Глава I

Введение

I.1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x\neg \in A$).

$\mathfrak{Def}$: Множество A - подмножество B, если все элементы A содержатся и в B.

$$A \subset B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\ x \in B$$

$\mathfrak{Def}$: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \land B \subset A$$

$\mathfrak{Def}$: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x\ x \notin \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: 2^A — множество всех подмножеств A.

$$2^A \overset{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \ldots\}$
- $\{x \in A \mid \varPhi(x)\}, \varPhi(x)$ – условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} : p$ имеет ровно 2 натуральных делителя$\}$.

Бывают некорректно заданные ”множества”. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\varPhi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \varPhi(n)\}$ - не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как ”Наименьший элемент множества...”.

$\mathfrak{Def}$: Пересечение двух множеств — множество, состоящие из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \quad B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Симметрическя разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \overset{\text{Def}}{=} (A \;\; B) \cup (B \;\; A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, i \in I\}\,; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I \; x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность

$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Теорема I.1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \;\; \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \;\; B_\alpha)\,; A \;\; \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \;\; B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \;\; \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \;\; B_\alpha)$$

$$x \in A \;\;\; \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \;\;\; B_\alpha)$$

◀

Теорема I.1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I \colon x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \alpha \in I \; \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная n-ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, a_n) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i = b_i$$

I.2. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: Декартого произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i \in A_i$$

$\mathfrak{Def}$: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a \, R \, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

$\mathfrak{Def}$: Область определения отношения

$$\beta_R = dom_R = \{a \in A : \exists b \in B \quad (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обсласть назначения отношения

$$\rho_R = ran_R = \{b \in B : \exists a \in A \quad (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обратное отношение

$$R^{-1}\colon \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b \, R^{-1} \, a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} b \, R \, a$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отношений

$$R_1\colon A \to B; R_2\colon B \to C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \, R_1 \, b \wedge b \, R_2 \, c\}$$

Про значок — его использовать не будем

Пример композиции: $<\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $< \circ <= \{(a, b) \mid b - a \geqslant 2\}$.

$\mathfrak{Def}$: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f\colon A \to B : a_1 \, f b \wedge a_2 \, f b \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$a\,f\,b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$
$$A = \beta_f$$

$\mathfrak{Def}$: Свойтва отображеий:

1. Рефлексивность $a\,R\,a$
2. Симметричность $a\,R\,a \Leftrightarrow b\,R\,a$
3. Транзитивность $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$
4. Иррефлексивность $\neg a\,R\,a$
5. Антисимметричность $a\,R\,b \wedge b\,a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- $\underset{5}{\equiv}$: 1, 2, 3
- $\leqslant$: 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- $\subset$: 1, 3, 5

I.3. Вещественные числа

$\mathfrak{Def}$: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и $\times$, причём:

1. Коммутативность $\forall a, b\ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c\ a+(b+c) = (a+b)+c; a\times(b\times c) = (a\times b)\times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o\colon \forall a\ a + o = a; \exists e\colon \forall a\ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a\ \exists {-a}\colon a + -a = o; \forall a \neq o\ \exists a^{-1} : a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c\ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения $\leqslant$ (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c\ a \leqslant b => a + c \leqslant b + c$
6. $\forall a, b\ a > 0 \wedge b \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$

Аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}; A \cup B \neq \emptyset$,

$$\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A\ a \leqslant c \wedge \forall b \in B\ c \leqslant b$$

REM: На $\mathbb{Q}$ аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}\,; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}\,; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема I.3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$$

▶

$$A \leftrightharpoons \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}\,; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \leftrightharpoons \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A\ a \leqslant c \wedge \forall b \in B\ c \leqslant b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$.

$$c - y \notin B \Rightarrow c - y \in A \Rightarrow c - y \geqslant c \in A$$

Но тогда

$$c - y < c \Rightarrow c - y \in B \Rightarrow c - y \geqslant c \Rightarrow y <= 0$$

Таким образом

$$A = \mathbb{R}$$

◀

Следствие I.3.1. $\forall 123\varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < \varepsilon$

