

Лекции по математическому анализу
Лектор: Храбров Александр Игоревич
Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

Содержание

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Множества | 5 |
| 2 | Бинарные отношения | 7 |
| 3 | Вещественные числа | 9 |
| 4 | Верхняя и нижняя граница | 11 |
| 5 | Теорема о вложенных отрезках | 12 |
| 6 | Метрические пространства | 12 |
| 7 | Неравенства Коши-Буняковского и Минковского | 13 |
| 8 | Открытые множества | 14 |
| 9 | Внутренние точки и внутренность множества | 14 |
| 10 | Замкнутые множества | 15 |
| 11 | Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве | 17 |
| 12 | Предельные точки | 18 |
| 13 | Супремум и инфимум замкнутых множеств | 19 |
| 14 | Предел последовательности | 19 |
| 15 | Предельный переход в неравенстве | 20 |
| 16 | Теорема о двух милиционерах | 21 |
| 17 | Предел монотонной последовательности | 21 |
| 18 | Конечное векторное пространство | 22 |
| 19 | Арифметические свойства предела | 23 |
| 20 | Покоординатная сходимость | 25 |
| 21 | Бесконечно малые и большие | 25 |
| 22 | Связь между бесконечно большими и малыми | 26 |
| 23 | Компактность | 27 |

| | | |
|----|---|----|
| 24 | Свойства компактного множества | 27 |
| 25 | Теорема о пересечении семейства компактов | 28 |
| 26 | Теорема о вложенных параллелепипедах | 28 |
| 27 | Теорема Гейне-Бореля | 29 |
| 28 | Подпоследовательность | 29 |
| 29 | Секвенциальная компактность | 29 |
| 30 | Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия | 30 |
| 31 | Диаметр множества | 30 |
| 32 | Фундаментальные последовательности | 31 |
| 33 | Полнота компактных метрических пространств | 32 |
| 34 | Верхний и нижний предел | 32 |
| 35 | Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε | 33 |
| 36 | Неравенство Бернулли | 34 |
| 37 | Число e | 34 |
| 38 | Сравнение скорости роста возрастания последовательностей | 35 |
| 39 | Теорема Штольца | 35 |
| 40 | Теорема Штольца | 36 |
| 41 | Пределы функций | 37 |
| 42 | Равносильность определения по Коши и по Гейне | 37 |
| 43 | Свойства функций, имеющих предел | 38 |
| 44 | Арифметические действия с пределами | 38 |
| 45 | Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах | 39 |
| 46 | Левый и правый пределы. Предел монотонной функции | 39 |
| 47 | Критерий Коши для отображений и для функций | 39 |
| 48 | Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа | 40 |
| 49 | Арифметические действия с непрерывными функциями | 41 |
| 50 | Характеристика непрерывности в терминах прообразов | 42 |
| 51 | Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное | 43 |

| | |
|---|----|
| 52 Непрерывность и компактность | 44 |
| 53 Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции | 45 |
| 54 Равномерная непрерывность на функции. Теорема Кантора | 45 |
| 55 Теорема Больцано-Коши | 46 |
| 56 Непрерывность тригонометрических функций | 47 |
| 57 Степенная функция | 47 |
| 58 Логарифм | 49 |
| 59 Следствия | 50 |
| 60 Сравнение функций | 51 |
| 61 Производная | 51 |
| 62 Геометрический смысл производной | 52 |
| 63 Односторонние производные | 53 |
| 64 Непрерывность дифференцируемой функции | 53 |
| 65 Арифметические действия с дифференцируемыми функциями | 54 |
| 66 Производная композиции | 54 |
| 67 Теорема о дифференцируемости обратной функции | 55 |
| 68 Производные элементарных функций | 56 |
| 69 Теоремы Ферма и Ролля | 56 |
| 70 Теоремы Лагранжа и Коши | 57 |
| 71 Следствия теоремы Лагранжа | 57 |
| 72 Теорема Дарбу | 59 |
| 73 Правило Лопиталя | 59 |
| 74 Производные высших порядков | 60 |
| 75 Арифметические действия с производными высших порядков | 61 |
| 76 Формула Тейлора | 61 |
| 77 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано | 62 |
| 78 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа | 63 |

| | | |
|----|--|----|
| 79 | Формула Тейлора для некоторых функций | 64 |
| 80 | Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа | 64 |
| 81 | Иррациональность числа e | 65 |
| 82 | Локальные максимумы и минимумы | 65 |
| 83 | Экстремумы функции | 65 |
| 84 | Достаточные условия экстремума | 66 |
| 85 | Выпуклость | 67 |
| 86 | Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции | 67 |
| 87 | Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных | 68 |
| 88 | Неравенство Йенсена | 69 |
| 89 | Неопределённый интеграл | 69 |
| 90 | Таблица интегралов | 71 |
| 91 | Замена переменной | 72 |
| 92 | Интегрирование по частям | 73 |

1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

Def: Множество A — подмножество B , если все элементы A содержатся и в B .

$$A \subset B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \ x \in B$$

Def: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge B \subset A$$

Def: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \ x \notin \emptyset$$

Def: 2^A — множество всех подмножеств A .

$$2^A \stackrel{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- \mathbb{N} — множество натуральных чисел.
- \mathbb{Z} — множество целых чисел.
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел.
- \mathbb{R} — множества вещественных чисел.
- \mathbb{C} — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}$, $\Phi(x)$ — условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ имеет ровно 2 натуральных делителя}\}$.

Бывают некорректно заданные «множества». Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как «Наименьший элемент множества...»

Def: Пересечение двух множеств — множество, состоящее из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

Def: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Def: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Def: Симметрическая разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \stackrel{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность

$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема 1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha); A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$



$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I : \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ \forall \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I: \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

Def: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Def: Упорядоченная n -ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i = b_i$$

Def: Декартово произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i \in A_i$$

2. Бинарные отношения

Def: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a R b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

Def: Область определения отношения

$$\beta_R = \text{dom}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in R\}$$

Def: Область значения отношения

$$\rho_R = \text{ran}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in R\}$$

Def: Обратное отношение

$$R^{-1}: \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b R^{-1} a \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a R b$$

Def: Композиция отношений

$$R_1: A \rightarrow B; R_2: B \rightarrow C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a R_1 b \wedge b R_2 c\}$$

Про значок \circ — его использовать не будем

Пример композиции: $<: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$< \circ < = \{(a, b) \mid b - a \geq 2\}$$

Def: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f: A \rightarrow B$$

$$a f b_1 \wedge a f b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a f b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A — \text{область определения})$$

Def: Свойства отображений:

1. Рефлексивность $a R a$
2. Симметричность $a R b \Leftrightarrow b R a$
3. Транзитивность $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$
4. Иррефлексивность $\neg a R a$
5. Антисимметричность $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- \equiv_5 : 1, 2, 3
- \leq : 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- \subset : 1, 3, 5

3. Вещественные числа

Def: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и \times , причём:

1. Коммутативность $\forall a, b \ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c \ a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o: \forall a \ a + o = a; \exists e: \forall a \ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a \ \exists -a: a + (-a) = o; \forall a \neq o \ \exists a^{-1}: a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c \ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения \leq (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \ a > 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}, A \cup B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

REM: На \mathbb{Q} аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема 3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N}: x < ny$$



$$A \Leftrightarrow \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}: u < ny\}; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \Leftrightarrow \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A — \text{противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geq c \Rightarrow y \leq 0 — \text{противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$

Следствие 3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$$

► Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$

Следствие 3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q}: x < r < y$$

►

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z}: m \leq nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \stackrel{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq nx\}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N}: \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмотрим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N}: k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \ m < k \Rightarrow \exists m = \max M: m \leq nx < m + 1$$

$$m \leq nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x \leq \frac{m + 1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leq x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m + 1}{n} < y$$

Следствие 3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x < z < y$$

►

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2}: z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: x < z < y \end{aligned}$$

4. Верхняя и нижняя граница

Def: $A \subset \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$ — верхняя граница A , если

$$\forall a \in A : a \leq x$$

$x \in \mathbb{R}$ — нижняя граница A , если

$$\forall a \in A : a \geq x$$

Def: A ограничено сверху, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — верхняя граница } A$$

A ограничено снизу, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — нижняя граница } A$$

A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A , если x — наименьшая из верхних границ.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A , если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. \mathbb{N} не ограничено сверху.

► x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀

Теорема 4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.

