面要引入一个常用的公式（证明略，可自行验证）

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}&=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\\&=\begin{vmatrix}\delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ik}\\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jk}\\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kk}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

由于ε_{kmn}的指标中只要有重复的，它就会变成0，故对于最后非零的结果而言，不会出现ik或jk或mk或nk指标相同的情况，于是这个行列式就变成了：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & 0 \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}
\end{aligned}
$$

这个公式相当常用。有了这公式，我们有：

$$
\begin{aligned}
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i A_j (\vec{B} \times \vec{C})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\vec{e}_i A_j B_m C_n \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\vec{e}_i A_j B_m C_n \\
&= \delta_{im}\delta_{jn}\vec{e}_i A_j B_m C_n - \delta_{in}\delta_{jm}\vec{e}_i A_j B_m C_n \\
&= \vec{e}_i A_j B_i C_j - \vec{e}_i A_j B_j C_i
\end{aligned}
$$

即：

$$
\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \tag{2.6}
$$

其中我们还用到了一个小技巧（或者说其实就是一种理解方式）

$$
\delta_{ij}A_i B_j = A_i B_i = A_j B_j
$$

你可以称之为δ_{ij}的“挑选指标的功能”。

三重积公式在研究磁场等出现叉乘的地方的问题时非常常用。

③梯度场的散度与旋度

(1)

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla u &= \partial_i (\nabla u)_i \\
&= \partial_i \partial_i u \\
\nabla \cdot \nabla u &= \nabla^2 u
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla u &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \partial_j (\nabla u)_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i \partial_j \partial_k u
\end{aligned}
$$

而：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j\partial_k u &= -\varepsilon_{ikj}\vec{e}_i\partial_j\partial_k u\\ &= -\varepsilon_{ikj}\vec{e}_i\partial_k\partial_j u\\ &= -\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j\partial_k u\end{aligned}$$

故：

$$\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j\partial_k u = 0$$

即：

$$\nabla\times\nabla u = 0 \tag{2.8}$$

这也反映了一个有趣的结论。像ε_{ijk}这样相邻指标做一次交换符号变号的性质叫做“反对称性”；而像$\partial_j\partial_k$这样交换指标（从而变成$\partial_k\partial_j$）但符号不变的性质叫“对称性”。一个结论是当某项中同时出现对称与反对称的元素时，该项必为0。其原因很好地体现在了上述证明过程中。

④叉乘场的散度与旋度

(1)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) &= \partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_i\\ &= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)\\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_i(A_jB_k)\\ &= \varepsilon_{ijk}(\partial_iA_j)B_k + \varepsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k\\ &= \varepsilon_{ijk}(\partial_iA_j)B_k - \varepsilon_{ikj}(\partial_iB_k)A_j\\ &= (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B} - (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}\end{aligned} \tag{2.9}$$

从这个例子(以及(2.8)那个例子)可以看出ε_{ijk}在算式中指标的顺序是重要的，且调换顺序时须考虑符号的变化。

(2)

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j(\vec{A}\times\vec{B})_k\\ &= \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_j(\varepsilon_{mnk}A_mB_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\vec{e}_i(\partial_jA_m)B_n + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk}\vec{e}_i(\partial_jB_n)A_m\\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\vec{e}_i(\partial_jA_m)B_n + (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\vec{e}_i(\partial_jB_n)A_m\\ &= \vec{e}_iB_j\partial_jA_i - \vec{e}_i(\partial_jA_j)B_i + \vec{e}_i(\partial_jB_j)A_i - \vec{e}_iA_j\partial_jB_i\\ &= (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\nabla\cdot\vec{B})\vec{A}\end{aligned} \tag{2.10}$$

我们发现其中出现了一个奇怪的东西$(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A}$，它是这样一个矢量：

$$
\begin{aligned}
(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} &= (B_1\partial_1+B_2\partial_2+B_3\partial_3)(A_1\vec{e}_1+A_2\vec{e}_2+A_3\vec{e}_3) \\
&= (B_1\partial_1A_1+B_2\partial_2A_1+B_3\partial_3A_1)\vec{e}_1 \\
&+ (B_1\partial_1A_2+B_2\partial_2A_2+B_3\partial_3A_2)\vec{e}_2 \\
&+ (B_3\partial_3A_1+B_2\partial_3A_2+B_3\partial_3A_3)\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

这个式子常与跟“并矢”有关的公式一起使用，对于什么是并矢及其相关公式敬请往下看，后文会交待，不要担心。

⑤点乘场的梯度

$$
\begin{aligned}
\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \vec{e}_i\partial_i(A_jB_j) \\
&= \vec{e}_iB_j\partial_iA_j+\vec{e}_iA_j\partial_iB_j
\end{aligned}
$$

⑥ Gauss公式与Stokes公式的对偶版本

(1) Gauss公式及其对偶式 Gauss公式为

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\mathrm{d}V = \oiint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

或者这样改写：

$$\iiint_V dV\nabla\cdot\vec{A} = \oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{A} \tag{2.12}$$

我们将微分变量dV、$d\vec{S}$写在前面是有道理的：这样保证了矢量分析中这一大堆的Gauss公式、Stokes公式及其变种式有类似的、便于记忆的结构。

现在我们将(2.12)等号左边中的散度改为旋度，结果如何呢？

$$
\begin{aligned}
\iiint_V dV\nabla\times\vec{A} &= \iiint_V dV\varepsilon_{ijk}\vec{e}_i\partial_jA_k \\
&= \vec{e}_i\iiint_V dV\partial_j(\varepsilon_{ijk}A_k) \\
&= \vec{e}_i\iiint_V dV[\partial_1(\varepsilon_{1ik}A_k)+\partial_2(\varepsilon_{2ik}A_k)+\partial_3(\varepsilon_{3ik}A_k)]
\end{aligned}
$$

$\partial_1(\varepsilon_{1ik}A_k)+\partial_2(\varepsilon_{2ik}A_k)+\partial_3(\varepsilon_{3ik}A_k)$ 俨然是一个场的散度（你看出来了吗？我的朋友），这场是：

$$\vec{\xi}_i = (\varepsilon_{i1k}A_k,\varepsilon_{i2k}A_k,\varepsilon_{i3k}A_k)$$

于是，利用Gauss定理，我们得到：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \vec{e}_i \oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot(\varepsilon_{ijk}A_k\vec{e}_j) = \vec{e}_i \oiint_{\partial V} (dS_l\vec{e}_l)\cdot(\varepsilon_{ijk}A_k\vec{e}_j) \\
&= \vec{e}_i \oiint_{\partial V} \vec{e}_l\cdot\vec{e}_j dS_l\varepsilon_{ijk}A_k = \vec{e}_i \oiint_{\partial V} \delta_{lj}dS_l\varepsilon_{ijk}A_k \\
&= \vec{e}_i \oiint_{\partial V} \varepsilon_{ijk}dS_jA_k = \oiint_{\partial V} \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i dS_jA_k \\
&= \oiint_{\partial V} d\vec{S}\times\vec{A}
\end{aligned}
$$

即：

$$
\iiint_V dV\nabla\times\vec{A} = \oiint_{\partial V} d\vec{S}\times\vec{A} \tag{2.13}
$$

对比(2.12)与(2.13)，发现只需将点乘改为叉乘即可由(2.12)得出(2.13)。此外，两式之间的联系与区别还有：(2.12)是个标量式而(2.13)则是个矢量式；(2.12)式左边的散度的体积分而(2.13)左边是旋度的体积分。这些均是我把(2.13)称为(2.12)对偶式的原因。

此外，注意只有两个基矢点乘时才会生成δ_{ij}，即

$$
\vec{e}_l\cdot\vec{e}_j = \delta_{lj}
$$

这就是为什么上面没有用$\vec{e}_i$生成δ_{ij}或δ_{il}的原因。

(2) Stokes公式的对偶式原始的Stokes公式为

$$
\iint_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{A}) = \oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{A} \tag{2.14}
$$

现在把$\vec{A}$换成标量场u，计算下式：

$$
\begin{aligned}
\iint_S d\vec{S}\times(\nabla u) &= \iint_S \varepsilon_{ijk}\vec{e}_i dS_j\partial_k u \\
&= \vec{e}_i \iint_S dS_j\varepsilon_{ijk}\partial_k u \\
&= \vec{e}_i \iint_S \varepsilon_{jki}dS_j\partial_k u \\
&= \vec{e}_k \iint_S \varepsilon_{ijk}dS_i\partial_j u \\
&= \vec{e}_k \iint_S \varepsilon_{ijm}dS_i\partial_j(u\delta_{km}) \\
&= \vec{e}_k \iint_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{\xi}_k) \\
&= \vec{e}_k \oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{\xi}_k = \vec{e}_k \oint_{\partial S} dl_i u\delta_{ki} = \oint_{\partial S} dl_i\vec{e}_i u \\
&= \oint_{\partial S} d\vec{l}u
\end{aligned}
$$

