TUGAS BESAR 1 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI 2022/2023

oleh

Laila Bilbina Khoiru Nisa 13521016
Bagus Lathif Firmansyah 13521017

TEKNIK INFORMATIKA
SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG 2022/2023

BAB I DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, anda diminta membuat satu atau lebih *library* aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan *library* tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi. Penjelasan tentang interpolasi dan regresi adalah seperti di bawah ini.

I. Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n.

(i) Sistem persamaan linier (SPL) $Ax = b$ dengan n peubah (*variable*) dan m persamaan adalah berbentuk

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots. + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien Î R. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan *n* pebuah dan *n* persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

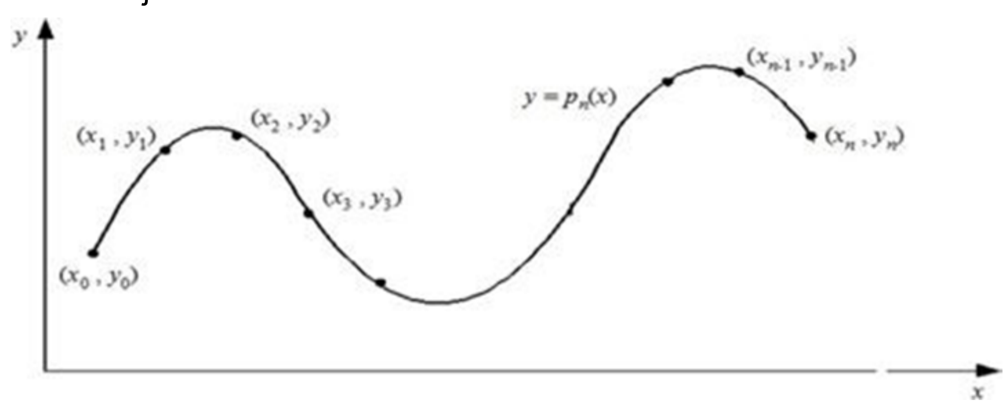
(ii) Sebuah matriks *M* berukuran *n ´ n*

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

determinannya adalah

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

(iii) Balikan (*inverse*) matriks *M* berukuran *n ´ n* dapat dihitung dengan banyak cara: menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan dan menggunakan matriks adjoin.



Kembali ke sistem persamaan linier (SPL). SPL memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, salah satunya adalah mengestimasi nilai fungsi dengan interpolasi polinom. Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n.

Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang [x_0, x_n].

Polinom interpolasi derajat n yang menginterplolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam a_0, a_1, a_2, …, a_n,

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\
\ldots \qquad\qquad & \ldots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}
$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a_0, a_1, …, a_n, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada x = 9.2. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

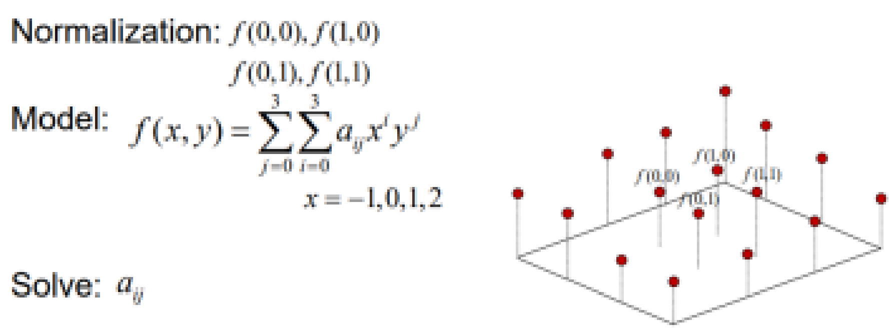
$$
\begin{aligned}
a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 &= 2.0794 \\
a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 &= 2.1972 \\
a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 &= 2.2513
\end{aligned}
$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan a_0 = 0.6762, a_1 = 0.2266, dan a_2 = -0.0064. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada x = 9.2 dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)_2 = 2.2192$.