2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

►

1. B — множество всех верхних границ A .

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq c \wedge \forall b \in B : c \leq b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$ ◀

Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

2. A ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \geq c \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < c + \varepsilon)$$

►

$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0 : b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$
 ◀

5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall i \in \mathbb{N} (a_i \leq a_{i+1} \wedge b_i \geq b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

► $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

REM: Существенна замкнутость отрезков. ◀

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

REM: \mathbb{R} . Рассмотрим приближения $\sqrt{2}$.

6. Метрические пространства

Def: Пусть есть множество X и отображение $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Также пара (X, ρ) называется метрическим пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

2. $\rho(x, y) = |x - y|$

3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками

4. Манхеттанская метрика. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

5. Расстояния на сфере.

6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O . Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$

7. Пространство \mathbb{R}^n , метрика

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Def: Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ — подпространство X . $Y \subset X$.

Def: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$ — открытый шар.

Def: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$ — замкнутый шар.

Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

► Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$.

7. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского

Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

►

$$f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = \underbrace{\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right)}_{\Leftarrow A} t^2 - 2 \underbrace{\left(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)}_{\Leftarrow C} t + \underbrace{\left(b_1^2 + \dots + b_n^2 \right)}_{\Leftarrow B}$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leq 0 \Rightarrow 4(C^2 - AB) \leq 0 \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

►

$$a_i = \alpha b_i$$

\Leftrightarrow

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень } t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

Теорема 7.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$$

► Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i^2}_{\Leftarrow A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k b_i^2}_{\Leftarrow B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{AB} \Leftarrow$$

\Leftarrow Неравенство Коши-Буняковского

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

8. Открытые множества

Def: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G \exists r > 0: B_r(x) \subset G$$

Теорема 8.1. О свойствах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. \emptyset и X — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного** числа открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.



1. Очевидно.

- 2.

$$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n \ x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \ \exists r_k > 0: B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k: B_r(x) \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$

- 4.

$$\forall x \in B_r(a) \exists r_x = \frac{1}{2}(r - \rho(a, x))$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$



REM:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

9. Внутренние точки и внутренность множества

Def: $x \in A$ — внутренняя точка A , если $\exists r > 0: B_r(x) \subset A$

REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x .

Def: Внутренность множества A :

$$A^0 = \text{int } A \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\text{int } A \subset A$

2. $\text{int } A$ — множество всех внутренних точек.
3. $\text{int } A$ открыто.
4. A открыто $\Leftrightarrow A = \text{int } A$
5. $A \subset B \Rightarrow \text{int } A \subset \text{int } B$
6. $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7. $\text{int int } A = \text{int } A$

10. Замкнутые множества

Def: Замкнутое множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема 10.1. О свойствах замкнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. \emptyset и X — замкнуты.
2. Перечисление замкнутых — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых замкнуто.
4. Замкнутый шар замкнут.



1. Очевидно
2. По формулам де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_{\alpha})$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению

$$\rho(a, x) > r$$

Покажем, что

$$B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$

Пусть $\exists y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда

$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leq r$$

$$y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1 \right] = (0; 1]$$

Def: $A \subset X, (X, \rho)$. Тогда замыкание множества A — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

$$\text{cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.

$$X \setminus \text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

$$X \setminus \text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\begin{aligned} X \setminus \text{cl } A &= X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) \\ X \setminus F &\text{ открыто} \\ X \setminus F &\subset X \setminus A \end{aligned}$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \text{int}(X \setminus A)$$

Аналогично

Следствие 10.2.1.

$$\text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A \subset \text{cl } A$
2. $\text{cl } A$ замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{cl } A$
4. $A \subset B \Rightarrow \text{cl } A \subset \text{cl } B$
5. $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$
6. $\text{cl cl } A = \text{cl } A$

11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема 11.1. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X; \rho)$ — пространство, $(Y; \rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в X : $A = G \cap Y$
2. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в X : $A = F \cap Y$



1. \Rightarrow :

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A$$

$$G \Leftarrow \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A$$

\Leftarrow :

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к дополнениям

Теорема 11.2. О замыканиях. (X, ρ) , $A \subset X$

$$x \in \text{cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

► \Rightarrow : Пусть $\exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замкнуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\text{cl } A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \text{cl } A$$

\Leftarrow : Пусть $x \notin \text{cl } A \Rightarrow \exists F \supset A: x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$$

Следствие 11.2.1. U открытое $\wedge U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \text{cl } A = \emptyset$

► Пусть $x \in U \cap \text{cl } A$.

$$x \in \text{cl } A \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0: B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

12. Пределные точки

Def: Проколота окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

Def: Точка $x \in X$ предельная у множества A , если

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

Def: A' — множество предельных точек.

Свойства:

1. $\text{cl } A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

► \supset :

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$

$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

\subset : Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0: \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leq r_0 \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

Тогда

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 |B_r(x) \cap A| = \infty$$

►

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A: y_1 \neq x \wedge y_1 \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x, y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A: y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y_2 \in B_{\rho(x, y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}: y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

Следствие 12.1.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.

A ограничено сверху и замкнуто $\Rightarrow \sup A \in A$

A ограничено снизу и замкнуто $\Rightarrow \inf A \in A$

► $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A \ x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$



14. Предел последовательности

Def: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i) . Тогда

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x$
- $\mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема 14.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некоторого элемента
2. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограничена
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$



1. \Rightarrow : Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0: B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U$$

$$\Leftarrow: U \ni B_\varepsilon(x^*).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \Leftarrow \frac{\rho(x^*; x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1 \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2 \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall n \geq \max\{N_1; N_2\} \left\{ \begin{array}{l} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leq \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

3. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n < N} \{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n \ x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} x_1 &\in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_2 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2}; \rho(x; x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_3 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3}; \rho(x; x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ &\vdots \\ x_n &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n}; \rho(x; x_{n-1})\}}(x) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall n \geq N \ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n .

REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$

REM:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \text{cl } A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x - y|)$.

15. Предельный переход в неравенстве

Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leq y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leq y$.

► Пусть $y < x; \varepsilon \Leftarrow \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

РЕМ: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

РЕМ: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие 15.1.1. $x_n \leq b \Rightarrow x \leq b$

Следствие 15.1.2. $x_n \geq a \Rightarrow x \geq a$

Следствие 15.1.3. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

16. Теорема о двух милиционерах

Теорема 16.1. О двух милиционерах. Пусть $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

► Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \forall n \geq N l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$

Следствие 16.1.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leq z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие 16.1.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограничена, то $\lim x_n y_n = 0$.

17. Предел монотонной последовательности

Def: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

► \Leftarrow : Очевидно.

\Rightarrow : Пусть (x_n) возрастает. Она ограничена, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k: x_k > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq a$$

Тогда

$$\forall n \geq k |x_n - a| < \varepsilon$$

18. Конечное векторное пространство

Def: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$$

1. Сложение

(a) Коммутативно

(b) Ассоциативно

(c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_d$

(d) Существует обратный элемент

2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

5. $1x = x$

Def: Общее определение векторного пространства —

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\times : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

Def: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Def: Общее определение скалярного произведения: X — векторное пространство. Задана операция $\langle x, y \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ обладающая указанными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

Def: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковского)
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)
5. $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)
6. $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

► $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|$$

А это неравенство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространство на \mathbb{R}^d .

Def: Общее определение нормы: $\|x\|: X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скалярного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|$
2. $\|x\|_\infty = \max_{k=1..d} |x_k|$



$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leq \max_{k=1..d} (|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leq \|x\| + \|y\|$$



- 3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^d |x_k|^p}$$

19. Арифметические свойства предела

Пусть есть (\mathbb{R}^d, ρ) со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$



$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$



REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограничено $\Leftrightarrow \exists M: \forall x \in A \|x\| \leq M$

Теорема 19.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, \lim x_n = x_0, \lim y_n = y_0, \lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3: \forall n > N_3 |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = \\ &= |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \leq M \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Но тогда

$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}); y_n = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)})$ Это докажем позже

5.

$$0 \leq \|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

► Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n| |y_0|} \Leftrightarrow A$$

$$\exists N_1: \forall n > N_1 |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geq |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|}$$

20. Покоординатная сходимость

Def: $\{x_n\}$ — последовательность в \mathbb{R}^d . Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}: \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема 20.1. О сходимости покоординатно. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.



$$|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})^2} \leq \sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})$$



Следствие 20.1.1. $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$



$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \rightarrow y_n^{(i)} \\ y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \rightarrow y_0^{(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow \sum_{i=1}^d x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$$



21. Бесконечно малые и большие

Def:

$$\lim x_n = +\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array} \Rightarrow \lim x_n = \infty \right.$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единственность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух милиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$1. \pm c + \pm\infty = \pm\infty$$

$$2. \pm c - \pm\infty = \mp\infty$$

$$3. c > 0: \pm\infty \times c = \pm\infty$$

$$4. c < 0: \pm\infty \times c = \mp\infty$$

$$5. c > 0: \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$$

$$6. c < 0: \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$$

$$7. \frac{c}{\pm\infty} = 0$$

$$8. (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$9. (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$10. (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$11. (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$12. \pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$$

$$13. \pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$$

Def: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечен.