其中:

$$
\vec{\xi}_k = (u\delta_{k1}, u\delta_{k2}, u\delta_{k3})
$$

所以我们得到：

$$\iint_S d\vec{S}\times\nabla u=\oint_{\partial S} d\vec{l}u \tag{2.15}$$

这即是Stokes公式的对偶式，也是从标量式改成了矢量式，同时把矢量场换成了标量场。

2.1.4 并矢

(1)新规则

顾名思义，并矢即把两个矢量不做点叉乘而并排放在一起，长这样：$\vec{A}\vec{B}$。 $\vec{A}\vec{B}$仅是一个记号，在数学上并矢实质上是个矩阵：

$$\begin{aligned}
\vec{A}\vec{B}&=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}(B_1\ B_2\ B_3)=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2&A_1B_3\\A_2B_1&A_2B_2&A_2B_3\\A_3B_1&A_3B_2&A_3B_3\end{pmatrix}\\
&=A_1B_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_1B_2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_1B_3\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&+A_2B_1\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_2B_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+A_2B_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&+A_3B_1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+A_3B_2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}+A_3B_3\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&=A_1B_1\vec{e}_1\vec{e}_1+A_1B_2\vec{e}_1\vec{e}_2+A_1B_3\vec{e}_1\vec{e}_3\\
&+A_2B_1\vec{e}_2\vec{e}_1+A_2B_2\vec{e}_2\vec{e}_2+A_2B_3\vec{e}_2\vec{e}_3\\
&+A_3B_1\vec{e}_3\vec{e}_1+A_3B_2\vec{e}_3\vec{e}_2+A_3B_3\vec{e}_3\vec{e}_3
\end{aligned}$$

既然并矢是3×3的方阵，矢量可以视为一个1×3或3×1的矩阵，故并矢和矢量的运算有两种。我们规定：

(1) 左乘

$$\begin{aligned}
(\vec{A}\vec{B})\cdot\vec{C}&=\begin{pmatrix}A_1B_1&A_1B_2&A_1B_3\\A_2B_1&A_2B_2&A_2B_3\\A_3B_1&A_3B_2&A_3B_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix}(B_1C_1+B_2C_2+B_3C_3)\\
&=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})
\end{aligned}\tag{2.16}$$

(2) 右乘

$$
\begin{aligned}
\vec{C}\cdot(\vec{A}\vec{B}) &= (C_1\ C_2\ C_3)\begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix} \\
&= (C_1A_1 + C_2A_2 + C_3A_3)(B_1\ B_2\ B_3) \\
&= (\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B} \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

为了使某些公式的结构具有统一性，我们不论是在名称上还是形式上都认为上述两种运算称为并矢点乘矢量，其结果仍为一个矢量。并矢与矢量作用的方式为“就近作用”。以上所有东西都是我们新约定与构造的规则，其作用是帮助我们搭建好用的公式以及帮助我们做一些证明。

由于矩阵的运算一般不具有交换律，因此并矢与矢量进行点乘时，各矢量的顺序切不可乱动!

(2)并矢公式

(1)

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\vec{A}\vec{B}) &= \partial_i\vec{e}_i\cdot(A_jB_k\vec{e}_j\vec{e}_k) \\
&= \partial_i\vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\vec{e}_kA_jB_k) \\
&= \partial_i(\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j)(A_jB_k\vec{e}_k) \\
&= \partial_i\delta_{ij}(A_jB_k\vec{e}_k) \\
&= \partial_i(A_iB_k\vec{e}_k) \\
&= (\partial_iA_i)B_k\vec{e}_k + (A_i\partial_i)B_k\vec{e}_k \\
&= (\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

啊哈! 终于是出现了$\vec{A}\cdot\nabla$这个算符。注意，并矢公式的推导必须遵守在刚刚的（1）中定义的规则才行!

(2)

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\cdot(\nabla\vec{B}) &= A_i\vec{e}_i\cdot(\vec{e}_j\vec{e}_k\partial_jB_k) \\
&= A_i\delta_{ij}\partial_jB_k\vec{e}_k \\
&= A_i\partial_iB_k\vec{e}_k \\
&= (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

注：

$$
\nabla\vec{B} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}(B_1\ B_2\ B_3) = \begin{pmatrix} \partial_1B_1 & \partial_1B_2 & \partial_1B_3 \\ \partial_2B_1 & \partial_2B_2 & \partial_2B_3 \\ \partial_3B_1 & \partial_3B_2 & \partial_3B_3 \end{pmatrix}
$$

(3) 推广了的含有并矢的Gauss公式

$$
\begin{aligned}
\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot(\vec{A}\vec{B}) &= \oiint_{\partial V} \vec{B}(\vec{A}\cdot d\vec{S}) \\
&= \vec{e}_i \oiint_{\partial V} (B_i\vec{A})\cdot d\vec{S} \\
&= \vec{e}_i \iiint_V \nabla\cdot(B_i\vec{A})\, dV \\
&= \vec{e}_i \iiint_V (\nabla B_i\cdot\vec{A} + B_i(\nabla\cdot\vec{A}))\, dV \\
&= \iiint_V ((\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + A_j(\partial_j B_i)\vec{e}_i)\, dV \\
&= \iiint_V ((\nabla\cdot\vec{A})\vec{B} + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B})\, dV \\
&= \iiint_V dV \nabla\cdot(\vec{A}\vec{B})
\end{aligned}
$$

即

$$
\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot(\vec{A}\vec{B}) = \iiint_V dV \nabla\cdot(\vec{A}\vec{B}) \tag{2.20}
$$

从中我们也看出了把微分变量提到最前面是明智的。

以上我们讲的都是一些数学公式，并未涉及物理。后面我们将会利用这些公式，根据电磁学基本的实验原理，探索电与磁的世界!

3.1 真空中的Maxwell方程组

3.1.1 真空静电场的散度 div$\vec{E}$

所谓静电场，即是说静止电荷产生的电场，场强不随时间改变，因而只是空间坐标的函数

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(\vec{r})$$

物理规律的唯一来源是实验。关于静电场的实验规律是Coulomb定律：

$$\vec{F}_{12} \propto \frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

或者写成等式

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2 \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = k\frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

其中k为静电力常数。若电荷以C（库仑）为单位，r以m为单位，则：

$$k = 8.987551 \times 10^9 \ N \cdot m^2/C^2$$

它是一个定义值，具体我们稍后再说。

从而电场强度(其中$\vec{r'}$是电荷的位矢，$\vec{r}$是场点的位矢)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}(\vec{r} - \vec{r'})$$

下面求点电荷静电场的散度：

1. $\vec{r} \neq \vec{r'}$的情况(即 $\vec{r} - \vec{r'} \neq \vec{0}$)

$$\begin{aligned}
\text{div}\vec{E} &= \nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \partial_i E_i \\
&= \partial_i \frac{kq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}(x_i - x_i') \\
&= kq\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\partial_i(x_i - x_i') + kq(x_i - x_i')\partial_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \\
&= \frac{3kq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} + kq(x_i - x_i')(-3)\frac{x_i - x_i'}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \\
&= \frac{3kq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} - 3\frac{kq|x_i - x_i'||x_i - x_i'|}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \\
&= \frac{3kq}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} - \frac{3kq|\vec{r} - \vec{r'}|^2}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

或用球坐标下的散度算符：

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(E_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$$

因为：$E_r = \frac{kq}{r^2}$，$E_\theta = E_\varphi = 0$ 故：

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial kq}{\partial r} = 0$$

2. $\vec{r}=\vec{r'}$的情况在这种情况下，$\vec{E}(\vec{r})$ 发散，不能用 ∇ 点乘。不过从计算的角度讲，我们引入Dirac函数来表征点电荷的电荷体密度，从而 $\nabla\cdot\vec{E}$ 在 $\vec{r}-\vec{r'}=\vec{0}$ 处有了一个数学上的形式。下面具体来看看：

