2

직선의 방정식

01 직선의 방정식

02 두 직선의 위치 관계

03

점과 직선 사이의 거리

●● 자연에는 **직선**도 없고 뾰족한 모퉁이도 없다. 그래서 건축물에도 **직선**이나 뾰족한 모퉁이가 있도록 만들어서는 안 된다. ●●

(출처: 『TIME』, 1952년 1월 28일)



안토니오 가우디(Gaudi, A., 1852~1926)

스페인의 건축가

 이 글은 자연으로부터 받은 영감을 건축에 적용하고 내부 장식이 색과 빛의 조회를 이루도록 하는 가우디만의 독창적인 건축 철학을 표현한 것이다.

1 직선의 방정식

학습목표

직선의 방정식을 구할 수 있다.

준비하기

다음 직선의 기울기와 y절편을 구하시오.

(1) y = 4x - 1

(2) x-4y+2=0

다가 서기

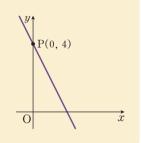
일정한 속력으로 달리는 자동차의 주행 시간과 주행 거리 사이의 관계, 섭씨온도와 화씨온도 사이의 관계 등은 일차방정식으로 표현된다. 이와 같이 일차방정식으로 표현되는 두 양 사이의 관계를 좌표평면 위에 그래프로 나타내면 직선이 된다.



한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

생각 열기 오른쪽 그림은 점 P(0, 4)를 지나고 기울기가 -2인 직선을 나타낸 것이다.

○ 이 직선의 방정식을 구해 보자.



y=mx+n

 $A(x_1, y_1)$

좌표평면 위의 점 $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ 을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 직선의 방정식을

$$y=mx+n$$
 ······①

이라 하면, 이 직선이 점 $A(x_1, y_1)$ 을 지나므로

$$y_1 = mx_1 + n, \leq n = y_1 - mx_1$$

이다. 이 식을 ①에 대입하여 정리하면

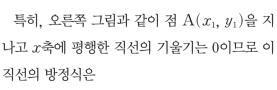
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

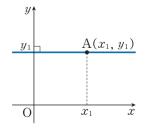
한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 🗕

점 (x_1,y_1) 을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y\!-\!y_1\!=\!m(x\!-\!x_1)$



$$y-y_1=0\times(x-x_1), = y=y_1$$

이다



점 (2, -3)을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은 y-(-3)=-2(x-2). 즉 y=-2x+1

문제 1 다음 직선의 방정식을 구하시오.

- (1) 점 (-2, 4)를 지나고 기울기가 3인 직선
- (2) 점 (1, 5)를 지나고 *y*축에 수직인 직선

 \mathbf{y} 축에 수직인 직선은 x축에 평행하다.

● 두 점을 지나는 직선의 방정식

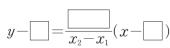
다음을 통해 좌표평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식을 알아보자.

함께하기 다음은 서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식을 구하는 과정이다. \square 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

(i) $x_1 \neq x_2$ 일 때. 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

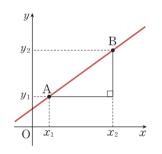
$$m = \frac{\boxed{}}{x_2 - x_1}$$

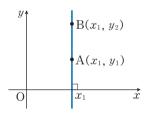
이고, 이 직선은 점 $A(x_1, y_1)$ 을 지난다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.



(ii) $x_1 = x_2$ 일 때, 구하는 직선은 y축에 평행하고 직선 위의 모든 점의 x좌표는 이다. 따라서 구하는 직선의 방정식은 다음과 같다.

$$x = \square$$





y축에 평행한 직선은 x축에 수직이다.

위의 활동으로부터 다음을 알 수 있다.

■ 두 점을 지나는 직선의 방정식 💻

서로 다른 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

①
$$x_1 \neq x_2$$
일 때, $y-y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

②
$$x_1 = x_2$$
일때, $x = x_1$

B(x_2 , y_2)도 지나므로 직선 의 방정식은 $y_2 - y_1 = y_2 - y_1$

① 1의 경우 직선이 점

$$y-y_2=rac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$$
로 나타낼 수도 있다.