II. Bicubic Interpolation

Bicubic interpolation merupakan teknik interpolasi pada data 2D umumnya digunakan dalam pembesaran citra yang merupakan pengembangan dari interpolasi linear dan cubic yang telah dipelajari pada kuliah metode numerik di aljabar geometri.

Diberikan sebuah matrix awal, misal M, kita akan mencari persamaan interpolasi *f(x,y)* dengan pemodelan sebagai berikut:



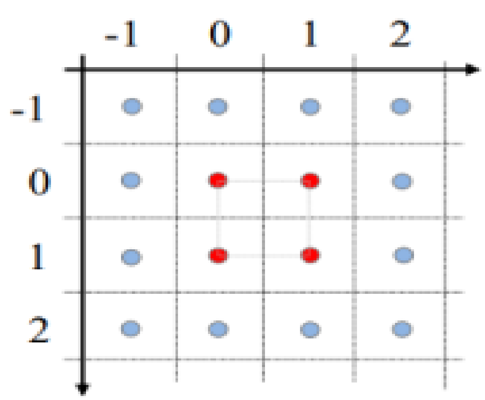
Melakukan substitusi nilai-nilai diketahui pada matriks 4 x 4 tersebut ke persamaan f(x,y) akan menghasilkan sebuah matriks persamaan:

$$y = Xa$$

$$\begin{bmatrix} f(-1,-1) \\ f(0,-1) \\ f(1,-1) \\ f(2,-1) \\ f(-1,0) \\ f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(2,0) \\ f(-1,1) \\ f(0,1) \\ f(1,1) \\ f(2,1) \\ f(-1,2) \\ f(0,2) \\ f(1,2) \\ f(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & -1 & -2 & -4 & -8 & 1 & 2 & 4 & 8 & -1 & -2 & -4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 2 & -2 & 4 & -4 & 4 & -4 & 8 & -8 & 8 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 2 & 4 & 8 & 16 & 4 & 8 & 16 & 32 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{20} \\ a_{30} \\ a_{01} \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{02} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{03} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen pada matrix X adalah koefisien a_{ij} yang diperoleh dari persamaan f(x,y) di atas. Sebagai contoh, elemen pada baris 4 kolom ke 10 adalah koefisien dari a_{12} dan diperoleh dari $2^1*(-1)^2 = 2$, sesuai persamaan $x^i * y^j$.

Vektor a dapat dicari dari persamaan tersebut (menggunakan inverse), lalu vektor a digunakan sebagai nilai variabel dalam *f(x,y)*. Sehingga terbentuk fungsi interpolasi bicubic sesuai model. Tugas Anda adalah menentukan persamaan *f(x,y)* lalu melakukan interpolasi berdasarkan *f(a,b)* dari masukan matriks 4 x 4. Nilai masukan *a* dan *b* dalam rentang [0,1] (Referensi gambar di bawah, nilai untuk diinterpolasi dalam kotak merah).



Untuk studi kasus ini, buatlah matriks X menggunakan rumus yang ada (tidak hardcode) serta carilah inverse matriks X dengan library kalian dalam penyelesaian masalah.

Referensi Bicubic Interpolation:
https://www.mssc.mu.edu/~daniel/pubs/RoweTalkMSCS_BiCubic.pdf
Bonus (Nilai 10): Gunakan interpolasi *bicubic* ini untuk melakukan perbesaran (*scaling*) pada citra (*image*) menjadi dua kali ukuran semula.

III. Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

BAB II Teori Dasar

1. Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss merupakan operasi yang dilakukan pada sebuah matriks untuk mengubahnya menjadi sebuah matriks eselon. Matriks eselon adalah matriks yang memenuhi kriteria berikut: 1) Baris yang seluruhnya berisi 0 berada dibawah matriks, 2) Entri awalan pada baris yang tidak 0 adalah 1, dan 3) Entri awalan pada baris yang tidak 0 berada disebelah kanan entri awalan baris-baris sebelumnya. Untuk menghasilkan matriks eselon dari sebuah matriks sembarang, Eliminasi Gauss menggunakan operasi baris elementer. Algoritma yang dapat digunakan komputer sebagai berikut:

1) Tukar semua baris sehingga baris dengan jumlah 0 paling sedikit berada diatas dan jumlah 0 paling banyak berada dibawah
2) Mengalikan barisan paling atas sehingga entri awalan bernilai 1 atau baris seluruhnya berisi 0.
3) Menjumlahkan barisan dibawahnya dengan kelipatan baris tersebut sehingga entri awalan baris dibawahnya berada di kanan entri awalan baris tersebut
4) Ulangi langkah kedua untuk baris dibawahnya, hingga tidak ada baris lagi di bawahnya.

2. Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan merupakan operasi yang dilakukan pada sebuah matriks untuk mengubah matriks tersebut menjadi sebuah matriks eselon tereduksi. Matriks eselon tereduksi serupa dengan matriks eselon pada umumnya, hanya saja semua entri pada kolom diatas dan dibawah entri awalan bernilai 0. Eliminasi Gauss-Jordan, seperti Eliminasi Gauss, menggunakan operasi baris elementer. Algoritma yang dapat digunakan komputer sebagai berikut:

1) Melakukan eliminasi Gauss pada matriks

2) Menjumlahkan baris di atas kedua (bila ada) dengan kelipatan baris tersebut sehingga entri pada kolom di atasnya bernilai 0.
3) Ulangi langkah kedua untuk baris di bawah baris yang ditinjau, hingga tidak ada baris lagi di bawahnya.

3. Determinan

Determinan suatu matriks adalah suatu fungsi skalar dengan domain matriks bujur sangkar. Dengan kata lain, determinan merupakan pemetaan dengan domain berupa matriks bujur sangkar, sementara kodomain berupa suatu nilai skalar. Determinan suatu matriks sering digunakan dalam menganalisa suatu matriks, menentukan solusi sistem persamaan linear dengan aturan cramer, pemeriksaan baris suatu ruang vektor dan lain-lain.

4. Matriks Balikan

Jika sebuah matriks dikali dengan matriks balikannya, atau disebut juga dengan invers dari matriks tersebut, maka akan dihasilkan matriks identitas yang ukurannya sama dengan ukuran kedua matriks tersebut.

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Syarat dari bisa-tidaknya dibuat matriks balikan dari sebuah matriks (inversible) adalah matriks tersebut merupakan matriks persegi.

5. Matriks Kofaktor

Sebuah kofaktor adalah merupakan sebuah determinan dari minor dari sebuah matriks. Minor (M_{ij}) dari sebuah matriks A adalah sebuah matriks bagian (sub-matriks) dari matriks A yang mengecualikan baris kolom ke-i dan baris ke-j. Kofaktor memiliki rumus sebagai berikut:

$$C_{ij} = |M_{ij}| \cdot (-1)^{i+j}$$

Matriks kofaktor adalah sebuah matriks yang berisi kofaktor-kofaktor dari matriks tertentu.

6. Matriks Adjoin

Matriks adjoin merupakan transpose dari matriks kofaktor dari sebuah matriks. Transpose merupakan operasi yang menukar semua baris dengan semua kolom pada sebuah matriks.

7. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer menyatakan bahwa sebuah sistem persamaan linear $Ax = b$ dapat diselesaikan dengan mengubah A menjadi sebuah matriks. Untuk setiap x_n , nilai dari x_n adalah nilai determinan dari A_n dibagi dengan determinan dari A . A_n adalah matriks A dengan kolom ke-n ditukar dengan nilai-nilai pada b.

8. Interpolasi Polinom

Untuk n-jumlah titik pada sebuah bidang datar, dapat dicari sebuah polinom yang menghubungkannya. Polinom ini dapat dicari dengan menggunakan rumus:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\ \ldots \qquad\qquad & \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n \end{aligned}$$

Xn dan Yn adalah absis dan ordinat dan sebuah titik. An merupakan nilai koefisien dari tiap suku pada polinom yang harus dicari. Setelah mendapatkan semua An, rumus polinom yang dihasilkan adalah:

$$a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = y$$

9. Interpolasi Bikubik

Interpolasi bikubik merupakan sebuah metode interpolasi yang menggunakan 16 pixel dalam pixel 4x4 tetangga terdekat pada citra aslinya. Dengan menggunakan metode interpolasi bicubic ini dapat membuat tepi-tepi citra hasil lebih halus. Sehingga metode interpolasi bicubic sering digunakan dalam pengeditan perangkat lunak dan banyak kamera digital lainnya. Seiring perkembangannya maka mulai dibentuk berbagai metode interpolasi, salah satunya adalah interpolasi bicubic basis spline, yang mana metode ini juga memanfaatkan 16 pixel tetangga terdekatnya.