- Dirac函数：所谓Dirac函数是这样一类广义函数：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r'})=\begin{cases}0, & \vec{r}\neq\vec{r'}\\ +\infty, & \vec{r}=\vec{r'}\end{cases}$$

且须满足：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} dV\,\delta(\vec{r}-\vec{r'})=1$$

Dirac函数最重要的性质为：

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} dV\,f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r'})=f(\vec{r'}) \tag{3.0}$$

设V是一包裹了q的任一空间体积，并将q设为原点。

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{E}(\vec{r}) &= \oiint_{\partial V} kq\frac{d\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2}\\ &= \oiint_{\partial V} kq\frac{r^2\sin\theta d\theta d\varphi}{r^2}\\ &= kq\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\\ &= 4\pi kq\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{E}(\vec{r}) &= \oiint_{\partial V} kq\frac{d\vec{S}\cdot\hat{r}}{r^2}\\ &= \oiint_{\partial V} kq\ d\Omega \quad \cdots\cdots\ d\Omega\ \text{为立体角微元.}\\ &= 4\pi kq\end{aligned}$$

令$4\pi k=\frac{1}{\varepsilon_0}$，故$k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$，从而电通量变成了一个更简洁的形式：

$$\varPhi_e=\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{E}=\frac{q}{\varepsilon_0} \tag{3.1}$$

ε_0为真空电容率或真空介电常量。

为什么说k是定义值？因为光速$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=299792458\ m/s$为定义值；而真空磁导率$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ H/m$亦是定义值，故$\varepsilon_0$为定义值，$k$也为定义值。

Coulomb定律因之改写为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r} \tag{3.2}$$

有了(3.1)，我们把 $\mathrm{div}\vec{E}$ 推广至带有 $\vec{r}=\vec{r'}$ 这一点的情形。有

$$\iiint_V dV\nabla\cdot\vec{E}=\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{E}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

故：

$$\iiint_V dV\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{q/\varepsilon_0}=1$$

考虑到 $\vec{r}-\vec{r'}\neq\vec{0}$ 时，$\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{q/\varepsilon_0}=0$，故我们根据Dirac函数的定义知：

$$\frac{\nabla\cdot\vec{E}}{q/\varepsilon_0}=\delta(\vec{r}-\vec{r'})$$

故

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=q\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r'})}{\varepsilon_0} \tag{3.3}$$

再思考一步：

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}&=\vec{\nabla}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}(\vec{r}-\vec{r'})\\&=\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r'})\end{aligned}$$

从而

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}=4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r'}) \tag{3.4}$$

即我们引入Dirac函数来描绘奇点。

(3.3)是点电荷的电场的散度。实际中电荷均是有一定空间分布的，这就要引入电荷体密度 $\rho=\rho(x,y,z)=\rho(\vec{r})$

由(3.1)易知：

$$\varPhi_e=\oiint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{E}=\iiint_V dV\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

利用散度的定义

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{E}&=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\iiint_{\Delta V} dV\frac{\rho}{\varepsilon_0}}{\Delta V}\\&=\frac{\Delta V\frac{\rho}{\varepsilon_0}}{\Delta V}\\&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{3.5}$$

但不要用 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ 来替代 $\mathrm{div}\vec{E}$，这样会在某些场合引起歧义。我们仅把 $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ 当成一种数学操作，而 $\mathrm{div}\vec{E}$ 才是散度的记号。谨记，谨记，包括今后的散度也一样。

这是静电场的散度。对比(3.4)、(3.5)，知点电荷的电荷密度：

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r'}) \tag{3.6}$$

或者用另一种语言推导(3.5)式：设 $\mathbb{R}^3$ 中有一区域 V' 分布有电荷 $\rho(\vec{r'})$，考虑场点 $\vec{r}$ 处的电场强度。由Coulomb定律知：

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{V'} dV' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} (\vec{r} - \vec{r'})$$

所以：

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) &= \iiint_{V'} dV' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\vec{r'}) \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \\ &= \iiint_{V'} dV' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\vec{r'}) \cdot 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r'}) \\ &= \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1.2 真空静电场的旋度

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{E} &= \mathrm{rot} \iiint_{V'} dV' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \rho(\vec{r'}) \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \\ &= \iiint_{V'} dV' \frac{\rho(\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{rot} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \end{aligned}$$

下面来算 $\mathrm{rot}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$，它与 $\mathrm{div}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$ 一样常见，现在弄清它是划算的。

1. $\vec{r} - \vec{r'} \neq \vec{0}$ 时，无奇点.

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} &= \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \frac{x_k - x'_k}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \\ &= \varepsilon_{ijk} \vec{e}_i \partial_j \left[\partial_k \left(-\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $\vec{r} - \vec{r'} = \vec{0}$ 时，存在奇点，只能用定义算 $\mathrm{rot}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$。为了简便，我们把 $\vec{r'}$ 设为原点，求 $\mathrm{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}$。旋度的定义中出现了环量，为此我们先求 $\frac{\vec{r}}{r^3}$ 绕任一围道的环量（围道当然是不经过 $\vec{r} = \vec{0}$ 点的）。

$$\varGamma = \oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r} = \oint_{\partial S} d\frac{1}{r} = 0$$

故

$$\left| \mathrm{rot}\frac{\vec{r}}{r^3} \right|_{\vec{r} \neq 0} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{-\oint_{\partial S} d\vec{l} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{0}{\Delta S} = 0$$

即

$$\mathrm{rot}\frac{\vec{r}}{r^3}\bigg|_{\vec{r}=0}=\vec{0}$$

因此，

$$\mathrm{rot}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\equiv\vec{0} \tag{3.7}$$

故：

$$\mathrm{rot}\vec{E}=\iiint_{V'}dV'\frac{\rho(\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{rot}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}=\vec{0} \tag{3.8}$$

3.1.3 真空(闭合)恒定电流磁场的散度

我们这里所说的电流是闭合的电流。

恒定电流产生恒定电流磁场。其基本实验定律是Biot - Savart定律：

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

引入电流密度 $\vec{j}=\frac{I}{S}\hat{s}$，则

$$d\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r'})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}dV' \tag{3.9}$$

设 $\mathbb{R}^3$ 中有一区域 V' 中分布有电流 $\vec{j}(\vec{r'})$. 一定要明白当我们这样讲时意味着什么. 这意味着在 $\partial V'$ 上，$\vec{j}$ 与 $d\vec{S}$ 正交，否则电流就跑出去啦，$\vec{j}$ 就不是分布在 V' 中了. 由(3.9)得:

$$\vec{B}(\vec{r})=\iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\frac{\vec{j}(\vec{r'})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

1. $\vec{r}$ 不在 V' 内.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{B}(\vec{r})&=\iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\mathrm{div}\left(\vec{j}(\vec{r'})\times\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right)\\&=\iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\nabla\cdot\left(\vec{j}(\vec{r'})\times\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right)\\&=-\iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\left(\nabla\times\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right)\cdot\vec{j}(\vec{r'})\\&=0\end{aligned}$$

2. $\vec{r}$ 在 V' 内. 我们的做法是在 V' 中挖出一小块区域出来, 这区域长这样（如图一所示）, 是一个细长管, 但体积是微小量 dV. 这管正是电流密度流线的流管，从而管内$\vec{j}$恒定且沿轴向，管的截面半径δr同其长度δl相比是小量，即$\delta l\gg\delta r$。易知管内电流在管壁上产生的磁感应强度为：

$$\delta\vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{j\pi\delta r^2}{\delta r}\hat{j}\times\hat{\delta r}=\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\delta\vec{r} \tag{3.10}$$

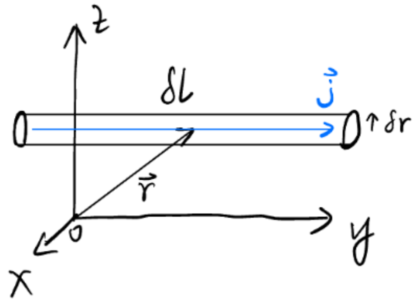

图 1: 挖出来的细流管

这个式子也反应出了$\vec{B}$在空间中并不会出现发散。这样一来：

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{B} &= \mathrm{div}\iiint_{V-\delta V}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\frac{\vec{j}(\vec{r'})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}+\mathrm{div}\vec{B}_{\delta V}\\ &= \iiint_{V-\delta V}dV'\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r'})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}+\mathrm{div}\vec{B}_{\delta V}\\ &= \mathrm{div}\vec{B}_{\delta V}\end{aligned}$$