▶ Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$ ◀

Следствие I.3.1. $x, y \in \mathbb{R}, x < y. \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

▶

$$y - x > 0 => \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z} \colon m \leqslant nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \stackrel{\text{Def}}{=} \lfloor m \rfloor$.

$$M \leftrightharpoons \{m \mid m <= nx\}$$

$$x \geqslant 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N} \colon \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмторим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N} \colon k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \colon m < k \Rightarrow \exists m = \max M \colon m \leqslant nx < m + 1$$

$$m \leqslant nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leqslant x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m+1}{n} < y$$

◀

Следствие I.3.1. $x, y \in \mathbb{R}; x < y$. $\exists z \in \mathbb{R} \ \ \mathbb{Q} : x < z < y$.

▶

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

.

$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2} : z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < z < y$$

◀

I.4. Верхняя и нижняя граница

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$ $x \in R$ — верхняя граница $A \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A : a <= x$. $x \in R$ — нижняя граница $A \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A : a >= x$. A ограничено сверху $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $\exists x \in R : x - - -$ верхняя границаA. A ограничено снизу $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \exists x \in R :$ $x - - -$ нижняя границаA. A ограничено, если A ограничено сверху и снизу. REM. Границ, если они есть, много. Def. $A \subset \mathbb{R}, A$ ограничено сверху. x - супремум A, если x — наименьшая из верхних границ. Def. $A \subset \mathbb{R}, A$ ограничено снизу. x - инфиму A, если x — наибольшая из нижних границ.

Пример. $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$. $\sup A = 1, \inf A = 0$

Утверждение. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху. Док-во: x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$.

Теорема. $A \neq \emptyset$. 1. A ограничено сверху $\Rightarrow \exists x = \sup A$. 2. A ограничено снизу $\Rightarrow \exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

Док-во. 1. Y — множество всех верхних границ A. Тогда $\forall a \in A \forall B \in Ba <= b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a <= c \wedge \forall b \in Bc <= b \Rightarrow \exists \sup A = c$. 2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда $\inf A = -\sup B$.

REM. Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$.

Упражнение. Понять, что это так.

Теорема. 1. А - огр. сверху. Тогда $b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in Aa <= b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$. 1. А - огр. снизу. Тогда $c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in Aa >= c \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < c + \varepsilon)$. Док-во. $b = supA \Leftrightarrow (b - - -$ верхняя граница$A \wedge \forall \varepsilon > 0 b - \varepsilon - - -$ не верхняя граница$) \Leftrightarrow (\forall a \in Aa <= b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - eps)$.

Теорема о вложенных отрезках. Вместе с Архимедом выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{i=1}^{n} : \forall i \in \mathbb{N}\,(a_i <= a_{i+1} \wedge b_i >= b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

Док-во: $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} c \in [a_i, b_i] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

REM. 1. Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

2. Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, +\inf) = \emptyset$$

3. $\mathbb{R}$. Рассмотрим приблежения $\sqrt{2}$.

Глава II

Последовательности в метрических пространствах

II.1. Метрические пространства

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть множество X и 2отображение $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ Также пара (X, ρ) называется метричесикм пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$
2. $\rho(x, y) = |x - y|$
3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. Расстояния на сфере

6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O. Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$.

7. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрика

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i\right)^2}$$

.

Неравенство Коши-Буняковского:

$$a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

▶

$$f(t) \leftrightharpoons \sum_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 = \left(\underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}_{\leftrightharpoons A}\right) t^2 - 2\left(\underbrace{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}_{\leftrightharpoons C}\right) t +$$

$$+ \left(\underbrace{b_1^2 + \dots + b_2^2}_{\leftrightharpoons B}\right)$$

f имеет не более 1 корня $\Rightarrow (2C)^2 - 4AB \leqslant 4\left(C^2 - 4AB\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow C^2 \leqslant 0$

Можно считать, что все числа не равны 0 — сслишком просто.