(바리) ① 두 점 A(1,3), B(-1,5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{5-3}{-1-1}(x-1), \leq y=-x+4$$

② 두 점 A(4, 1), B(4, 7)을 지나는 직선의 방정식은 x=4

문제 2 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

- (1) A(4, 3), B(8, -1) (2) A(-2, 3), B(1, 7)
- (3) A(-7, 6), B(0, 6) (4) A(5, 4), B(5, -1)



$lacksymbol{\bullet}$ 문제 $lacksymbol{3}$ x절편이 a이고, y절편이 b인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$$

과 같이 나타낼 수 있음을 설명하시오. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

의 의 가방정식 ax+by+c=0이 나타내는 도형

좌표평면에서 직선의 방정식은 모두 x, y에 대한 일차방정식 ax+by+c=0의 꼴 로 나타낼 수 있다.

또, 일차방정식 ax+by+c=0은

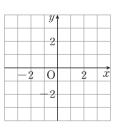
- (i) $b \neq 0$ 일 때, $y = -\frac{a}{h}x \frac{c}{h}$
- (ii) b=0일 때, $x=-\frac{c}{a}$

이다. 따라서 일차방정식 ax+by+c=0이 나타내는 도형은 직선이다.

(i)에서 a=0이면 $y=-\frac{c}{h}$ 이다. (ii)에서 ax+by+c=0이 일차방정 식이므로 b=0이면 $a\neq 0$ 이 다.

> 문제 4 오른쪽 좌표평면 위에 다음 일차방정식이 나타내는 직선을 그리시오.

- (1) 2x+3y+6=0
- (2) 2x-y=0
- (3) 3x 6 = 0
- (4) 2y+4=0



두 직선의 위치 관계

학습목표

두 직선의 평행 조건과 수직 조건을 이 해한다.

준비하기

다음 중에서 직선 y=2x-3에 평행한 직선의 방정식을 모두 찾으시오.

- (1) y = 2x + 4
- (2) x+y+2=0
- (3) y = -2x + 1
- (4) 2x y + 5 = 0

다가 서기

사람의 눈은 가끔 착각을 일으켜 실제와 다르게 사물을 인식하기 때문에, 평행한 두 직선도 상황에 따라서로 평행하지 않은 것처럼 인식할수도 있다.

두 직선의 방정식을 비교하면 이들이 서로 평행한지 아닌지 알 수 있다.



두 직선의 평행 조건

생각 열기 오른쪽 그림은 어느 건물에 설치된 에스컬레이터를 옆에서 바라본 모양이다.

- 두 직선 *l* 과 *m*이 서로 평행하다고 할 수 있는지 말해 보자.
- ② 두 직선 *l* 과 *m*의 기울기가 서로 같은지 말해 보자.



좌표평면에서 두 직선이 서로 평행할 조건을 알아보자.

두 직선

$$l: y=mx+n$$

$$l'$$
: $y=m'x+n'$

이 서로 평행하면, 두 직선의 기울기는 같지만 y절편은 다르다. 즉.

$$m=m', n \neq n'$$

이다.

또. m=m'이고 $n \neq n'$ 이면 두 직선 l과 l'은 서로 평행하다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

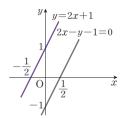
두 직선의 평행 조건 =

두 직선 y=mx+n과 y=m'x+n'에서

- ① 두 직선이 서로 평행하면 m=m', $n\neq n'$ 이다.
- ② m=m', $n \neq n'$ 이면 두 직선은 서로 평행하다.

두 직선 y=mx+n과 y=m'x+n'에서 m=m'이고 n=n'이면 두 직선은 일치한다.

에제 $\mathbf{1}$ 점 (2,5)를 지나고 직선 2x-y-1=0에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.



풀이 직선 2x-y-1=0, 즉 y=2x-1에 평행하므로 구하는 직선의 기울기는 2이다. 따라서 점 (2,5)를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y-5=2(x-2)$$
, $= y=2x+1$

y = 2x + 1

문제 1 점 (3, -1)을 지나고 다음 직선에 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

(1)
$$y = -x - 4$$

(2)
$$2x-3y+3=0$$

● 두 직선의 수직 조건

좌표평면에서 두 직선이 서로 수직일 조건을 알아보자.

두 직선

$$l: y=mx+n, \quad l': y=m'x+n'$$

이 서로 수직이면, 이들에 각각 평행하고 원점을 지나는 두 직선

$$l_1$$
: $y=mx$, l_1' : $y=m'x$

도 서로 수직이다.