其中$\mathrm{div}\vec{B}_{\delta V}$是$\delta V$区域中的$\vec{j}$产生的磁场的散度。这是不难算的，因为显然$\delta V$边界上的磁通为0，故$\mathrm{div}\vec{B}_{\delta V}=0$。

从而：

$$\mathrm{div}\vec{B}=0 \tag{3.11}$$

3.1.4 真空中恒定电流磁场的旋度

1. $\vec{r}$不在V'内时

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) &= \nabla\times\vec{B}(\vec{r})\\ &= \iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\nabla\times\left[\vec{j}(\vec{r'})\times\frac{(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right] \quad \text{用(2.10)}\\ &= \iiint_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}dV'\left[(\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3})\vec{j}(\vec{r'})-(\vec{j}(\vec{r'})\cdot\nabla)\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right]\end{aligned}$$

易知$\partial_i\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}=-\frac{\partial}{\partial x_i'}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}=-\partial_i'\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$

故：

$$
\begin{aligned}
(\vec{j}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} &= j_i\partial_i\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} = -j_i\partial_i'\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \\
&= -(\vec{j}(\vec{r'})\cdot\nabla')\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) &= \iiint_{V'} dV'(\vec{j}(\vec{r'})\cdot\nabla')\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \quad \text{利用(2.18)} \\
&= \iiint_{V'} \nabla'\cdot\left(\vec{j}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right) - \iiint_{V'}(\nabla'\cdot\vec{j})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}
\end{aligned}
$$

下面证明此式中$\nabla'\cdot\vec{j}=0$

一般情况下，有电荷守恒方程：

$$
-\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V dV\rho = \oint_{\partial V} d\vec{S}\cdot\vec{j} = \iiint_V dV\nabla\cdot\vec{j}
$$

故：

$$
\iiint_V dV\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}\right)=0
$$

由于V是任取的，从而有：

$$
\nabla\cdot\vec{j}+\dot{\rho}=0 \quad (3.12)
$$

在恒定电流情形下，任一处不能有电荷积累，否则电流也无法“恒定”啊！故$\dot{\rho}=0$，故$\nabla\cdot\vec{j}=0$

故：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{B} &= \iiint_{V'} \nabla'\cdot\left(\vec{j}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\right) \quad \text{利用(2.20)} \\
&= \oint_{\partial V'}(d\vec{S}\cdot\vec{j})\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
$$

2. $\vec{r}$在V'内时：

   我们仍取一个细长的δV，跟求$\mathrm{div}\vec{B}$时一样。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{B}(\vec{r}) &= \mathrm{rot}\vec{B}_{V-\delta V}+\mathrm{rot}\vec{B}_{\delta V} \\
&= \vec{0}+\mathrm{rot}\vec{B}_{\delta V}
\end{aligned}
$$

而$\mathrm{rot}\vec{B}_{\delta V}$只能用定义求。由于(3.10)式，环量最大的围道显然是图中红色的围道，是紧贴着δV的小圆环δC

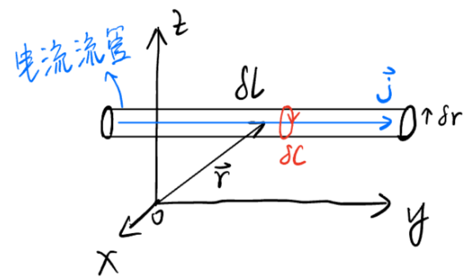

图 2: 同样挖出来一个细流管

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\delta C} d\vec{l}\cdot\vec{B}_{\delta V} = \oint_{\delta C} d\vec{l}\cdot\left(\frac{\mu_0}{2}\vec{j}\times\delta\vec{r}\right) \\ &= 2\pi\delta r\frac{\mu_0}{2}j\delta r \\ &= \mu_0 j\pi\delta r^2 \end{aligned}$$

故

$$\mathrm{rot}\vec{B}_{\delta V} = \vec{j}\frac{I}{\pi\delta r^2} = \mu_0 j\hat{j} = \mu_0\vec{j}$$

故

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad (3.13)$$

当然(3.13)的推导不只一种，但不论哪种推导都必须取一个δV出来分析才行。

3.1.5 电磁感应

现在我们研究时变的场。我们知道变化的磁场能产生电场，这即是电磁感应现象，而变化的电场亦能产生磁场，这需要引入所谓位移电流的概念。本小节先讨论前一种情况，即磁生电。

Faraday电磁感应定律是描述这一现象的基本定律：

$$\oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{E}_{涡} = -\frac{d}{dt}\iint_S d\vec{S}\cdot\vec{B} = -\iint_S d\vec{S}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

另一方面，有：

$$\oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{E}_{涡} = \iint_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{E}_{涡})$$

由于S的任意性，有：

$$\nabla\times\vec{E}_{涡} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

这些方程的物理图像是：变化的磁场会产生有旋度的涡旋电场，其旋度由上式给出。

另一方面：

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \iiint_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'}) \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \\ &= \iiint_{V'-\delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \nabla \times \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} + \vec{B}_{\delta V} \\ &= \nabla \times \iiint_{V'-\delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} + \vec{B}_{\delta V}\end{aligned}$$

$$= \nabla \times \iiint_{V'-\delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

记为 $\nabla \times \vec{A}(\vec{r})$

其中$\vec{A}(\vec{r})$为磁矢势，关于它我们以后再详讲。此外，由于在δV区域内，dV'比$|\vec{r} - \vec{r'}|$的量级高，故在$\vec{r} = \vec{r'}$处(或者说附近)，$dV'/|\vec{r} - \vec{r'}|$为小量，故$\vec{A}$在空间中也无发散。

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint_{V'} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}$$

这样写是没问题的。我们把V'区域分解为$V' - \delta V$与δV，是为了保证可以用“$\nabla\times$”算符。

既然

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

故

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}_{涡}$$

所以，一个直觉(或者说直观上的想法)即为：

$$\vec{E}_{涡} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

下面来算一下$\mathrm{div}\vec{E}_{涡}$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{E}_{涡} &= -\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V'-\delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V'-\delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \nabla \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V'-\delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} dV' \nabla' \cdot \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial V'} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{S'} \cdot \vec{j}(\vec{r'})}{\vec{r} - \vec{r'}} + \frac{\partial}{\partial t} \oint_{\partial \delta V} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{S'} \cdot \vec{j}(\vec{r'})}{\vec{r} - \vec{r'}}\end{aligned}$$

上式前一项等于0我们已了解，后一项也为0，因为δV是电流流管，$d\vec{S'}$与$\vec{j}$也正交。于是

$$\mathrm{div}\vec{E}_{涡} = 0$$

现在我们把涡旋电场的散度与旋度都搞定了！现在我们知道了两种产生电场的方式，即由静电荷产生的静电场以及由变化磁场产生的电场，除此之外不再有其它产生电场的方式。我们将任一电场分

解为静电场与涡旋电场，并求一般电场的散度与旋度：

$$\begin{cases}\mathrm{div}\vec{E}=\mathrm{div}\vec{E}_{sta}+\mathrm{div}\vec{E}_{涡}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}+0=\frac{\rho}{\varepsilon_0} & (3.14)\\ \mathrm{rot}\vec{E}=\mathrm{rot}\vec{E}_{sta}+\mathrm{rot}\vec{E}_{涡}=\vec{0}+\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & (3.15)\end{cases}$$

3.1.6 磁场旋度公式的修正与位移电流

位移电流是描绘变化电场产生磁场的一种很好的图像。但是我们首先研究rot$\vec{B}$表达式的修正。

若空间中有电流$\vec{j}$，则会产生磁场，其旋度是$\mu_0\vec{j}$，这是先前考虑闭合恒定电流的结论。现在考虑普遍情况，我们主要看下面这个例子：一平行板电容器的电荷量均匀增大，于是可认为导线上是稳定电流$I=\frac{dQ}{dt}$。现在取一个回路，位置在两极板之间，方向与I满足右手螺旋。取两个曲面S_1、S_2，它们均以L为边缘，一个被I穿过，另一个不被I穿过。下面我们说明必须对(3.13)式加以修正。

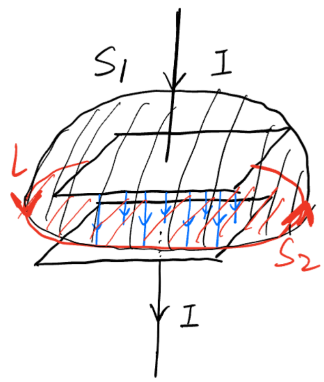

图 3: 电容器引起的矛盾

若不修正3.13，则对L回路求$\vec{B}$的环量，得：

一方面：

$$\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{B}=\iint_{S_1}d\vec{S}\cdot\mu_0\vec{j}=\mu_0 I$$

