Лекции по алгебре
Лектор: Всемирнов Максим Александрович

Авторы конспекта: Егор Суворов, Дмитрий Лапшин, Ольга Черникова, Надежда Бугакова, Всеволод Степенов, Глеб Валин, Елизавета Третьякова

Содержание

1. Отображения. Композиция отображений.

$\mathfrak{Def}$: A, B — множества. $\mathit{\Gamma}_f \subset A \times B$. $\mathit{\Gamma}_f$ — график отображения, если выполнены два условия:

1. $\forall a \in A, \exists b \in B \colon (a, b) \in \mathit{\Gamma}_f$
2. $\forall a \in A, \exists b_1, b_2 \in B \colon (a, b_1) \in \mathit{\Gamma}_f \wedge (a, b_2) \in \mathit{\Gamma}_f \Rightarrow b_1 = b_2$

$\mathfrak{Def}$: Есть A, B и $\mathit{\Gamma}_f \subset A \times B$. Говорим, что задано отображение f из A в B с графиком $\mathit{\Gamma}_f$, обозначение:

$$f : A \to B$$
$$A \xrightarrow{f} B$$
$$(a, b) \in \mathit{\Gamma}_f \Leftrightarrow b = f(a)$$

Также называем:
A — областью определения ($A = \mathrm{Dom}(f)$),
B — областью назначения ($B = \mathrm{coDom}(f)$).
$\mathfrak{Def}$: Равенство отображений $f : A \to B$ и $f_1 : A_1 \to B_1$:

$$f = f_1 \Leftrightarrow A = A_1, B = B_1, \mathit{\Gamma}_f = \mathit{\Gamma}_{f_1}$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отображений $g \circ f$, где $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

$$g \circ f : A \to C$$
$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$
$$(a, c) \in \mathit{\Gamma}_{g \circ f} \Leftrightarrow \exists b \in B \colon (a, b) \in \mathit{\Gamma}_f \wedge (b, c) \in \mathit{\Gamma}_g$$

Область определения $g \circ f$ — область определения f ($\mathrm{Dom}(f)$)
Область назначения $g \circ f$ — область назначения g ($\mathrm{coDom}(f)$)

Теорема 1.1. Композиция отображений ассоциативна. Если $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, то:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

▶ Проверим область определения:

$$\mathrm{Dom}(h \circ (g \circ f)) = \mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = A$$
$$\mathrm{Dom}((h \circ g) \circ f) = \mathrm{Dom}(f) = A$$

Проверим область назначения:

$$\mathrm{Dom}(h \circ (g \circ f)) = \mathrm{coDom}(h) = D$$
$$\mathrm{Dom}((h \circ g) \circ f) = \mathrm{coDom}((h \circ g)) = \mathrm{coDom}(h) = D$$

Проверим, что образ одинаков для любого $a \in A$:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h(g \circ f(a)) = h(g(f(a)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

◀

2. Обратимые отображения и их свойства

$\mathfrak{Def}$: Пусть $f : A \to B$. Тогда f обратимо справа, если $\exists g : B \to A$:

$$f \circ g = id_B$$

.

f обратимо слева, если $\exists g : B \to A$:

$$g \circ f = id_A$$

.

f обратимо, если $\exists g : B \to A$:

$$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$$

.

Здесь g — отображение, обратное к f, обозначается $g = f^{-1}$.

Теорема 2.1.

1. f обратимо $\iff$ f обратимо слева и справа.
2. f обратимо $\Rightarrow$ обратное отображение единственно.

▶

1. Покажем, что если у f есть и левый и правый обратный, то они совпадают. Пусть g — правый обратный к f, h — левый, тогда:

$$(h \circ f) \circ g = id_A \circ g = g;$$
$$h \circ (f \circ g) = h \circ id_B = h;$$
$$\Rightarrow g = h$$

2. Пусть f обратимо и g, h — два обратных. В частности, g — обратное справа, h — обратное слева, то есть по п.1 они совпадают.

◀

Теорема 2.2. Если $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, то:

1. Если f, g обратимы справа, то и $g \circ f$ обратимо справа.
2. Если f, g обратимы слева, то и $g \circ f$ обратимо слева.
3. Если f, g обратимы, то $g \circ f$ обратимо и $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

▶

1. Из условия знаем, что существуют:

$$u : B \to A, f \circ u = id_B;$$
$$v : C \to B, g \circ v = id_C;$$

Покажем, что $u \circ v$ — правый обратный к $g \circ f$:

$$(g \circ f) \circ (u \circ v) = g \circ (f \circ (u \circ v)) =$$
$$= g \circ ((f \circ u) \circ v) = g \circ (id_B \circ v) = g \circ v = id_C;$$

2. Аналогично.

3.

$$(g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ (id_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = id_C;$$
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1}(g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A;$$

◀

Следствие 2.2.1. Композиция сюръективных — сюръекция.
Композиция инъективных — инъекцию.
Композиция биективных — биекция.
Теорема 2.3. Если $f : A \to B$ и f обратима, тогда f^{-1} обратима и $(f^{-1})^{-1} = f$
▶

$$f \circ f^{-1} = id_B;$$
$$f^{-1} \circ f = id_A \Rightarrow f \text{ — обратное к } f^{-1}$$

В силу единственности обратного $(f^{-1})^{-1} = f$. ◀

3. Тождественное отображение

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть A. Тогда тождественное отображение $id_A : A \to A$ задаётся как:

$$\forall a \in A \colon id_A(a) = a$$

Γ_{id_A} есть диагональ $A \times A$, то есть $\Gamma_{id_a} = \{(a, a) \mid a \in A\}$
Теорема 3.1. $f : A \to B$, тогда:

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

▶
Области определения и назначения совпадают.
Пусть $a \in A$. Проверим первое равенство:

$$(f \circ id_A)(a) = f(id_A(a)) = f(a)$$

и второе:

$$(id_B \circ f)(a) = id_B(f(a)) = f(a)$$

◀

4. Равносильность инъективности и обратимости слева

$\mathfrak{Def}$: $f : A \to B$. Тогда f — инъективное отображение (инъекция), если:

1. $\forall a_1, a_2 \in A, \exists b \colon (a_1, b) \in \Gamma_f \land (a_2, b) \in \Gamma_f \Rightarrow a_1 = a_2$

2. $\forall a_1, a_2 \in A \colon f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Обозначается $f : A \rightarrowtail B$.

$\mathfrak{Def}$: Отображение $f : A \to B$ назывется сюръективным (сюрекцией, или «отображение *на* B»), если:

$$\forall b \in B, \exists a \in A \colon b = f(a)$$

Обозначние: $f : A \twoheadrightarrow B$

$\mathfrak{Def}$: f называется биективным (или биекцией), если f и сюръективно, и инъективно.

Обозначение: $f : A \quad B$.

$\mathfrak{Def}$: Образ $C \subset A$: $f(C) = \{b \in B \mid \exists c \in C b = f(c)\}$.

Полный прообраз $D \subset B$: $f^{-1}(D) = \{a \in A \mid f(a) \in D\}$.

$f(f^{-1}(D)) \subseteq D$, но может не совпадать.

f инъективно $\iff$ прообраз любого одноэлементного множества содержит не более одного элемента.

$f : A \to B$ сюръективно $\iff$ $f(A) = B$.

Теорема 4.1. $f : A \to B$, $g : B \to A$. Если $g \circ f = id_A$, то f — инъективно, g — сюръективно.

▶

1. Пусть $a_1, a_2 \in A$: $f(a_1) = f(a_2)$. Тогда:

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2));$$
$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2);$$
$$id_A(a_1) = id_A(a_2);$$
$$a_1 = a_2;$$
$$\Rightarrow f \text{ — инъекция}$$

2. Пусть $a \in A$ и $b = f(a)$, тогда:

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a) = id_A(a) = a;$$
$$a = g(b);$$
$$\Rightarrow \forall a \in A, \exists b \in B \colon a = g(b) \Rightarrow g \text{ — сюръекция}$$

◀

Теорема 4.2. Пусть $f : A \to B$ и $A \neq \emptyset$. Тогда f обратима слева $\iff$ f инъективна.

▶

1. $\Rightarrow$

   $\exists g \colon g \circ f = id_A \Rightarrow f$ инъективно.

2. $\Leftarrow$

   Пусть $C = f(A)$. Построим $h_1 : C \to A$ такое, что

$$(c, a) \in \mathit{\Gamma}_{h_1} \Leftrightarrow (a, c) \in \mathit{\Gamma}_f$$

   . Проверим, что это график:

   (a) Определённость для $c \in C$:

$$\forall c \in C, \exists a \in A \colon (a, c) \in \mathit{\Gamma}_f;$$
$$\forall c \in C, \exists a \in A \colon (c, a) \in \mathit{\Gamma}_{h_1};$$

(b) Однозначность. Знаем, что f инъективно.

$$\forall a_1, a_2 \in A, \exists b \in B\colon (a_1, b) \in \mathit{\Gamma}_f \wedge (a_2, b) \in \mathit{\Gamma}_f \Rightarrow a_1 = a_2;$$
$$\forall a_1, a_2 \in A, \exists b \in C\colon (a_1, b) \in \mathit{\Gamma}_f \wedge (a_2, b) \in \mathit{\Gamma}_f \Rightarrow a_1 = a_2;$$
$$\forall a_1, a_2 \in A, \exists b \in C\colon (b, a_1) \in \mathit{\Gamma}_{h_1} \wedge (b, a_2) \in \mathit{\Gamma}_{h_1} \Rightarrow a_1 = a_2;$$

$\Rightarrow \mathit{\Gamma}_{h_1}$ — график.

Теперь построим $h : B \to A$. Для этого выберем произвольный $a \in A$ и положим:

$h(b) = \begin{cases} h_1(b), & \text{если } b \in C \\ a, & \text{если } b \notin C \end{cases}$

Проверим, что $h \circ f = id_A$. Рассмотрим $x \in A$:

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h_1(f(x)) = x$$

◀

5. Равносильность сюръективности и обратимости справа

$\mathfrak{Def}$: **Аксиома выбора** Пусть есть множество B и семейство X_b: $\forall b \in B\colon X_b \neq \emptyset$. Тогда

$$\exists \mathit{\Phi} : B \to \bigcup_{b \in B} X_b$$

такое, что

$$\forall b \in B\colon \mathit{\Phi}(b) \in X_b$$

Теорема 5.1.
$f : A \to B$ — обратимо справа $\Leftrightarrow f$ — сюръективно.
▶

1. $\Rightarrow$

   Очевидно, так как $f(g(B)) = B$.

2. $\Leftarrow$

   Введём семейство X_b для $b \in B$: $X_b = f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$.

   По аксиоме выбора существует $g : B \to \bigcup_{b \in B} X_b$ (обозначим область назначения g за C). $f(g(b)) = b$, так как $g(b) \in f^{-1}(\{b\})$.

   Покажем, что $C = A$. Так как $X_b = f^{-1}(\{b\}) \subset A$, то $C \subset A$. Обратное включение: возьмём $a \in A$. Знаем, что $a \in X_{f(a)} \Rightarrow a \in C \Rightarrow A \subset C \Rightarrow A = C$. Таким образом $g : B \to A$.

   По построению знаем, что:

$$\forall b \in B\colon f(g(b)) = b;$$
$$\forall b \in B\colon (f \circ g)(b) = b;$$
$$f \circ g = id_B;$$
$$\Rightarrow f \text{ обратима справа}$$

◀

Следствие 5.1.1.
f — обратимо $\iff$ f — биективно.

6. Инъективное отображение конечного множества на себя является биективным

Теорема 6.1. Пусть A — конечное множество и $f : A \rightarrowtail A$ (инъекция), тогда f — биекция.
▶ От противного. Возьмём произвольный $a \in A$ не из образа f и положим:

$$a_0 = a; a_{i+1} = f(a_i);$$

Так как A конечно, то $\exists m > n\colon a_m = a_n$.
Лемма 6.1. $a_{m-n} = a$
▶ Индукция по n.

- **База:** $n = 0$ и $a_m = a_0$, т.е. $a_{m-n} = a_0 = a$.
- **Переход** $n - 1 \to n$, при $n \geq 1$:

$$f(a_{m-1}) = a_m = a_n = f(a_{n-1})$$

Так как f — инъекция, то $a_{m-1} = a_{n-1}$. Воспользуемся индукционным предположением:

$$a_{m-n} = a_{(m-1)-(n-1)} = a$$

◀

Знаем, что $m - n \geq 1 \Rightarrow a = a_{m-n} = f(a_{m-n-1}) \Rightarrow a \in f(A)$. Противоречие. ◀

7. Сюръективное отображение конечного множества на себя является биективным

Теорема 7.1. A — конечное множество. $f : A \twoheadrightarrow A$, тогда f — биекция.
▶ **Краткий план решения:**

1. $\forall a, \exists n_a\colon \{\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \text{ применений}}\}(a) = a$
2. $\exists n, \forall a\colon (\underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ применений}})(a) = a$
3. f — инъекция.