두 직선 l_1 , l_1' 과 직선 x=1의 교점을 각각 P, Q라 하면

이다. 삼각형 POQ는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리 에 의하여

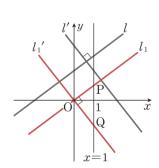
$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2$$

즉, $(1^2+m^2)+(1^2+m'^2)=(m-m')^2$ 이다. 이 식을 정리하면 다음과 같다.

$$mm' = -1$$

또, mm'=-1이면 $\overline{\rm OP}^2+\overline{\rm OQ}^2=\overline{\rm PQ}^2$ 이므로 삼각형 POQ는 $\angle{\rm POQ}=90^\circ$ 인 직 각삼각형이다

따라서 두 직선 l_1 과 l_1' 은 서로 수직이므로 두 직선 l과 l'도 서로 수직이다.



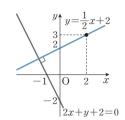
이상을 정리하면 다음과 같다.

■ 두 직선의 수직 조건

두 직선 y=mx+n과 y=m'x+n'에서

- ① 두 직선이 서로 수직이면 mm' = -1이다.
- 2mm'=-1이면 두 직선은 서로 수직이다.

에제 2 점 (2,3)을 지나고 직선 2x+y+2=0에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.



풀이 직선 2x+y+2=0, 즉 y=-2x-2의 기울기가 -2이므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면

$$-2 \times m = -1$$
, $m = \frac{1}{2}$

따라서 점 (2, 3)을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2), \stackrel{2}{\leftarrow} y=\frac{1}{2}x+2$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

문제 2 점 (1,2)를 지나고 다음 직선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

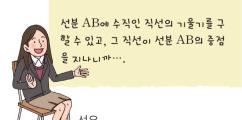
(1)
$$x+2y-4=0$$

(2)
$$3x-2y-1=0$$



문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | <mark>의사소통</mark> | 정보 처리 | 태도 및 실천

선우와 동현이의 방법으로 두 점 A(-1,-2), B(3,2)를 이은 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 각각 구하고, 그 결과를 비교해 보자.





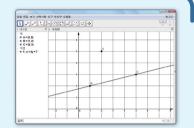


주어진 직선에 평행한 직선과 수직인 직선

의사소통 정보 처리

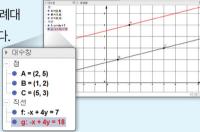
컴퓨터 프로그램을 이용하여 점 A(2, 5)를 지나고 두 점 B(1, 2), C(5, 3)을 지나는 직선에 평 행한 직선과 수직인 직선의 방정식을 각각 구해 보자.

- ① 입력창에 세 점 A(2, 5), B(1, 2), C(5, 3)의 좌표를 각각 입력하고 (Enter)를 누른다.
- ② 메뉴에서 🖊 '직선'을 클릭한 다음 두 점 B, C를 차례대로 선 택하다.



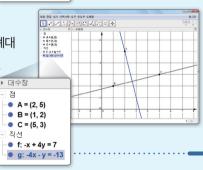
③ [평행한 직선의 방정식]

메뉴에서 🧺 '평행선'을 클릭하고 점 A와 직선 BC를 차례대 로 선택한 다음 대수창에 나타난 직선의 방정식을 확인한다.



④ [수직인 직선의 방정식]

메뉴에서 🕽 '수직선'을 클릭하고 점 A와 직선 BC를 차례대 로 선택한 다음 대수창에 나타난 직선의 방정식을 확인한다.



확인 세점 A(1, 2), B(-2, -6), C(3, 1)에 대하여 다음에 답하여 보자.

- (1) 위의 방법을 이용하여 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과 수직인 직선의 방정식을 각각 구 해 보자.
- (2) 점 A를 지나고 직선 BC에 평행한 직선과 수직인 직선의 방정식을 직접 구하여 (1)의 결과와 비 교해 보자.

점과 직선 사이의 거리

학습목표

점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

준비하기

두 점 A(3, -1), B(-1, 4) 사이의 거리를 구하시오

다가 서기

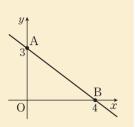
섬과 육지를 연결하는 길이가 가장 짧은 다리를 건설하려고 할 때, 다리의 길이를 어떻게 구할 수 있을까? 이 경우에는 섬을 점, 육지의 경계를 직선으로 생각하여 점과 직선 사이의 거리를 구하면 된다.