另一方面

$$\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{B}=\iint_{S_2}d\vec{S}\cdot\mu_0\vec{j}=0$$

产生了佯谬，说明(3.13)是不完备的！它当然是不完备的，因为在推导它时，没有考虑变化的电场！

不难看到虽说没有$\vec{j}$穿进S_2，却有变化的电场线穿进了S_2，这说明变化的电场线与电流线在产生磁场这方面效力是一样的！这“一样”更体现在了它们均只能产生有旋无源的磁场。下面我们试着去寻找修正后的磁场旋度式。

如图4，易知：

$$\begin{aligned}\oint_L d\vec{l}\cdot\vec{B}&=\mu_0 I=\mu_0\frac{dQ}{dt}=\mu_0\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\iint_{\partial V}d\vec{S}\cdot\vec{E}\right)\\&=\iint_{S_2}d\vec{S}\cdot\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

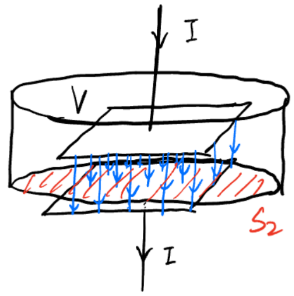

图 4:

这说明 $\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 的形式犹如一个电流密度一样。由于历史的原因我们称之为位移电流密度。

刚才说，位移电流产生的磁场也应无源，我们来验证一下：

$$\vec{B}_M=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V dV'\frac{\frac{\partial \vec{E}(\vec{r'})}{\partial t}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

用和证明(3.11)同样的方法不难证明 $\mathrm{div}\vec{B}_M=0$。

如此一来，普通电流（或传导电流）与位移电流都能产生磁场。我们把总磁场视为是这两种产生的叠加，于是有：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0 & (3.16)\\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & (3.17)\end{cases}$$

还有另一种较简便的方法导出(3.17)式。我们需求 $\mathrm{rot}\vec{B}$ 修正后的式子，其实只要求出修正项 $\mathrm{rot}\vec{B}-\mu_0\vec{j}$ 即可。为此求这一项的散度：

由于 $\vec{B}$ 是连续可微的场，故 $\mathrm{rot}\vec{B}=\nabla\times\vec{B}$。而 $\mathrm{rot}\vec{B}$ 也是连续可微，这就是物理！故：

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{B}-\mu_0\vec{j})=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})-\mu_0\nabla\cdot\vec{j}$$

其中：$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B})=\partial_i(\nabla\times\vec{B})_i=\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j B_k=0$

故 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{B}-\mu_0\vec{j})=-\mu_0\nabla\cdot\vec{j}=\mu_0\frac{\partial\rho}{\partial t}=\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}(\varepsilon_0\vec{E})$

故，直觉上认为：

$$\mathrm{rot}\vec{B}-\mu_0\vec{j}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

此即(3.16)式。

$\mathrm{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 是必须要成立的。在恒定电流情形下，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{B})=\mu_0\mathrm{div}\vec{j}=0$ 成立，是因为恒定电流要求没有电荷积累，故 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$。$\nabla\cdot\vec{j}=0$ 叫做电流的连续性方程。

而在电容器情形下，电路中断，不构成闭合回路。如若我们仍想认为只有“闭合的恒定电流”才能产生磁场，就可以引入 $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$，视为位移电流密度，这样一来“电流”的连续性方程仍成立，即：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{j}_{;} &= \nabla\cdot\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\\
&= \nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\nabla\cdot\vec{E})\\
&= \nabla\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以说，位移电流为那些存在电荷积累的情形找了一个很好的物理图像，使得电流连续性始终满足。

此外，我们有推广了的Biot - Savart定律：

$$
d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}dV
$$

有了这个式子，不必要求传导电流 $\vec{j}$ 是否闭合或连续，可以直接推出：

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{B}=0\\
\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

读者不妨自己一试。

所以我们说，位移电流被融入了基本定律Biot - Savart定律中，说明了其基本性，同时也意味着其正确性仅能通过实验来验证！

这一小节讲得有些啰嗦了，视角很多，希望可以给大家带来些许启发！

3.1.7 真空中的Maxwell方程组

综合(3.14)-(3.17)，我们有：

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
\nabla\cdot\vec{B}=0\\
\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{cases}
\tag{3.18}
$$

这就是真空中的Maxwell方程组。后面我们还要讲介质中的Maxwell方程组，它们是电磁学的基石。

3.2 连续介质中的Maxwell方程组

3.2.1 电介质

(1) 电极化场 $\vec{P}(\vec{r})$

电介质就是绝缘体。事实上我也不太理解为什么要把绝缘体叫电介质，因为电的作用的传递是不需要媒介的，这或许是历史的原因，在人们对电磁场的认识还不太完备时起的名字。我们就暂时不去管它啦。

绝缘体不能传导电流，但并不意味着它不能与电场发生相互作用。一个有趣的现象是，电场会使电介质产生极化，即让一个原本不显电性的物质产生两个电极。现在我们感兴趣的问题是：其背后的微观机理是什么？

电介质分子分为极性分子与非极性分子。若是极性分子，本身就带有电偶极矩，在外电场中受一个力偶，使电偶极矩转向成和外电场相同的方向；若是非极性分子，则外电场会诱导其产生电偶极矩，进而让分子转向。

我们认为介质所在空间中任一微小邻域中都有大量的分子，而任一微小邻域中的外场强 $\vec{E}_0$ 又可视为均匀的，从而统计平均地看，这些分子转向排列后的电偶极矩矢量应是一个绕定的与 $\vec{E}_0$ 同方向的矢量（尽管分子在热运动），而只有该处的 $\vec{E}_0$ 发生改变，才会改变电偶极矩矢量和。

如果用“场”的观点与精神，我们说电场引起介质中产生了“电极化场”，其场量为电极化矢量，定义为

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V} \tag{3.19}$$

其中 ΔV 为包裹 $\vec{r}$ 处点的小体积元。

注意，请把 $\vec{P}$ 理解为空间中的“场”，而“连续介质”即是说 $\vec{P}$ 这个场是连续的。

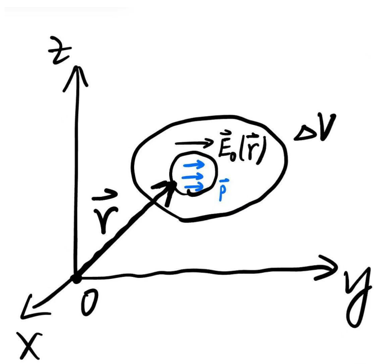

图 5: 极化的图像

分子极化之后，在 ΔV 内部会产生一个与 $\vec{E}_0$ 方向相反的电场 $\vec{E}'$，我们称之为退极化场，而把 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ 叫做介质中的电场。实验表明，有一大类介质满足：

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) \tag{3.20}$$

这类介质称为线性介质，χ_e 称为介质的电极化系数。我们今后只研究线性介质。（还有，其实我很感兴趣测得(3.20)的这类实验是怎么做的。）

(2) 电极化场的散度

既然 $\vec{P}$ 做为一个空间中连续分布的矢量场，我们自然可以关心一下它的散度和旋度。下面我们关心散度。

有了(3.20)式，我们当然可以这样求：

$$\mathrm{div}\ \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathrm{div}\ \vec{E} = \chi_e \rho$$

而在介质中，总电荷（密度）为自由电荷与极化电荷之和，

$$\rho = \rho_f + \rho_p$$

（脚标“f”作“free”解。）

从而

$$\mathrm{div}\ \vec{P} = \chi_e(\rho_f + \rho_p) \tag{3.21}$$

且只适合线性介质这是不错的，可惜物理图像不够生动，下面我们分析这个式子的物理图像。谨记，物理图像是至关重要的。

现在我们在介质空间内部取一个面积微元 $d\vec{S}$ ，计算：

$$\begin{aligned}\vec{P}\cdot d\vec{S} &= \frac{\sum \vec{P}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}\\ &= \frac{Nq_p\vec{l}\cdot d\vec{S}}{\vec{l}\cdot d\vec{S}}\\ &= Nq_p = -Nq_{\text{p内}}\end{aligned} \tag{3.22.a}$$

