제7장 공개키 암호

7.1 공개키 암호 시스템의 원리

7.2 RSA 알고리즘

- □ 암호학 전체의 역사에서 최대 혁명적 발견
 - ❖ 1976년 Diffie와 Hellman에 의해 제기
- □ 관용 암호 방식의 문제점
 - : 전치와 치환기법을 기본방법으로 사용
 - ❖ 키 분배의 문제
 - ❖ 디지털 서명이 불가능
- □ 공개키 암호방식
 - : 관용 암호방식과 근본적으로 다른 수학적 함수에 근거
 - ❖ 키 분배문제 해결 : 비밀키 전송
 - ❖ 디지털서명 : 문서 서명효과, 발신처 인증, 부인봉쇄

□ 공개키 암호방식에 대한 오해

- ❖ 관용 암호방식 보다 안전
 - ▶ 안전성은 키 길이와 계산시간의 관계
- ❖ 범용 기술
 - ▶키 관리와 서명에 효과적 ; 응용/관용방식 보다 계산 부하
- ❖ 키 분배 문제 해결
 - ▶ 간단하거나 효율적이라고 단정 불가하고 별도의 관리 프로토 콜 필요

□ 공개키 알고리즘

: 두 개의 다른 키 사용

공개키 : 모든 사람이 접근 가능한 키 (공개)

개인키: 각 사용자 자신만이 소유 (비밀)

(관용 암호에 사용되는 키는 비밀키라고 함)

□ 공개키 알고리즘의 특징

- ❖ 암호 알고리즘과 암호키를 알아도 복호키 계산 불가능
- ❖ 두 개의 키 중 하나는 암호에 다른 하나는 복호에 사용

□ 공개키(public key)

- ❖ 암호화 키는 일반에게 공개해도 무방
- ❖ 수신자에게 메일로 전달해도 무방
- ❖ 신문의 광고란에 실어도 무방
- ❖ 간판으로 해서 길가에 세워도 무방
- ❖ Web 페이지를 통하여 전 세계에서 읽을 수 있도록 해도 무방
- ❖ 도청자에게 공개 키가 도청되는 것을 신경 쓸 필요가 없다

□ 개인 키(private key)

- ❖ 복호화 키는 미공개
- ❖ 이 키는 본인만 사용
- ❖ 개인 키는 다른 사람에게 보이거나, 건네주거나 해서는 안 됨
- ❖ 개인 키는 자신의 통신 상대에게도 보여서는 안 됨

□ 키 쌍(key pair)

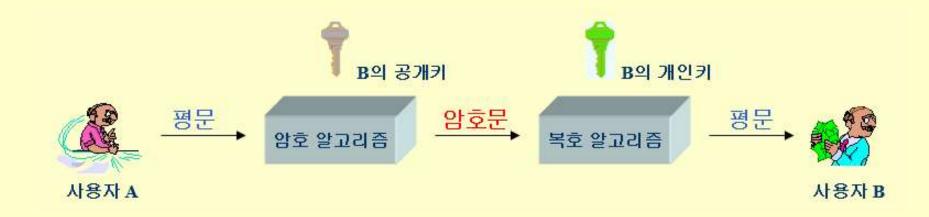
- ❖ 공개 키와 개인 키는 둘이 한 쌍
- ❖ 공개 키로 암호화한 암호문은 그 공개 키와 쌍이 되는 개인 키가 아니면 복호화할 수 없다
- ❖ 수학적인 관계
 - ▶키 쌍을 이루고 있는 2개의 키는 서로 밀접한 관계
 - > 공개 키와 개인 키 쌍은 별개로 만들 수 없음

□ 관용 암호와 공개키 암호 비교

관용 암호	공개키 암호
 암호/복호에 동일한 키와 동일한 알고리즘 사용 수신자와 송신자는 키를 교환해야 함 공유한 키(비밀키)는 비밀로 유지 키 분배의 어려움/디지털 서명 불가능 속도가 빠름 	 암호/복호에 각각 서로 다른 키 와 동일한 알고리즘 사용 수신자와 송신자는 연관된 키 쌍 중 하나를 알아야 함 키 쌍중 하나(개인키)를 비밀로 유지 공개키를 공개 디지털 서명 가능 속도가 느림