BAB III IMPLEMENTASI

Program yang dibuat membagikan kode ke dalam beberapa class berdasarkan kegunaan prosedur-prosedur yang dijalankan, dan tipe data abstrak yang dibuat. Program ini memuat 1 class program utama, 3 class tipe data abstrak, dan 5 class yang menjalankan prosedur lainnya.

1. Main.java

Program utama yang hanya menjalankan prosedur menu utama yang terletak pada class Menu.

2. Input.java

Class ini menyediakan satu prosedur, yaitu prosedur pembacaan matriks dan dapat menyesuaikan untuk matriks yang harus berbentuk persegi.

3. Menu.java

Class ini memiliki prosedur yang menjalankan *core-loop* dari program ini. *Core-loop* dijalankan di prosedur Run(). Class ini juga mengurus masukan matriks dari beberapa fitur program. Input yang didapat akan mengalihkan program ke prosedur lain sebelum kembali ke *core-loop* program. Bila ada menu tambahan yang harus ditampilkan, class ini juga dapat mengurusnya melalui prosedur lain yang dimiliki class Menu.

4. Matriks.java

Matriks adalah class yang berisi tipe data abstrak matriks. Class matriks dibagi menjadi beberapa bagian:

a. Atribut - Berisi nilai-nilai yang disimpan pada objek Matriks. Meliputi MinimalKolom, MinimalBaris, MaksimalKolom, MaximalBaris, Baris (jumlah baris), Kolom (jumlah kolom), dan Mat (array berdimensi-ganda).

b. Konstruktor - Berisi pembuat matriks yang dapat menerima array double dua dimensi, jumlah baris dan kolom, atau sebuah nama file.

c. Selektor - Meliputi method GetFirstIdxKol, GetFirstIdxBrs, GetLastIdxKol, GetLastIdxBrs, dan NbElmt

d. Tipe Matriks Umum - Membuat matriks baru yang berupa matriks Identitas.

e. Input/Output - Memuat prosedur yang dipakai untuk membaca-tulis matriks dari dan ke command line.

f. Operasi dasar - Memuat operasi dasar antar matriks. Prosedur hanyalah operasi perkalian

g. Operasi baris elementer - Meliputi method Swap (tukar baris), KaliBaris (dengan sebuah konstanta), PlusBaris, dan MinusBaris.

h. Predikat - Hanya memiliki predikat IsIdentitas.

i. Fungsi Skalar - Merupakan kelompok fungsi yang dijalankan pada matriks untuk menghasilkan suatu bilangan skalar. Fungsi dan prosedur yang termasuk pada kelompok ini adalah determinan (baik metode OBE atau metode kofaktor), dan pencarian kofaktor.

j. Fungsi Matriks - Merupakan kelompok fungsi yang dijalankan pada matriks untuk menghasilkan suatu matriks lainnya. Memuat fungsi dan prosedur Minor, Transpose, Matriks Kofaktor, Matriks Adjoin, Invers (baik metode Gauss-Jordan atau dengan matriks adjoin), Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, Copy, dan Concat (menggabungkan dua matriks bersebelahan).

5. SPL.java

Class ini menjalankan pembacaan matriks hingga output hasil dari sebuah SPL dengan menggunakan 4 metode. Metode yang digunakan adalah metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks invers, dan metode kaidah Cramer.