其中$p_{\text{内}}$是指未穿过面积微元的极化电荷。或这样理解：

$$\because \vec{P}\cdot d\vec{S} = \vec{P}\cdot\hat{n}dS = Nq$$

$$\therefore \vec{P}\cdot\hat{n} = \frac{Nq_p}{dS} = \sigma_p \text{（极化电荷面密度）} \tag{3.22.b}$$

说明极化场某种程度上表征了穿透 $d\vec{S}$ 面的极化电荷面密度，也又等于 $-\sigma_p$，即未穿透 $d\vec{S}$ 面的极化电荷面密度。有了(3.22)，容易知：

$$\mathrm{div}\ \vec{P} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint d\vec{S}\cdot\vec{P}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{-q_{\text{p内}}}{\Delta V}$$

最后边不正是某一点处电荷体密度的定义吗？故我们有：

$$\mathrm{div}\ \vec{P} = -\rho_p \tag{3.23}$$

(3.23) 较之于(3.21)具有更直观的物理意义！且(3.23)式更普遍，不要求线性介质，因为我们毕竟是用定义推导的。结合(3.21)与(3.23)，我们有：

$$\chi_e(\rho_f + \rho_p) = -\rho_p$$

即：

$$\rho_p = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 1}\rho_f \tag{3.24}$$

这是介质中某点极化电荷与自由电荷之关系。从这式我们可以得出结论：若介质内不塞进一个自由电荷，则介质内并不会出现极化电荷，从而无电荷，电荷仅分布在介质表面。但若往介质中塞一个电荷进去，情况便大不相同。稍后我们会举一个例子。

(3) 电位移矢量场 $\vec{D}(\vec{r})$ 及其散度

定义电位移矢量（不一定为线性介质!）

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \tag{3.25}$$

从而也定义了电位移矢量场。至于它为似叫“电位移”，或许是因为它与位移电流有密切联系，但欲探其究竟，须去查阅科学史。

为什么要构造这样一个场呢？因为

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{D} &= \epsilon_0 \text{div } \vec{E} + \text{div } \vec{P} \\ &= \rho_f + \rho_p - \rho_p \\ &= \rho_f\end{aligned} \tag{3.26}$$

$\vec{D}$ 的散度仅出现自由电荷，而自由电荷对于我们而言是更可控的。结合(3.20)与(3.25)，得：

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \\ &= (1 + \chi_e)\epsilon_0 \vec{E} \\ &\overset{\text{记为}}{=} \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \\ &\overset{\text{记为}}{=} \epsilon \vec{E}\end{aligned} \tag{3.27}$$

其中 ϵ_r 为相对介电常数，ϵ 为介电常数，ϵ_0 为真空介电常数。下面我们说明，在线性介质下，ϵ 有很生动的物理图像：

这首先体现在，在介质中电场散度：

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

即只是把真空中Maxwell方程组第一式中的 ϵ_0 替为 ϵ 。另一方面体现在Coulomb定律的形式的变化。考虑如下问题：一线性介质的介电常数为 ϵ，一点电荷 q 放入介质中，求 q 附近的电场强度。

由上面那个式子可知：

$$\begin{aligned}\oint_{dV} d\vec{S} \cdot \vec{E} = 4\pi r^2 E &= \iiint_V dV \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \iiint_V dV \frac{q}{\epsilon} \delta(\vec{r}) = \frac{q}{\epsilon}\end{aligned}$$

故

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

较真空时小了，这是因为在 q 处感应出了负的极化电荷的缘故，极化电荷屏蔽了部分自由电荷。

由此可见，假如一个人并不了解何为极化，并不了解物质的微观结构，只要他理解了真空的介电常数与相对介电常数，就能在一定程度上了解电介质中电场的特征。但这样的图像是有其局限与不可靠的，如果遇到两种介质的边界或非线性介质，就必须引入电位移场了。

(4) 连续介质中的位移电流

介质中位移电流的定义与真空中不同。若我们沿用真空中位移电流（密度）的定义，则为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0\vec{E} &= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{D}-\vec{P}) \\ &= \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\end{aligned}$$

易知电偶极矩 $\vec{p}=q\vec{l}=q\vec{x}_+ + (-q)\vec{x}_-$ ，其中$\vec{x}_+$与$\vec{x}_-$分别为正电荷和负电荷的位矢。故：

$$\vec{P}=\frac{\sum\vec{p}}{\Delta V}=\frac{\sum_{\Delta V}q_i\vec{x}_i}{\Delta V}$$

我们认为对于极化电荷，q_i 是固定的，而改变 $\vec{E}_0$ 仅改变 $\vec{x}_i$ ，不论对于哪种极化方式，这都是合理的，从而：

$$\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\frac{\sum_{\Delta V}q_i\vec{v}_i}{\Delta V}$$

我们进一步认为，在 ΔV 内的所有极化电荷，其拥有的速度相同，都为 $\vec{v}$ 。从而：

$$\left.\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right|_{\vec{r}}=\frac{Nq_p\vec{v}}{\Delta V}=nq_p\vec{v}=\vec{j}_p(\vec{r})$$

这里$\vec{j}_p$的物理图像是由于极化电荷的位移而产生的电流(真正的“位移”电流！)，从中能一窥Maxwell当年引入位移电流的初始想法（但他当年认为“真空”不是真的空，而是有以太介质）。从而

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{j}_p \tag{3.28}$$

可是，我们定义 $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 为位移电流，而非 $\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 。不难发现二者只在真空中是相同的。

且 $\nabla\cdot(\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})=0$ 同样满足。

3.2.2 磁介质

对于磁介质有两种图像——磁矩与磁偶极矩图像。前者认为不存在所谓磁荷；后者认为存在磁荷，从而(3.11)的结论可以全然照搬。但是前者才是正确的观点，我们认为后者是前者在数学上的一种等效，但不具备物理意义。所以我们只是讲磁矩图像。

(1) 磁矩

前面我们提到，磁场由（传导电流）与位移电流产生，这里我们考虑静场，无位移电流。对于任一电流环 ∂S，其磁矩定义为：

$$\vec{m}=I\vec{S}=I\iint_S d\vec{S} \tag{3.29}$$

电流环在匀强磁场中受到的力为：

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= \oint_{\partial S} I d\vec{l} \times \vec{B} = \left(\oint_{\partial S} I d\vec{l}\right) \times \vec{B} \\
&= \vec{0} \times \vec{B} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

这表明其质心不动，而它在磁场中所受力矩为（相对于任意一点）：

$$
\begin{aligned}
\vec{M} &= \oint_{\partial S} \vec{r} \times (I d\vec{l} \times \vec{B}) \\
&= I \oint_{\partial S} d\vec{l}(\vec{r} \cdot \vec{B}) - I \oint_{\partial S} (\vec{r} \cdot d\vec{l})\vec{B} \\
&= I \iint_S d\vec{S} \times \nabla(\vec{r} \cdot \vec{B}) - I\vec{B} \iint_S d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{r}) \\
&= I \iint_S d\vec{S} \times (\vec{B} \times (\nabla \times \vec{r}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{r}) - 0 \\
&= I \iint_S d\vec{S} \times (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{r} \\
&= I \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B}(\nabla \vec{r}) \\
&= I \iint_S d\vec{S} \times \left[\vec{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= I \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{B} \\
&= \vec{m} \times \vec{B}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

下面我们利用(3.30)与(3.31)分析电流环在匀强磁场中的行为。

既然质心不动，我们以质心为原点，这是个刚体定点转动的问题，理论力学课上对此有专门系统的学习。

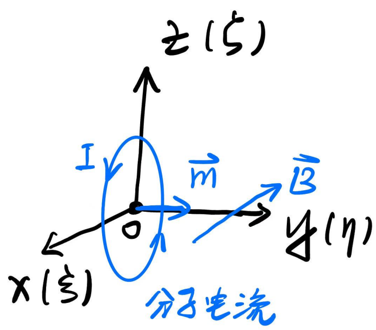

图 6: 磁矩受到的力矩

在讨论电磁介质问题时，物理图像是：分子磁矩由分子电流产生，这个电流环我们视之为规则的圆形。于是它成为了一个形状规则的刚体。

我们这样建系：首先让定系 $O-\xi\eta\zeta$ 与动系（固连在刚体上的系）一开始重合，然后 y 轴沿磁矩 $\vec{m}$ 的方向。xOz 平面为电流环平面，O 为质心。

显然 x, y, z 轴为主轴，主转动惯量为：

$$\begin{cases} I_{xx} = \frac{1}{2}m(y_i^2 + z_i^2) = \frac{1}{2}mR^2 \\ I_{yy} = mR^2 \\ I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2 \end{cases}$$