□ 공개키 암호의 단순 모델

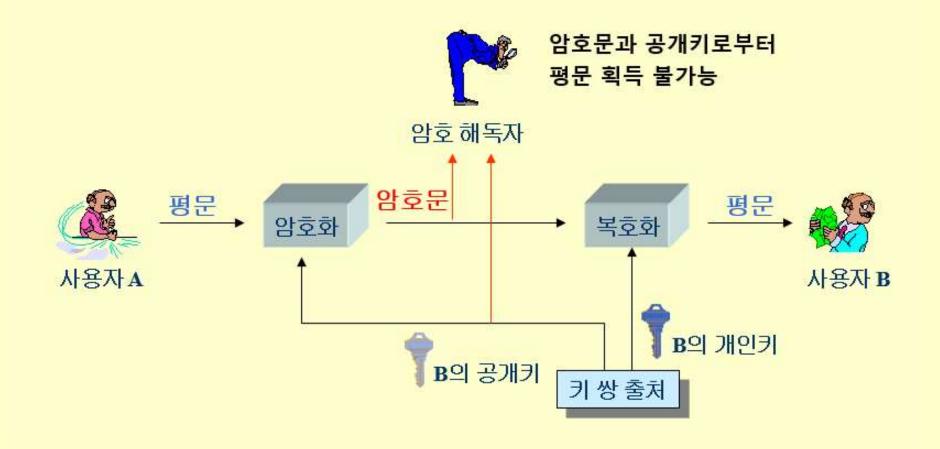
: A가 B에게 암호화 메시지를 보내는 경우



- 1. 공개키와 개인키 생성
- 2. 공개키는 공개하고 개인키는 개인이 소유
- 3. A는 B의 공개키로 메시지를 암호화
- 4. B는 자신의 개인키로 메시지 복호화 (B의 개인키를 모르는 제 3자는 메시지 복호 불가능)