1. Строим последовательность $\{a_i\}$:

$$a_0 = a;$$
$$a_{i+1} \in f^{-1}(a_i); \text{существует, так как у нас сюръекция;}$$

Множество конечно, а значит $\exists m > n\colon a_m = a_n$.

Лемма 7.1. Если $a_m = a_n$ и $m > n$, то $a_{m-n} = a$.

▶ Индукция по n.

(a) **База:** $n = 0$. Тогда $a_m = a_0 = a$.

(b) **Переход:** $(n \geq 1)$:

$$a_m = a_n;$$
$$f(a_m) = f(a_n);$$
$$a_{m-1} = f(a_m) = f(a_n) = a_{n-1};$$

По индукционному предположению

$$a_{m-n} = a_{(m-1)-(n-1)} = a$$

◀

Вернемся к доказательству теоремы.

$$a_{m-n} \in f^{-1}(f^{-1} \dots (\{a\}) \dots)$$

Применим много раз функцию f к обеим частям:

$$f(f(\dots f(a_{m-n}) \dots)) = a;$$
$$f(f(\dots f(a) \dots)) = a;$$
$$(f \circ f \circ \dots \circ f)(a) = a;$$
$$\forall a \in A, \exists n_a \geq 1\colon \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n_a}(a) = a;$$

2. Возьмём $N = \prod\limits_{a \in A} n_a$. Покажем по индукции, что произведение первых k множителей позволяет выполнить необходимое условие для соответствующих k элементов, тогда, так как множество конечно, N выполнит условие для всех элементов A.

3.

$$a, b \in A;$$
$$f(a) = f(b);$$
$$a = (\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{N-1} \circ f)(a) = (\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{N-1} \circ f)(b) = b;$$
$$a = b;$$
$$\Rightarrow f \text{— инъекция}$$

◀

8. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: На A задано бинарное отношение R, если задано $R \subset A \times A$.
$(a, b) \in R \iff aRb \iff a$ и b находятся в отношении R
Если $R = \emptyset$ — пустое отношение.
Если $R = A^2$ — полное отношение.
$\mathfrak{Def}$: Пусть R — бинарное отношение на A, тогда:

1. R рефлексивно,если $\forall a \in A\colon aRa \iff (a, a) \in R$
2. R антирефлексивно, если $\forall a \in A\colon \neg(aRa)$

3. R симметрично, если $\forall a, b \in A\colon aRb \Rightarrow bRa$

4. R асимметрично, если $\forall a, b \in A\colon aRb \Rightarrow \neg(bRa)$

5. R антисимметрично, если $\forall a, b \in A\colon (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$

6. R транзитивно, если $\forall a, b, c \in A\colon (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

$\mathfrak{Def}$: R называется отношением нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрино.

$\mathfrak{Def}$: R называется отношением строгого частичного порядка, если оно антирефлексивно, транзитивно и асимметрино.

Если на A задано отношение частичного порядко, то A — частично упорядоченное множество (ЧУМ).

9. Отношение эквивалентности

$\mathfrak{Def}$: R — отношение эквивалентности, если оно рефлексивное, симметрично и транзитивно. Стандартное обозначение: $a \sim b$.

$\mathfrak{Def}$: Для $a \in A$ определён класс эквивалентности: $[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$

Теорема 9.1. Пусть $a, b \in A$. Тогда либо $[a] \cap [b] = \emptyset$, либо $[a] = [b]$

$\blacktriangleright$

1. $[a] \cap [b] = \emptyset$ — всё доказано. Заметим, что тогда $a \nsim b$, в противном случае $a, b \in [a], [b]$.

2. $\exists c \in [a] \cap [b]$. Тогда $c \sim a$ и $c \sim b \Rightarrow a \sim b$.

   Покажем, что $[a] \subset [b]$ и $[b] \subset [a]$:

   (a) $x \in [a] \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$

   (b) Аналогично

$\blacktriangleleft$

Множество классов эквивалентности называется фактормножеством по отношению R.

10. Группы. Простейшие следствия из аксиом группы

$\mathfrak{Def}$: Бинарная операция на A — отображение $f : A \times A \to A$

$\mathfrak{Def}$: Пусть $G \neq \emptyset$, $\cdot : G \times G \to G$. Тогда $\langle G, \cdot \rangle$ — группа, если выполняются следующие свойства:

1. Ассоциативность: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (для любых троек)

2. $\exists$ нейтральный елемент e такой, что $\forall a \in G\colon a \cdot e = e \cdot a = a$

3. $\forall a \in G, \exists a^{-1}\colon a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

4. $\forall a, b \in G\colon a \cdot b = b \cdot a$ — если это свойство выполняется, то группа Абелева (коммутативная).

В дальнейшем под записью ab будет пониматься $a \cdot b$, если, разумеется, не сказано другого.

Пример: Пусть X — множество. $S(X)$ — множество биекций из X в X. Если взять операцию «композиция», получится группа. Ассоциативность композиции знаем, нейтральный элемент — id_X, обратимость биекции тоже знаем. Коммутативность отсутствует.

Пример: Пусть $X = \{1, \dots, n\}$. $S_n = S(\{1, \dots n\})$ — симметрическая группа степени n, группа перестановок чисел от 1 до n.

Теорема 10.1. Простейшие свойства групп.

1. Единственность нейтрального
2. Единственность обратного
3. Уравнения вида $ax = b$, $ya = b$ имеют решение, причем единственное
4. $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$

▶

1. Пусть существуют два нейтральных элемента e_1, e_2:
$$e_2 = e_1 e_2 = e_1 \Rightarrow e_2 = e_1$$
2. Пусть a', a'' — обратные к a, тогда:
$$\begin{gathered} a'aa'' = (a'a)a'' = ea'' = a''; \\ a'aa'' = a'(aa'') = a'e = a'; \\ a' = a''; \end{gathered}$$
3. $ax = b \iff b^{-1}ax = e \Rightarrow x = (b^{-1}a)^{-1}$. Так мы доказали одним махом и существование, и единственность (так как обратный элемент существует и единственен).
4. $(a_1 \dots a_n)(a_1^{-1} \dots a_n^{-1}) = (a_1 \dots a_{n-1})(a_n a_n^{-1})(a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1})$. Центральная скобка равна e. Таким образом избавляемся от всех переменных, получаем, что правая скобка обратна левой.

◀

11. Подгруппы. Критерий того, что непустое подмножество группы является подгруппой. Пересечение подгрупп

$\mathfrak{Def}$: Пусть $f : A \to B$ и $C \subset A$. Введём g — сужение f на C:
$$\begin{gathered} g : C \to B \\ \forall c \in C \colon g(c) = f(c) \end{gathered}$$

$\mathfrak{Def}$: $H \subset G$ — подгруппа в G, если она является группой относительно сужения операции в G на H.

$\mathfrak{Def}$: Множество A замкнуто относительно операции $\cdot$, если $\forall a, b \in A \colon a \cdot b \in A$

Множество A замкнуто относительно операции взятия обратного, если $\forall a \in A \colon a^{-1} \in A$

Теорема 11.1. Достаточные условия для подгруппы. Для того, чтобы доказать, что H — подгруппа G ($H \neq \emptyset$, $H \subset G$), достаточно проверить только замкнутость относительно операций $\cdot$ и взятия обратного элемента.

▶ Ассоциативность к нам переходит из исходной группы G.
Если существует обратный элемент, то $aa^{-1} = e \in H$
Так как есть замкнутость, то операция $\cdot$ действует из $H \times H$ в H. ◀
Следствие 11.1.1. Пусть $\emptyset \neq H \subset G$ и $\forall a, b \in H : ab^{-1} \in H \Rightarrow H$ — подгруппа.
▶ Нейтральный элемент есть: $a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$.
Замкнутость относительно взятия обратного: $\forall a \in H \colon ea^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

Замкнутость относительно операции $\cdot$: $\forall a, b \in H \Rightarrow a, b^{-1} \in H \Rightarrow a\left(b^{-1}\right)^{-1} \in H \Rightarrow ab \in H$. ◀

Теорема 11.2. H_α — подгруппы в G. Тогда $\bigcap H_\alpha$ — подгруппа в G.

▶

$$\begin{gathered} H = \bigcap H_\alpha; \\ e \in H_\alpha \Rightarrow e \in H \Rightarrow H \neq \emptyset; \\ a, b \in H \Rightarrow \forall \alpha\colon a, b \in H_\alpha \Rightarrow ab \in H_\alpha \Rightarrow ab \in H; \\ a \in H \Rightarrow \forall \alpha\colon a \in H_\alpha \Rightarrow a^{-1} \in H_\alpha \Rightarrow a^{-1} \in H; \end{gathered}$$

◀

12. Два эквивалентных определения подгруппы, порожденной множеством

$\mathfrak{Def}$: Замыканием множества относительно операции — множество всех элементов, получаемых из элементов этого множества применением данной операции.

Аналогично определяется замыкание относительно множества операций.

В частности, для группы это замыкание A будет выглядеть как:

$$\{a_1^{z_1} a_2^{z_2} \ldots | a_i \in A, z_i = \pm 1\}$$

, где A — данное множество.

$\mathfrak{Def}$: Подгруппа, порожденная множеством — замыкание этого множества относительно операций $\cdot$ и взятия обратного элемента

$\mathfrak{Def}$: Подгруппа, порожденная множеством — пересечение всех подгрупп, содержащих это множество

REM: Предыдущие два определения действительно задают подгруппы, именно это мы доказывали в предыдущих теоремах

Теорема 12.1. Равносильность определений подгруппы, порожденной множеством. Пусть $M \subset G$, G — группа, A — замыкание M относительно операций $\cdot$ и взятия обратного элемента, $B = \bigcap\{H \in 2^G \mid H \supset M \wedge H\text{— подгруппа } G\}$.

Тогда $A = B$.

▶ $A \subset B$, так как любая подгруппа, содержащая M, должна содержать замыкание M.

Но так как A — подгруппа, то $B \subset A$.

$\Rightarrow A = B$. ◀

13. Гомоморфизмы групп. Свойства гомоморфизмов

$\mathfrak{Def}$: H, G — группы, $f : G \to H$

1. f — гомоморфизм, если $\forall a, b \in G\colon f(ab) = f(a)f(b)$
2. f — изоморфизм, если f — и гомоморфизм, и биекция

$\mathfrak{Def}$: H, G — группы. Если между H, G есть изоморфизм, то группы называются изоморфными: $H \cong G$

Теорема 13.1. Свойства гомоморфизма.

1. $f(e_G) = e_H$
2. $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3. $f(G)$ — подгруппа H

4. $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$, f, g — гомоморфизмы, тогда $g \circ f : G \to K$ — тоже гомоморфизм

5. $f : G \to H$ — изоморфизм, тогда $f^{-1} : H \to G$ — изоморфизм

▶

1. $f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)f(e_G) = e_H e_H = e_H$

2. $f(e_G) = f(xx^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = e_H \Rightarrow f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

3. Покажем замкнутость относительно операции $\cdot$

$$e_H \in f(G);$$
$$c, d \in f(G) \iff \exists a, b \in G \colon c = f(a), d = f(b);$$
$$cd = f(a)f(b) = f(ab) \Rightarrow cd \in f(G);$$

Покажем замкнутость относительно взятия обратного (из пункта 2 теоремы):

$$f(a)^{-1} = f(a^{-1}) \in f(G)$$

Таким образом, $f(G)$ — подгруппа.

4. Пусть $a, b \in G$, тогда:

$$(g \circ f)(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)$$

5.

$$c, d \in H;$$
$$\exists a, b \in G \colon c = f(a); d = f(d);$$
$$a = f^{-1}(c); b = f^{-1}(d);$$
$$f^{-1}(cd) = ab = f^{-1}(c)f^{-1}(d);$$

Тогда f^{-1} — изоморфизм

◀

Следствие 13.1.1.

1. $G \cong G$ (взяли id_G).

2. $G \cong H \Rightarrow H \cong G$

3. $G \cong H$, $H \cong K \Rightarrow G \cong K$

Пример: Пусть $G = \langle \mathbb{R}, + \rangle$, $H = \langle \mathbb{R}_+, \cdot \rangle$, тогда $x \to e^x$ — изоморфизм.