Def: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

22. Связь между бесконечно большими и малыми

Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists N: \forall n > N |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограничена. Тогда

$$1. x_n \pm y_n \text{ — бесконечно малая}$$

$$2. x_n z_n \text{ — бесконечно малая}$$

Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

$$1. x_n \rightarrow +\infty \wedge y_n \text{ ограничена снизу} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$$

$$2. x_n \rightarrow -\infty \wedge y_n \text{ ограничена сверху} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$$

$$3. x_n \rightarrow \infty \wedge y_n \text{ ограничена} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow \infty$$

$$4. x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$$

$$5. x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \leq a < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow -\infty$$

$$6. x_n \rightarrow \infty \wedge |y_n| \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$$

$$7. x_n \rightarrow a \neq 0 \wedge y_n \rightarrow 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$$

$$8. x_n \text{ ограничена} \wedge y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

9. $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$ ограничена $\wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \geq a$$

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \leq a$$

23. Компактность

Def: Множество A имеет покрытие множествами B_α , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Def: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Def: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\forall B_\alpha: K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n: K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$$

Теорема 23.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

► \Rightarrow : Пусть B_α — открытое в Y , что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соответствующими множествами в X , выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y .

\Leftarrow : Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y , в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X . ◀

REM: Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

24. Свойства компактного множества

Теорема 24.1. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограничено.

►

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограничено}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \Leftarrow \min_{i=1}^k \{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\})$

$$\forall i = 1..k \ B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема 24.2. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

► Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

25. Теорема о пересечении семейства компактов

Теорема 25.1. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

► K_0 — любое из них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^k (X \setminus K_{x_i}) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^k K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

Следствие 25.1.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто. ◀

26. Теорема о вложенных параллелепипедах

Def: Параллелепипедом на \mathbb{R}^d и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i \leq x_i \leq b_i\} \quad (\text{закрытый})$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i < x_i < b_i\} \quad (\text{открытый})$$

Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ имеют непустое пересечение.

► Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

27. Теорема Гейне-Бореля

Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля. Замкнутый куб компактен



$$I = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ 0 \leq x_i \leq a\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобьём куб по какому-то измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покрывает ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрывает куб. ◀

28. Подпоследовательность

Def: Подпоследовательность:

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.

Подпоследовательность имеет тот же предел.

Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

29. Секвенциальная компактность

Теорема 29.1. Компактность в \mathbb{R}^d . Следующее в \mathbb{R}^d равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограничено
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (*секвенциально компактно*)

► $2 \Rightarrow 1$: ограничено, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$: Возьмём последовательность $\{x_n\} \subset E$ элементов множества F . Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X \ \exists r_x > 0: \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} \dot{B}_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^k \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k \{y_i\}$$

Получили, что E конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K . Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K .

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1: \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a, x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2: \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

\vdots

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R . Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho(b, x_{n_k}) > \rho(a, x_{n_k}) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \rightarrow \infty$$

Значит K ограничено. ◀

REM: $1 \Rightarrow 3$; $3 \Rightarrow 2$; $1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на \mathbb{R} с дискретной метрикой.

30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

Следствие 30.0.1. В \mathbb{R}^d компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

► В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие 30.0.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

► Множество значений ограничено, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие 30.0.3. В любой последовательности в \mathbb{R}^d есть сходящаяся в \bar{R} подпоследовательность.

► Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

31. Диаметр множества

Def: Диаметр множества:

$$\text{diam } A = \sup \rho(x, y)$$

Теорема 31.1. Свойства диаметра.

1. $\text{diam } E = \text{diam cl } E$

2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$ (последовательность вложенных компактов); $\text{diam } K_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечное



1.

$$E \subset \text{cl } E \Rightarrow \text{diam } E \leq \text{diam cl } E$$

$$d = \text{diam cl } E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0, y_0: \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists x_1 \in E: \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists y_1 \in E: \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geq \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$

Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\text{diam } E \geq \text{diam cl } E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого n хотя бы $\rho(a, b)$. Противоречие.



32. Фундаментальные последовательности

Def: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(n, m) < \varepsilon$$

$$REM: E \Leftarrow \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \text{diam } E \rightarrow 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.



$$\forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > K \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Т.о.

$$\exists n_k > M = \max\{N, K\}: \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$



Def: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

33. Полнота компактных метрических пространств

Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В \mathbb{R}^d фундаментальная последовательность всегда сходится.

► $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

x_n — фундаментальная последовательность в \mathbb{R}^d . $E_n \Leftarrow \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ — ограничено. $\text{cl } E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\text{cl } E_1 \supset \text{cl } E_2 \supset \text{cl } E_3 \supset \dots$$

$$\text{diam cl } E_n = \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.

$$\exists! a: a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl } E_n$$

$$a \in \text{cl } E_n \Rightarrow \forall i > n \ 0 \leq \rho(a, x_i) \leq \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о $x_n \rightarrow a$. ◀

REM: \mathbb{R}^d полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема 33.2. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

► В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

34. Верхний и нижний предел

Def: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k$$

REM: $y_n \Leftarrow \inf_{k > n} x_n, z_n \Leftarrow \sup_{k > n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

Def: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Лемма 34.1. Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\overline{\mathbb{R}}$, при этом

$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

► $y_n \Leftrightarrow \inf_{k>n} x_n$, $z_n \Leftrightarrow \sup_{k>n} x_n$. Если x_n ограничено, то и y_n ограничено. Если x_n не ограничено снизу, то и y_n не ограничено снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim} x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. \limsup — наибольший частичный предел.
2. \liminf — наименьший частичный предел.
3. \lim существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$



1. $a = \limsup x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geq a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к a .

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b , уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два милиционера



35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε

Теорема 35.1. Определение верхнего и нижнего предела через N и ε .

1.

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N \ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$a = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$



1. Запишем в терминах y_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0 \exists N : \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \lim a_n \leq \lim b_n \\ \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \end{cases}$$

► Просто сводим к пределам инфимумов.

36. Неравенство Бернулли

Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1 \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq 1+nx$$

► Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geq 1+kx$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

Следствие 36.1.1. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

37. Число e

Определим число e :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \uparrow; y_n \downarrow$.

►

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \\ y_n < y_{n-1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{n}{n^2-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

Заметим, что при этом $x_n < y_n$. Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$
2. $x_n < e < y_n$

38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

Теорема 38.1. Предел убывающей по отношению. $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \rightarrow 0$.

► С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀

Следствие 38.1.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$



$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} < 1$$

Следствие 38.1.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Следствие 38.1.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$



$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$



39. Теорема Штольца

Теорема 39.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.



1. Пусть $a = 0$.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \left| \sum \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем N , такое что $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$, тогда при n и $m > N$

$$< \sum_{k=m+1}^n \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

устремим n к бесконечности.

$$|x_m| < \varepsilon(y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{ при } m > N$$

2. $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - ay_n$$



40. Теорема Штольца

Теорема 40.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

► $a = 0$:

$$\varepsilon_n \Leftarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^N + \sum_{i=N+1}^n$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leq \sum_{i=N+1}^n |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^n \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^n (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leq \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

$a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$. Фактом $x_n \rightarrow \infty$ мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \rightarrow 0$$

$a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n . Проверим, что x_n монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$: Сменим знаки x_n .



41. Пределы функций

Def: (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) — метрические пространства. $E \subset X$, a — предельная точка E . $f: X \rightarrow Y$. Тогда говорят, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

REM: Для бесконечности на \mathbb{R} есть частные случаи.

Def: По Гейне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E: x_n \neq a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции. Определения равносильны.