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны. ◀

Неравенство Минковского:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}$$

▶ Возведём в квадрат

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{AB} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Неравенство Коши-Буняковского

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны. ◀

$\mathfrak{Def}$: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$ — открытый шар.
$\mathfrak{Def}$: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leqslant r\}$ — замкнутый шар.
Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap\colon B_r(y) = \emptyset$

   ▶ Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$. ◀

$\mathfrak{Def}$: Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y, \rho|_{Y\times Y})$ — подпространство X. $Y \subset X$.

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если $\forall x \in G\ \exists r > 0\colon B_r x \subset G$.

Теорема II.1.1. О свойтсвах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.

▶

1. Очевидно.
2. $$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0\colon x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3.

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k \forall k = 1..n\, x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n\, \exists r_k > 0\colon B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists r = \min r_k\colon G_r \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$$

4.

$$\forall x \in B_r(x)\, \exists r_x = \frac{1}{2}\,(r - \rho(a,x))$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y,x) < r_x \Rightarrow \rho(y,x)+\rho(a,x) < r_x+\rho(a,x) \Rightarrow \rho(y,a) < r$$

◀

REM:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0;1] \text{ — не открытое множество}$$

$\mathfrak{Def}$: $x \in A$ — внутренняя точка A, если $\exists r > 0\colon B_r(x) \in A$

REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее A.

$\mathfrak{Def}$: Внутренность множества A:

$$A^0 = \operatorname{int} A \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\operatorname{int} A \subset A$
2. $\operatorname{int} A$ — множество всех внутренних точек.
3. $\operatorname{int} A$ открыто.
4. A открыто $\Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$
6. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

7. $\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

$\mathfrak{Def}$: Закрытое множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема II.1.2. О свойствах закмнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — закмнуты.
2. Перечечение замкнутых — замкнуто.
3. Объеднинение конечного числа замкнутых замкнуто.
4. Замкнутый шар замкнут.

▶

1. Очевидно
2. По формулам де Моргана
$$X \quad \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \quad F_\alpha)$$
3. По формуле де Моргана
4. Докажем, что $X \quad \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \quad \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению
$$\rho(a, x) > r$$
Покажем, что
$$B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$
Пусть $\exists y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда
$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leqslant r$$
$$y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$
$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x)$ — противоречие

◀

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n};1\right]=(0;1]$$

$\mathfrak{Def}$: $A\subset X$, (X,ρ). Тогда замыкание множества A — перечесение всех замкнутых множеств, содержащих А.

$$\operatorname{cl} A=\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}} F$$

Теорема II.1.3. О связи замыкания и внутренности.

$$X \quad \operatorname{cl} A=\operatorname{int}(X \quad A)$$

$$X \quad \operatorname{int} A=\operatorname{cl}(X \quad A)$$

▶

$$X \quad \operatorname{cl} A = X \quad \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}} = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}} (X \quad F)$$

$$X \quad F \text{ открыто}$$

$$X \quad F\subset X \quad A$$

Т.о

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}} (X \quad F)=\bigcup_{\substack{G \text{ открыто}\\ G\subset X \ A}} G=\operatorname{int}(X \quad A)$$

Аналогично ◀

Следствие II.1.3.

$$\operatorname{int} A=\operatorname{cl}(X \quad A)$$

$$\operatorname{cl} A=\operatorname{int}(X \quad A)$$

Свойства замыкания:

1. $A\subset \operatorname{cl} A$
2. clA замкнуто.

3. A замкнуто $\Leftrightarrow A = \operatorname{cl} A$

4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$

5. $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$

6. $\operatorname{cl}\operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$

Теорема II.1.4. Замнкутость и открытость в подпространстве. $(X;\rho)$ — пространство, $(Y;\rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в $X\colon A = G \cap Y$

2. A замкнутыо в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — закрытое в $X\colon A = F \cap Y$

▶

1. $\Rightarrow$:

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A$$

$$G \leftrightharpoons \bigcup_{x \in A} B^X_{r_x}(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} \left(B^X_{r_x}(x) \cap Y\right) = \cup_{x \in A} B^Y_{r_x}(x) = A$$

