# Лекции по математическому анализу
**Лектор: Храбров Александр Игоревич**

Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

---

## Содержание

# 1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

$\mathfrak{Def}$: Множество $A$ - подмножество $B$, если все элементы $A$ содержатся и в $B$.

$$A \subset B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \; x \in B$$

$\mathfrak{Def}$: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \land B \subset A$$

$\mathfrak{Def}$: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \; x \notin \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: $2^A$ — множество всех подмножеств $A$.

$$2^A \overset{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}, \Phi(x) -$ условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p$ имеет ровно 2 натуральных делителя$\}$.

Бывают некорректно заданные «множества». Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как «Наименьший элемент множества...»

$\mathfrak{Def}$: Пересечение двух множеств — множество, состоящие из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \overset{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Симметрическя разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \overset{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \colon x \in A_i\}\,; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\ x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность
$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность
$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$

**Теорема 1.1. Правила де Моргана.** $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)\,; A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I\ \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

◀

**Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности.** $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I \colon x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \; \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или $(a, b)$ — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная $n$-ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i = b_i$$

$\mathfrak{Def}$: Декартого произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i \in A_i$$

# 2. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: Отношение на множествах $A$ и $B$ — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a \, R \, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

$\mathfrak{Def}$: Область определения отношения

$$\beta_R = dom_R = \{a \in A \mid \exists b \in B \colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обсласть значения отношения

$$\rho_R = ran_R = \{b \in B \mid \exists a \in A \colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обратное отношение

$$R^{-1} \colon \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b \, R^{-1} \, a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a \, R \, b$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отношений

$$R_1 \colon A \to B; R_2 \colon B \to C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \, R_1 \, b \wedge b \, R_2 \, c\}$$

Про значок  — его использовать не будем

Пример композиции: $< \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$< \circ <= \{(a, b) \mid b - a \geqslant 2\}$$

$\mathfrak{Def}$: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f\colon A \to B$$

$$a\,f\,b_1 \wedge a\,f\,b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a\,f\,b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A \text{ — область определения})$$

$\mathfrak{Def}$: Свойтва отображеий:

1. Рефлексивность $a\,R\,a$
2. Симметричность $a\,R\,b \Leftrightarrow b\,R\,a$
3. Транзитивность $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$
4. Иррефлексивность $\neg a\,R\,a$
5. Антисимметричность $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- $\underset{5}{\equiv}$: 1, 2, 3
- $\leqslant$: 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- $\subset$: 1, 3, 5

# 3. Вещественные числа

$\mathfrak{Def}$: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и $\times$, причём:

1. Коммутативность $\forall a, b\; a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c\; a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o\colon \forall a\; a + o = a; \exists e\colon \forall a\; a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a\; \exists {-a}\colon a + -a = o; \forall a \neq o\; \exists a^{-1} : a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c\; a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения $\leqslant$ (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы

5. $\forall a, b, c \; a \leqslant b => a + c \leqslant b + c$

6. $\forall a, b \; a > 0 \wedge b \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cup B \neq \emptyset$, $\forall a \in A \, \forall b \in B \; a \leqslant b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A \; a \leqslant c \wedge \forall b \in B \; c \leqslant b$$

*REM:* На $\mathbb{Q}$ аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}\,; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}\,; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

**Теорема 3.1. Принцип Архимеда.** Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$$

▶

$$A \leftrightharpoons \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}\,; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \leftrightharpoons \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A \, \forall b \in B \; a \leqslant b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A \; a \leqslant c \wedge \forall b \in B \; c \leqslant b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n+1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geqslant c \Rightarrow y \leqslant 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$ ◀

*Следствие 3.1.1.*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < \varepsilon$$

▶ Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$ ◀

*Следствие 3.1.2.* $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$$

▶

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z}\colon m \leqslant nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \overset{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant nx\}$$

$$x \geqslant 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассморим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N} \colon k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \; m < k \Rightarrow \exists m = \max M \colon m \leqslant nx < m + 1$$
$$m \leqslant nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leqslant x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m+1}{n} < y$$

◀

*Следствие 3.1.3.* $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$$

▶

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2} : z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < z < y$$

◀

## 4. Верхняя и нижняя граница

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in R$ — верхняя граница $A$, если

$$\forall a \in A : a \leqslant x$$

$x \in R$ — нижняя граница $A$, если

$$\forall a \in A : a \geqslant x$$

$\mathfrak{Def}$: $A$ ограничено сверху, если

$$\exists x \in R : x \text{ — верхняя граница} A$$

$A$ ограничено снизу, если

$$\exists x \in R : x \text{ — нижняя граница} A$$

$A$ ограничено, если $A$ ограничено сверху и снизу.
*REM:* Границ, если они есть, много.
$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, $A$ ограничено сверху. $x$ — супремум $A$, если $x$ — наименьшая из верхних границ.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, $A$ ограничено снизу. $x$ — инфимум $A$, если $x$ — наибольшая из нижних границ.
Пример:

$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

**Утверждение.** $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.
▶ $x$ — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀
**Теорема 4.1. Существование точной границы.** $A \neq \emptyset$.