1. Коши \Rightarrow Гейне

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

Пусть $\lim x_n = a$, $x_n \in E$, $x_n \neq a$

По δ выберем $N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$, тогда $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

Нашли номер N при котором $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

2. Гейне \Rightarrow Коши

от противного.

По Коши $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

Выберем последовательность $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow \lim(f(x_n)) \neq b$$

Противоречие с определением по Гейне

REM: В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все x_n различны. ◀

REM: Можно рассматривать лишь такие последовательности, что $\rho(x_n, a)$ убывает.

43. Свойства функций, имеющих предел

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

► Возьмём две сходящиеся последовательности x_n и y_n , после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям b и c . Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

Утверждение. Единственность предела $f: E \subset X \rightarrow Y$, a — предельная точка. Тогда предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ единственен.

► Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

Теорема 43.1. Ограниченность. $f: E \subset X \rightarrow Y$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда

$$\exists r > 0: f|_{E \cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

Теорема 43.2. Уход от нуля. $f: E \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0: \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E \quad f(x) \neq \vec{0}$$

► $\varepsilon \Leftarrow \rho(x, \vec{0})$ ◀

44. Арифметические действия с пределами

Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции.. $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка E .

$$1. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$$

$$3. \lim x \rightarrow a (f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$$

$$4. \lim x \rightarrow a \|f(x)\| = \|f_0\|$$

$$5. \lim x \rightarrow a \langle f(x), g(x) \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle$$

► Возьмём любые сходящиеся к a последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции.. $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка E .

$$1. \lim x \rightarrow a (f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$$

$$2. \lim x \rightarrow a (f(x)g(x)) = f_0g_0$$

$$3. \lim x \rightarrow a |f(x)| = |f_0|$$

$$4. \lim x \rightarrow a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$$

► Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве.. $f, g: E \rightarrow Y$, a предельная точка E , $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leq g(x)$. Тогда $f_0 \leq g_0$.

Теорема 45.2. О двух милиционерах.

46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

Def: Пределы слева и справа. $f: E \cap \mathbb{R} \rightarrow Y$.

$$\lim_{x \rightarrow a-} = \lim_{x \rightarrow a-0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (-\inf, a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} = \lim_{x \rightarrow a+0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (a, +\inf)}$$

Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченной функции..

47. Критерий Коши для отображений и для функций

Теорема 47.1. Критерий Коши.

$f: E \subset X \rightarrow Y$, a — предельная точка E , Y — полное

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



1. \Rightarrow Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2. \Leftarrow

Берем любую последовательность $x_n \neq a \in E \rightarrow a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$\Rightarrow f(x_n)$ — фундаментальная последовательность точек из Y

$$\Rightarrow \exists \lim(f(x_n)) \text{ полнота } Y$$



48. Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа

Def: (По Коши)

$$f : E \subset X \rightarrow Y, a \in E$$

f — непрерывно в точке a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

Def: (По Гейне)

$$\forall \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow a : f(x_n) \rightarrow f(a) \Leftrightarrow f(---)$$

Def:

$$f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow Y, a \in E$$

f — непрерывно слева в точке a

$$g = f|_{(-\infty, a] \cap E}, g \text{ — непрерывно в точке } a$$

Def:

$$f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow Y, a \in E$$

f — непрерывно справа в точке a

$$g = f|_{[a, +\infty) \cap E}, g \text{ — непрерывно в точке } a$$

49. Арифметические действия с непрерывными функциями

Теорема 49.1. Арифметические действия с непрерывными функциями.

$$f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}^d, a \in E, f, g \text{ непрерывны в точке } a$$

Тогда

1. $f(x) + g(x)$ непрерывно в точке a
2. $cf(x)$ непрерывно в точке a
3. $f(x) - g(x)$ непрерывно в точке a
4. $\|f(x)\|$ непрерывно в точке a
5. $\langle f(x), g(x) \rangle$ непрерывно в точке a

Теорема 49.2. .

$$f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f, g \text{ непрерывны в точке } a$$

Тогда

1. $f(x) + g(x)$ непрерывно в точке a
2. $f(x)g(x)$ непрерывно в точке a
3. $f(x) - g(x)$ непрерывно в точке a
4. $|f(x)|$ непрерывно в точке a
5. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывно в точке a

Теорема 49.3. о стабильном знаке.

$$f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f \text{ — непрерывно в точке } a \text{ и } f(a) \neq 0$$

Тогда

$$\exists B_\delta(a) \text{ такое что } \forall x \in B_\delta(a) \text{ sign}(f(x)) = \text{sign}(f(a))$$



$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$$



Теорема 49.4. о непрерывности композиции.

$$f : E_1 \subset X \rightarrow Y$$

$$g : E_2 \subset Y \rightarrow Z$$

$$f(E_1) \subset E_2, a \in E_2$$

f — непрерывна в точке a

g — непрерывна в точке $f(a)$

тогда $g \circ f$ — непрерывно в точке a .

► Надо проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$

Берем ε

$$\exists \gamma > 0 \forall y \in B_\gamma(f(a)) \cap E_2 : g(y) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \text{ (по непрерывности } g \text{ в точке } f(a))$$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : f(x) \in B_\gamma(f(a)) \text{ (по непрерывности } f \text{ в точке } a)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$



50. Характеристика непрерывности в терминах прообразов

Теорема 50.1. .

$$f : x \rightarrow y$$

f непрерывно во всех точках \Leftrightarrow прообраз любого открытого множества открыт.



1. \Rightarrow

$G \subset Y$ (открытое), надо доказать, что $f^{-1}(G)$ — открытое.

Возьмем $a \in f^{-1}(G)$ надо доказать, что \exists шар с центром в точке a содержащийся в $f^{-1}(G)$

$$f(a) \in G \text{ — открыто} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

Знаем, что f непрерывна в точке a

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

то есть

$$\forall x \in B_\delta(a), f(x) \in G$$

то есть

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}(G)$$

2. \Leftarrow

Зафиксируем $a \in x$

Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a), f(x) \in B_{\varepsilon}(f(a))$

Возьмем $B_\varepsilon(f(a))$ — открытое множество, $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открытое \Rightarrow

$\exists B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$



51. Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное

Теорема 51.1. ааа.

$f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}^d, a \in E$

Тогда f непрерывна в точке $a \Leftrightarrow$ все координаты функции f непрерывны в точке a .



1. \Rightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

то есть

$$\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$$|f_i(x) - f_i(a)| \leq \sqrt{((f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 + \dots)}$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \Rightarrow f_i \in B_\varepsilon(f_i(a))$$

$$f_i \text{ ---}$$

непрерывна в точке a .

2. \Leftarrow

Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_d\} > 0$

Тогда $\forall x \in B_\delta(a) \forall i = 1 \dots d |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow (f_1(x) - f_1(a))^2 + \dots < d\varepsilon$$

$$\rho(f(x), f(a)) < \sqrt{d}\varepsilon$$



52. Непрерывность и компактность

Def:

$$f : E \subset x \rightarrow y$$

f — ограниченное отображение, если $f(E)$ — ограничено.

Теорема 52.1. Непрерывный образ компакта — компакт.

$$f : x \rightarrow y, f \text{ — непрерывен на } X, K \subset X, K \text{ — компакт} \Rightarrow f(K) \text{ — компакт}$$

► Пусть G_α — открытые множества.

$\cup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset f(K)$ надо выбрать конечное подпокрытие.

Рассмотрим $f^{-1}(G_\alpha)$ — открытое множество (по непрерывности f)

$$\cup_{\alpha \in I} f^{-1}(G_\alpha) \supset K$$

$\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие.

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \cup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \supset$$

$$\cup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \supset f(K) \text{ конечное подпокрытие для } f(K)$$

Следствие 52.1.1.

1. Непрерывный образ компакта — компакт.

2. (Теорема Вейерштрасса)

$$f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывен на } K \Rightarrow f \text{ — ограничена}$$

3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен на $[a, b] \Rightarrow$ — — — ограничена

4. $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ f — непрерывен на K , K — компакт $\Rightarrow \exists a, b \in K, \forall x \in K f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

► $f(K)$ — ограниченное подмножество \mathbb{R}

$$A = \inf f(K)$$

$$B = \sup f(K)$$

$$f(K)$$

$$\text{— замкнуто} \Rightarrow A, B \in f(K)$$

5. (теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, тогда она принимает наибольшее и наименьшее значение.

53. Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции

Теорема 53.1. . $f : K \rightarrow Y$ непрерывно на K биекция между K и Y , тогда $f^{-1} : Y \rightarrow K$ непрерывно.