14. Циклические группы. Теорема о классификации циклических групп с точностью до изоморфности

$\mathfrak{Def}$: Группа G — циклическая группа, если она порождена одним элементом (то есть замыкание этого элемента в группе порождает группу). Обозначение: $G = \langle a \rangle$

Примеры:

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle = \langle 1 \rangle$

2. $e = \langle e \rangle$ — тривиальная группа

3. $n \in \mathbb{N}$, C_n — группа поворотов на угол $\frac{2\pi k}{n}$, $C_n = \langle \frac{2\pi}{n} \rangle$

$\mathfrak{Def}$: Степени

$$i > 0 : a^i = \underbrace{aa \ldots a}_{i}$$
$$a^{-i} = \underbrace{a^{-1}a^{-1} \ldots a^{-1}}_{i}$$
$$a^{m+n} = a^m a^n$$

Теорема 14.1. Лемма о делении с остатком. $\forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z} \colon \exists!$ (существуют и единственны) $q, r \in \mathbb{Z} \colon 0 \leqslant r < n \colon a = qn + r$

▶ Существование:

$$q = \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor$$
$$nq \leqslant a < nq + n$$
$$r = a - nq$$

Единственность (от противного):

$$a = nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2; 0 \leqslant r1, r2 < n;$$
$$0 = n * (q_1 - q_2) + (r_1 - r_2), n|q_1 - q_2| = |r_1 - r_2|$$

Так как $n \geqslant 1$, то левая часть хотя бы n, а правая — строго меньше n. Противоречие. ◀

Теорема 14.2. Теорема о классификации циклических групп с точностью до изоморфности. Всякая циклическая группа изоморфна либо $(\mathbb{Z}, +)$, либо C_n, $n \in \mathbb{N}$

▶ $G = \langle a \rangle$. Рассмотрим отображение $i \to a^i$, $i \in \mathbb{Z}$.

- Если все элементы различны, то получили изоморфизм ($i + j \leftrightarrow a^{i+j} = a^i a^j$)

- В противном случае $\exists i > j \colon a^i = a^j \Rightarrow a^{i-j} = e$. Пусть n — наименьшее число такое, что $a^n = e$. Тогда $G = \{e = a^0, a^1, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$, $G \leftrightarrow C_n$, $a^k a^l = a^{(k+l) \bmod n}$

◀

$\mathfrak{Def}$: G — группа. Если G конечна, то порядком G называют число элементов в ней, иначе порядок равен ∞

$\mathfrak{Def}$: $a \in G$ и $n \in \mathbb{N}$ — минимальное число такое, что $a^n = e$. Тогда n - порядок элемента a. Если такого элемента нет, то порядок a равен ∞

REM: Альтернативное определение: порядок элемента равен порядку циклической группы, порожденной этим элементом

15. Классы смежности

Есть группа G и ее подгруппа H. Введем отношение $\sim$: $a \sim b \iff a^{-1}b \in H$. Докажем, что это отношение — отношение эквивалентности:

$$a^{-1}a = e \in H \Rightarrow a \sim a;$$
$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \Leftrightarrow (a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in H \Leftrightarrow b \sim a;$$
$$\left.\begin{array}{r} a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H; \\ b \sim c \Leftrightarrow b^{-1}c \in H; \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-1}c = a^{-1}bb^{-1}c \in H \Rightarrow a \sim c;$$

Рассмотрим класс эквивалентности элемента a:

$$\begin{aligned} [a] &= \{b \in G \mid a^{-1}b \in H\} = \\ &= \{b \in G \mid \exists h \in H \colon a^{-1}b = h\} = \\ &= \{b \in G \mid \exists h \in H \colon b = ah\} \end{aligned}$$

Словами: класс эквивалентности a — это образ отображения $f : H \to G$, где $f(h) = ah$.

$\mathfrak{Def}$: $aH = [a]$ — левый класс смежности по подгруппе H, Ha — правый класс смежности по подгруппе H (определяется симметрично).

REM: Левые классы смежности для разных элементов или не пересекаются, или совпадают, так как aH — класс эквивалентности. Аналогично для правых классов.

Пример: $G = S_3$ — группа перестановок из трех элементов. Пусть $H = \langle(12)\rangle = \{e, (12)\}$. Тогда $(13)H = \{(13), (123)\}, H(13) = \{(13), (132)\}$.

16. Теорема Лагранжа и следствия из нее

Лемма 16.1. $H \subset G$, $f : H \to aH$, $f(h) = ah$, H — подгруппа. Тогда f — биекция. В частности, из этого будет следовать, что $|H| = |aH|$, то есть мощности всех левых классов смежности равны друг другу

▶ Заметим, что это отображение — сюрьекция по определению aH (у каждого элемента есть прообраз). Докажем, что это инъекция.

От противного: пусть $ah_1 = ah_2$, домножим слева на a^{-1}, получим $h_1 = h_2$.

Таким образом, f — биекция. ◀

$\mathfrak{Def}$: Число левых классов смежности по H называется индексом H в G. Обозначение: $[G : H]$

Теорема 16.1. Теорема Лагранжа. Пусть G - конечная группа, возьмём элемент a и его левые классы смежности aH_α. Очевидно, что $G = \bigcup aH_\alpha$ и $H_{\alpha_1} \cap H_{\alpha_2} = \emptyset$. Тогда $|G| = [G : H] \cdot |H|$

▶ Все эти классы имеют одинаковую мощность, равную $|H|$ (по лемме). Тогда $|G| = [G : H] \cdot |H|$, так как эти классы не пересекаются. ◀

Следствие 16.1.1. Количество правых и левых классов смежности одинаково (достаточно провести аналогичные действия для правых классов смежности)

Следствие 16.1.2. Порядок любой подгруппы делит порядок конечной группы.

Следствие 16.1.3. Порядок любого элемента делит порядок конечной группы (рассмотрим циклическую подгруппу, порожденную этим элементом)

Следствие 16.1.4. Группа порядка p (где p — простое число) циклична, так как порядок любого элемента равен либо 1 (e), либо p (все остальные), а тогда все элементы кроме e порождают всю группу порядка p.

17. Теорема о разложении перестановки в произведение непересекающихся циклов

Теорема 17.1. Всяка перестановка может быть представлена в виде произведения непересекающихся циклов.

$\mathfrak{Def}$: $\sigma \in S_n, j \in \{1, \dots, n\}. j$ – неподвижная точка относительно σ, едди $\sigma(j) = j$

▶ Индукция по m – числу подвижных точек σ (число подвижных точек $= n$ - число неподвижных точек).

База: $m = 0 \Leftrightarrow n$ – число неподвижных точек, то есть $\forall j \in \{1, \dots, n\} \sigma(j) = j$, то есть $\sigma = id$

Переход: $m > 0 \Rightarrow \exists i : \sigma(i) \neq i$ – с него и начнём.

$i_1 = i$

$i_2 = \sigma(i_1)$

$i_3 = \sigma(i_2) = \sigma^2(i_1)$

...

И так до тех пор, пока не встретим повторение(а его мы обязательно встретим, потому что чисел у нас всего n – конечное число)

$i_1 \mapsto i_2 \mapsto \dots \mapsto i_k \mapsto i_{k+1}$ – уже встречался.

Заметим, что $i_{k+1} \neq i_j \forall j \in \{2, \dots, n\}$ в силу инъективности ⊠(иначе у какого-то элемента было бы два различных прообраза – i_{j-1} и i_{k+1}) $\Rightarrow i_{k+1} = i_1$.

Итак, мы получили цикл $\tau = (i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Рассмотрим $\sigma\tau^{-1}$.

Неподвижные точки $\sigma\tau^{-1}$ - это неподвижные точки σ плюс $i_1, i_2, \dots, i_k \Rightarrow \sigma\tau^{-1}$ и τ - незацепляющиеся $\Rightarrow$ (по индукционному предположению)$\sigma\tau^{-1} = \sqcap_{j=1}^{r} \tau_j$.

Домножим обе части равества на τ и получим, что $\sigma = (\sqcap_{j=1}^{r} \tau_j)\tau$ – произведение незацепляющихся циклов.

◀

Теорема 17.2. Следствие. S_n порождается всеми циклами (так как для каждой σ можно выбрать свой набор).

Небольшой забавный бонус:

$\sigma = \sqcap_{j=1}^{r} \tau_j$, где τ_j – попарно непересекающиеся циклы. Тогда $\sigma^m = (\sqcap_{j=1}^{r} \tau_j)^m$, так как непересекающиеся циклы коммутируют.

$\mathfrak{Def}$: Прядок цикла – его длина.

$\mathfrak{Def}$: Прядок σ – наименьшее общее кратноедлин циклов при разложении σ на непересекающиеся циклы.

$\mathfrak{Def}$: Цикловым типом $\sigma \in S_n$ называется набор длин её непересекающихся циклов, упорядоченных по неубыванию, $+$ набор единиц для неподвижных элементов.

18. Симетрическая группа. Порождение симметрической группы транспозициями

S_n – биекции на $\{1, \dots, n\}$

S_n– симметрическая группа(группа перестановок) степени n.

$\tau, \sigma \in S_n$

В произведении $\sigma\tau$ первой выполняется перестановка τ.

$\mathfrak{Def}$: Цикл $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ – это перестановка σ, такая что $\sigma(i_1) = i_2$, $\sigma(i_2) = i_3$, ...
$\sigma(i_k) = i_1$ и $\sigma(j) = j$, где $j \notin \{i_1, \cdots, i_k\}, 1 \leq j \leq n$

$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_2, i_3, \dots, i_k) = \dots = (i_s, i_{s+1}, \dots, i_k, i_1, \dots, i_{s-1})$
k – длина цикла. Порядок цикла длины k равен k. $(i_1, i_2, \dots, i_k)^k = id$

$\mathfrak{Def}$: Транспозиция - цикл длины 2. (i, j) – i и j меняются местами, остальные остаются на месте.

$\mathfrak{Def}$: $(i_1, i_2, \dots, i_k), (j_1, j_2, \dots, j_s)$ – циклы. Эти циклы называются незацепляющимися(непересекающим если $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \bigcap \{j_1, j_2, \dots, j_s\} = \emptyset$)

Их легко перемножать. Если σ, τ – непересекающиеся циклы, то $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Теорема 18.1. S_n порождается транспозициями.

▶ Покажем, что любой цикл $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ есть произведение транспозиций $(i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k)$. Заметим, что если применить это произведение к перестановке(вот просто взять и последовательно применить справа налео все транспозиции аккуратно), то мы и получим тот же самый результат, как и от применения исходного цикла.

Осталось лишь заметить, что каждая из остальных $n-k$ точек любо неподвижная, либо также лежит на каком-то цикле — а бить циклы на произведение транспозиций мы только что научились.
◀

19. Четность перестановки. Теорема об изменении четности перестановки при умножении на транспозицию. Следствия из неё.

$\mathfrak{Def}$: $\sigma \in S_n; i, j \in \{1, \dots, n\}. i, j$ образуют инферсию относительно σ, если $i < j$, а $\sigma(i) > \sigma(j)$.

$\mathfrak{Def}$: $INV(\sigma)$ – множество всех инверсий относительно σ.

$\mathfrak{Def}$: σ– четная, если $|Inv(\sigma)|$ четно.

$\mathfrak{Def}$: σ– нечетная, если $|Inv(\sigma)|$ нечетно.

Теорема 19.1. $\sigma \in S_n, \tau = (ij)$ **— транспозиция. Тогда σ и $\sigma\tau$ имеют различную четность..**

▶ Не умаляя общности, будем считать, что $i < j$. Тогда

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma_1 & \cdots & \sigma_i & \cdots & \sigma_j & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$
$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ \sigma_1 & \cdots & \sigma_j & \cdots & \sigma_i & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

σ		$\sigma\tau$	
$(kl), \{k,l\} \bigcap \{i,j\} = \emptyset$	есть инверсия	$(kl), \{k,l\} \bigcap \{i,j\} = \emptyset$	есть инверсия
$(kl), \{k,l\} \bigcap \{i,j\} = \emptyset$	есть инверсия	$(kl), \{k,l\} \bigcap \{i,j\} = \emptyset$	есть инверсия
$(ki), k < i$	есть	$(kj), k < i$	есть
$(ki), k < i$	нет	$(kj), k < i$	нет
$(ki), k > j$	есть	$(kj), k > j$	есть
$(kj), k < i$	есть	$(ki), k < i$	есть
$(kj), k < i$	нет	$(ki), k < i$	нет
$(kj), k > j$	есть	$(ki), k > j$	есть
$(kj), k > j$	нет	$(ki), k > j$	нет
$\sigma(\sigma(i)\sigma(k)\sigma(j))$			
$\sigma\tau(\sigma(j)\sigma(k)\sigma(i))$			
$(ki), i < k < j$	есть	$(kj), i < k < j$	нет
$(ki), i < k < j$	нет	$(kj), i < k < j$	есть
$(kj), i < k < j$	есть	$(ki), i < k < j$	нет
$(kj), i < k < j$	нет	$(ki), i < k < j$	есть
(i j)	есть	(i j)	нет
(i j)	нет	(i j)	есть

Как глубокоуважаемый читатель уже догадался, самое интересное здесь - это последние 6 стрк.
$r = \{k | i < k < j \wedge (ik)$ образует инверсию $\}$
$s = \{k | i < k < j \wedge (kj)$ образует инверсию $\}$
$|Inv(\sigma\tau)| = |Inv(\sigma)| - r + (j - i - 1 - r) - s + (j - i - 1 - s) \pm 1 \Rightarrow$ четность изменилась.
◀

Теорема 19.2. Следствия.