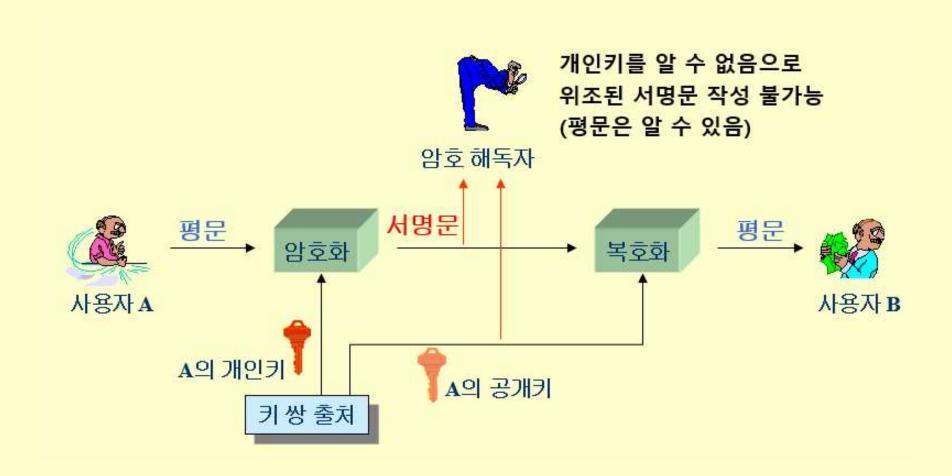
□ 공개키 암호 시스템 : 기밀성

: 공개키로 암호화함으로써 메시지 기밀성 제공



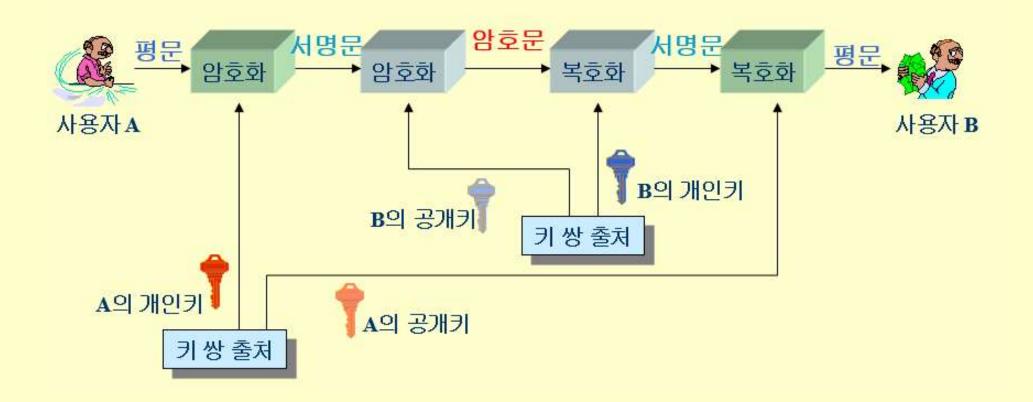
□ 공개키 암호 시스템 : 인증

: 개인키로 서명함으로써 송신자 인증 제공

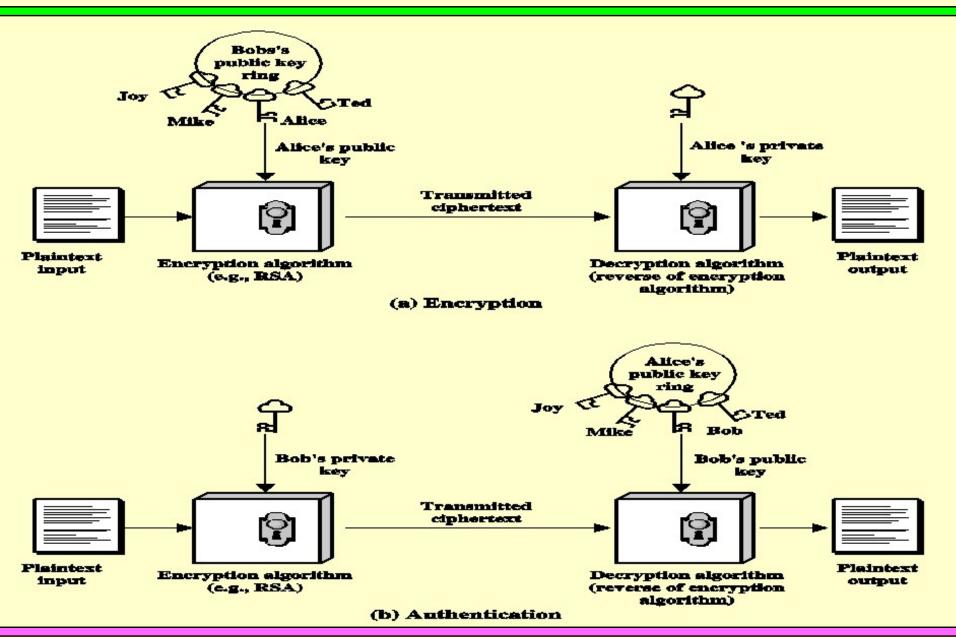


□ 공개키 암호 시스템 : 기밀성과 인증

: 개인키로 서명하고 공개키로 암호화하여 기밀성과 인증 제공



공개키 암호



- □ 공개키 암호 시스템의 사용
 - ❖ 암호/복호 (수신자의 공개키로 메시지 암호)
 - ❖ 디지털 서명 (송신자의 개인키로 메시지 서명)
 - ❖ 키 교환 (세션키를 교환하기 위해 사용)
- □ 공개키 암호 시스템의 응용

알고리즘	암호/복호화	디지털 서명	키 교환	
RSA	가능	가능	가능	
타원 곡선	가능	가능	가능	
DSS	불가능	가능	불가능	
Diffie-Hellman	불가능	불가능	가능	