► Надо проверить, что для f^{-1} прообраз открытого множества — открытое. Т.е. надо проверить для f , что образ открытого — открыто.

Берем $G \subset K$ — открытое.

$\Rightarrow K \setminus G$ — замкнутое подмножество K .

$\Rightarrow K \setminus G$ — компакт.

$\Rightarrow f(K \setminus G)$ — компакт \Rightarrow замкнутое

$\Rightarrow f(G)$ — открыто. ◀

Следствие 53.1.1.

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонно и f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f^{-1}$ непрерывно на множестве задания.

► $[a, b] = K$ — компакт.

строго монотонная \Rightarrow инъекция.

f — биекция между $[a, b]$ и $f([a, b])$ ◀

2. $f : ([a, b], (a, b], [a, b), (a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотона и непрерывна на нем $\Rightarrow f^{-1}$ непрерывна на множестве задания.

►

$$y = f(< a, b >)$$

$$f^{-1} : y \rightarrow \mathbb{R}$$

Надо доказать непрерывность $\forall c \in y$

Берем $c \in y \Rightarrow c = f(x_0)$ для некоторого $x_0 \in < a, b >$

Возьмем $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset < a, b >$

$g = f|_{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ применяем следствие 1.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B_\delta(c) \cap f([\alpha, \beta]) : g^{-1}(y) \in B_\varepsilon(g^{-1}(c))$

$f : X \rightarrow Y$ непрерывно на X .

$$\forall a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

54. Равномерная непрерывность на функции. Теорема Кантора

Def: $f : X \rightarrow Y$ равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X \rho(x, y) < \delta : \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Теорема 54.1. Кантора.

$f : K \rightarrow Y$ K — компакт, f непрерывен на $K \Rightarrow f$ равномерно непрерывно.



От противного.

Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ нет $\delta > 0$, т.е не подходит $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n, \tilde{x}_n \in K \text{ т.ч. } \rho(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{1}{n} \text{ и } \rho(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \geq \varepsilon$$

x_n, \tilde{x}_n последовательность точек из K извлечем из x_n сходящуюся подпоследовательность x_{n_k} ,
 $x_{n_k} \rightarrow a \in K$

$\tilde{x}_{n_k} \rightarrow a$, т.к. $\rho(x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$

f непрерывно в точке a .

$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$

Начиная с какого-то N $x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k} \in B_\delta(a)$

$$\Rightarrow f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$$

$$\Rightarrow \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ противоречие}$$



Следствие 54.1.1. Непрерывное на $[a, b]$ функция равномерно непрерывна.

55. Теорема Больцано-Коши

Лемма 55.1. о связности отрезка Пусть $[a, b] \subset U \cup V$, U, V — открытые и $U \cap V = \emptyset$ тогда либо $[a, b] \subset U$, либо $[a, b] \subset V$

► Рассмотрим точку b . Пусть $b \in V$

$S = [a, b] \cap U$, пусть $S \neq \emptyset$

$$b_1 = \sup S$$

Поскольку $b \in V$ — открытое $\Rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset V$ для некоторого $\varepsilon \Rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap S = \emptyset$
 $\Rightarrow b_1 \leq b - \varepsilon \Rightarrow b_1 < b$

Пусть $b_1 \in V \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset V$

$(b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \cap S = \emptyset \Rightarrow \sup S \leq b_1 - \varepsilon_1$. Противоречие.

Тогда $b_1 \in U \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset U$

$\delta = \min\{\varepsilon_1, b - b_1\} > 0$

$[b_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset S \Rightarrow \sup S \geq b_1 + \delta$ — противоречие.



Теорема 55.1. Больцано-Коши. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f — непрерывно на $[a, b]$

$\forall C$ между $f(a)$ и $f(b)$ $\exists c \in (a, b) f(c) = C$

► От противного. Пусть $f(x) \neq C \forall x \in [a, b]$, тогда $[a, b] \subset f^{-1}((-\infty, c)) \cup (f^{-1}(C, +\infty))$ —
открытые и не пересекаются, а a и b принадлежат разным множествам. Противоречие.



Следствие 55.1.1.

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывно на $[a, b]$, тогда $f([a, b])$ — отрезок.

► $\exists u, v \in [a, b], f(u) \leq f(x) \leq f(v) \forall x \in [a, b] \Rightarrow f([a, b]) \subset [f(u), f(v)]$

По теореме Б-К $\forall C \in (f(u), f(v)) \exists c \in (u, v)$, т.ч. $f(c) = C$ т.е. $f([a, b]) = [f(u), f(v)]$



2. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывно на (a, b) , тогда f принимает все значения из $(\inf f(x), \sup f(x))$

► Пусть $C \in (\inf f, \sup f) \Rightarrow \exists u : f(u) < C, \exists v : f(v) > C \Rightarrow C$ лежит между $f(u)$ и $f(v)$, но f непрерывно на $[u, v] \Rightarrow$ принимает все промежуточные значения.



56. Непрерывность тригонометрических функций

Теорема 56.1. .

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Следствие 56.1.1. \sin и \cos непрерывны.



$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq |x-y|$$

Следствие 56.1.2. tg и ctg непрерывны.

Следствие 56.1.3.

$$\begin{aligned} \sin &\uparrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ \cos &\downarrow [0, \pi] \\ \operatorname{tg} &\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Def:

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1} \\ \arccos &= \left(\cos \mid_{[0, \pi]} \right)^{-1} \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg} \mid_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Теорема 56.2. .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

► $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

57. Степенная функция

$$x^n \quad x \in [0; +\infty); n \in \mathbb{N}$$

Больше нуля, непрерывна, инфимум 0, супремум бесконечен, строго монотонная.

$$x^{\frac{1}{n}} \text{ обратная}$$

Тоже непрерывна.

$$\begin{aligned} x^{\frac{m}{n}} &= \left(x^{\frac{1}{n}} \right)^m \\ x^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} \end{aligned}$$

Утверждение. Определение корректно. $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^{\frac{1}{nk}})^{mk}$

Утверждение. Свойства степени выполняются.

1. $x^a x^b = x^{a+b}, a, b \in \mathbb{Q}$
2. $(x^a)^b = x^{ab}$
3. $x^a y^a = (xy)^a, a \in \mathbb{Q}$
4. $x^a < y^a$ при $x < y$
5. $x^a < x^b$ при $x > 1$ и $a < b$ или при $0 < x < 1$ и $a > b$

Лемма 57.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ при } a > 0$$

► $a \geq 1$:

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + \varepsilon n > \varepsilon n > \varepsilon N > a$$

$$N > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N \quad (1 + \varepsilon)^n > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \geq 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

$0 < a < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

Теорема 57.1. . Пусть $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Тогда последовательность a^{x_n} имеет предел, зависящий только от x и a . ◀

►

$$a^{x_n} - a^{x_m} = a^{x_n} (a^{x_m - x_n} - 1)$$

$$\forall n \quad |x_n| \leq M \Rightarrow a^{x_n} \in [a^{-M}; a^M]$$

Т.о.

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leq \underbrace{a^M}_{\leq C} (a_{x_n - x_m} - 1) < C\varepsilon$$

По лемме

$$\exists N: \forall k > N \quad |a^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{N} \rightarrow -\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a_{x_n - x_m} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < 1 + \varepsilon$$

Т.о. предел существует.

Пусть теперь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{y_n}$$

Но рассмотрим

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} \rightarrow x$$

Но тогда a^{z_n} не имеет предела, что противоречит доказанному выше. ◀

Def:

$$a^x = \lim_{\substack{x_n \rightarrow x \\ x_n \in \mathbb{Q}}} a^{x_n}$$

Свойства степени:

1. Для $x \in \mathbb{Q}$ корректно.
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$

$$4. x^a y^a = (xy)^a$$

$$5. x < y \wedge a > 0 \rightarrow x^a < y^a$$



$a_n \rightarrow a > 0 \Rightarrow a_n > 0$ с какого-то места

$$x_n^a < x_n^b \Rightarrow x^a \leq x^b$$

Теперь хотим строгое

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$$

$$z \Leftrightarrow \frac{x}{y}$$

$$z^{a_n} < 1 \wedge z^{a_n} \downarrow \Rightarrow z_a < 1$$

$$6. x^a < x^b \text{ при } x > 1 \wedge a < b \text{ или } 0 < x < 1 \wedge a > b$$

$$\blacktriangleright x > 1 \wedge a < b:$$

$$a < p < q < b \quad p, q \in Q$$

$$x^{a_n} < x^p < x^q < x^{b_n}$$

$$x^a \leq x^p < x^q \leq x^b$$

Лемма 57.2.