1. $\sigma = \sqcap_{j=1}^{r} \tau_j, \tau_j$ – транспозиция.
   σ четна(нечетна) $\Leftrightarrow$ число сомножителей четно(нечетно, соответственно).

   ▶
   ” $\Leftarrow$: ”id четна. При каждом добавлении τ_j четность меняется.
   ” $\Rightarrow$ ” : σ четна, r – число транспозиций, и если у него другая четность, то приходим к противоречию.
   ◀

2. $\sigma \in S_n, \tau-$ транспозиция. σ и $\tau\sigma$ имеют различную четность. (из первого следствия)

3. При перемножении двух перестановок их четность меняется так же, как при суммировании их четностей как чисел.

4. Множество четных перестановок – подгруппа S_n(знакопеременная группа). Обозначается A_n.

   ▶

   (a) Непусто(id четна)

   (b) Замкнуто(по третьему следствию)

   (c) Обратный элемент к $\sigma = \sqcap_{j=1}^{2r} \tau_j$ – это $\sigma^{-1} = \sqcap_{j=1}^{2r} \tau_{2r+1-j}$

◀

20. Кольца, тела, поля

$\mathfrak{Def}$: Есть $A \neq \emptyset$, на нём заданы две бинарные операции:

1. $+ : A \times A \to A$ (сложение)
2. $\cdot : A \times A \to A$ (умножение)

Определим интересные свойства, которыми такая структура $\langle A, +, \cdot \rangle$ может обладать:

1. Ассоциативнсть сложения:
$$\forall a, b, c \in A\colon (a+b)+c = a+(b+c)$$
2. Существование нейтрального элемента по сложению (обозначается 0):
$$\exists 0 \in A, \forall a \in A\colon a+0 = 0+a = a$$
3. Существование обратного элемента по сложению (обозначается $-a$):
$$\forall a \in A, \exists (-a) \in A\colon a+(-a) = (-a)+a = 0$$
4. Коммутативность сложения:
$$\forall a, b \in A\colon a+b = b+a$$
5. Ассоциативность умножения:
$$\forall a, b, c \in A\colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
6. Коммутативность умножения:
$$\forall a, b \in A\colon a \cdot b = b \cdot a$$
7. Существование нейтрального элемента по умножению (обозначается 1):
$$\exists 1 \in A, \forall a \in A\colon a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$
8. Существование обратного элемента по умножению (обозначается a^{-1}):
$$\forall a \in A \setminus \{0\}, \exists a^{-1} \in A\colon a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$
Также иногда говорят про левый обратный a_l^{-1} ($a_l^{-1}a = 1$) и правый обратный a_r^{-1} ($aa_r^{-1} = 1$), но если существуют оба, то они совпадают (см. свойства).
9. - Дистрибутивность слева: $\forall a, b, c \in A\colon a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
   - Дистрибутивность справа: $\forall a, b, c \in A\colon (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

   Просто «дистрибутивность» — дистрибутивность и слева, и справа.

$\mathfrak{Def}$: Кольцо — тройка $\langle A, +, \cdot \rangle$, удовлетворяющая свойствам 1–5, 9 (a, b)
$\mathfrak{Def}$: Кольцо, в котором выполнено свойство 6 — коммутативное кольцо
$\mathfrak{Def}$: Кольцо, в котором выполнено свойство 7 — кольцо с единицей
$\mathfrak{Def}$: Тело — кольцо с 1, в котором $1 \neq 0$ и выполнена аксиома 8 (то есть всё, кроме 6)
$\mathfrak{Def}$: Поле — коммутативное кольцо с 1, в котором $1 \neq 0$ и выполнена аксиома 8 (т.е. все 9 аксиом)

REM: Иногда кольца, для которых выполнены аксиомы 1–4 и 9, называют ассоциативными кольцами

REM: Если $\langle A, +, \cdot \rangle$ — кольцо, то $\langle A, + \rangle$ — абелева группа

Примеры:

- $\mathbb{Z}$ — коммутативное кольцо с 1, но 2 не имеет обратного в $\mathbb{Z} \Rightarrow$ не поле
- $\mathbb{N}$ — не кольцо
- $2\mathbb{Z}$ (все чётные целые числа) — кольцо без 1
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - поля

20.1. Простейшие свойства колец

1. 0 единственен, так как $0 = 0 + \cdot 0' = 0'$
2. $-a$ единствененю

   ▶ Пусть существуют два (b и c), являющихся обратными по сложению к a:

   $$\begin{gathered} a + b = b + a = a + c = c + a = 0; \\ a + b = a + c = 0; \\ (b + a) + b = (b + a) + c = 0; \\ 0 + b = 0 + c; \\ b = c; \end{gathered}$$

   ◀
3. 1 единственна (если существует), так как $1 = 1 \cdot 1' = 1'$
4. Если у a есть и левый, и правый обратный по умножению, то они совпадают:

   $$a_l^{-1} = a_l^{-1}(aa_r^{-1}) = (a_l^{-1}a)a_r^{-1} = a_r^{-1}$$
5. Если в кольце с 1 у элемента a есть 2 левых обратных, то левых обратных к a бесконечно много (упражнение). Подсказка: построим инъективное отображение множества левых обратных в своё подмножество. Говорят, это может быть сложно даже в качестве задачи на пятёрку, потому что надо творчески построить отображение.
6. $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

   ▶

   $$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 = a(0 + 0) = a \cdot 0 & \qquad \text{добавим} - (a \cdot 0); \\ a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)); & \\ a \cdot 0 = 0; & \end{aligned}$$

   Аналогичным образом с другой стороны. ◀

7. $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

   ▶

$$a + (-a) = 0;$$
$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0;$$
$$-(ab) + ab + (-a)b = -(ab) + 0;$$
$$(-a)b = -(ab);$$

   Аналогичным образом с другой стороны. ◀

8. Если $0 = 1$, то $|A| = 1$, $A = \{0\}$:

   ▶ Рассмотрим произвольный $a \in A$:

$$a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Пусть A — кольцо (тело, поле). Тогда непустое $B \subset A$ — подкольцо (подтело, подполе), если является кольцом (телом, полем) относительно сужения операций на B

REM:

- $A \supset B \neq \emptyset$ — подкольцо в A, если оно замкнуто относительно умножения, сложения, взятия обратного по сложению

- B — подтело, если оно подкольцо и замкнуто по взятию обратного ненулевого элемента по умножению и содержит элементы, отличные от нуля, то есть:

$$\forall a, b \in B\colon a + b \in B;$$
$$\forall a \in B\colon (-a) \in B;$$
$$\forall a, b \in B\colon ab \in B;$$
$$\forall a \in (B \setminus \{0\})\colon a^{-1} \in B;$$
$$\exists a \in B\colon a \neq 0;$$

20.2. Гомоморфизмы колец

$\mathfrak{Def}$: Пусть A, B — кольца и есть отображение $f : A \to B$. f — гомоморфизм, если:

1. $\forall a_1, a_2 \in A\colon f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

2. $\forall a_1, a_2 \in A\colon f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$

$\mathfrak{Def}$: f — изоморфизм, если f — и гомоморфизм, и биекция

$\mathfrak{Def}$: A и B изоморфны, если между ними сущесвует изоморфизм, обозначение: $A \cong B$.

REM: Если f — гомоморфизм и $f(0_A)$ обратим по сложению, то $f(0_A) = 0_B$

▶ $f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) + f(0_A)$, добавили обратный по сложению к $f(0_A)$, получили $0_B = f(0_A)$. ◀

REM: Если f — гомоморфизм и $f(1_A)$ обратим в B то $f(1_A) = 1_B$

▶ $f(1_A) = f(1_A \cdot 1_A) = f(1_A) f(1_A)$, домножаем на обратный к $f(1_A)$, получаем $1_B = f(1_A)$. ◀

20.3. Делимость в кольцах

$\mathfrak{Def}$: Пусть A — кольцо и $a, b, c \in A$ таковы, что $c = ab$. Тогда a — левый делитель c, b — правый делитель c.

REM: Любой элемент является и левым, и правым делителем нуля: $0 = a \cdot 0 = 0 \cdot a$.

$\mathfrak{Def}$: a, b — нетривиальные делители нуля, если $0 = ab$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$\mathfrak{Def}$: Область целостности — коммутативное кольцо с 1, в котором отсутствуют нетривиальные делители нуля.

REM: В области целостности если $ab = 0$, то либо $a = 0$, либо $b = 0$.

REM: Поле — область целостности (потому что не-ноль всегда можно домножить на обратный).

Теорема 20.1. A — область целостности и $a \in A \setminus \{0\}$. Тогда

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$

▶

$$\underbrace{a}_{\neq 0}(b - c) = 0;$$
$$a^{-1}a(b - c) = a^{-1} \cdot 0;$$
$$(b - c) = 0;$$
$$b - c + c = 0 + c;$$
$$b = c;$$

◀

21. Мультипликативная группа кольца

$\mathfrak{Def}$: Пусть A - кольцо с 1. Введём множество A^*:

$$A^* = \{a \in A \mid \exists b \in A\colon ab = ba = 1\}$$

Тогда $\langle A^*, \cdot\rangle$ — мультипликативная группа кольца

Теорема 21.1. A^* - группа по умножению

▶ Существование единицы очевидно: $1_A \in A^*$, останется единицей и в A^*. Покажем замкнутость относительно операции умножения:

$$a_1, a_2 \in A^* \iff \exists b_1, b_2 \in A\colon a_1b_1 = b_1a_1 = a_2b_2 = b_2a_2 = 1$$

Теперь покажем, что a_1a_2 тоже лежит в A^* по определению:

$$(a_1a_2)(b_1b_2) = a_1(a_2b_2)b_1 = a_1b_1 = 1;$$
$$(b_2b_1)(a_1a_2) = b_2(b_1a_1)a_2 = b_2a_2 = 1;$$

Покажем замкнутость относительно взятия обратного:

$$a \in A^* \Rightarrow \exists b\colon ab = ba = 1 \Rightarrow b \in A^* \Rightarrow a^{-1}_{A^*} = b$$

◀

Примеры:

- K — поле, тогда $K^* = K \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}^* = -1, 1$

22. Кольца многочленов

$\mathfrak{Def}$: A - коммутативное кольцо с 1
$A[x] = \{\underbrace{a_1, a_2, ..}|a_i \in A$, почти все нули $\}$

$A[x]$ - кольцо многочленов от одной переменной над кольцом A

REM: «почти все» — все кроме конечного числа

$\mathfrak{Def}$: $" + " : (a_1, a_2, ...) + (b_1, b_2, ...) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...)$

REM: $\exists n, m : a_i = 0, b_i = 0 \forall i > max(n, m) \Rightarrow a_i + b_j = 0$

$\mathfrak{Def}$: $" \cdot " : (a_1, a_2, ...) \cdot (b_1, b_2, ...) = (c_1, c_2, ...)$
где $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$

REM: $\exists n, m : a_i = 0, b_j = 0 \forall i > n, j > m \Rightarrow \forall k > n + m \Rightarrow c_k = 0$

▶

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i}}_{0 \le i \le n \Rightarrow k-i \ge k-n \ge n+m-n=m \Rightarrow b_{k-i}=0 \Rightarrow \sum=0} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{k} a_i b_i}_{i>n \Rightarrow a_i=0 \Rightarrow \sum=0} = 0$$

◀

Теорема 22.1. $(A[x], +, \cdot)$ - коммутативное кольцо с 1
▶

1. аксиомы 1 - 4 покомпонентно выполнены в A
2. $\exists 0 = (0, 0, 0, ...)$
3. $\exists 1 = (1, 0, 0, ...)$ $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$
   ▶ по определению операции умножения:
   $(a_0, \underbrace{a_0 + a_1 \cdot 1}_{a_1}, \underbrace{...}_{a_2}) = \alpha$ ◀
4. коммутативность:
   $\beta = (b_0, b_1, ...), \alpha = (a_0, a_1, ...) \Rightarrow \alpha\beta = \beta\alpha$
   ▶
   $$\alpha\beta = (c_0, c_1, ...) \Rightarrow c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$
   $$\beta\alpha = (d_0, d_1, ...) \Rightarrow d_k = \sum_{i=0}^{k} b_i a_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} b_{k-j} a_j | j = k - i, i = k - j| =$$
   $$\underbrace{\sum_{i=0}^{k} b_{k-i} a_i = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}}_{..A-} = c_k$$
   ◀
5. дистрибутивность (упражнение)