$\Leftarrow$:

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G$$

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к доплнениям

◀

Теорема II.1.5. О замыканиях. (X,ρ), $A \subset X$

$$x \in \operatorname{cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $\exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \quad A$$

$$X \quad B_r(x) \text{ замнкуто}$$

$$X \quad B_r(x) \supset A$$
$$x \notin X \quad B_r(x)$$

Тогда

$$\operatorname{cl} A \subset X \quad B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \operatorname{cl} A$$

$\Leftarrow$: Пусть $x \notin \operatorname{cl} A \Rightarrow \exists F \supset A : x \notin F \ \& \ F$ открыто Тогда

$$x \in X \subset F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0 \colon B_r(x) \subset X \quad F \Rightarrow B_r(x)...$$

$\blacktriangleleft$

Следствие II.1.5. U открытое $\ \& \ U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$

$\blacktriangleright$ Пусть $x \in U \cap \operatorname{cl} A$.

$$x \in \operatorname{cl} A \Rightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0 \colon B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ $\blacktriangleleft$

$\mathfrak{Def}$: Проколотая окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \quad \{x\}$$

$\mathfrak{Def}$: Точка $x \in X$ предельная у множества A, если

$$\forall r > 0 \ \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

A' — множество предельных точек.

Свойства:

1. $\operatorname{cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   $\blacktriangleright$ $\supset$:

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$
$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

$\subset$: Пусть $x \in (A \cup B)'$ & $x \notin B'$.

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leqslant r_0 \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

Тогда

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

◀

Теорема II.1.6. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \, |B_r(x) \cap A| = \infty$$

▶

$$x \in A' \Rightarrow \exists \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A\colon y_1 \neq x \ \& \ y \in B_r(x)$$

Тогда

$$\exists \dot{B}_{\rho(x,y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A\colon y_2 \neq x \ \& \ y_2 \neq y_1 \ \& \ y \in B_{\rho(x,y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\colon y_i \neq y_j \ \& \ y_i \neq x \ \& \ y_i \in A$$

◀

Следствие II.1.6. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

Теорема II.1.7. О точной границе замкнутого множества.

$$A \text{ ограниченно сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограниченно снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

▶ $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A x \leqslant a \ \& \ \forall \epsilon > 0 \, \exists x \in A\colon x > a - \epsilon$$

Пусть $a \notin A \Rightarrow$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r)$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$

◀

II.2. Предел последовательности

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i). Тогда

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \;\&\; \forall \epsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_i) < \epsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n\to\infty} x = x$
- $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x;y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема II.2.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с нек
2. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \;\&\; x^{**} = \lim_{n\to\infty} \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограниченна
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

▶

1. $\Rightarrow$: Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0\colon B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < \epsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U$$

$\Leftarrow$: $U \leftrightharpoons B_\epsilon(x^*)$.

$$\forall \epsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Пусть $\epsilon \leftrightharpoons \frac{\rho(x^*;x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_1 \colon \forall n \geqslant N_1 \ \rho(x^*; x_n) < \epsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_2 \colon \forall n \geqslant N_2 \ \rho(x^{**}; x_n) < \epsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1; N_2\} \begin{cases} \rho(x^*; x_n) < \epsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \epsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\epsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leqslant \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\epsilon$$

3. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N \colon \forall n \geqslant N \ \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n<N} \{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n \ x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2};\rho(x;x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3};\rho(x;x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$\vdots$$

$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n};\rho(x;x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geqslant N \ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

◀

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n.
REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$
REM:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \ \& \ x_n \in A \Rightarrow x \in \operatorname{cl} A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x-y|)$.

Теорема II.2.2. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leqslant y_n$ (или $y_n < x_n$). Тогда $x \leqslant y$.