□ 공개키 알고리즘의 조건 (Diffie와 Hellman)

- ❖ 키 쌍(공개키 KU, 개인키 KR)의 생성이 쉽다.
- ❖ 다음 식과 같은 암호문의 생성이 쉽다.
- ❖ 다음식과 같은 암호문의 복구화가 쉽다.
 - \bullet M = D_{KRb}(C) = D_{KRb}[E_{KUb}(M)]
- ❖ 공개키 KUb로부터 개인키 KRb를 결정하는 것은 어렵다.
- ❖ 공개키 KUb와 암호문 C로부터 메시지 M의 복구가 어렵다.
- ❖ 암호와 복호 기능이 다음과 같이 적용 가능하다. (추가 사항)

일방향 함수(one-way function)

- □ 함수 값의 계산이 쉬운 반면 역의 계산은 어렵다는 조건
 - ❖ Y = f(X) 쉽다
 - ❖ *X* = f⁻¹(Ŋ 어렵다.
- □ 일반적으로 'easy(쉽다)'는 입력 길이에 대한 함수로서 다항식 시간동 안 풀릴 수 있는 문제를 의미하는 것으로 정의
- □ 트랩도어 일방향 함수(trap-door one-way function)
 - ❖ 한 방향으로는 계산이 쉽고, 어떤 부가적인 정보가 알려져 있지 않으면 다른 방향에서는 계산이 불가능
 - $V = f_k(X)$ 만일 k와 X 가 알려져 있다면 쉽다
 - $\star X = f_k^{-1}(Y)$ 만일 k와 Y가 알려져 있다면 쉽다
 - ❖ $X = f_k^{-1}(Y)$ 만일 Y는 알려져 있지만 k가 알려져 있지 않으면 어렵다.
- □ 실제 공개키 기술발전은 적절한 트랩도어 일방향 함수의 개발이 중요
- □ 임의의 큰 데이터 필드를 취하여 고정된 출력으로 대응시키는 일방향 해쉬학수와의 호동을 하지 않아야 한다

- □ 공격 유형
 - ❖ 전사적 공격에 취약
 - ⇒ 키의 크기를 크게 함으로써 방지 (상대적으로 속도가 느려짐)
 - ❖ 공개키로부터 개인키를 계산하는 방법
 - ⇒ 수학적으로 계산이 불가능함을 증명하지 못함
 - ❖ 가능한 메시지 추측 공격(메시지 길이가 작을 때)
 - : 모든 가능한 메시지를 공개키로 암호화하여 암호문과 비교
 - ⇒ 메시지에 임의의 비트를 추가함으로써 방지

□ Knapsack 암호의 일반적인 개념

: 일정한 크기의 배낭에 어떤 물건을 넣어야 하는지에 관한 문제

❖ 정의

▶ cargo 벡터

$$a = (a_1, a_2, ..., a_n)$$

a_i :정수

▶평문 메시지 블록

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

x_i :이진수

▶ 대응하는 암호문

$$S = a \cdot x = \sum_{i=1}^{n} (a_i \times x_i)$$

❖ 개념

- ▶ 공개키 : a
- ▶x_i = 1은 a_i가 Knapsack에 포함된다는 의미
- ▶ 송신자는 S=a x를 계산하여 S 값을 전송
- ▶ 수신자는 S와 a에 의해 x를 복구

■ Knapsack의 조건

- ❖ 첫째, S의 값에 유일한 역이 존재
 - ▶ex) 두 가지 역이 존재하는 예

x = 1010, x = 0100의 두가지 경우가 존재

따라서, 원소 a의 조합이 유일한 값을 산출하는 것으로 선택

- ❖ 둘째, 일반적인 복호는 어려우나, 특별한 지식이 있을 경우 쉬움
 - ▶초증가 벡터(superincreasing vector) 이용
 - 초증가 벡터