6. Expression.java

Expression adalah class tipe data abstrak yang berisi sebuah expresi penjumlahan linear dari satu atau beberapa variabel. Expression memiliki atribut exp yang digunakan untuk menyimpan expresi penjumlahan parametriknya. Class Expression juga mengurus penggunaan variabel baru agar tidak memiliki konflik nama dengan variabel yang sudah ada. Selain itu, terdapat beberapa fungsi selektor dan setter yang berurusan dengan *get/set* koefisien dari suku pada ekspresi. Terdapat fungsi ToString yang mengubah ekspresi menjadi sebuah string yang lebih mudah dipahami pengguna. Ada juga predikat yang mendeteksi kekosongan suatu ekspresi.

7. Nilai.java

Nilai adalah class tipe data abstrak yang berisi sebuah nilai yang terdiri dari sebuah koefisien/konstanta dan sebuah variabel independen. Variabel disimpan sebagai sebuah indeks yang lebih mudah dipahami komputer, dan sebagai sebuah string yang lebih mudah dipahami pengguna. Metode yang dimiliki Nilai meliputi konversi dari variabel dalam representasi indeks ke string dan sebaliknya.

8. Determinan.java

Class Determinan menyediakan dua prosedur untuk menjalankan dua opsi menu metode perhitungan determinan, yaitu metode operasi baris elementer dan metode kofaktor.

9. Invers.java

Class Invers menyediakan dua prosedur untuk menjalankan dua opsi menu metode perhitungan matriks balikan, yaitu metode eliminasi Gauss-Jordan dan metode adjoin.

10. Interpolasi.java

Class Interpolasi hanya menyediakan dua prosedur, yaitu prosedur pencarian polinom yang menginterpolasi antara beberapa titik dan prosedur input sebagai dari file.

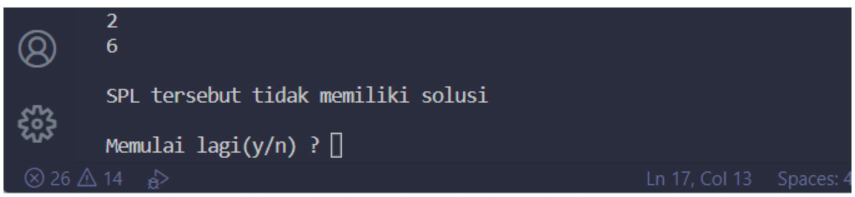
BAB IV EKSPERIMEN

4.1 Temukan solusi SPL ax = b, berikut :

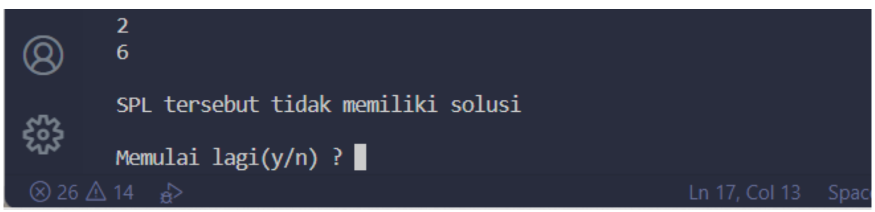
a.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

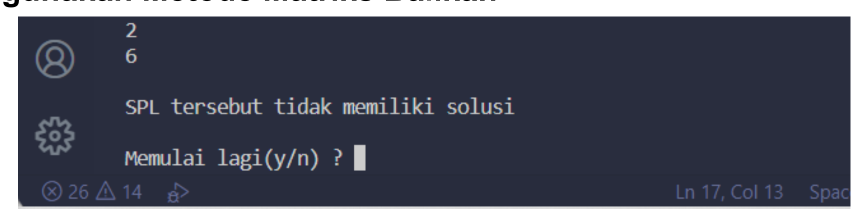
- **Menggunakan Metode Gauss**



- **Menggunakan Metode Gauss-Jordan**



- **Menggunakan Metode Matriks Balikan**



- **Menggunakan Kaidah Cramer**

```
2
6

SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ?
```

Analisis : Saat menggunakan metode gauss dan gauss-jordan, matrix dapat diproses namun ternyata SPL tersebut tidak memiliki hasl. Selain itu, persamaan ini tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan invers dan cramer karena memiliki determinan 0.