▶ Пусть $y < x$; $\epsilon \leftrightharpoons \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\, |x - x_n| < \epsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\, |y - y_n| < \epsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\, x_n > x - \epsilon = y + \epsilon > y_n$$

◀

REM: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

REM: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие II.2.2. $x_n \leqslant b \Rightarrow x \leqslant b$

Следствие II.2.2. $x_n \geqslant a \Rightarrow x \geqslant a$

Следствие II.2.2. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

Теорема II.2.3. О двух миллиционерах. Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

▶ Выберем $\epsilon > 0$.

$$\exists N_1 \colon \forall n \geqslant N_1 x_n > l - \epsilon$$

$$\exists N_2 \colon \forall n \geqslant N_2 z_n < l + \epsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\} \colon \forall n \geqslant N\; l - \epsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \epsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$ ◀

Следствие II.2.3. $\lim z_n = 0\ \&\ |y_1| \leqslant z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие II.2.3. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограниченна, то $\lim x_n y_n = 0$.

$\mathfrak{Def}$: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$.
(x_n) строго монотонно возрастает, если $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$.
(x_n) нестрого монотонно возрастает, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots$.
(x_n) строго монотонно возрастает, если $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$.

Теорема II.2.4. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограниченна тогда и только тогда, когда имеет предел.

▶ $\Rightarrow$: Очевидно.
$\Leftarrow$: Пусть (x_n) возрастает. Она ограниченна, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\epsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k \colon x_k > x - \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant a$$

Тогда
$$\forall n \geqslant k \ |x_n - a| < \epsilon$$

◀

II.3. Конечное векторное пространство

$\mathfrak{Def}$: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

1. Сложение

   (a) Коммутативно

   (b) Ассоциативно

   (c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{d}$

   (d) Существует обратный элемент

2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

3. $(\alpha + \beta)x\alpha x + \beta x$

4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

5. $1x = x$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение векторного пространства — всё то же самое, но без конкретики.

$\mathfrak{Def}$: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение скалярного произведения: X — веторное пространство. Задана операция $\langle x, y\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ обладающая указынными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

$\mathfrak{Def}$: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

1. $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = |x|\|x\|$
3. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковкского)
4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)
5. $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)
6. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$

   ▶ $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что $\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geqslant$ ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространтво на $\mathbb{R}^d$.

$\mathfrak{Def}$: Общее определение нормы: $\|x\|\colon X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скаляроного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|$
2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1..d} |x_k|$

   ▶

   $$\|x+y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \quad \max_{k=1..d}(|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

   ◀

3. $$\|x\|_\infty = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p}$$

II.4. Арифметические свойства предела

Пусть есть $(\mathbb{R}^d, \rho)$ со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

▶

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$

◀

REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограниченно $\Leftrightarrow \exists M\colon \forall x \in A \|x\| \leqslant M$

Теорема II.4.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d; \lambda \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0; \lim \lambda = \lambda_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$

5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$

▶

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \colon \forall n > N_1\ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 \colon \forall n > N_2\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_3 \colon \forall n > N_3\ |\lambda - \lambda_0\| < \varepsilon$$

1.
$$\forall \varepsilon > 0\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.
$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = |\lambda_n|\|x_n -$$

Но тогда
$$\forall n > \max N_1, N_3\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}\right); y_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(d)}\right)$ Это докажем позже

5.
$$0 \leqslant |\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$$

◀

Теорема II.4.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

▶ Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \eqqcolon A$$

$$\exists N_1\colon \forall n > N_1\ |y_n - y_0| < \frac{|y0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - y_0/2 = |y_0|/2$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

◀

$\mathfrak{Def}$: x_n – последовательность в $\mathbb{R}^d$. Тогда x_n сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}\colon\ \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема II.4.3. О сходимости покоординатно. x_n сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.

▶ ВОССТАНОВИТЬ ◀

Следствие II.4.3. $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$

▶

$$\left.\begin{aligned} x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \to y_n^{(i)} \\ y_n \to y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \to y_0^{(i)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{d} x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to \sum_{i=1}^{d} x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$$

◀

II.5. Бесконечно малые и большие

$\mathfrak{Def}$:

$$\lim x_n = +\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\; \exists N\colon \forall n > N\; x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\; \exists N\colon \forall n > N\; x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\; \exists N\colon \forall n > N\; |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow lim x_n = \infty$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единтсвенность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух миллиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\overline{\mathbb{R}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}}$

1. $\pm c \pm \infty = \pm\infty$
2. $\pm c \pm \infty = \pm\infty$
3. $c > 0\colon\ \pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0\colon\ \pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$
6. $c < 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$
7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$
8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$

13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечнен.