점과 직선 사이의 거리

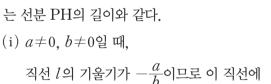
생각 열기 오른쪽 그림과 같이 두 점 A(0, 3), B(4, 0)을 지나는 직선이 있다.

- ① 직선 AB 위의 점 중에서 원점 O와의 거리가 최소인 점 P의 위치를 말해 보자.
- ② 직선 AB와 두 점 O, P를 지나는 직선의 위치 관계를 말해 보자.

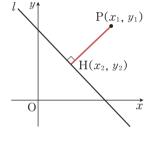


좌표평면에서 점 $P(x_1, y_1)$ 과 이 점을 지나지 않는 직선 l: ax+by+c=0 사이의 거리를 구해 보자.

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\,y_2)$ 라 할 때, 점 P와 직선 l 사이의 거리 는 선분 PH의 길이와 같다.



직선 l의 기울기가 $-\frac{\pi}{b}$ 이므로 이 직선 수직인 직선 PH의 기울기는 $\frac{b}{a}$ 이다.



즉,
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b}{a}$$
이므로 $y_2-y_1=\frac{b}{a}(x_2-x_1)$ ①

이다. 또, 점 H가 직선 l 위의 점이므로 다음을 얻는다.

$$ax_2+by_2+c=0$$
 ②

이때 ①을 변형하면

$$b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0$$

이고 ②를 변형하면

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+ax_1+by_1+c=0$$

이다.

③과 ④를 연립하여 $x_2 - x_1$ 과 $y_2 - y_1$ 을 구하면 다음과 같다.

$$x_2 - x_1 = -\frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}, \quad y_2 - y_1 = -\frac{b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

따라서 점 P와 직선 l 사이의 거리 \overline{PH} 는 다음과 같다.

$$\begin{split} \overline{\text{PH}} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\left\{ -\frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right\}^2 + \left\{ -\frac{b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2} \right\}^2} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \qquad \cdots \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \end{split}$$

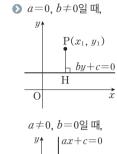


직선 $l \in x$ 축 또는 y축에 평행하고 이 경우에도 점 P와 직선 l 사이의 거리 \overline{PH} 는 ⑤와 같다.

특히. 원점과 직선 ax+by+c=0 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.



 $\begin{array}{c|c} & & P(x_1, y_1) \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$

■ 점과 직선 사이의 거리 ---

점 (x_1, y_1) 과 직선 ax+by+c=0 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히. 원점과 직선 ax+by+c=0 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$[y_1]$ 점 (-5,3)과 직선 4x-3y+4=0 사이의 거리는

$$\frac{|4\times(-5)-3\times3+4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

문제 1 다음 점과 직선 사이의 거리를 구하시오.

- (1) 점 (-1, 2)와 직선 3x+4y-1=0
- (2) 원점과 직선 y = 2x 4

●> 평행한 두 직선 사이의 거리는 직선 위의 한 점과 다 른 직선 사이의 거리로 구할 수 있다.

문제 2 평행한 두 직선 3x-y+4=0과 3x-y-1=0 사이의 거리를 구하시오.

에제 1 직선 x-2y=0에 평행하고 원점에서의 거리가 2인 직선의 방정식을 구하시오.

풀이 구하는 직선의 방정식을 x-2y+k=0이라 하면 원점과 이 직선 사이의 거리가 2이 므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}} = 2$$

$$k=2\sqrt{5}$$
 또는 $k=-2\sqrt{5}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-2y+2\sqrt{5}=0$$
 또는 $x-2y-2\sqrt{5}=0$

$$= x-2y+2\sqrt{5}=0$$
 또는 $x-2y-2\sqrt{5}=0$

문제 3 다음 직선의 방정식을 구하시오.

- (1) 직선 3x-4y+3=0에 평행하고 원점에서의 거리가 1인 직선
- (2) 직선 2x+y-2=0에 평행하고 점 (0,1)에서의 거리가 3인 직선



문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통 | 정보 처리 | 태도 및 실천

점과 직선 사이의 거리를 이용하여 세 점 A(-2,1), B(3,-1), C(1,3)을 꼭짓점으로 하는 삼 각형 ABC의 넓이를 구하려고 한다.