: a의 각 원소가 선행하는 원소들의 합보다 큰 경우

- a' = (a1, a2, ..., a5) = (171, 197, 459,1191, 2410) 일 경우
- S' = a', x' = 3798이라면
- $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, 1)$

- □ Knapsack 문제에 초증가 Knapsack 문제를 묶는 방법
 - ❖ a'을 임의로 선택 (a' : 쉬운 초증가 Knapsack 벡터)
 - ❖ m과 w를 선택
 - ➤ m : a'원소들의 합보다 큰 정수
 - ➤w: m과 서로소인 정수
 - ❖ a 생성 (a : 어려운 Knapsack 벡터)
 - $a = wa' \mod m$
 - ❖ 쉬운 Knapsack 벡터로의 변환 가능

$$w^{-1}a = a' \mod m$$

□ Knapsack 알고리즘 사용 예

❖ 키 생성

- ▶a' (쉬운 Knapsack) 1 3 7 13 26 65 119 267
- \triangleright w = 467, m = 523, w⁻¹ = 28 (mod 523)
- ▶a (어려운 Knapsack) 467 355 131 318 113 21 135 215

 $a = wa' \mod m$

▶ 공개키 : KU = a, 개인키 : KR = {w⁻¹, m, a')

❖ 암호화

- ▶ 평문 x = 01001011
- ▶ 암호문 : S = a x = 818 (0 ×467 + 1 ×355 + 0 ×131 + 0

□ Knapsack 알고리즘 사용 예 (계속)

❖ 복호화

- 1 3 7 13 26 65 119 267
- ❖ S' = S W⁻¹ mod m = a' x로 복호
 - \triangleright 818 \times w⁻¹ = 818 \times 28 = 415 (mod 523)
 - → 415 ≥ 267

$$\Rightarrow x_8 = 1$$

- $ightharpoonup 415 267 = 148 \ge 119 \implies x_7 = 1$
- $> 148 119 = 29 < 65 \Rightarrow x_6 = 0$
- **>** 29 ≥ 26

$$\Rightarrow x_5 = 1$$

$$\Rightarrow x_4 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

$$>$$
 3 - 3 = 0 < 1

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

 \Rightarrow 평문 : $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 = 01001011$

Knapsack 알고리즘 예

❖ 키 생성

- ▶a' (쉬운 Knapsack) 2, 4, 7, 13, 31
- \triangleright w = 57, m = 71, w^{-1} = 5 (mod 71)
- ▶a (어려운 Knapsack) = wa' mod m; , , , ,
- ▶ 공개키 : KU = a, 개인키 : KR = {w⁻¹, m, a')

❖ 암호화

- ▶ 평문 x = 11010
- ▶ 암호문 : S = a x =
- ❖ 복호화
 - > S' = S W⁻¹ mod m =

QUIZ

❖키 생성

- ▶a' (쉬운 Knapsack) 3, 5, 9, 21, 46
- \triangleright w = 47, m = 87, w^{-1} = ?? (mod 71)
- ▶a (어려운 Knapsack) = wa' mod m; ??, ??, ??, ??, ??
- ▶ 공개키 : KU = a, 개인키 : KR = {w⁻¹, m, a')

❖ 암호화

- ▶ 평문 x = 10110
- ▶ 암호문 : S = a x = ??
- ❖ 복호화
 - $> S' = S \cdot W^{-1} \mod m = ?? \pmod{71}$

평문: ? ? ? ? ?