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$$

$$\forall |x| < \frac{1}{N} 1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{N}$

58. Логарифм

Теорема 58.1. .

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \Leftrightarrow a^x \text{ непрерывна}$$

\blacktriangleright Надо доказать, что $a^{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n}$

$$x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0} (a^{x_n - x_0} - 1) \rightarrow 0$$

Следствие 58.1.1. Есть обратная

$$\log_a x$$

Теорема 58.2. .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

► $x_n \rightarrow +\infty. [x_n] = k$

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$x_n \rightarrow +\infty. y_n = -x_n$

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} \rightarrow e$$

А для смеси возьмём две части, в каждой есть хороший номер. ◀

59. Следствия

Следствие 59.0.1.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$

►

$$\lim\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e = 1$$

◀

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

► $y = a^x - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ (непрерывность a^x)

$$a^x = y + 1$$

$$x \ln a = \ln(y + 1)$$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln(a)}} = \ln(a) \frac{y}{\ln(1+y)} = \ln(a)$$

◀

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$

► $y = (1+x)^p - 1 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$

$$(1+x)^p = 1+y$$

$$p \ln(1+x) = \ln(1+y)$$

$$\frac{(1+x)^p - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \frac{\ln(1+y)}{p \ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x} p = p$$

◀

60. Сравнение функций

Def: $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, a — предельная точка E . Если существует такая $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in E \quad f(x) = \varphi(x)g(x)$$

и

1. $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$, то $f \sim g$ при $x \rightarrow a$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$, то $f = o(g)$ при $x \rightarrow a$.
3. φ ограничена, то $f = O(g)$ при $x \rightarrow a$.
4. Если

$$\forall x \in E \quad |f(x)| \leq c|g(x)|$$

то $f = O(g)$ на E .

Свойства:

1. \sim — отношение эквиваленции.
2. $f_1 \sim f_2 \wedge g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1 g_1 \sim f_2 g_2$
3. $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f) \Leftrightarrow f = g + o(g)$



$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \varphi \rightarrow 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g, \varphi - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow f = g + o(g)$$



4. $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$
5. $f \cdot o(g) = o(fg)$

Примеры ($x \rightarrow 0$):

$$\sin x \sim x$$

$$\ln(x+1) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$$

$$(x+1)^p - 1 \sim px$$

61. Производная

Def:

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$$

Если существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то он называется производной f в точке x_0 . $f'(x_0)$

Def:

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$$

f — дифференцируема в точке x_0 , если $\exists A \in \mathbb{R}$ т.ч. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \rightarrow x_0$

Теорема 61.1. $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

f — дифф. в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists$ конечная производная $f'(x_0)$

И в этом случае $A = f'(x_0)$

► f — дифф. в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - A \rightarrow 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

Def: Дифференциал функции f в точке x_0 — это отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ умноженное на A . $df(x_0)$
 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейно, если $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

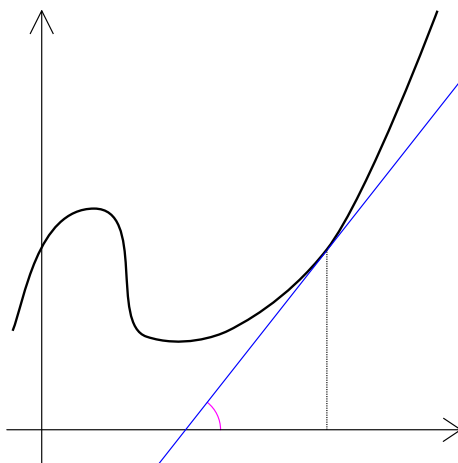
62. Геометрический смысл производной

Если рассмотреть график непрерывной функции

$$y = f(x)$$

то в каждой точке x_0 , где функция непрерывна, можно рассмотреть касательную к её графику

$$y = kx + b$$



Давайте посчитаем угловой коэффициент касательной k .

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Таким образом, производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в соответствующей точке.

63. Односторонние производные

REM: Бесконечные производные.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

Def:

$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — правая производная.

$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — левая производная.

REM: Если $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ существуют и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то существует $f'(x_0) = f'_+(x_0)$

Пример: $f(x) = |x|$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$f'_-(0) = -1$$

В частности f не дифф. в точке 0.

64. Непрерывность дифференцируемой функции

Утверждение. f — дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f$ — непрерывна в точке x_0

► f — дифф. в точке $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (A(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0)$$

REM: Обратное не верно.

Примеры

1. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \infty$$

$x^{\frac{1}{3}}$ — не дифф. в точке 0, но непрерывна.

2. $f(x) = x \sin(x), f(0) = 0$. Непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ не существует.}$$

65. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями

Теорема 65.1. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

f, g — дифф. в точке x_0 , тогда

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g \neq 0$ в окрестности точки x_0

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$



$$1. (f \pm g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2.

3.

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

4. Достаточно доказать, что $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g^2(x)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$



66. Производная композиции

Теорема 66.1. Производная композиции. g дифференцируема в x_0 , f дифференцируема в $f(x_0)$. Тогда $f \circ g$ дифференцируема, причём

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$



$$(f \circ g)'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(g(x))g'(x)$$



67. Теорема о дифференцируемости обратной функции

Теорема 67.1. Производная обратной функции. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f^{-1} — обратная функция.

f — дифф. в точке $x_0 \in (a, b)$

Тогда $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$



$$f^{-1} = g$$

$$g(f(x)) = x$$

$$g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

Нужна дифф. функции g в точке $f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \text{ где } \alpha(x) \rightarrow 0$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0))$$

$$g(y) = g(f(x_0)) + A(y - f(x_0)) + \beta(y)(y - f(x_0))$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + A(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

$$x = x_0 + A(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)) + \beta(f(x))(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0))$$

$$A = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \alpha = \frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} + \beta(f(x))(f'(x_0) + \alpha(x))$$

$$\beta(f(x)) = -\frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(x)}$$

$$\beta(y) = -\frac{\alpha(g(y))}{f'(x_0)} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(g(y))}$$

Надо понять, что $\beta(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow f(x_0)$

Если $y \rightarrow f(x_0)$, то $g(y) \rightarrow g(f(x_0))$

$$\lim_{y \rightarrow f(x_0)} \alpha(g(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

Следствие 67.1.1.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$



68. Производные элементарных функций

$$\begin{aligned}c' &= 0 \\(x^p)' &= px^{p-1} \\(a^x)' &= \ln a a^x \\(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\\sin' x &= \cos x \\\cos' x &= -\sin x \\\operatorname{tg}' x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\\operatorname{ctg}' x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\\operatorname{arctg}' x &= \frac{1}{1+x^2} \\\operatorname{arcsin}' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x^p}{x} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^p - 1}{\frac{h}{x}} \right) = x^{p-1} p \\\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} a_x \frac{a^h - 1}{h} = a_x \ln a \\\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Лooooooooоол что такое, Таня?

$$\sin x = y$$

$$\operatorname{arcsin}' y = (\sin^{-1} y)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{tg} x = y$$

$$\operatorname{arctg}' y = (\operatorname{tg}^{-1} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$



69. Теоремы Ферма и Ролля

Теорема 69.1. Теорема Ферма. $f: \langle a, b \rangle$, $x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема в x_0 , x_0 — точка экстремума. Тогда

$$f'(x_0) = 0$$

► Пусть $x > x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Пусть $x < x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Но тогда

$$f'(x_0) = 0$$

Теорема 69.2. Теорема Ролля. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) , $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

► Если функция константна, то всё доказано. Иначе есть глобальный максимум и минимум, причём они не могут быть оба в концах.

Следствие 69.2.1. Между корнями функции есть корень производной.

70. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 70.1. Теорема Лагранжа. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) .

$$\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Теорема 70.2. Теорема Коши. $f, g: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \neq g(b) - g(a)$.

$$\exists c: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

► $h(x) = f(x) - Kg(x)$, $h(a) = h(b)$.

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда

$$\exists c: h'(c) = 0$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Следствие 70.2.1. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) , $|f'(x)| \leq M$. Тогда

$$\forall x, y \in (a, b) |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

71. Следствия теоремы Лагранжа

Следствие 71.0.2.