b. Temukan solusi SPL ax = b, berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- **Menggunakan Metode Gauss**

```
x1 = a + 3.00
x2 = 2.00a
x3 = 0
x4 = a - 1.00
x5 = a

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Menggunakan Metode Gauss-Jordan**

```
x1 = a + 3.00
x2 = 2.00a
x3 = 0
x4 = a - 1.00
x5 = a

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Menggunakan Metode Matriks Balikan**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Menggunakan Kaidah Cramer**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

Analisis : SPL menghasilkan persamaan parametrik pada gauss dan gauss-jordan, sedangkan invers dan cramer tidak dapat memecahkan SPL ini karena matriks tidak berbentuk persegi.

c. **Temukan solusi SPL ax = b, berikut :**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Menggunakan Metode Gauss**

```
x1 = 0
x2 = -a + 1.00
x3 = 0
x4 = -a - 2.00
x5 = a + 1.00
x6 = a

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Menggunakan Metode Gauss-Jordan**

```
x1 = 0
x2 = -a + 1.00
x3 = 0
x4 = -a - 2.00
x5 = a + 1.00
x6 = a

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Menggunakan Metode Matriks Balikan**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Menggunakan Kaidah Cramer**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

Analisis : SPL menghasilkan persamaan parametrik pada gauss dan gauss-jordan. Sedangkan invers dan cramer tidak dapat menyelesaikan SPL ini karena matriks tidak berbentuk persegi.

4.2 Menyelesaikan SPL berbentuk matriks *augmented* :

a.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- **Dengan Metode Gauss :**

```
x1 = b - 1.00
x2 = 2.00a
x3 = a
x4 = b

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Dengan Metode Gauss-Jordan :**

```
x1 = b - 1.00
x2 = 2.00a
x3 = a
x4 = b

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Dengan Metode Matriks Balikan**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Kaidah Cramer**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

b.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- **Dengan Metode Gauss :**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Metode Gauss-Jordan :**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Metode Matriks Balikan**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Kaidah Cramer**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

Analisis : Pada soal 2b metode cramer dan matriks balikan tidak bisa digunakan karena matriks bukan merupakan matriks persegi.

4.3 Menyelesaikan SPL berbentuk :

a.

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

- **Dengan Metode Gauss :**

```
x1 = -0.22
x2 = 0.18
x3 = 0.71
x4 = -0.26

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Dengan Metode Gauss-Jordan :**

```
x1 = -0.22
x2 = 0.18
x3 = 0.71
x4 = -0.26

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Dengan Metode Matriks Balikan**

```
x1 = -0.2243243244
x2 = 0.18243243250000005
x3 = 0.7094594592
x4 = -0.25810810809999996

Memulai lagi(y/n) ?
```

- **Dengan Kaidah Cramer**

```
x1 = -0.22432432432432434
x2 = 0.18243243243243243
x3 = 0.7094594594594594
x4 = -0.2581081081081081

Memulai lagi(y/n) ?
```

Analisis : Pada soal ini, semua metode dapat menyelesaikan SPL dengan meghasilkan solusi yang sama.

b.

$$
\begin{aligned}
x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\
x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\
0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\
0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\
0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\
0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04
\end{aligned}
$$

- **Dengan Menggunakan Metode Gauss**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Menggunakan Metode Gauss-Jordan**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Menggunakan Metode Matriks Balikan**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

- **Dengan Menggunakan Kaidah Cramer**

```
SPL tersebut tidak memiliki solusi

Memulai lagi(y/n) ? y
```

Analisis : Soal ini tidak bisa diselesaikan dengan matriks balikan dan kaidah cramer karena matriks ini memiliki ukuran 12 x 9 (bukan matriks persegi). Dengan menggunakan gauss dan gauss-jordan, didapat bahwa SPL tersebut tidak memiliki solusi.

4.4 Interpolasi Polinom

a. **Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi *f(x).***

x	0.4	0.7	0.11 0.14 0.17 0.2 0.23
$f(x)$	0.043	0.005	0. 058 0.072 0.1 0.13 0.147

Lakukan pengujian pada nilai nilai default berikut :

x = 0.2 f(x) = ?
x = 0.55 f(x) = ?
x = 0.85 f(x) = ?
x = 1.28 f(x) = ?