1. Если $A$ ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.

2. Если $A$ ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

▶

1. $B$ — множество всех верхних границ $A$.

$$\forall a \in A\, \forall b \in B\; a \leqslant b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A\; a \leqslant c \wedge \forall b \in B\; c \leqslant b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

◀

*REM:* Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$

**Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.**

1. $A$ ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \leqslant b \wedge \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A \colon a > b - \varepsilon)$$

2. $A$ ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \geqslant c \wedge \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A \colon a < c + \varepsilon)$$

▶

$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0\; b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \leqslant b \wedge \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A \colon a > b - \varepsilon)$$

◀

# 5. Теорема о вложенных отрезках

**Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках.** Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{i=1}^{n} : \forall i \in \mathbb{N}\; (a_i \leqslant a_{i+1} \wedge b_i \geqslant b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N}\; a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

▶ $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall i \in \mathbb{N}\; c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

◀

*REM:* Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

*REM:* Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

*REM:* $\mathbb{R}$. Рассмотрим приблежения $\sqrt{2}$.

# 6. Метрические пространства

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть множество $X$ и отображение $\rho\colon X\times X\to[0;+\infty)$. Тогда $\rho$ называется метрикой, если:

1. $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$

Также пара $(X,\rho)$ называется метричесикм пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x\neq y\\ 1 & x=y\end{cases}$
2. $\rho(x,y)=|x-y|$
3. Евклидовская метрика. $\rho$ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
5. Расстояния на сфере.
6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка $O$. Тогда для точек на одном луче из $O$ расстояние $\rho(A,B)=|AB|$, иначе $\rho(A,B)=|AO|+|BO|$
7. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрика
$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть $(X,\rho)$ — метрическое пространство. Тогда $(Y,\rho|_{Y\times Y})$ — подпространство X. $Y\subset X$.
$\mathfrak{Def}$: $B_r(a)=\{x\in X\mid\rho(x,a)<r\}$ — открытый шар.
$\mathfrak{Def}$: $\bar{B}_r(a)=\{x\in X\mid\rho(x,a)\leqslant r\}$ — замкнутый шар.
Свойства:

1. $B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(a)=B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$
2. $x\neq y\Rightarrow\exists r>0\colon B_r(x)\cap B_r(y)=\emptyset$

   ▶ Рассмотрим $r=\frac{1}{3}\rho(x,y)>0$. ◀

# 7. Неравентсва Коши-Буняковского и Минковского

**Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского.** $a_1,a_2,\dots a_n,b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}$
$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

▶

$$f(t)\leftrightharpoons\sum_{k=1}^{n}(a_kt-b_k)^2=\left(\underbrace{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}_{\leftrightharpoons A}\right)t^2-2\left(\underbrace{a_1b_1+\dots+a_nb_n}_{\leftrightharpoons C}\right)t+\left(\underbrace{b_1^2+\dots+b_2^2}_{\leftrightharpoons B}\right)$$

$f$ имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0 \Rightarrow 4\left(C^2 - AB\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow C^2 \leqslant AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

*REM:* Равентсво в случае, если числа пропорциональны.

▶

$$a_i = \alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень} t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

◀ ◀

**Теорема 7.2. Неравенство Минковского.**

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}$$

▶ Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}_{\eqqcolon A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}_{\eqqcolon B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leqslant A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{AB} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{Неравенство Коши-Буняковского}$$

*REM:* Равентсво в случае, если числа пропорциональны.

◀

# 8. Открытые множества

$\mathfrak{Def}$: $(X, \rho)$ — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G\, \exists r > 0\colon B_r(x) \subset G$$

**Теорема 8.1. О свойтсвах открытых множеств.** Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и $X$ — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.

▶

1. Очевидно.
2. $$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0\colon x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n\, x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n\, \exists r_k > 0\colon B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k \colon G_r \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$$

4.
$$\forall x \in B_r(a)\, \exists r_x = \frac{1}{2}\left(r - \rho(a,x)\right)$$
$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y,x) < r_x \Rightarrow \rho(y,x) + \rho(a,x) < r_x + \rho(a,x) \Rightarrow \rho(y,a) < r$$

◀

*REM:*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0;1] \text{ — не открытое множество}$$

# 9. Внутренние точки и внутренность множества

$\mathfrak{Def}$: $x \in A$ — внутренняя точка $A$, если $\exists r > 0\colon B_r(x) \in A$

*REM:* $x$ — внутренняя точка $A$ эквивалентно тому, что в $A$ содержится некое открытое множество, содержащее x.

$\mathfrak{Def}$: Внутренность множества $A$:

$$A^0 = \operatorname{int} A \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\operatorname{int} A \subset A$
2. $\operatorname{int} A$ — множество всех внутренних точек.
3. $\operatorname{int} A$ открыто.
4. $A$ открыто $\Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$
6. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$
7. $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

# 10. Замкнутые множества

$\mathfrak{Def}$: Замкнутые множество — множество, дополнение которого открыто.

**Теорема 10.1. О свойствах закмнутых множеств.** Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и $X$ — закмнуты.
2. Перечечение замкнутых — замкнуто.
3. Объеднинение конечного числа замкнутых замкнуто.