6. ассоциативность:
   $\alpha = (a_0, a_1, ...), \beta = (b_0, b_1, ...), \gamma = (c_0, c_1, ...)$
   $\alpha\beta = d, (\alpha\beta)\gamma = e$
   $\beta\gamma = f, \alpha(\beta\gamma) = g$
   $e_k = g_k \forall k$

   ▶
   $$e_k = \sum_{i=0}^{k} f_i c_{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}) c_{k-i} =$$

   меняем порядок суммирования
   $$= \sum_{j=0}^{k}(\sum_{i=j}^{k} a_j b_{i-j} c_{k-i}) = \sum_{j=0}^{k} a_j(\sum_{i=j}^{k} b_{i-j} c_{k-i}) =$$

   делаем замену $l = i - j$
   $$= \sum_{j=0}^{k} a_j(\sum_{l=0}^{k-j} b_l c_{k-l-j}) = \sum_{j=0}^{k} a_j f_{k-j} = g_k$$

◀

◀

23. Степень многочлена

Алтернативная запись:
$a = (a, 0, 0, ...)$
$x = (0, 1, 0, ...)$
$x^i = (0, ..., \underbrace{1}_{i\text{−ая позиция}}, ...)$
$(a_0, a_1, a_2, ...) = (a_0, 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, 0, ...) + ... =$
$= (a_0, 0, 0, ...) \cdot (1, 0, 0, ...) + (0, a_1, 0, 0, ...) \cdot (0, 1, 0, 0, ...) + ... = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ - альтернативная запись в форме многочлена

$\mathfrak{Def}$: $A[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n | n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \wedge a_i \in A\}$
$f \in A[x]$ - многочлен
$\mathfrak{Def}$: $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, a_n \neq 0, f \neq 0$
n - степень многочлена f, $n = \deg f$
$f = 0 \Rightarrow \deg f = -\infty$

Теорема 23.1.

1. $deg(f + g) \leq max(\deg f, \deg g)$
2. $deg(fg) \leq \deg f + \deg g$

   REM: Если A - область целостности, то $\deg(fg) = \deg f + \deg g$

▶

1. следует из доказательства замкнутости относительно сложения:
   $f = a_0 + ... + a_n x^n \wedge a_n \neq 0$
   $g = b_0 + ... + b_m x^m \wedge a_m \neq 0$

2. $fg = c_0 + c_1 + ... + c_{n+m}x^{n+m} + \underbrace{0 + ...}$

   очевидно, что $\deg(fg) = \deg f + \deg g$

3. для области целостности:
   $a_n \neq 0, b_m \neq 0$
   $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0 \Rightarrow \deg(fg) = degf + defg$
   Если $f = 0 \vee g = 0$, тогда $\deg(fg) = \underbrace{\deg f}_{-\infty} + \underbrace{\deg g}_{-\infty} = -\infty \Leftrightarrow fg = 0$

◀

Следствие 23.1.1. Если A - область целостности, то и $A[x]$ - область целостности
▶ $f, g \neq 0$
$\deg f, \deg g \geq 0$
$\deg(fg) \geq 0 \Rightarrow fg \neq 0$ ◀
REM: $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, f = 2x, g = 2x^2 \Rightarrow fg = 4x^2 = 0$
Следствие 23.1.2. A - область целостности $\Rightarrow (A[x])^* = A^*$
▶ $" \Rightarrow "$ $fg = 1$?
$\deg f + \deg g = 0$ многочлены вида $(*, 0, ...)$
$\deg f = \deg g = 0 \Rightarrow f, g \in A : fg = 1$
$" \Leftarrow "$ если элемент обратим в кольце A, то он обратим и в кольце многочленов ◀

24. Теорема о деление с остатком

Теорема 24.1. A - коммутативное кольцо с 1 $f, g \in A[x]$
$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, n = \deg f, a_n \in A^*$
тогда $\exists q, r \in A[x] : g = qf + r, \deg r < \deg f$

REM: Если A - область целостности, то такое представление единственно

▶ **Существоване:**
Индукция по $m = \deg g$:
База: $m < n$

$$q = 0, r = g$$

Переход: доказали для всех многочленов $\deg g < m$, докажем для m

$$g = b_mx^m + ... + b_0$$

$$g_1 = g - b_ma_n^{-1}x^{m-n}f$$

коэффицент при x^m в g_1: $b_m - b_ma_n^{-1}a_n = 0 \Rightarrow \deg g_1 < m$
по предположению индукции $g_1 = fq_1 + r_1, \deg r_1 < \deg f$, тогда:

$$r = r_1$$

$$q = q_1 + b_ma_n^{-1}x^{m-n}$$

$$g = fq + r$$

Единственность:
A - область целостности

$$g = fq + r = f\tilde{q} + \tilde{r}, \deg r, \deg \tilde{r} < f$$

$$f(q-\tilde{q}) = \tilde{r} - r$$

если $q-\tilde{q} \neq 0$, то степень левого многочлена $\geq \deg f$ и степень правого $< degf \Rightarrow q-\tilde{q} = 0, r-\tilde{r} = 0 \Rightarrow q = \tilde{q}, r = \tilde{r}$ ◀

REM: условие обратимости старших коэффицентов существенно: $A = \mathbb{Z}$
$f = 2x, g = x^2 + 1$
в $\mathbb{Z}[x]$ разложения: $g = fq + r, q, r \in \mathbb{Z}[x], degr < degf$ - не существует

25. теорема Безу

Значение многочлена в точке
$A \subset B$ — коммутативное кольцо с 1.

$$f \in A[x], f = a_n x^n + ... + a_0, c \in B$$

$$f(c) = a_n c^n + ... + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k c^k \text{ — значение многочлена в точке}$$

$$A[x] \subset B[x]$$

$$f \in A[x]$$

$$\tilde{f} : B \to B$$
$$c \to f(c)$$
$$(\tilde{f} + (*)\tilde{g})(c) = \tilde{f}(c) + (*)\tilde{g}(c)$$
$$f \tilde{+} (*) g = \tilde{f} + (*)\tilde{g}$$

Теорема 25.1. (Безу)
A - коммутативное кольцо с 1

$$c \in A, f \in A[x] \Rightarrow \exists q \in A[x] : f(x) = (x-c)q(x) + f(c)$$

▶ Рассмотрим $x - c$, по теоремо о делении с остаток получаем:

$$f(x) = (x-c)q(x) + r_0, \deg r_0 < \deg(x-c) = 1$$
$$r = r_0 \in A$$
$$f(x) = (x-c)q(x) + r_0$$
$$f(c) = (c-c)q(c) + r_0$$
$$f(c) = r_0 \Rightarrow f(x) = (x-c)q(x) + r_0$$

◀

$\mathfrak{Def}$: $A, B, A \subseteq B$, коммутативные с 1
$f \in A[x]$
$c \in B$ - корень f, если $f(c) = 0$

Следствие 25.1.1. c - корень $\Leftrightarrow (x-c)|f$

▶ " $\Leftarrow$ " $f(x) = (x-c)g(x) \Rightarrow f(c) = (c-c)g(c) = 0 \Rightarrow c$ - корень
" $\Rightarrow$ " $f(c) = 0 \Rightarrow$ теорема Безу $\Rightarrow f(x) = (x-c)g(x) + f(c) = (x-c)g(x) \Rightarrow (x-c)|f$ ◀

26. Характеристика кольца

A - кольцо с 1

$\mathfrak{Def}$: Характеристика кольца - наименьшее $n > 0$, т.ч. $\underbrace{1 + ... + 1}_{n} = 0$

$$\mathrm{char} A = n$$

Если такого n нет, тосчитается, что $\mathrm{char} A = 0$

Примеры:

$$\mathrm{char}\mathbb{Z} = 0, \mathrm{char}\mathbb{Q} = 0, \mathrm{char}\mathbb{R} = 0$$

$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ - поля из 2-х и 3-х элементов соответсвенно

$$\mathrm{char}\mathbb{F}_2 = 2, \mathrm{char}\mathbb{F}_3 = 3$$

REM: A - поле $\Rightarrow$ $\mathrm{char} A$ либо 0, либо простое число

▶

1. $\forall n \underbrace{1 + ... + 1}_{n} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{char} A = 0$
2. $\mathrm{char} A > 0 \underbrace{1 + ... + 1}_{n} = 0, n > 1$ т.к. в поле $1 \neq 0$
   $n = ab, 1 < a, b < n$
   по дистрибутивности $\Rightarrow \underbrace{1 + ... + 1}_{a} = 0 \vee \underbrace{1 + ... + 1}_{b} = 0 \Rightarrow$ наименьшее n, чтобы $\underbrace{1 + ... + 1}_{n} = 0$
   должно быть простым

◀

27. Производная многочлена

A - коммутативное кольцо с 1
$f \in A[x]$
$f = a_n x^n + ... + a_0$
$K \in \mathbb{N}, K \cdot a = \underbrace{a + ... + a}_{K} = \underbrace{1 + .. + 1}_{K} a$
$0 \cdot a = 0$

$\mathfrak{Def}$: $f' = n \cdot a_n x^{n-1} + ... + 2a_2 x + a_1 = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1}$
($k = 0$ - фиктивное слагаемое, $0 \cdot a_0 x^{-1} = 0$)

Теорема 27.1. свойства производной

1. $(f + g)' = f' + g'$
   $f_1 + ... + f_k = f_1' + ... + f_k'$
2. $c \in A, (c \cdot f)' = c \cdot f'$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. $(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_k)' = f_1' \cdot f_2 \cdot ... f_k + f_1 \cdot f_2' \cdot ... \cdot f_k + ... + f_1 \cdot .. \cdot f_k'$
5. $(f^k)' = k f^{k-1} f'$

6. A - поле, $f \in A[x]$
   - $\mathrm{char}A = 0$ $f' = 0 \Leftrightarrow f = \mathrm{const}$
   - $\mathrm{char}A = p > 0$ $f' = 0 \Leftrightarrow f \in A[x^p]$

▶

1. упражнение
2. упражнение
3. доказываем по частям:
   - $f = x^n, g = x^m$

$$(fg)' = (x^{n+m})' = (n+m)x^{n+m-1} = nx^{n-1}x^m + x^n m x^{m-1} = f'g + fg'$$

   - $f = x^n, g = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$

$$(fg)' = (\sum_{k=0}^{m} c_k x^n x^k)' = \sum_{k=0}^{m} c_k (x^n x^k)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} c_k (f'x^k + fkx^{k-1}) = f' \sum_{k=0}^{m} c_k x^k + f \sum_{k=0}^{m} kx^{k-1}) = f'g + fg'$$

   - $f = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, g$ - произвольный многочлен

$$(fg)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (x^k g)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (kx^{k-1}g + x^k g') =$$

$$= g \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} + g' \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f'g + fg'$$

4. упражнение
5. следствие п.4
6. - $\mathrm{char}A = 0$

$$f = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$$
$$0 = f' = c_1 + 2c_2 x + ... + nc_n x^{n-1}$$
$$\forall k, kc_k = 0 \underbrace{(1+1+...+1)}_{\neq 0, k} c_k = 0 \Rightarrow f = c_0 = \mathrm{const}$$

   обратное очевидно

   - $\mathrm{char}A = p > 0, f' = \sum_{k=1}^{n} kc_k x^{k-1}$ $\forall k \geq 1 kc_k = 0$ Пусть $p \nmid k, k = pq + r, 1 < r < p$

$$kc_k = \underbrace{(1+1+...+1)}_{k} c_k = (\underbrace{\underbrace{1+...+1}_{p} +..+ \underbrace{1+...+1}_{p}}_{q} + \underbrace{1+...+1}_{r})c_k = \underbrace{(1+..+1)}_{\neq 0, r, ..0<r<\mathrm{char}A} c_k$$

$$\Rightarrow c_k = 0$$

   $" \Leftarrow "$ $f = c_0 + c_p x^p + c_{2p} x^2 p + .. \in A[x^p]$
   Если $f = \sum_{j=0}^{r} c_{jp} x^{jp}$, то $f' = \sum_{j=0}^{r} j \underbrace{p}_{=0, \mathrm{char}A = p} c_{jp} x^{jp-1} = 0$

◀

28. Кратные корни

А — поле. $f \in A[x], f \neq 0$ с — корень f в А $\Leftrightarrow (x-c)|f$ в А[x](теорема Безу)

$\mathfrak{Def}$: Если для некоторого $k \geq 2$, $(x-c)^k|f$, но $(x-c)^{k+1} \nmid f$, то говорим, что с — корень f кратности k.