Hasil yang diperoleh :

Polinom interpolasi yang didapat :

- **x = 0.2**
  Hasil Taksiran :
- **X = 0.55**
  Hasil Taksiran :
- **X = 0.85**
  Hasil Taksiran :
- **X = 1.28**
  Hasil Taksiran :

b. **Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2022 hingga 31 Agustus 2022 :**

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6,567	12.624
30/06/2021	7	21.807
08/07/2021	7,258	38.391
14/07/2021	7,451	54.517
17/07/2021	7,548	51.952
26/07/2021	7,839	28.228
05/08/2021	8,161	35.764
15/08/2021	8,484	20.813
22/08/2021	8,709	12.408
31/08/2021	9	10.534

Tanggal (desimal) adalah tanggal yang sudah diolah ke dalam bentuk desimal 3 angka di belakang koma dengan memanfaatkan perhitungan sebagai berikut:

tanggal(desimal) = bulan + (tanggal / jumlah hari pada bulan tersebut)

Sebagai **contoh**, untuk tanggal 17/06/2022 (dibaca: 17 Juni 2022) diperoleh tanggal(desimal) sebagai berikut:

Tanggal(desimal) = 6 + (17/30) = 6,567

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **polinom interpolasi** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut: a. 16/07/2022

b. 10/08/2022
c. 05/09/2022
d. beserta masukan user lainnya berupa **tanggal (desimal) yang sudah diolah** dengan asumsi prediksi selalu dilakukan untuk tahun 2022.

c. Sederhanakan fungsi

$f(x)$ =

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak h = (2 – 0)/5 = 0.4.

BAB V KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

SPL dapat diselesaikan menggunakan berbagai macam metode, diantaranya metode eliminasi Gauss, Gauss - Jordan, matriks balikan, dan kaidah cramer. SPL ini juga ternyata dapat digunakan untuk menaksir suatu nilai menggunakan interpolasi polinom dan regresi linear berganda.

Untuk tugas besar ini, kami berhasil membuat kalkulator matriks dengan implementasi algoritma yang sudah ada ke dalam bahasa Java dan dapat menyelesaikan berbagai permasalahan menggunakan matriks.

5.2 Saran

Saran untuk kelompok kami diantaranya :

- Seharusnya pengecekan test case dilakukan lebih baik lagi, agar tidak terjadi lagi penemuan code bug mendekati deadline.
- Kode program diberi komentar yang lebih jelas lagi. Agar kode yang digunakan lebih mudah dimengerti dan semua anggota bisa melakukan debugging pada algoritma yang bermasalah.
- Seharusnya dilakukan pemecahan masalah terlebih dahulu di awal pengerjaan, agar workload masing - masing anggota lebih jelas.

5.3 Refleksi

Refleksi yang kami dapatkan dari tugas ini adalah kami bisa memperbaiki lagi kinerja kami dalam berbagai hal, contohnya pembuatan timeline kerja agar selalu ada progress dalam tugas tiap harinya. Kami juga merasa masih harus memperbaiki pembagian waktu karena pengerjaan tugas masih terlalu berdekatan dengan deadline. Hal lain yang kami dapatkan dari tugas ini adalah pengalaman dan pengetahuan membuat program dalam bahasa Java.

5.4 Repository Tugas

Source code disimpan menggunakan *platform Github.* Berikut link repository kelompok AntiTuru:

- githubAntiTuru

DAFTAR PUSTAKA

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/Pengantar-Pemrograman-dengan-Bahasa-Java-2021.pdf

https://www.w3schools.com/java/java_try_catch.asp

https://www.w3schools.com/java/default.asp

https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2021-2022/algeo21-22.ht m

https://www.petanikode.com/java-swing-joptionpane/

https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/javax/swing/JOptionPane.html

https://docs.oracle.com/javase/7/docs/api/javax/swing/JPanel.html

https://docs.oracle.com/en/java/javase/13/docs/specs/man/javac.html

https://docs.oracle.com/en/java/javase/15/docs/api/java.base/java/util/Scanner.html