□ RSA의 개발 특징

- ❖ 1977년: Ron Rivest, Adi Shamir, Leonard Adleman 공동 개발
- ❖ 1978년: 공개키 암호방식의 요구사항을 만족하는 최초방식으로 공포
- ❖ RSA 구조는 평문과 암호문이 0~(n-1)사이의 블록 암호
- ❖ N의 전형적인 크기는 1024비트 또는 309 십진숫자
- ❖ 비밀키 암호방식(DES)보다 계산이 늦다
- ❖ 안전성은 소인수 분해의 어려움에 근거

□ RSA 암복호화 방식

- ❖ 지수승을 가진 수식을 사용하도록 고안
- ❖ 평문을 블록단위로 암호화(각 블록은 n보다 작은 이진 값)
- ❖ 공개키 : KU = {e, n}, 개인키 : KR = { d, n }
- ❖ 암호화

 $C = M^e \mod n$

❖ 복호화

 $M = C^d \mod n = (M^e)^d \mod n = M^{ed} \mod n$

□ RSA 알고리즘

❖ 키 생성

- ▶ p, q 선택 (p, q는 솟수)
- ▶ n = p × q 계산
- ➢ 정수 d 선택 (gcd(ø(n),d) =1, 1<d< ø(n))</p>
- ▶ e 계산 (e = d⁻¹ mod ϕ (n))
- ➢ 공개키 (KU = {e, n})
- ▶ 개인키 (KR = {d, n})

❖ 암호화

- \triangleright C = M^e (mod n)
- ❖ 복호화
 - \triangleright M = C^d (mod n)

- □ 오일러의 정리
 - ❖ 오일러 정리는 서로 소인 모든 a와 n에 대한 관계 표현

 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$

```
a = 3; n = 10; \phi(10) = 4; 3^4 = 81 \equiv 1 \mod 10

a = 2; n = 11; \phi(11) = 10; 2^{10} = 1024 \equiv 1 \mod 11
```

- Ø(n): n보다 적고 n과 서로소인 양의 정수가 되는 함수
- □ 오일러 정리의 다른 형태

□ 소수 p와 q에 대해 n = pq 일때,

- □ M^{ed} = M mod n의 증명
 - ❖ 오일러 정리
 - ▶p,q (솟수), n = p*q, 정수 n, m (0<m<n), k (임의의 정수) 일 때
 - $> m^{k\phi(n)+1} = m^{k(p-1)(q-1)+1} = m \mod n$
 - ▶e 계산 (e = d⁻¹ mod ϕ (n))
 - \triangleright ed = 1 mod ϕ (n)
 - \triangleright ed = $k\phi(n) + 1$
 - \Rightarrow e와 d는 mod ϕ (n)에 곱셈 역원 (e와 d가 ϕ (n)에 서로소인 경우에만 참)

*	0	1	2	3	4 0 4 1 5 2 6 3	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

RSA 알고리즘

키 생성

```
p, q 선택 p, q는 솟수 n = p \times q 계산 = (p-1)(q-1) 계산 정수 e 선택 \gcd(\phi(n), e) = 1; 1 < e < \phi(n) e 계산 d = e^{-1} \mod \phi(n) 공개키 KU = \{e, n\} 개인키 KR = \{d, n\}
```

암호화

평문 : *M* < *n*

암호문 : $C = M^e \pmod{n}$

복호화

암호문 : C

평문 : $M = C^d \pmod{n}$

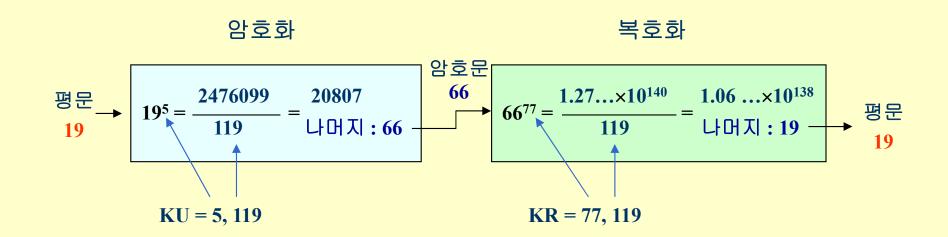
□ RSA 알고리즘 사용 예

❖ 공개키와 개인키 생성

- 1. 두 솟수 p = 7, q = 17 을 선택
- 2. n = pq = 7 × 17 = 119 계산
- 3. *ϕ*(n) = (p-1)(q-1) = 96 계산
- 4. $\phi(n) = 96$ 과 서로소이고 $\phi(n)$ 보다 작은 e 선택 (e = 5)
- 5. de = 1 mod 96이고 d < 96 인 d를 결정 (d = 77)
- ⇒ 공개키 KU = {5, 119}, 개인키 KR = {77, 119}