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

Теорема II.5.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

▶

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \, \exists N\colon \forall n > N \; |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N\colon \forall n > N \; |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

◀

Теорема II.5.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть x_n, y_n — бесконечно малые, z_n ограниченна. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая
2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

Теорема II.5.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

1. $x_n \to +\infty \wedge y_n$ ограниченна снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
2. $x_n \to -\infty \wedge y_n$ ограниченна сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$
3. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
4. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$
5. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \leqslant a < 0 \Rightarrow x_n y_n \to -\infty$
6. $x_n \to \infty \wedge || \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$
7. $x_n \to a \neq 0 \wedge y_n \to 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

8. x_n ограниченна $\wedge\, y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$
9. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\wedge\, y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \geqslant a$$

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \leqslant a$$

II.6. Компактность

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет покрытие множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подкокрытие.

$$\forall B_\alpha\colon K \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\colon \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

Теорема II.6.1. компактность и подпространства. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X,\rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y,\rho)$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть B_α — открытое в Y, что

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием в X, а потом сжать его обратно в Y.

$\Leftarrow$: Пусть $K = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Тогда какжый шарик можно сжать в Y. Получим покрытие, в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X. ◀

Например, $(0,1)$ не компактно. Например, из $\bigcup_{i=2}^{\infty}\left(\frac{1}{i},1\right)$ не выбрать.

Теорема II.6.2. . Если K компактно, то K замкнуто и ограниченно.

▶ Возьмём произвольный $a \in X$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(x) \Leftarrow K \subset B_{r_k}(x) \Leftrightarrow K \text{ ограниченно}$$

Возьмём произвольный $a \notin X$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(x,a)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \leftrightharpoons \min_{i=1}^{k}\left\{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)\right\})$

$$\forall i = 1..k \; B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема II.6.3. . Замкнутое подмножество компактного компактно.

▶ Добавим к покрытию подмножества $X \quad K_1$. ◀

Теорема II.6.4. . Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

▶ K_0—любое их них. Пусть пересечение всех пусто. Тогда объединение всех дополнений остальных покроет наше. Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда в дополнении до K_0 содержится объединиение всех. Но тогда пересечение этого множества и всех остальных пусто, что противоречит условию. ◀

Следствие II.6.4. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто.

$\mathfrak{Def}$: Параллелепипедом на $\mathbb{R}^d$ и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (закрытый)}$$

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (открытый)}$$

Теорема II.6.5. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ имеют непустое пересечение.

▶ Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

Теорема II.6.6. Теорема Гейне-Бориса. Замкнутый куб компактен

▶

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d 0 \leqslant x_i \leqslant a\right\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобъём куб по кажому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покроет ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрыл куб. ◀

$\mathfrak{Def}$: Подпоследовательность:

$$\left\{x_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема II.6.7. . Подпоследовательность имеет тот же предел Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел

Теорема II.6.8. . Следующее в $\mathbb{R}^d$ равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограниченно
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность к некоторой точке множества

▶ $2 \Rightarrow 1$: К ограниченно, значит можно его впихнуть в куб, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$:

Возьмём последовательность x_n элементов множества F. Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит $\forall x \in X\ \exists r_x > 0\colon \dot{B}_{r_x}(r) \neq \emptyset$. Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^{k} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}$$

И E конечное. Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K. Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K.