- 활동 1 선분 AB의 길이를 구해 보자.
- 활동 ② 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하여 점 C와 직선 AB 사이의 거리를 구해 보자.
- 활동 ③ 활동 ①과 활동 ②의 결과를 이용하여 삼각형 ABC의 넓이를 구해 보자.

Ⅲ -2. 직선의 방정식

중단원 마무리하기

● 직선의 방정식

(1) 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식

점 (x_1, y_1) 을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$

특히, 점 $(x_1,\ y_1)$ 을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$$y=y_1$$

(2) 두 점을 지나는 직선의 방정식

서로 다른 두 점 $\mathbf{A}(x_1,\ y_1),\ \mathbf{B}(x_2,\ y_2)$ 를 지나는 직선 의 방정식은

①
$$x_1 \neq x_2$$
일 때, $y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

$$2x_1=x_2$$
일때, $x=x_1$

(3) x, y에 대한 일차방정식 ax+by+c=0이 나타내는 도형은 직선이다.

● 두 직선의 위치 관계

(1) 두 직선의 평행 조건

두 직선 y=mx+n과 y=m'x+n'에서

- ① 두 직선이 서로 평행하면 m=m', $n \neq n'$ 이다.
- 2m=m', $n \neq n'$ 이면 두 직선은 서로 평행하다.

(2) 두 직선의 수직 조건

두 직선 y=mx+n과 y=m'x+n'에서

- $oldsymbol{0}$ 두 직선이 서로 수직이면 mm' = -1이다.
- 2mm' = -1이면 두 직선은 서로 수직이다.

● 점과 직선 사이의 거리

점 (x_1, y_1) 과 직선 ax+by+c=0 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히, 원점과 직선 ax+by+c=0 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- **[11]** 다음 직선의 방정식을 구하시오.
 - (1) 점 (-4, 2)를 지나고 기울기가 -3인 직선
 - (2) 점 (6, 1)을 지나고 *x*축에 평행한 직선

- **በ2** 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.
 - (1) A(8,0), B(4,4)
 - (2) A(2, -1), B(4, 7)
 - (3) A(-1, -3), B(2, -6)
 - (4) A(-5, 3), B(-5, 9)

- **03** 두 직선 3x+4y+2=0과 ax-2y+1=0의 위치 관계가 다음과 같도록 상수 a의 값을 정하시오.
 - (1) 서로 평행하다.
 - (2) 서로 수직이다.

04 점 (3, 2)와 직선 5x-12y+10=0 사이의 거리를 구하시오.

05 점 A(a, a+2)가 두 점 B(4, 8), C(-2, 4)를 지나는 직선 위에 있을 때, 실수 a의 값을 구하시오.

06 일차방정식 3x - ky - 3k = 0이 나타내는 직선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 15일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

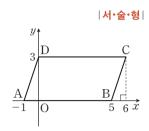
07 두 직선 x-2y+2=0, 2x+y-6=0의 교점을 지나고 직선 9x-3y+1=0과 평행한 직선의 방정식을 구하시오.

08 직선 (3k+2)x-y+2=0과 점 (1,0)을 지나는 직선이 y축에서 수직으로 만날 때, 실수 k의 값을 구하시오.

09 점 (1,1)을 지나는 직선 ax+by+2=0에 대하여 원점 O와 이 직선 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 일 때, ab의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.)

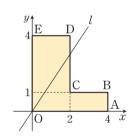
10 직선 4x-3y=0에 평행하고 점 (1, -1)에서의 거리가 2인 직선의 y절편을 구하시오. (단, *y*절편은 양수이다.)

11 오른쪽 그림과 같이 네 점 A(-1,0), B(5,0), C(6,3), D(0,3)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 ABCD가 있다. 두 직선 AD, BC 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



(발

12 오른쪽 그림에서 원점을 지나는 직선 l은 여섯 개의 점 O(0, 0), A(4, 0), B(4, 1), C(2, 1), D(2, 4), E(0, 4)를 선분으로 이은 도형 OABCDE의 넓이를 이등분한다. 이 때 직선 l의 기울기를 구하시오.



13 오른쪽 그림과 같이 일직선으로 뻗은 해안선의 A 지점에 부두가 있고, 부두로부터 6 km 떨어진 B 지점에서 수직으로 3 km 떨어진 C 지점에 등대가 있다. 부두에서 배가 해안선에 대하여 60° 를 이루 면서 움직일 때, 등대와 배 사이의 최단 거리를 구 하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