另外还有两条件：刚开始 $\vec{B}$ 在 xOy 平面内，故 $t=0$ 时，$B_z = 0$；刚开始刚体静止不动。

力矩 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (0, -mB_z, mB_y)$

Euler动力学方程为：

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z = M_x \\ I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x = M_y \\ I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y = M_z \end{cases}$$

代入，得：

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}_x - \frac{1}{2}mR^2\omega_y\omega_z = 0 \\ mR^2\dot{\omega}_y = -mB_z(t) \\ \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega}_z + \frac{1}{2}mR^2\omega_x\omega_y = mB_y(t) \end{cases}$$

由 $mR^2\ddot{\omega}_y = -mB_z(t)$ 与 $\omega_y(0) = 0$，$B_z(0) = 0$，得 $\omega_y \equiv 0$。因为 ω_y 一开始为 0，XOZ 平面不绕 Y 轴转，B_z 就恒为 0，进而导致 $\ddot{\omega}_y$ 恒为 0，从而 $\omega_y = \omega_y(0) = 0$。很直观。故：

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = 0 \Rightarrow \omega_x = 0 \\ \dot{\omega}_z \neq 0 \Rightarrow \omega_z = \omega_z(t) \end{cases}$$

因此，电流环将绕 Z 轴转动。进一步还可以说明这是一个单摆运动。

单看电流环磁矩 $\vec{m}$ 这个矢量的话，它在匀强磁场中的行为和一个电偶极矩一样，这也是为什么会有磁荷（磁偶极矩）图像的原因之一。

(2)磁化强度场 $\vec{M}(\vec{r})$

磁化强度场$\vec{M}$ 的定义为：

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \vec{m}}{\Delta V} \tag{3.32}$$

下面我们来看其物理意义。把一个磁介质放入外磁场 $\vec{B}_0$ 中，其内部的分子电流（的磁矩）会转向到 $\vec{B}_0$ 的方向，产生一个附加的磁场 $\vec{B}'$，使得介质内的总磁场等于 $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$。

既然 $\vec{M}$ 也是一个场，我们自然可以关心一下它的散度与旋度。而这须用 $\vec{M}$ 的定义来计算，从而获得比较好的物理图像。

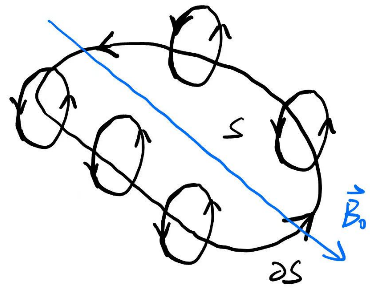

图 7: 磁化强度场的图像

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\vec{M} &= \oint_{\partial S} d\vec{l}\cdot\frac{\sum\vec{m}}{\Delta V}\\ &= \oint_{\partial S}\frac{d\vec{l}\cdot NI\vec{S}}{d\vec{l}\cdot\vec{S}}\\ &= I_M\text{（穿过}S\text{面的总磁化电流，考虑正负）}\end{aligned}$$

考虑在磁介质空间内的一个闭合回路 ∂S。下面计算：

从而：

$$\text{rot }\vec{M} = \vec{j}_M \tag{3.33}$$

而对于介质中某点处有：

$$\begin{aligned}\text{rot }\vec{B} &= \mu_0\left(\vec{j}+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\\ &= \mu_0\left(\vec{j}_f+\vec{j}_M+\vec{j}_p+\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\\ &= \mu_0\left(\vec{j}_f+\vec{j}_M+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

其中 $\vec{j}_f$ 为传导电流，从而：

$$\text{rot }\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right) = \vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

引入磁场强度矢量 $\vec{H}$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0}-\vec{M}(\vec{r}) \tag{3.34}$$

从而

$$\text{rot }\vec{H} = \vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{3.35}$$

实验表明，对于某一类线性磁介质，有：

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\vec{H}(\vec{r}) \tag{3.36}$$

其中 μ 叫做磁导率（μ_0 叫真空磁导率）若我们引入 ϵ 与 μ 改写(3.35)得：

$$\text{rot } \vec{B} = \mu\vec{j}_f + \epsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

这与(3.18)中的第四式就对应上了，突出了线性介质与真空的区别。

和(3.24)式一样，我们也可以求出某点的 $\vec{j}_m$ 与 $\vec{j}_f$ 的关系（假设在静场中，无位移电流）。

结合(3.33)、(3.34)与(3.36)：

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_M = \text{rot }\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}\right) &= \text{rot }\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{H} \\ = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)\vec{j}_f\end{aligned}$$

从而有：

$$\vec{j}_M = (\mu_r - 1)\vec{j}_f \tag{3.37}$$

其中 μ_r 是所谓“相对磁导率”。

接下来读者可以仿照 P_{46}、P_{47} 的思路分析一下引入 μ 之后的 Biot - Savart 定律的改写等问题，我这就不多谈了。结果是：$dB = \frac{\mu}{4\pi}\frac{(\vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$

3.2.3 Maxwell 方程组的一般形式与连续介质中的 Maxwell 方程组

引入了两个辅助矢量 $\vec{D}$ 与 $\vec{H}$ 后，Maxwell 方程组的一般形式为:（注意到在推导以下各式时，我们只是用了真空中的 Maxwell 方程组与 $\vec{D}$、$\vec{H}$ 的定义（从而 $\vec{P}$、$\vec{M}$ 的定义），而并不要求介质本身为线性，这就是我把下式讲成是 Maxwell 方程组的“一般形式”的道理。只要你接受了电极化场、磁化强度场、电位移场、磁场强度场，(3.38)式就在任何介质中成立！当然也包括无介质的真空）

$$\begin{cases}\text{div } \vec{D} = \rho_f \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases} \tag{3.38}$$

读者也许还会关心如下式子，在线性介质中，因为有：

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

从而有：

$$\begin{cases}\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{B} = \mu\vec{j}_f + \epsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases} \tag{3.39}$$

这可以当成是连续介质中的 Maxwell 方程组。不过，我们还是推荐使用(3.38)式。

3.3 电磁场的能量

3.3.1 真空中静电场的能量密度

首先考虑最简单的情形，两个点电荷体系。要把握电场的能量，我们必须认识到：电场对电荷做正功，电场能量减少，反之亦然。现在有两个点电荷 q_1，q_2，空间中存在由它们激发出的电场。现在想象 q_1 与 q_2 各自发生了一小段（假想的）位移 $d\vec{r}_1$ 与 $d\vec{r}_2$，电场力做功为：

$$
\begin{aligned}
dW &= q_1\vec{E}_1\cdot d\vec{r}_1 + q_2\vec{E}_2\cdot d\vec{r}_2 \\
&= q_1\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot d\vec{r}_1 + q_2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\cdot d\vec{r}_2 \\
&= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\cdot d(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3} \\
&= \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{d|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2} = -d\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right) \\
&= -d\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right) \\
&= -d\frac{1}{2}(q_1\varphi_{q_2} + q_2\varphi_{q_1} + C) \\
&= -dE_e
\end{aligned}
$$

故，该体系下静电场的能量为：

$$E_e = \frac{1}{2}(q_1\varphi_{q_2} + q_2\varphi_{q_1}) \tag{3.40}$$

将此式推广至一般的带电体系，有：

$$
\begin{aligned}
E_e &= \frac{1}{2}\iiint_V dV\varphi\rho \\
&= \frac{1}{2}\iiint_{R^3} dV\varphi\rho \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\iiint_{R^3} dV\varphi\nabla\cdot\vec{E} \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\iiint_{R^3} dV\nabla\cdot(\varphi\vec{E}) - \frac{\epsilon_0}{2}\iiint_{R^3} dV\vec{E}\cdot\nabla\varphi \\
&= \frac{\epsilon_0}{2}\oiint_{\text{无穷远}} d\vec{S}\cdot\varphi\vec{E} + \frac{\epsilon_0}{2}\iiint_{R^3} dV\vec{E}\cdot\vec{E} \\
&= \iiint_{R^3} dV\frac{1}{2}\epsilon_0E^2
\end{aligned}
$$