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f — непрерывна на $[a, b]$, дифф. на (a, b) и $|f'(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$, тогда $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in [a, b]$



$$\begin{aligned} f &: [x, y] \rightarrow \mathbb{R} \\ \Rightarrow \exists c \in (x, y), f(x) - f(y) &= (x - y)f'(c) \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| &= |x - y||f'(c)| \leq M(x - y) \end{aligned}$$



2. При тех же условиях f равномерно непрерывна на (a, b)



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (a, b), |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

По следствию 1

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{M} \text{ подходит}$$



3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a, b]$ и диф. на (a, b) и $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, тогда $f(x) = \text{const.}$



$$\begin{aligned} [x, x_0] &\subset [a, b] \\ \exists c \in (x, x_0) \subset (a, b), f(x) - f(x_0) &= f'(c)(x - x_0) = 0 \\ \Rightarrow f(x) - f(x_0) &\forall x \in [a, b] \end{aligned}$$



4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a, b]$ и диф. на (a, b) и $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ монотонно возрастает. А если $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ строго монотонно возрастает.



$$\begin{aligned} x &< y, x, y \in (a, b) \\ f(y) - f(x) &= (y - x)f'(c) \Rightarrow f(y) > f(x) \end{aligned}$$



5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a, b]$ и диф. на (a, b) и $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ монотонно убывает. А если $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$, тогда $f(x)$ строго монотонно убывает.

Теорема 71.1. .

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a, b]$ и диф. на (a, b) , тогда $f(x)$ монотонно возрастает $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$.
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — непрерывна на $[a, b]$ и диф. на (a, b) , тогда $f(x)$ монотонно убывает $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$.



Пусть $x < y$, тогда $f(x) < f(y) \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$



72. Теорема Дарбу

Теорема 72.1. Теорема Дарбу. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на $[a, b]$, $C \in [f'(a), f'(b)]$.
Тогда

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = C$$

► Пусть $C = 0$, тогда $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков.

f непрерывна, поэтому функция достигает свои максимум и минимум (по теореме Вейерштрасса).
Достаточно показать, что один из них достигаются не в конце.

От противного: пусть минимум находится в точке a , а максимум в точке b . Тогда

$$\forall x > a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \wedge \forall x < b \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'(b) &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} f'(a) &\geq 0 \\ f'(b) &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{— противоречие}$$

Таким образом хотя бы один экстремум не в конце, и искомое c существует.

В общем случае перейдём к

$$g(x) = f(x) - Cx$$

$$g'(x) = f'(x) - C$$



73. Правило Лопиталья

Теорема 73.1. Правило Лопиталья. $-\infty < a < b < +\infty$ f и g дифф. на (a, b)

$$g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0(+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

► Возьмем $x_n \downarrow a$, $x_n \in (a, b)$, надо доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = l$$

По теореме Штольца достаточно проверить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$ и что $g(x_n)$ — монотонна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \rightarrow l$$

$$a < x_{n+1} < c_n < x_n \Rightarrow c_n \rightarrow a$$

Осталось доказать монотонность $g(x_n)$.

Заметим, что g' везде одного знака, иначе по теореме Дарбу была бы точка, где $g' = 0$. $\Rightarrow g(x_n)$ — строго монотонно.



Примеры

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \text{ при } p > 0$$



$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \text{ при } a > 1$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim(\ln(x^x))} = 1$$



$$\ln(x^x) = x \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} = 0$$

74. Производные высших порядков

Def: Производной $n \geq 2$ порядка функции f называется производная производной $n - 1$ порядка.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

Def: $C(E)$, $C[a, b]$, $C(a, b)$ — множество непрерывных на E , $[a, b]$, (a, b) функций. Соответственно, $C^n(E)$ — множество n раз дифференцируемых функций.

$$C^\infty(E) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C^i(E)$$

Утверждение.

$$C^n(E) \supset C^{n+1}(E)$$

REM: При том, что множества вложены друг в друга, они не равны.

$$f(x) = x^{n+\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$f^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^n \left(i + \frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}}$$

Т.о. $f \in C^n(\mathbb{R})$, но $f^{(n)} = C \sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в 0, поэтому $f \notin C^{(n+1)}(\mathbb{R})$

75. Арифметические действия с производными высших порядков

Теорема 75.1. Арифметические действия с производными высших порядков.

1.

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

2. Правило Лейбница

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

► Метод математической индукции: база $n = 1$ уже доказана. Докажем переход

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)} \right)' = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n-i+1)}) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right) f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} \end{aligned}$$



76. Формула Тейлора

Теорема 76.1. Формула Тейлора.

$$T(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$



$$T(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

$$((x - x_0)^k)^{(m)} = \begin{cases} 0 & k < m \\ m! & k = m \\ k(k-1)(k-2) \cdots (k-m+1)(x - x_0)^{k-m} & k > m \end{cases}$$

$$T(x)^{(m)} = \sum_{k=m}^n a_k k(k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k-m+1)(x - x_0)^{k-m}$$

$$T(x_0)^{(m)} = a_m m!$$

$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$$

Def: f дифференцируема n раз в точке x_0 . Тогда многочленом Тейлора функции f в точке x_0 есть

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$



Def: Формула Тейлора:

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$$

Лемма 76.1. g дифференцируема n раз в x_0 . $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Тогда

$$g(x) = o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

$g^{(n-1)}$ дифференцируема в x_0 , а значит

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Т.о.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = 0$$

Тогда

$$g(x) = o((x - x_0)^n)$$



77. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 77.1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. f дифференцируема n раз в x_0 .

$$f(x) = T_{n,k}f(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$



$$g(x) = f(x) - T_{n,k}f(x)$$

$$\forall k \leq n \quad g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0$$

Пользуемся леммой.

Следствие 77.1.1.

$$\exists! P \in \mathbb{R}[x]: f(x) = P(x) + o((x - x_0)^k) \quad x \rightarrow x_0$$

► $x \rightarrow x_0$:

$$T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) = f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$q(x) \triangleq T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o((x - x_0)^k)$$

$$q(x_0) = 0$$

$q \in \mathbb{R}[x]$

$$q(x) = (x - x_0)q_1(x)$$

$$q_1(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

$$q_1(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
q_n(x_0) &= o(1) \\
q_n &\equiv 0 \\
q &\equiv 0 \\
P &\equiv T_{n,x_0}f
\end{aligned}$$



78. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема 78.1. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. f дифференцируема $n/ + 1/$ раз в x_0 , $f^{(n)}$ непрерывна на $[x, x_0]$.

$$\exists c \in (x, x_0): f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

REM: Теорема Лагранжа — частный случай для $n = 0$.

$$\exists c \in (x, x_0): f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$



$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Надо доказать, что в форме

$$\exists c \in (x, x_0): M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$g(t) \Leftarrow f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t-x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (T_{n,x_0})^{(k)}(t) - M(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n-k+2)(t-x_0)^{n-k+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

Тогда у функции g первые n производных равны нулю, а также $g(x) = 0$, значит

$$g(x_0) = g(x) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_1 \in (x, x_0): g'(x_1) = 0$$

$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_2 \in (x, x_1): g'(x_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_{n+1} \in (x, x_0): g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!$$

$$c = x_{n+1}$$

Следствие 78.1.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. ◀

$$|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = O((x-x_0)^n)$$

▶

$$\exists c \in (x, x_0): |f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$$

Следствие 78.1.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, for all n $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. ◀

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,x_0} = f(x)$$

▶

$$|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

◀

79. Формула Тейлора для некоторых функций

$x_0 = 0$:

$$\begin{array}{llll} e^x = 1 & +x + \frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} & + \dots + o(x^n) \\ e^x = 1 & +x + \frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} & + \dots + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sin x = 0 & +x + 0 & -\frac{x^3}{3!} + 0 & + \dots + o(x^{2n+1}) \\ \cos x = 1 & +0 + \frac{x^2}{2!} & +0 - \frac{x^4}{4!} & + \dots + o(x^{2n+1}) \\ \ln(x+1) = 0 & +x - \frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} & + \dots + o(x^n) \\ (x+1)^p = 1 & +px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 & +\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 & + \dots + o(x^n) \end{array}$$

80. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Def: $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum i = 0^n a_n$$

Следствие 80.0.3. $\forall x \text{ in } \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

81. Иррациональность числа e

Теорема 81.1. Иррациональность e .

$$e \notin \mathbb{Q}$$



$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$2 < e < 3$$

Пусть $e = \frac{m}{n}$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1 \frac{3!}{+} \dots + \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1 \frac{3!}{+} \dots\right)}_{\in \mathbb{N}} + \frac{e^c}{n+1} = \underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{N}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < e^c < 3$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1} < 1$$

Т.о. $e \neq \frac{m}{n}$



82. Локальные максимумы и минимумы

83. Экстремумы функции

Def: $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. x_0 — точка строгого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) > f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) \geq f(x_0)$$

x_0 — точка строгого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) < f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) \leq f(x_0)$$

Точка локального максимума или минимума также называется точкой локального экстремума.