с — корень f кратности k, если $f(x) = (x-c)^k g(x), (x-c) \nmid g(x) \Leftrightarrow f(x) = (x-c)^k g(x), g(c) \neq 0$

Теорема 28.1. А — поле, $char A = 0, f \in A[x], f \neq 0$

с — корень f кратности $k \geq 1 \Leftrightarrow$

1. с — корень f.

2. с — корень f' кратности k - 1.

▶

$$\Rightarrow$$

$$f = (x-c)^k g(x), g(c) \neq 0 \Rightarrow c \text{ — корень}$$

$$f' = k(x-c)^{k-1}g(x) + (x-c)^k g' = (x-c)^{k-1}(kg + (x-c)g')$$

$$\Rightarrow (x-c)^{k-1}|f'$$

с — не корень kg + (x - c)g'

$$kg(c) + (x-c)g'(c) = kg(c) \neq 0$$

$$\Leftarrow$$

с — корень f $\Rightarrow$ корень f кратности l, по доказаному с — корень f' кратности l - 1.

$$l - 1 = k - 1$$

$$l = k$$

◀

REM: Предположение $char A = 0$ существенно.

$$\mathbb{F}_2, f = x^7 + x^2$$

0 — корень кратности 2.

$$f' = x^6$$

0 — кратности 6.

Следствие 28.1.1. А — поле характеристики 0. $0 \neq f \in A[x]$, с — корень f кратности $\geq k \Leftrightarrow$ выполняется равенство

$$0 = f(c) = f'(c) = ... = f^{(k-1)}(c)$$

$$f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

$$(fg)^(n) = \sum_{r=0}^{n} C_n^r f^{(r)} g^{(n-r)}$$

29. Число корней многочлена

Лемма 29.1. A — область целостности. $0 \neq f, g \in A[x]$
c — корень f кратности k, корень g кратности l $\Rightarrow$
c — корень fg кратности k + l
▶

$$f = (x - c)^k f_1, f_1(c) \neq 0$$

$$g = (x - c)^l g_1, g_1(c) \neq 0$$

$$fg = (x - c)^{k+l} f_1 g_1$$

$$f_1(c) g_1(c) \neq 0$$

$\Rightarrow$ c — корень fg кратности k + l. ◀

Лемма 29.2. A — область целостности. Какие бы ни были $c \neq d \in A$, $0 \neq f, g \in A[x], a, k \in \mathbb{N}$, такие, что $f = (x - c)^k g, g(c) \neq 0$, то $(x - d)^a | f \Leftrightarrow (x - d)^a | g$

▶ $\Leftarrow$

$$(x - d)^a | g \Rightarrow (x - d)^a | f$$

$\Rightarrow$ Индукция по a. **База:**

$$a = 1$$

$$x - d | f \Rightarrow f(d) = 0$$

$$(c - d)^k g(d) = 0 \Rightarrow g(d) = 0$$

$$\Rightarrow (x - d) | g$$

Переход $a - 1 \to a$ $a - 1$ для всех f и g удовлетворяет условию леммы

$$f = (x - c)^k g$$

$$(x - d)^a | f \Rightarrow (x - d)^{a-1} | f$$

$(x - d)^{a-1} | d$ по индукционномупредположению.

$$f = (x - d)^a f_1$$

$$g = (x - d)^{a-1} g_1$$

$$(x - d)^a f_1 = (x - c)^k (x - d)^{a-1} g_1$$

$$(x - d) f_1 = (x - c)^k g_1$$

$$\Rightarrow x - d | g_1$$

(по доказанному при a = 1)

$$(x - d)^a | g$$

◀

Теорема 29.1. A — область целостности. $0 \neq f \in A[x] \Rightarrow$ число корней f с учетом кратности не превосходит $degf$

▶ Индукция по $degf$

1. **База:** $degf = 0, f = const \neq 0$ нет корней.

2. **Переход:** f c — корень f кратности k. $f = (x - c)^k g, g(c) \neq 0$ c — не корень g.

   Все корни g — это в точности все корни f(кроме c), причем кратность сохраняется.

   Число корней g(с учетом кратности) $\leq degg$

   число корней $f = k+$число корней $g \leq k + degg = degf$

◀

REM: Предположение, что A — область целостности существенно.
$\mathfrak{Def}$:

$$A, f \in A[x]$$

$$\tilde{f} : A \to A$$

$$c \to f(c)$$

$$f, g \tilde{f} = \tilde{g}$$

Примеры:

$$A = \mathbb{F}_2$$

$$f = 0, g = x^2 + x$$

$$\tilde{f} : 0 \to 0, 1 \to 0$$

$$\tilde{g} : 0 \to 0, 1 \to 0$$

Следствие 29.1.1. A — область целостности.

$$f, g \in A[x], |A| > \max(degf, degg)$$

Тогда, если $\tilde{f} = \tilde{g}$, то $f = g$.
▶ f - g

$$f \tilde{-} g = \tilde{f} - \tilde{g} \text{ — тождественно не нулевое отображение}$$

$$\forall c \in A, f(c) - g(c) = 0$$

Число корней $f - g > deg(f - g) \Rightarrow f - g = 0$ ◀
Следствие 29.1.2. Если A — область целостности.
$|A| = \infty$ и $\tilde{f} = \tilde{g}$, то и $f = g$

30. Алгебраические замкнутые поля

$\mathfrak{Def}$: Поле A — алгебраически замкнуто, если любой $f \in A[x] \backslash A$ имеет в A хотя бы 1 корень.
Теорема 30.1. Следующие условия равносильны.

1. A — алгебраически замкнуто.

2. $\forall f \in A[x]$ с $\deg f \geq 1$ делится на линейный многочлен.

3. $\forall f \in A[x]$ с $\deg f \geq 1$ имеет $degf$ корней (с учетом кратности).

4. $\forall f \in A[x]$ с $degf \geq 1$ полностью раскладывается на линейные множества в колце многочленов.

▶ $1 \Leftrightarrow 2$(следствие теоремы Безу)
$3 \Rightarrow 1$ очевидно.
$1 \Rightarrow 3$ Индукция и $degf$

1. **База:** $degf = 1$

   $ax = b$

   $x = \frac{b}{a}$ — корень.

2. **Переход:** $fdegf \geq 2$

   $\exists c \in A$ корень f кратности $k \geq 1, f = (x-c)^k g$

   По индукционному предположению число корней g = deg g.

   Все корни f отличные от c это в точности корни g, причем той же кратности.

   Число корней $f = k+$ число корней g = k + deg g = deg f.

   $4 \Rightarrow 2$ очевидно.

   $2 \Rightarrow 4$ индукция по deg f.

◀

31. Метод Ньютона

𝔇𝔢𝔣: A — поле.

x_1	$x_2 \dots$	x_n
y_1	$y_2 \dots$	y_n

$x_i \neq x_j$
Интерполяционная задача: найти многочлен f, deg f< n, $f(x_i) = y_i, i = 1, \dots, n$
Пусть f имеет решение f

$$g = (x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$f_1 = f + gh$ — тоже решение.
$f_1(x_1) = f(x_i) + g(x_i)h(x_i) = f(x_i) = y_i$
Теорема 31.1. Единственность. В данной постановке задача имеет не более одного решения.
▶ Пусть f, f_1 — решение одной задачи.
$f(x_i) = f_1(x_i) = y_i, degf, degf_1 < n$
$f - f_1$ принимают 0 в $x_1 \dots x_n$
$deg(f - f_1) < n \Rightarrow f - f_1 = 0 \Rightarrow f = f_1$ ◀

Метод Ньютона

x_1	$x_2 \dots$	x_n
y_1	$y_2 \dots$	y_n

$f_i(x), degf_i < i$
f_i решает интерприционную задачу на первых i точках.

1. i = 1 $f_1(x) = y_1$

2. $i \to i + 1$

$$f_i \to f_{i+1}$$
$$f_{i+1}(x) = f_i(x) + c_i(x - x_1) \dots (x - x_i)$$
$$y_{i+1} = f_{i+1}(x_{i+1}) = f_i(x_{i+1}) + c_i(x_{i+1} - x_1) \dots (x_{i+1} - x_i)$$
$$c_i = \frac{y_{i+1} - f_i(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_1) \dots (x_{i+1} - x_i)}$$
$$degf_{i+1} < i + 1$$

REM: $c_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

32. Метод Лагранжа

x_1	$x_2 \ldots x_i$	x_n
0	0 ...1	0

$degL_i < n$

$L_i = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_n)}$

x_1	$x_2 \ldots$	x_n
y_1	$y_2 \ldots$	y_n

$$f = y_1L_1 + y_2L_2 + \ldots + y_nL_n$$

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_jL_j(x_i) = y_iL_i(x_i) = y_i$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} y_kL_k$$

$$L_k(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_n)}$$

$$g(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

Числитель $L_k = \frac{g(x)}{(x-x_k)}$

$$g'(x) = 1(x-x_2) * \ldots * (x-x_n) +$$

$$(x-x_1)1\ldots(x-x_n) + \ldots$$

$g'(x_k)$ — знаменатель L_k $degf \le n$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{g(x)}{(x-x_k)g'(x_k)}$$

33. Биномиальная формула

$\mathfrak{Def}$: Кольцо многочленов от n переменных.

$$(((A[x_1])[x_2])[x_3]\ldots)[x_n]$$

$$(A[x_2])[x_1] = (A[x_1])[x_2]$$

$$x_1 \to x_1$$

$$x_2 \to x_2$$

$$\sum c_{i_1,i_2}x_1^{i_1}x_2^{i_2}$$

$A[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов от нескольких переменных.

$$\sum c_{i_1,\ldots,i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$$

Биномиальная формула: $(x = y)^n = ?$ **Биномиальные коэффициенты:** $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Лемма 33.1.

1. $C_n^0 = 1$

2. $C_n^n = 1$

3. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

4. $C_n^k = C_n^{n-k}$

▶

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(k+1)!\,...\,(n-k)!} = \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = C_{n+1}^{k+1}$$

◀

$\mathfrak{Def}:$

-	0	1	2	3	4
0	1	-	-	-	-
1	1	1	-	-	-
2	1	2	1	-	-
3	1	3	3	1	-
4	1	4	6	4	1

Теорема 33.1. Биномиальная формула.

$$(x+y)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

▶ Индукция по n

1. n = 0

$$1 = C_0^0 x^0 y^0 = 1$$

2. n = 1

$$x + y = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1$$

3. $n \to n+1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k) x^k y^{n-k})(x+y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} =$$

$$= C_n^n x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} + C_n^0 y^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^k y^{n-k+1} + C_{n+1}^0 y^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^{k-1}) x^k y^{n+1-k} + C_{n+1}^0 y^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k x^k y^{n+1-k}$$

◀

Следствие 33.1.1.

1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^k$
2. $\sum_{k\text{четное}} C_n^k = 2^{n-1}$
3. $\sum_{k\text{нечетное}} C_n^k = 2^{n-1}$

34. Конструкция комплексных чисел, как множества пар.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

- $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a,b) + (c,d) \mapsto (a+c, b+d)$$

- $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(a,b) * (c,d) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$$

Теорема 34.1. $\mathbb{R}^2$ с введёнными операциями является полем.
$\mathfrak{Def}$: Это поле называется полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (Complex).
▶

1. $0_c = (0,0)$
2. $-(a,b) = (-a,-b)$
3. $(1,0) * (a,b) = (a,b)$
4. $(a,b) \neq 0$, $(a,b)^{-1}$

$$(a,b)^{-1} = (c,d) \Leftrightarrow (a,b) * (c,d) = (1,0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2+b^2)c = a \\ (a^2+b^2)d = -b \end{cases}$$

Найденные значения корректны, так как $(a,b) \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$.

◀

35. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Комплексное сопряжение. Свойства комплексного сопряжения.

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$: $a \mapsto (a,0)$ - инъективный гомоморфизм колец:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$
$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

$$\mathbb{C} \supset \varphi(\mathbb{R}) = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$\varphi(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$$

Поэтому говорят, что $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, имея в виду, что $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$.

$$i = (0, 1) \Rightarrow i^2 = (-1, 0) = -1$$

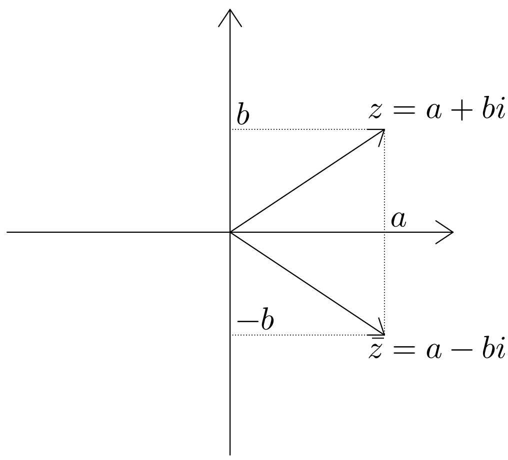
$\mathfrak{Def}$: Алгебраическая форма записи:

$$(a, b) = (a, 0) * (1, 0) + (b, 0) * (0, 1) = a + bi$$

a называется вещественной частью комплексного числа, b — мнимой частью.

$$a = \operatorname{Re} z \quad b = \operatorname{Im} z$$

$\mathfrak{Def}$: $z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. $\bar{z}$ называется комплексно сопряжённым с z, если $\bar{z} = a - bi$.
REM: Сопряжение $\sim$ симметрия относительно вещественной оси.