□ RSA 알고리즘 사용 예 (계속)

- ❖ 암호화와 복호화
 - : 평문 메시지 M = 19 일 경우
 - ▶ 암호문 : 19⁵ = 66 mod 119 ⇒ 66
 - ▶복호문 : 66⁷⁷ = 19 mod 119 ⇒ 19



- 1) p=11, q=3
- 2) n = p. q = 33
- 3) $\Phi(n) = \Phi(33) = (p-1)(q-1) = 10 \times 2 = 20$
- 4) Φ(n)과 서로소이고 보다 작은 e 선택, e = 3
- 5) $d \times e = 1 \mod \Phi(n) \ d \times e = 1 \mod 20 \ \therefore d=7$ $KU = \{3,33\} \ KR = \{7,33\}$

메시지 M=5

암호화: C = 5³ mod 33 = 125 mod 33 = 26

복호화: M = 26⁷ mod 33 = 8031810176 mod 33 = 5

메시지 M=14

암호화: C = 14³ mod 33 = 2744 mod 33 = 5

복호화: M = 5⁷ mod 33 = 78125 mod 33 = 14

□ 암호화와 복호화

- ❖ Me, Cd : 지수승 계산 ==> 중간과정 이후의 큰 숫자 계산량 증대
- ❖ 중간 결과를 mod n으로 계산하여 숫자 크기 축소
- ❖ 계산량을 줄이는 방법
 - ▶ 모듈러 연산의 특징 이용

[(a mod n) \times (b mod n)] mod n = (a \times b) mod n

- ⇒ 중간 결과를 축소
- ❖ 효율적인 지수 승
 - ▶ 직접적인 방법 (x¹⁶ 일 경우)
 - ▶ 효율적인 방법
 - : x^2 , x^4 , x^8 , $x^{16} \Rightarrow 4번의 곱셈$

□ 예) 3³⁵ mod 7 ??

$$3^{35} = 3^1 * 3^2 * 3^{32} =$$

□ 예) 3⁴⁵ mod 7 ??

□ 키 생성

- ❖ 암복호에 필요한 키쌍을 생성하기 위하여 선행 작업이 필요
 - ▶ 먼저 2개의 솟수 p와 q를 결정
 - ▶ e와 d중 하나를 선택하고 다른 하나는 계산
- ❖ 전사적 공격을 방어하기 위하여 충분히 큰 소수 p, q가 필요

□ 키 생성

- ❖ 랜덤한 큰 솟수를 찾는 방법 (확률적 검사법)
 - 1. 랜덤하게 홀수 n을 선택
 - 2. 랜덤하게 a<n인 정수 a를 선택
 - 3. 확률적 솟수 판정법 수행 (만약 n이 검사에서 실패하면 1단계로)
 - 4. n이 충분한 횟수의 검사에 통과하면 n을 수용, 그렇지 않으면 2단계로
- ❖ 솟수 생성을 위한 검사 횟수
 - ▶ N에 가까운 솟수는 (In N)에 대하여 평균 1회 생성
 - ➤ ex) 2²⁰⁰ 범위의 솟수 ⇒ ln(2²⁰⁰)/2 = 70 회 정도 시행

- □ 암호 해독의 고찰
 - ❖ 암호 해독의 접근 방법
 - ▶ 전사적 공격
 - ⇒ 큰 키를 사용하여 방지
 - ▶ 인수 n를 두 소인수로 인수 분해
 - ⇒ 큰 값에 대한 두 솟수의 곱을 인수 분해하는 적당한 알고리즘이 없음
 - ▶ p와 q을 결정하지 않고 직접 Ø(n)을 추측하여 결정
 - ⇒ 인수 분해만큼 어려움
 - $ightrightright
 angle \phi(n)$ 을 결정하지 않고 직접 e, d를 추측하여 결정
 - ⇒ 인수 분해만큼 어려움