Теорема 83.1. Необходимое условие экстремума. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема в x_0 .

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

► Сузим до окрестности, там по теореме Ферма всё работает. ◀

REM: Обратное неверно, смотри $f(x) = x^3$.

84. Достаточные условия экстремума

Теорема 84.1. Достаточное условие экстремума. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f непрерывна на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, f дифференцируема на $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда

- $f'((x_0 - \delta, x_0)) > 0 \wedge f'((x_0, x_0 + \delta)) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка максимума}$
- $f'((x_0 - \delta, x_0)) < 0 \wedge f'((x_0, x_0 + \delta)) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка минимума}$

►

$$\begin{aligned} f'((x_0 - \delta, x_0)) > 0 &\Rightarrow f \text{ возрастает на } (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0 - \delta, x_0)) \\ f'((x_0, x_0 + \delta)) < 0 &\Rightarrow f \text{ убывает на } (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0, x_0 + \delta)) \end{aligned}$$

◀

Теорема 84.2. Достаточное условие экстремума через вторую производную. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дважды дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка максимума}$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка минимума}$

Теорема 84.3. Достаточное условие экстремума через n -ую производную. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема n раз в x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда

- $2 \mid n \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка максимума}$
- $2 \mid n \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка минимума}$
- $2 \nmid n \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ — не экстремум}$

►

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right)$$

$2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) - f(x_0) > 0$
 $2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) - f(x_0) < 0$
 $2 \nmid n \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}(x - x_0)$ ◀

85. Выпуклость

Def: $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

f выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f строго выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f строго выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Абсолютно эквивалентная запись, геом. смысл... 0,0301 10.12

REM: Сумма выпуклых и выпуклая, умноженная на положительную, выпуклы.

Лемма 85.1. О трёх хордах. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$ — выпуклая, $u < v < w$, $u, v, w \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$



$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \Leftrightarrow (w - u)(f(v) - f(u)) \leq (v - u)(f(w) - f(u)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w - u)f(v) - (w - u)f(u) \leq (v - u)f(w) - (v - u)f(u) \Leftrightarrow (w - u)f(v) \leq (v - u)f(w) + (w - v)f(u)$$



86. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции

Теорема 86.1. Монотонность производной выпуклой функции. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$ — выпуклая. Тогда

$$\forall x \in (a, b) \quad f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

► $u_1 < u_2 < x < v$

$$\frac{f(x) - f(u_1)}{x - u_1} \leq \frac{f(x) - f(u_2)}{x - u_2} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}$$

Тогда $\frac{f(x) - f(u)}{x - u}$ растёт и ограничено, т.е. предел $f'_-(x)$ существует. Аналогично существует $f'_+(x)$, она убывает. Как видно, они в правильном порядке. ◀

Теорема 86.2. Свойство и признак выпуклости. f — выпуклая на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle \quad f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

► \Rightarrow :
 $x > x_0, y \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$x_0 - x > 0$

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x_0) - f(x)$$

Аналогично $x < x_0, y \in (x, x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

\Leftarrow :
 $u < v < w$

$$\forall x \quad f(x) \geq f(v) + (x - v)f'(v)$$

$$f(u) \geq f(v) + (u - v)f'(v)$$

$$f(w) \geq f(v) + (w - v)f'(v)$$

Сложим с правильными коэффициентами:

$$(w - v)f(u) \geq (w - v)f(v) + (w - v)(u - v)f'(v)$$

$$(v - u)f(w) \geq (v - u)f(v) + (w - v)(v - u)f'(v)$$

$$(w - v)f(u) + (v - u)f(w) \geq (w - u)f(v)$$



87. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных

Теорема 87.1. Критерий выпуклости. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на (a, b) .

f (строго) выпукла $\Leftrightarrow f'$ (строго) возрастает

► \Rightarrow : $x_1 < x_2$

$$f(x) \geq f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

$$f(x) \geq f(x_2) + (x - x_2)f'(x_2)$$

Подставим

$$f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + (x_1 - x_2)f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

La: Нужно проверить, что

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

По теореме Лагранжа, есть точки $\xi < \eta$

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

Теорема 87.2. Критерий выпуклости через вторую производную. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дважды дифференцируема на (a, b) .

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' > 0$$

► Смотрим на теоремы о монотонности.

88. Неравенство Йенсена

Теорема 88.1. Неравенство Йенсена. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла.

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset \langle a, b \rangle \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0, 1]: \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

► Метод математической индукции. Теорема при $n = 2$ совпадает с определением выпуклости.

$$\begin{aligned} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}}_{\Leftarrow y}\right) &= f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \geq \\ &\geq (1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = (1 - \lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

89. Неопределённый интеграл

Def: $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной f , если

$$F' = f$$

Не для всех f существует F . Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

► Пусть есть $F' = f$. Тогда по теореме Дарбу

$$\forall a, b \in (-1, 1), c \in (F'(a), F'(b)) \exists c \in (a, b): F'(c) = C$$

Теорема 89.1. О существовании первообразной. Для любой непрерывной $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ есть первообразная F . Докажем в следующем семестре. ◀

Теорема 89.2. . $f, F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F — первообразная. Тогда

1. $F + c, c \in \mathbb{R}$ также первообразная.
2. Φ — первообразная только если $\Phi = F + c$.



$$(F + c)' = F' + 0 = f$$

Рассмотрим $G = \Phi - F$. Она дифференцируема и

$$G' = (\Phi - F)' = \Phi' - F' = f - f = 0$$

Но тогда

$$G = \text{const}$$

Def: Неопределённым интегралом функции f называется множество её первообразных. ◀

$$\int f(x) dx$$

Пока стоит воспринимать все символы интеграла как некоторые «скобки».

Если есть некоторая первообразная F , то

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Тот же смысл имеют записи

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\int f dx = F + c$$

Для того, чтобы найти неопределённый интеграл, достаточно найти какую-то первообразную, а для проверки первообразной достаточно взять от неё производную.

90. Таблица интегралов

Таблица интегралов:

$$\begin{aligned}\int 0 dx &= c \\ \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + c \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arccos x + c \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + c\end{aligned}$$

Def: Пусть A, B — множества. Тогда

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$$

Теорема 90.1. Об арифметических операциях с интегралами.

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

$\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

REM: Именно из-за того, что константы в записи нет, мы исключаем ноль.

► F, G — первообразные соответственно f, g .

$$\int f dx = \{F + c_1\}$$

$$\int g dx = \{G + c_2\}$$

$$\int f dx \pm \int g dx = \{F + c_1\} \pm \{G + c_2\} = \{F + G + c_3\} =$$

$$(F + G)' = f + g$$

$$= \int (f + g) dx$$

$$\alpha \int f dx = \alpha \{F + c_1\} = \{\alpha F + c_2\} =$$

$$(\alpha F)' = \alpha f$$

$$= \int \alpha f dx$$

91. Замена переменной

Теорема 91.1. Замена переменной в неопределённом интеграле. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, $\varphi: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ непрерывно дифференцируема.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Следствие 91.1.1.

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + c$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$f = x^2, \varphi = \ln x$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$$a > 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\frac{1}{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \end{aligned}$$

$$f = \frac{1}{x^2 + 1}$$

92. Интегрирование по частям

Теорема 92.1. Интегрирование по частям. f, g — дифференцируемые, $f'g$ — интегрируемая.

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

► Φ — первообразная $f'g$.

$$(fg - \Phi + c)' = fg' + f'g - f'g = fg'$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Есть термин «берущиеся» интегралы. Это интегралы, выражаемые через элементарные функции. Их, вообще говоря, мало. К ним относятся рациональные функции (отношение многочленов), произведение тригонометрических функций, $x\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Не берутся, например,

$$\int e^{x^2} dx$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$