Свойства:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

3'. $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ (По индукции из свойства 3)

4. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

4'. $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$ (По индукции из свойства 4)

5. $f \in \mathbb{R}[x]$ $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ Тогда: $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$
6.
   - $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
   - $z\bar{z} \in \mathbb{R}$, $z\bar{z} \geq 0$
   - $z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$

   Два последних пункта следуют из того, что $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

   ▶ Только 5 свойство:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

$$\overline{f(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} = \bar{a}_0 + \overline{a_1 z} + \dots + \overline{a_n z^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \dots + \bar{a}_n \overline{z^n} =$$
$$= a_0 + a_1 \bar{z} + \dots + a_n \bar{z}^n = f(\bar{z})$$

◀

$\bar{z}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — гомоморфизм:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 z_1} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$\overline{z} \circ \overline{z} = id_{\mathbb{C}}$, поэтому сопряжение — нетождественный изоморфизм из $\mathbb{C}$ на себя (автоморфизм).

$\mathfrak{Def}$: Автоморфизм — изоморфизм поля с самим собой.

7. $z \neq 0$: $z\bar{z} = |z|^2$, $|z| \neq 0$.

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

PS: определение и проч. про модуль в следующем вопросе.

36. Модуль комплексного числа. Мультипликативность модуля. Произведение двух сумм двух квадратов.

$$\forall z = a + bi \in \mathbb{C}\colon z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$\mathfrak{Def}$: Модуль комплексного числа

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Свойство: $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$

▶

$$z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$$
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

◀

REM: Для $\mathbb{Z}[a, b, c, d]$(кольцо многочленов) тоже верно.

Напоминание: φ называется мультипликативной, если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Таким образом, модуль мультипликативен.

Вопрос: При каких k имеет место

$$(a_1^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2) = c_1^2 + \dots + c_k^2$$

где c_i — полиномы от a_j и b_l?

Ответ: Только для $k \in \{1, 2, 4, 8\}$.

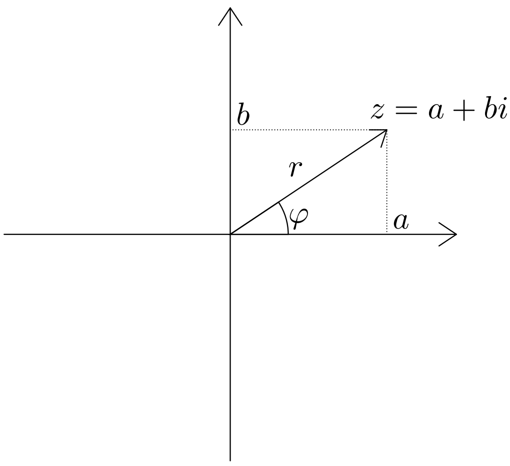
$k = 1$: мультипликативность $|\mathbb{R}|$

$k = 2$: мультипликативность $|\mathbb{C}|$

$k = 4$: мультипликативность модуля кватернионов

$k = 8$: мультипликативность модуля октав

37. Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи. Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.



$z \in \mathbb{C}$, $z = a + bi \Rightarrow (a, b)$ — координата в декартовой системе координат. В полярной системе координат два других параметра: r — радиус, φ - угол.

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$$

Пары (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi k)$ определяют одну и ту же точку на комплексной плоскости.

$$\sim: \varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Это эквиваленция. Тогда все равнозначные значения образуют классы эквиваленции.

$\mathfrak{Def}$: Аргументом комплексного числа z называют множество возможных значений φ. Главным аргументом называют представителя этого множества из диапазона $[0, 2\pi)$

$$\operatorname{Arg} z = [\varphi] = \{\varphi \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi \wedge \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi\}$$
$$\arg z \in [\varphi] \cap [0, 2\pi)$$

REM: Собственно, в каком полуинтревале выбирать главный аргумент — вопрос выбора.

Пусть $z = a + bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $argz = ?$:

1. $a > 0, b \geq 0$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

2. $a > 0, b < 0$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \arg z = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

3. $a < 0$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

4. $a = 0, b > 0$

$$\arg z = \frac{\pi}{2}$$

5. $a = 0, b < 0$

$$\arg z = \frac{3\pi}{2}$$

$\mathfrak{Def}$: Тригонометрическая форма записи числа

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

где r — модуль ($r \geq 0$), а φ — аргумент комплексного числа.

$$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

В тригинометрической форме числа трудно складывать и вычитать, но легко умножать и делить: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда:

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)) =$$
$$= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2| \quad \operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

38. Неравенство треугольника

Теорема 38.1.

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Причём:

1. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1$ и z_2 лежат на одном луче, проведённом из начала координат.
2. $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow z_1$ и z_2 лежат на дополнительных лучах, проведённых из начала координат.
3. $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2|| \Leftrightarrow z_1$ и z_2 лежат на дополнительных лучах, проведённых из начала координат.
4. $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2|| \Leftrightarrow z_1$ и z_2 лежат на одном луче, проведённом из начала координат.

▶ Так как все величины неотрицательны, то исходной неравенство равносильно следующему:

$$(|z_1| - |z_2|)^2 \leqslant (z_1 \pm z_2)^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$$

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_2)$

$$(z_1 \pm z_2)^2 = (r_1\cos\varphi_1 \pm r_2\cos\varphi_2)^2 + (r_1\sin\varphi_1 \pm r_2\sin\varphi_2)^2 =$$
$$= r_1^2\cos^2\varphi_2 \pm 2r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + r_2^2\cos^2\varphi_2 + r_1^2\sin^2\varphi_1 \pm 2r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + r_2^2\sin^2\varphi_2 =$$
$$= r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1^2 + r_2^2 \pm 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$|z_1 \pm z_2|^2 \leqslant r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 = (r_1 + r_2)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

1. Если знак $+$, то равенство $\Leftrightarrow \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, то есть z_1 и z_2 лежат на одном луче.
2. Если знак -, то равенство $\Leftrightarrow \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1 \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}$, то есть z_1 и z_2 лежат на дополнительных лучах.

Левое неравенство — аналогично через

$$|z_1 \pm z_2|^2 \geqslant r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 = (r_1 - r_2)^2 = (|z_1| - |z_2|)^2$$

◀

39. Формула Муавра

Теорема 39.1. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

▶

- Если $n \in \mathbb{N}$, то очевидно из умножения в тригинометрической форме.
- Если $n = 0$, то написано $1 = 1$.
- Если $n = -1$:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r\overline{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{r^2} = r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

- Если $n < 0$:

$$z^n = \left(z^{-1}\right)^n = \left(r^{-1}(\cos -\varphi + i\sin -\varphi)\right)^{|n|} =$$
$$= r^{-|n|}(\cos(-|n|\varphi) + i\sin(-|n|\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

◀

40. Извлечение корней n-й степени из комплексного числа

$\mathfrak{Def}$: $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

$$w \in \mathbb{C} \colon w^n = z$$

w — корень n-й степени из z.

- $z = 0 \Rightarrow w^n = 0$. $r = |w| \wedge r^n = 0 \Rightarrow r = 0 \Rightarrow w = 0$.
- $z \neq 0$. $|z| = R$, $\arg z = \varphi$. $r = |w|$, $\psi = \arg w$.

$$w^n = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z \Rightarrow r^n = R, r = \sqrt[n]{R}$$
$$n\psi = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}$$
$$w_k = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k \in \mathbb{Z}$$

Рассмотрим k и k' такие, что

$$k = ns + k', 0 \leqslant k' < n$$

Тогда $w_k = w_{k'}$, так как $\arg w_k = \arg w_{k'} + 2\pi s$. Значит, мы можем рассматривать только $k = 0..(n-1)$. При таких k аргументы попарно неэквивалентны.

Если корни n-й степени есть, то их не более n, и они совпадают с какими-то из чисел $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$. Но все w_k являются корнями, значит корней ровно n, и они ровно такие. Второй вариант доказать, что корней не более n — рассмотреть многочлен. w — корень, тогда w — корень многочлена $t^n - z$, а корней многочлена не больше n.

41. Корни из 1. Первообразные корни из 1.

$\mathfrak{Def}$: ε — корень из 1 степени n, если

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0..(n-1)$$

$\mathfrak{Def}$: ε — первообразный корень единицы степени n, если ε не является корнем меньшей степени.
Утверждение. ε — первообразный корень степени n тогда и только тогда, когда $(n, k) = 1$.
▶ Если дробь $\frac{k}{n}$ сократима, то

$$\frac{k}{n} = \frac{k'}{n'}; n' < n$$

Но тогда ε - корень степени n':

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi k'}{n'} + i\sin\frac{2\pi k'}{n'}$$

◀

Следствие 41.0.1. Число первообразных корней степени n из 1 равно функции Эйлера

$$\varphi(n) = |\{k \mid 1 \le k \le n, (k, n) = 1\}|$$

n	все корни	первообразные корни	$\varphi(n)$
1	1	1	1
2	$1, -1$	-1	1
3	$1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$	2
4	$\pm 1, \pm i$	$\pm i$	2
6	$\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$	2
8	Упражнение		
12	Упражнение		

Для $n = 6$:

$$x^6 - 1 = (x^2)^3 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x + 1)$$

Упражнения:

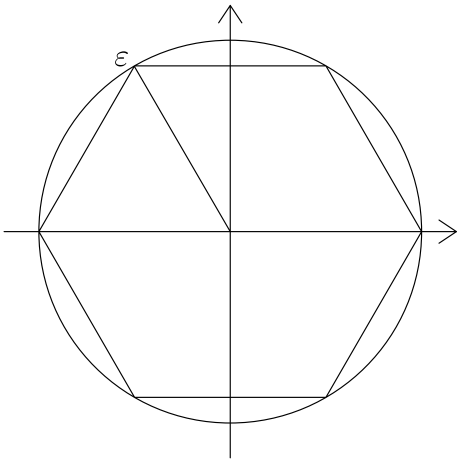
1. $n > 2 \Rightarrow \varphi(n)$ — чётно.

2. $n = const$, $G_n = |\{\varepsilon \mid \varepsilon$ — корень из 1 степени $n\}|$. Тогда $|G_n| = n \Rightarrow G_n$ — группа по умножению и $G_n \cong C_n$.

3. $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Доказать, что S — группа относительно умножения.

4. $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ Доказать, что G - группа. Доказать, что в G есть счётная система образующих, но нет конечной системы образующих. Доказать, что каждый элемент G имеет конечный порядок.

Геометрический смысл:



Корни из 1 лежат в вершинах правильного n— угольника, вписанного в круг радиуса 1.

$\varepsilon \in G_n$, $f\colon z \mapsto \varepsilon z$, тогда f — это поворот на угол $\arg \varepsilon = \frac{2\pi k}{n}$

42. Приложение комплексных чисел

42.1. Суммы косинусов и синусов

$$A = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + ... + \cos n\varphi$$
$$\varphi \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$B = 0 + \sin\varphi + \sin 2\varphi + ... + \sin n\varphi$$
$$A + Bi = 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \cdots + (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) =$$
$$= 1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + \cdots + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$A + Bi = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \overset{z\neq 1}{=\!=} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$
$$A = \operatorname{Re}\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, B = \operatorname{Im}\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$z = w^2, w = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}$

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - w^{2(n+1)}}{1 - w^2} = \frac{w^{2(n+1)} - 1}{w^2 - 1} = \frac{w^{n+1}}{w}\frac{w^{n+1} - w^{-(n+1)}}{w - w^{-1}} =$$
$$= w^n \frac{w^{n+1} - \bar{w}^{n+1}}{w - \bar{w}} = \left(\cos\frac{n\varphi}{2} + i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)\frac{2i\sin\frac{\varphi(n+1)}{2}}{2i\sin\frac{\varphi}{2}}$$
$$A = \frac{\cos\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}; B = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

42.2. Понижение степени

$$\cos^n\varphi; \sin^n\varphi$$
$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$
$$z^{-1} = \bar{z}; \cos\varphi = \frac{z+z^{-1}}{2}$$
$$\cos^n\varphi = (\frac{z+z^{-1}}{2})^n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}(z^{-1})^k = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-2k} =$$
$$= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{0\leqslant k<\frac{n}{2}}\binom{n}{k}z^{n-2k} + \sum_{\frac{n}{2}<k\leqslant n}\binom{n}{k}z^{n-2k} + \begin{cases}\binom{n}{\frac{n}{2}} & n \text{ четно}\\ 0, & n \text{ нечетно}\end{cases}\right)$$

$n-k \leftrightharpoons k'$, $\frac{n}{2} < k \leqslant n \Rightarrow 0 \leqslant k' < \frac{n}{2}; \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k'}; z^{n-2k} = z^{n-2(n-k')} = z^{-(n-2k')}$

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{0\leqslant k<\frac{n}{2}}\binom{n}{k}\left(z^{n-2k}+z^{-(n-2k)}\right) + \begin{cases}\binom{n}{\frac{n}{2}} & n \text{ четно}\\ 0 & n \text{ нечетно}\end{cases}\right)$$

$z^{n-2k} + z^{-(n-2k)} = 2\cos(n-2k)\varphi$

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{0\leqslant k<\frac{n}{2}}\binom{n}{k}\cos(n-2k)\varphi + \begin{cases}C_n^{\frac{n}{2}} & n \text{ четно}\\ 0 & n \text{ нечетно}\end{cases}\right)$$

43. Многочлены Чебышева

Теорема 43.1. Существуют многочлены $T_n(x)$, $U_n(x)$ такие, что:

- $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$
- $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = U_n(\cos\varphi)$ при $\varphi \neq 2\pi k$
- $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
- $U_0(x) = 0$, $U_1(x) = 1$, $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$

$\mathfrak{Def}$: Многочлены T_n и U_n называются многочленами Чебышева первого и второго рода соответсвенно.

