Trabajo práctico 0: Repaso de Probabilidades, Álgebra Lineal y el Algoritmo de Maximización de la Esperanza

Juan José Cordero
Luis Diego Hidalgo
Ricardo Sánchez
Instituto Tecnológico de Costa Rica
MC-8840 Deep Learning
Maestría en Ciencias de la Computación

9 de septiembre de 2022

1. (10 puntos) Demuestre que si $\overrightarrow{k} = (\vec{u} - \vec{w})$ y los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{k}$ son perpendiculares, entonces $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{w}$. Enliste todas las propiedades del producto punto usadas.

Si $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{k}$ (son perpendiculares) por definición se tiene que:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{v}^T \cdot \overrightarrow{k} = 0.$$

Lo anterior también se puede probar aplicando la fórmula del producto punto:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k} = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{k}\| \cdot cos(\theta)$$

Al ser vectores perpendiculares se tiene que $\Theta = 90$, por lo que:

$$\|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{k}\| \cdot cos(90) = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{k}\| \cdot 0 = 0$$

Para la demostración se asumen lo siguientes valores:

$$\overrightarrow{k} = (a, b)$$

$$\overrightarrow{u} = (c, d)$$

$$\overrightarrow{w} = (h, i)$$

$$\overrightarrow{v} = (j, k)$$

Si $\overrightarrow{k} = (\vec{u} - \vec{w})$ entonces $\overrightarrow{k} = ((c-h),(d-i))$ y como $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{k} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k} = (ja+kb) = (aj+bk) = 0$

Ahora vamos a demostrar que $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{w}$:

$\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{w}$

$jc + kd = jh + ki$

$jc - jh = ki - kd$

$j(c-h) = -k(d-i)$

A este punto vemos como es posible hacer el reemplazo términos ya que:

$\overrightarrow{k} = (a,b)$ y $\overrightarrow{k} = ((c-h),(d-i))$

Entonces se puede decir que $(c-h) = a$ y $(d-i) = b$

$aj = -bk$

$aj + bk = 0$

Lo cual, según lo demostrado anteriormente, es equivalente a:

$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{k} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k} = (ja+kb) = (aj+bk) = 0$

Por lo que se puede concluir que efectivamente la expresión: $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{w}$ se cumple.

2. (10 puntos) A continuación realice las siguientes demostraciones usando notación algebraica matricial (En algunos ejercicios se recomienda usar la notación de filas y columnas compacta (filas y columnas en vectores), como la utilizada en el material del curso):

a) Si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ y $A = \frac{\overrightarrow{x}\overrightarrow{x}^T}{\overrightarrow{x}^T\overrightarrow{x}}$, entonces $A^2 = A$

b) Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con $A+B = I$ y $AB = 0_n$, demuestre que $A^2 = A$ y $B^2 = B$.

a)

Para la demostración se asumen los siguientes valores:

$\overrightarrow{x} = (a,b)$

$$\overrightarrow{x}^T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$\frac{\vec{x}\,\vec{x}^T}{\vec{x}^T\,\vec{x}} = \frac{a^2+b^2}{\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}} = A$$

Hay que demostrar que:

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}^2} = A$$

Se despeja:

$$\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}^2} = \frac{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)}{\begin{pmatrix} a^2+a^2b^2 & a^2\cdot ab+ab\cdot b^2 \\ a^2\cdot ab+b^2\cdot ab & a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}} = \frac{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+b^2\right)}{(a^2+b^2)\cdot\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}} = A$$

Por lo tanto: $A^2 = A$

b)

Demostración para $A^2 = A$:

$A + B = I$

$A = I - B$

$A \cdot A = A(I - B)$ por propiedad distributiva.

$A^2 = AI - AB$ como $AB = 0_n$ y una matriz multiplicada por su matriz de identidad (I) es ella misma, es decir, $AI = A$, entonces:

$A^2 = A - 0_n$

$A^2 = A$

Demostración para $B^2 = B$:

$A + B = I$

$B = I - A$

$B \cdot B = B(I - A)$ por propiedad distributiva.

$B^2 = BI - BA$

Como $AB = 0_n$, y ambas son matrices cuadradas de nxn, se puede decir que $BA = 0_n$ y una matriz multiplicada por su matriz de identidad (I) es ella misma, es decir, $BI = B$, entonces:

$B^2 = B - 0_n$

$B^2 = B$

Dado lo anterior se puede demostrar que tanto $A^2 = A$ como $B^2 = B$ se cumplen.