□ 인수분해 시간

자릿수	인수 분해 시간
100	2 주일
150	1 년 (1,000 만 달러 소요)
200	1,500 년 (10 억 달러, 초당 10 ¹² 처리)

□ : 제안 사항(인수 분해를 어렵게)

- $\bullet \quad n = 10^{150} \sim 10^{200}$
- p, q = $10^{75} \sim 10^{100}$
- (p-1), (q-1) 은 큰 솟수를 포함
- gcd(p-1,q-1)은 작아야
- e <n 이고 d<n^{1/4} 일때 d 는 쉽게 결정

RSA에 대한 공격

□ 암호해독자가 알고 있는 것

❖ 암호문 : 도청해서 얻음

❖ 수 e와 n : 공개키로서 공개되어 있으므로, {e, n}을 알고 있음

□ 암호해독자가 모르는 것

❖ 평문 : 지금부터 해독하려고 하는 내용

❖ 수 d : 개인 키 중 적어도 d는 모르고 있음

❖ 기타 : 암호해독자는 키 쌍을 만들었을 때의 p, q, ∅(n)을 모름

RSA에 대한 공격

- □ 암호문으로부터 평문 구하기
- □ 암호문 = 평문^e mod n
 - ❖ 만약 mod n이 없고,
- □ 암호문 = 평문^e
 - ❖ 이었다면 암호문으로부터 평문을 구하는 것은 쉬움
 - ❖ 하지만 mod n이 붙어 있으면 평문을 구하는 것은 이산 대수를 구 한다는 매우 곤란한 문제

공개키 암호에 관한 Q&A

- □ Q1. 공개키 암호는 대칭 암호보다 기밀성이 높은가?
 - ❖ 이것만으로는 알 수 없다. 키의 비트 길이에 따라 기밀성의 정도는 변화하기 때문.

- □ Q2. 1024비트 길이의 키를 갖는 공개 키 암호와, 128비트 길이의 키를 갖는 대칭 암호에서는 비트 길이가 긴 공개 키 암호 쪽이 안전한가?
 - ❖ 아니다. 공개 키 암호의 키 길이와, 대칭 암호의 키 길이는 직접 비교할 수 없다.
 - ❖ 1024비트 길이의 공개 키 암호와 128비트 길이의 대칭 암호에서는, 128비트 길이의 대칭 암호 쪽이 전사공격에 강하다는 것을 알수 있음

공개키 암호에 관한 Q&A

- □ Q3. 공개 키 암호가 생겼기 때문에 앞으로 대칭 암호는 사용되지 않게 되는 것인가?
 - ❖ 아니다. 일반적으로 같은 정도의 기밀성을 갖는 키 길이를 선택했을 경우, 공개 키 암호는 대칭 암호보다도 몇 백배나 느려진다. 공개 키 암호는 긴 메시지를 암호화하기에는 적합하지 않다. 목적에따라 대칭 암호와 공개키 암호 두 가지 모두 사용되게 될 것이다.

- □ Q4. RSA의 키 쌍을 모두가 자꾸 만들어 가면 그 사이 소수가 없어져 버리는 것은 아닐까?
 - ❖ 그럴 염려는 없다. 512비트로 표현할 수 있는 소수의 수는 대략 10의 150거듭제곱으로 전 우주에 존재하는 원자의 개수보다도 많 은 수이다.

Report

p=11, q=5 일 경우 공개키를 본인의 학번 끝 두자리를 mod 9하여

- 0, 4인 경우: 3
- 1, 5인 경우: 7
- 2, 6인 경우: 11
- 3, 7인 경우: 13
- 8인 경우: 17 로 하여
- 1) 복호화 키를 구하시오.
- 2) 평문 M=6인 경우의 암호문을 구하시오.
- 3) 암호문을 복호키로 암호화하여 평문이 나옴을 보이시오.