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1\colon \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(2,x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2\colon \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a)$$

$$\vdots$$

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R. Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_n) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho(b, x_n) > \rho(a, x_n) - \rho(a, b) > n_k - \rho(a, b) \to \infty$$

Значит K ограниченно. ◀

REM: $1 \Rightarrow 3; 3 \Rightarrow 2; 1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой

Следствие II.6.8. В $\mathbb{R}^d$ компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

▶ В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие II.6.8. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

▶ Оно ограниченно, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие II.6.8. В любой последовательности в $\mathbb{R}^d$ есть сходящаяся в $\bar{R}$ подпоследовательность.

▶ Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Ну а тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

$\mathfrak{Def}$: Диаметр множеста: $\operatorname{diam} A = \sup \rho(x, y)$

Теорема II.6.9. .

1. $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$

2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \ldots; \operatorname{diam} K_n \to 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечное

▶

$$E \subset \operatorname{cl} E \Rightarrow \operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

$$d = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \colon ; \exists x_0, y_0 \colon \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists x_1 \in E \colon \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists y_1 \in E \colon \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) < 3\varepsilon$$

Устремив $epsilon \to 0$, получим

$$\operatorname{diam} E \geqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

Но тогда во стором пункте получим, что в пересечении не может быть и двух точек. ◀

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \colon \forall n, m > N \; \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM:

$$E \leftrightharpoons \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \operatorname{diam} E \to 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.

   ▶

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists K\colon \forall k > K\ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n, m > K\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

   Т.о.

   $\exists n_k > M = \max\{N, K\}\colon \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$

   ◀

Теорема II.6.10. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. В $\mathbb{R}^d$ фундаментальная последовательность всегда сходится.

▶ $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N > n\colon \begin{array}{c} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{array}$$

x_n — фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^d$. $E_n \leftrightharpoons \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ — ограниченно. $\operatorname{cl} E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\operatorname{cl} E_1 \supset \operatorname{cl} E_2 \supset \operatorname{cl} E_3 \supset \cdots$$

$$\operatorname{diam} \operatorname{cl} E_n = \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о.

$$\exists!\, a\colon a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{cl} E_n$$

$$a \in \operatorname{cl} E_n \Rightarrow \forall i > n\, 0 \leqslant \rho(a, x_i) \leqslant \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о $x_n \to a$. ◀

$\mathfrak{Def}$: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

REM: $\mathbb{R}^d$ полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема II.6.11. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

▶ В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

II.7. Верхний и нижний предел

$\mathfrak{Def}$: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \varliminf x_n = \lim_{x \to \infty} \inf_{k>n} x_k$$

$$\limsup x_n = \varlimsup x_n = \lim_{x \to \infty} \sup_{k>n} x_k$$

REM: $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

$\mathfrak{Def}$: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема II.7.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\overline{\mathbb{R}}$, при этом

$$\varliminf x_n \leqslant \varlimsup x_n$$

▶ $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$. Если x_n ограниченно, то и y_n ограниченно. Если x_n не ограниченно снизу, то и y_n не ограниченно снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim}\, x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема II.7.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. $\limsup$ — наибольший частичный предел.
2. $\liminf$ — наименьший частичный предел.
3. $\lim$ существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$

▶

1. $a = \liminf x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geqslant a$$

   Выберем

$$x_{k_m} \colon x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

   Оно стремится к a.

   Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b, уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два милличионера

◀

Теорема II.7.3. .

1.
$$a = \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.
$$a = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

▶

1. Запишем в терминах y_n:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

   Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

◀

Теорема II.7.4. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leqslant b_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \end{cases}$$

▶ Просто сводим к пределам инфимумов. ◀

Теорема II.7.5. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1\ \forall n \in \mathbb{N}\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

▶ Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geqslant 1 + nk$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>0}(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x$$

◀

Следствие II.7.5. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

Теорема II.7.6. . $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$.

▶ С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀

Следствие II.7.6.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

▶

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1a}{<}1$$

◀

Следствие II.7.6.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Определим число e:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \nearrow ; y_n \searrow$.

▶

$$x_n < x_{n+1} \Leftarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^(n+1)} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^2 n} \Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n-1}\right)^n \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < 1 - \frac{1}{n+2} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2+2n-1}\right)^n$$

◀