这里 φ 理解为除去该点其它电荷在该点产生的电势，它等于该点的电势，因为该点上的电荷在该点产生的电势为 0（这不难证，只需认为 ρ 恒正）。V 以外区域 ρ 为零，故将积分区域扩大至 R^3 不会影响积分结果。可见 $\frac{1}{2}\epsilon_0E^2$ 在这里充当了电磁能量密度的角色，我们称之为静电场的能量密度，即：

$$w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2 \tag{3.42}$$

有电场线的地方才有 E，因此我们有一个很生动的说法是电场能量储存于电场线中，这是种很好的理解方式。

3.3.2 真空中静磁场的能量密度

要把握磁场的能量，我们必须意识到磁场是靠产生感应电动势来释放能量的。我们还是先来考虑一个最简单的情况，即单个电流线圈的磁场能。电流线圈产生磁感线，依据对电场的讨论我们自然能预料到磁场能储存于磁感线中。

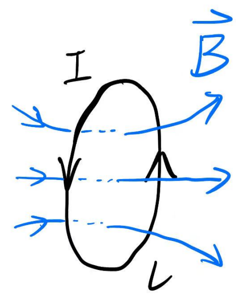

图 8: 磁场能储存在磁感线中

磁场能的释放依靠的是感应电动势，或者说涡旋电场对电荷（电流）做功，这功的功率为：

$$P = \frac{dW}{dt} = I\mathcal{E}_{感} = -I\frac{d\Phi_m}{dt}$$

（同样，这里的改变是一个假想的改变）

从而磁能的减少量

$$dE_m = -dW = Id\Phi_m = Id(LI) = d\left(\frac{LI^2}{2}\right) = d\left(\frac{\Phi_m I}{2}\right)$$

L 为自感系数从而电流环储存的电能为

$$E_m = \frac{I\Phi_m}{2}$$

另一种用涡旋电场对电流做功的视角如下：注意到电流密度

$$\vec{j} = nqSv/S = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

涡旋电场的功率为

$$\begin{aligned} P_{涡} &= \iiint_V \rho dV \vec{E}_{涡} \cdot \vec{v} \\ &= \iiint_V dV \vec{E}_{涡} \cdot \vec{j} \\ &= -\frac{dE_m}{dt} \end{aligned}$$

（这里的 $\vec{v}$ 引起的位移是一个假想的位移）

前面第一次讲涡旋电场时候我们提到，涡旋电场与磁矢势的关系为：

$$\vec{E}_{涡} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

从而（ V 与 V' 是同一区域）：

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_m}{dt} &= \iiint_V dV \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V dV \left(\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V'} dV' \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right) \cdot \vec{j}(\vec{r}) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \iiint_{V'} dV dV' \frac{\frac{\partial \vec{j}(\vec{r'})}{\partial t} \cdot \vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \iiint_V dV' dV \frac{\frac{\partial \vec{j}(\vec{r'})}{\partial t} \cdot \vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \iiint_{V'} dV dV' \frac{\frac{\partial \vec{j}(\vec{r})}{\partial t} \cdot \vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\
&= \iiint_V dV \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

从而有：

$$
\iiint_V dV \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \iiint_V dV \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{j}
$$

（同样，这里的一切改变均是假想的）

从而有：

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_m}{dt} &= \iiint_V dV \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{j} \\
&= \frac{1}{2} \iiint_V dV \left(\vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{j} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \iiint_V dV \vec{A} \cdot \vec{j} \right)
\end{aligned}
$$

从而，磁场能为

$$
E_m = \iiint_V dV \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j} \tag{3.43}
$$

(3.43)与(3.41)的原始式是对应的。从中我们得以窥见矢势为什么叫矢“势”，很有趣。 (3.43)还可以从 $E_m = \frac{\Phi_m I}{2}$ 导出，即：

$$
\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}\sum_i \varPhi_{mi} I_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \left(\iint_{S_i} d\vec{S}\cdot\vec{B}\right) I_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \left(\oint_{\partial S_i} d\vec{l}\cdot\vec{A}\right) I_i = \sum_i \left(\oint I_i d\vec{l}\cdot\vec{A}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_i \left(\iiint_{\delta V_i} dV \vec{j}_i\cdot\vec{A}\right) \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V dV\vec{j}\cdot\vec{A}
\end{aligned}
$$

所以，利用Maxwell方程组，我们有（我们讨论静磁，$\vec{B}$ 不随 t 改变，故不考虑位移电流。）：

从而我们有

$$
w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{3.44}
$$

(3.44)与(3.42)相对应。

3.3.3 电磁场能流密度矢量——Poynting矢量

以上我们考虑了静场的能，在推导 w_e 与 w_m 时，我们总是假设体系有了一个假想的变动，看场做了多少功(率)，从而找到了场能的改变量(率)，进而得到场能的表达式。接下来我们让体系真地产生一个变动。电荷 q 在电磁场中要受到力的作用，描述这力的公式为Lorentz公式，相应的力为Lorentz力：

$$
\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = \rho dV(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \tag{3.45}
$$

这里的 $\vec{E}$ 包括静电场与涡旋电场，$\vec{B}$ 包括传导电流以及位移电流产生的 $\vec{B}$。现在让电荷体系真正地发生一个变动，看看Lorentz力(对自由电荷)做了多少功(率)：（我们的出发点只有Maxwell方程组）

$$
\begin{aligned}
P &= \iiint_V \vec{F}\cdot\vec{v} = \iiint_V dV\rho_f\vec{E}\cdot\vec{v} \\
&= \iiint_V dV\vec{E}\cdot\vec{j}_f \\
&= \iiint_V dV\vec{E}\cdot\left(\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\iiint_V dV\vec{E}\cdot\vec{B} - \frac{d}{dt}\iiint_V dV\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2
\end{aligned}
$$

上式第一项：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0}\iiint_V dV\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) &= -\frac{1}{\mu_0}\iiint_V dV\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \frac{1}{\mu_0}\iiint_V dV\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} \\
&= -\oint_{\partial V} d\vec{S}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) - \frac{d}{dt}\iiint_V dV\frac{1}{2\mu_0}B^2
\end{aligned}
$$

从而，我们有：

$$P = -\oiint_{\partial V} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{d}{dt}(E_e + E_m)$$

从而

$$-\oiint_{\partial V} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{d}{dt}(E_e + E_m) + P$$

我们对上式做如下诠释：

$\frac{d}{dt}(E_e + E_m)$ 为 V 区域内场线中储存能量的变动率，P 为 V 区域中Lorentz力做功的功率，也许产生机械能或热。这两项加在一起代表了 V 区域内的能量的变动率。而它们又等于一个矢量在 V 边界上的负通量，这个矢量就是Poynting矢量：

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \tag{3.46}$$

从而上式改写为

$$\frac{d}{dt}(E_e + E_m) + P = -\oiint_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{S} \tag{3.47}$$

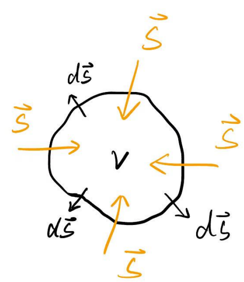

图 9: 能流密度矢量的图像

这说明我们应把 $\vec{S}$ 理解成能流密度矢量，若有一面元 $d\vec{S}$，则单位时间内流过 $d\vec{S}$ 的能量为 $\vec{S} \cdot d\vec{S}$。这样(3.47)的物理意义就很明确了：$-\oiint_{\partial V} d\vec{S} \cdot \vec{S}$ 为单位时间自 V 的边界向 V 内注入的能量，它等于 V 区域内总能的增率。当然是要考虑正负号的——正号才代表真正的“增加”。

3.3.4 有电磁介质的情况

现在假设V区域中有连续介质，Lorentz力对自由电荷做功的功率为：

$$\begin{aligned}
P &= \iiint_V \rho_f dV(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \\
&= \iiint_V dV \vec{E} \cdot \vec{j}_f \\
&= \iiint_V dV \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \\
&= -\iiint_V dV \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \iiint_V dV \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \iiint_V dV \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}
\end{aligned}$$

对自由电荷

$$= -\oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \iiint_V dV \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

从而：

$$\iiint_V dV \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) + P = -\oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$$

而

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{E} \cdot \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{d(w_e + w_m)}{dt} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

于是我们得到：

$$-\oint_{\partial V} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = P + \frac{d}{dt}(E_e + E_m) + \iiint_V dV \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} - \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \tag{3.48}$$

这就是考虑介质时的能量方程。等号右边前两项容易理解，第三项是什么？我们说第三项是介质的极化能与磁化能，而左边的$\vec{E} \times \vec{H}$仍是能流密度矢量。

据说Jackson或Landau的电动力学详细讨论了此问题。