Пример:

$$\begin{array}{ll}
T_0(x) = 1 & \cos 0\varphi = 1\\
T_1(x) = x & \cos 1\varphi = \cos\varphi\\
T_2(x) = 2x^2 - 1 & \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1\\
T_3(x) = 4x^3 - 3x & \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\\
U_0(x) = 0 & \dfrac{\sin 0\varphi}{\sin\varphi} = 0
\end{array}$$

$$U_1(x) = 1 \qquad \frac{\sin 1\varphi}{\sin\varphi} = 1$$

$$U_2(x) = 2x \qquad \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos\varphi$$

$$U_3(x) = 4x^2 - 1 \qquad \sin 3\varphi = (4\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi$$

▶ U_n, T_n — многочлены с целыми коэффициентами по их заданию. $\deg T_n = n$, $\deg U_n = n - 1$ (индукция по n).

Докажем $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$ индукцией по n.

База: $n = 0, 1$.

Переход:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos(n+1)\varphi = \frac{z^{n+1} + z^{-(n+1)}}{2} = (z + z^{-1})\frac{z^n + z^{-n}}{2} - \frac{z^{n-1} + z^{-(n-1)}}{2} =$$

$$= 2\cos\varphi\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi = 2\cos\varphi\, T_n(\cos\varphi) - T_{n-1}(\cos\varphi) = T_{n+1}(\cos\varphi)$$

Таким образом, для T_n всё доказано.

Доказательство для U_n: аналогично через

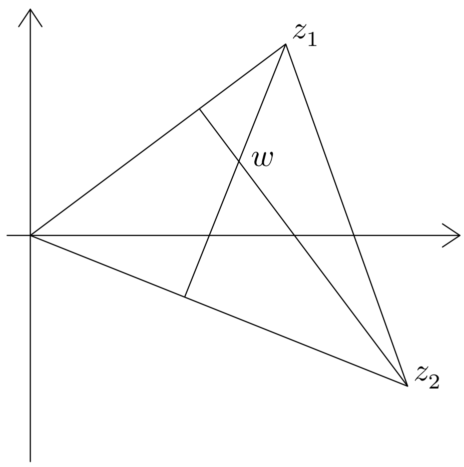
$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}$$

◀

44. Теорема о пересечении высот треугольника

Теорема 44.1. Высоты треугольника. 3 высоты треугольника пересекаются в одной точке.

▶



$(a, b), (c, d)$ — точки. Тогда $(a, b) \perp (c, d) \Leftrightarrow ac + bd = 0$ — скалярное произведение.

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di, \operatorname{Re}(z_1\bar{z_2}) = ac + bd$$

Известно, что $(z_1 - w) \perp z_2$ и $(z_2 - w) \perp z_1$.

Надо доказать, что $w \perp z_1 - z_2$.

$$\begin{cases} z_1 - w \perp z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}((z_1 - w)\bar{z_2}) = 0 \\ z_2 - w \perp z_1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}((z_2 - w)\bar{z_1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1} + w(\bar{z_1} - \bar{z_2})) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1}) + \mathrm{Re}(w(\overline{z_1 - z_2})) = 0$$

$z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1}$ — чисто мнимое, поэтому

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2} - z_2\bar{z_1}) \Longrightarrow \mathrm{Re}(w(\overline{z_1 - z_2})) = 0$$

◀

Упражнение:

1. Медианы.
2. Биссектрисы.

45. Матрицы. Действия над матрицами.

$\mathfrak{Def}$: R — кольцо. Матрицей называется таблица элементов кольца

$$(a_{ij}) = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{Def}$: Множество матриц заданного размера (m строк, n столбцов) на данном кольце R

$$M(m,n,R) = \left\{(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}\right\}$$

$\mathfrak{Def}$: Сложение матриц

$$+\colon M(m,n,R) \times M(m,n,R) \to M(m,n,R)$$

$$(a_ij) + (b_ij) \mapsto (a_{ij} + b_{ij})$$

Лемма 45.1. $\langle M(m,n,R), +\rangle$ есть абелева группа.

$\mathfrak{Def}$: Транспонирование — переворот матрицы

$$^T\colon M(m,n,R) \to M(n,m,R)$$

$$(a_{ij})^T = (a_{ji})$$

$\mathfrak{Def}$: Умножение матриц

$$\times\colon M(m,n,R) \times M(n,k,R) \to M(m,k,R)$$

$$(a_ij) \times (b_ij) = (c_ij)$$

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}$$

Умножение можно запомнить как «строка на столбец».

Почему же умножение именно такое? Рассмотирм систему линейных преобразований

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2m}x_m \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m \end{array}\right.$$

Теперь её можно записать как

$$(a_{ij})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

Также, если мы аналогично выразим

$$(b_{ij})\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

то результирующее преобразование

$$(c_{ij})\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

можно выразить как

$$(c_{ij})=(a_{ij})(b_{ij})$$

Теорема 45.1. Свойства умножения матриц.

1. $A\colon n\times m$, $B\colon m\times k$, $C\colon k\times l$
$$A(BC)=(AB)C$$
2. $A,B\colon n\times m$, $C\colon m\times k$
$$(A+B)C=AC+BC$$
3. $A,B\colon n\times m$, $C\colon k\times n$
$$C(A+B)=CA+CB$$
4. $A\colon n\times m$, $B\colon m\times k$, R коммутативное кольцо.
$$(AB)^T=B^TA^T$$

▶ Надо расписывать суммы

1. $BC\leftrightharpoons D\colon m\times l$, $AD\leftrightharpoons E\colon n\times l$, $AB\leftrightharpoons F\colon n\times k$, $FC\leftrightharpoons G\colon n\times l$. Таким образом, E и G совпадают размерами.
$$e_{ij}=\sum_{x=1}^{m}a_{ix}d_{xj}=\sum_{x=1}^{m}a_{ix}\left(\sum_{y=1}^{k}b_{xy}c_{yj}\right)=\sum_{x=1}^{m}\sum_{y=1}^{k}a_{ix}b_{xy}c_{yj}$$
$$g_{ij}=\sum_{y=1}^{k}f_{iy}c_{yj}=\sum_{y=1}^{k}\left(\sum_{x=1}^{m}a_{ix}b_{xy}\right)c_{yj}=\sum_{y=1}^{k}\sum_{x=1}^{m}a_{ix}b_{xy}c_{yj}$$
Таким образом $e_{ij}=g_{ij}$
2.
$$((A+B)C)_{ij}=\sum_{x=1}^{m}(A+B)_{ix}c_{xj}=\sum_{x=1}^{m}(a_{ix}+b_{ix})c_{xj}=\sum_{x=1}^{m}(a_{ix}c_{xj}+b_{ix}c_{xj})=$$
$$=\sum_{x=1}^{m}a_{ix}c_{xj}+\sum_{x=1}^{m}b_{ix}c_{xj}=(AC)_{ij}+(BC)_{ij}=(AC+BC)_{ij}$$

3. Аналогично

4.
$$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{x=1}^{m} a_{jx} b_{xi} = \sum_{x=1}^{m} b^T_{ix} a^T_{xj} = (B^T A^T)_{ij}$$

◀

Заметим, что умножение не коммутативно.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{Def}$: Умножение на скаляр:

$$\times \colon R \times M(m, n, R) \to M(m, n, R)$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

Теперь рассмотрим квадратные матрицы — матрицы, у которых количество строк и столбцов совпадают.

Теорема 45.2. Кольцо квадратных матриц. $M(n, n, R)$ — кольцо с единицей. Если $2 \mid n$, то в нём есть делители нуля.

Все необходимые свойства уже доказаны.

46. Матричная конструкция поля коплексных чисел

$$M(2, \mathbb{R})$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Утверждение. $\mathcal{C}$ — коммутативное кольцо с единицей.

▶ Операции замкнуты:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

Как видно, операции и коммутативны. Единица есть:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, — коммутативное подкольцо с единицей. ◀

Утверждение. $\mathcal{C}$ — поле.

▶ Найдём обратный:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} aa' - bb' = 1 \\ ab' + a'b = 0 \end{cases} \overset{a,b \neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a' = a\dfrac{1}{a^2 + b^2} \\ b' = -b\dfrac{1}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

◀

Утверждение.

$$\mathbb{C} \sim \mathcal{C}$$

▶ Отображение очевидно:

$$(a, b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Все операции переходят друг в друга, базовые операции (сложение, умножение на скаляр, перемножение) переходят в себя, сопряжение — в транспонирование. ◀

47. Тело квантернионов

$$M(2, \mathbb{C})$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$$

Теорема 47.1. Тело квантернионов. $\mathcal{H}$ — тело (поле без коммутативности умножения).

▶ Операции замкнуты:

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\bar{w}_1 - \bar{w}_2 & \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\overline{w_1 + w_2} & \overline{z_1 + z_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2 \\ -\bar{w}_1 z_2 - \bar{z}_1 \bar{w}_2 & -\bar{w}_1 w_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2 & z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2 \\ -\overline{z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2} & \overline{z_1 z_2 + w_1 \bar{w}_2} \end{pmatrix}$$

Свойства сложения уже видны. Единица есть. Найдём обратный:

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z' & w' \\ -\bar{w'} & \bar{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} zz' - w\bar{w'} = 1 \\ zw' + w\bar{z'} = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{z, w \neq 0} \begin{cases} z' = \bar{z} \dfrac{1}{|z|^2 + |w|^2} \\ w' = -w \dfrac{1}{|z|^2 + |w|^2} \end{cases}$$

◀

Коммутативности нет:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

48. Конструкция тела кватернионов как множества четверок вещественных чисел.

$$\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a\mathbb{1} + b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k}$$

$$\mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = -\mathbb{1}$$

$$\mathbb{i}\mathbb{j} = \mathbb{k} = -\mathbb{j}\mathbb{i}$$
$$\mathbb{j}\mathbb{k} = \mathbb{i} = -\mathbb{k}\mathbb{j}$$
$$\mathbb{k}\mathbb{i} = \mathbb{j} = -\mathbb{i}\mathbb{k}$$

$\mathfrak{Def}$: $\mathbb{H}$ — множество квантернионов как четвёрок вещественных чисел.

$$\mathbb{H} = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) + (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2)$$
$$(a_1, b_1, c_1, d_1)(a_2, b_2, c_2, d_2) =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2, a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - c_2d_1, a_1c_2 + a_2c_1 - b_1d_2 + b_2d_1, a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)$$

Оно натурально изоморфно $\mathscr{H}$.

49. Вещественная и мнимая часть квантернионов. Модуль.

$$\alpha = \underbrace{a\mathbb{1}}_{\text{вещественная}} + \underbrace{b\mathbb{i} + c\mathbb{j} + d\mathbb{k}}_{\text{мнимая}}$$

$\mathfrak{Def}$: Сопряжение

$$\bar{\alpha} = a\mathbb{1} - b\mathbb{i} - c\mathbb{j} - d\mathbb{k}$$

$$\alpha + \bar{\alpha} \in \mathbb{R}$$
$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in \mathbb{R}_+$$

$\mathfrak{Def}$: Модуль

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

50. Две суммы четырёх квадратов

Можно показать, что модуль мультипликативен.

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \Leftrightarrow (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) =$$

$$= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 +$$
$$+ (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2$$