4. Замкнутый шар замкнут.

▶

1. Очевидно
2. По формулам де Моргана
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$$
3. По формуле де Моргана
4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению
$$\rho(a, x) > r$$
Покажем, что
$$B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$
Пусть $\exists y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда
$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leqslant r$$
$$y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$
$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

◀

*REM:*
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1\right] = (0; 1]$$

$\mathfrak{Def}$: $A \subset X$, $(X, \rho)$. Тогда замыкание множества $A$ — перечесение всех замкнутых множеств, содержащих A.
$$\operatorname{cl} A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

**Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.**
$$X \setminus \operatorname{cl} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$$
$$X \setminus \operatorname{int} A = \operatorname{cl}(X \setminus A)$$

▶
$$X \setminus \operatorname{cl} A = X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F)$$
$$X \setminus F \text{ открыто}$$
$$X \setminus F \subset X \setminus A$$
То
$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \operatorname{int}(X \setminus A)$$
Аналогично ◀

*Следствие 10.2.1.*
$$\operatorname{int} A = \operatorname{cl}(X \setminus A)$$
$$\operatorname{cl} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A \subset \operatorname{cl} A$
2. $\operatorname{cl} A$ замкнуто.
3. $A$ замкнуто $\Leftrightarrow A = \operatorname{cl} A$
4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$
5. $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$
6. $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$

# 11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

**Теорема 11.1. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве.** $(X;\rho)$ — пространство, $(Y;\rho)$ — подпространство.

1. $A$ открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в $X\colon A = G \cap Y$
2. $A$ замкнутыю в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в $X\colon A = F \cap Y$

▶

1. $\Rightarrow$:

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A\, \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A$$

$$G \leftrightharpoons \bigcup_{x \in A} B^X_{r_x}(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} \left(B^X_{r_x}(x) \cap Y\right) = \bigcup_{x \in A} B^Y_{r_x}(x) = A$$

$\Leftarrow$:

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G$$

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к доплнениям

◀

**Теорема 11.2. О замыканиях.** $(X, \rho)$, $A \subset X$

$$x \in \operatorname{cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $\exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замнкуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\operatorname{cl} A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда
$$x \notin \mathrm{cl}\, A$$
$\Leftarrow$: Пусть $x \notin \mathrm{cl}\, A \Rightarrow \exists F \supset A\colon x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда
$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$$
◀

*Следствие 11.2.1.* $U$ открытое $\wedge\, U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \mathrm{cl}\, A = \emptyset$

▶ Пусть $x \in U \cap \mathrm{cl}\, A$.
$$x \in \mathrm{cl}\, A \Rightarrow \forall r > 0\ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon B_{r_0} \subset U$$
Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ ◀

# 12. Предельные точки

$\mathfrak{Def}$: Проколотая окрестность точки:
$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$
$\mathfrak{Def}$: Точка $x \in X$ предельная у множества $A$, если
$$\forall r > 0\ \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$
$\mathfrak{Def}$: $A'$ — множество предельных точек.
Свойства:

1. $\mathrm{cl}\, A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   ▶ $\supset$:
$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$
$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$
   Тогда
$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$
   $\subset$: Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.
$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0\ \dot{B}_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$
$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leqslant r_0\ \dot{B}_r(x) = \emptyset$$
   Тогда
$$\forall r > 0\ \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$
◀

**Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.**

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0\, |B_r(x) \cap A| = \infty$$

▶

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A\colon y_1 \neq x \wedge y \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x,y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A\colon y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y \in B_{\rho(x,y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\colon y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

◀

*Следствие 12.1.1.* $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

# 13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

**Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.**

$$A \text{ ограниченно сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограниченно снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

▶ $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A\; x \leqslant a \wedge \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A\colon x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$

◀

# 14. Предел последовательности

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть пространство $(X, \rho)$ и последовательность $(x_i)$. Тогда

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\; \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n\to\infty} x = x$
- $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

*REM:* Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

**Теорема 14.1. Свойства предела.**

1. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность $x^*$ содержит всю последовательность с некотрого элемента

2. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \land x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$

3. $\exists x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограниченна

4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x$

▶

1. $\Rightarrow$: Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0\colon B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\; \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\; x_n \in U$$

$\Leftarrow$: $U \leftrightharpoons B_\varepsilon(x^*)$.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\; x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{\rho(x^*;x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1\, \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_2\colon \forall n \geqslant N_2\, \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1; N_2\} \begin{cases} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leqslant \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon$$

3. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\; \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n<N}\{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n\, x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2};\rho(x;x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3};\rho(x;x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$\vdots$$

$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n};\rho(x;x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geqslant N\; \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

◀

*REM:* В пункте 4 можно выбрать различные $x_n$.
*REM:* Если $x_n$ — различные и $x^*$ — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$
*REM:*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \land x_n \in A \Rightarrow x \in \operatorname{cl} A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x - y|)$.

# 15. Предельный переход в неравенстве

**Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве.** Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leqslant y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leqslant y$.

▶ Пусть $y < x$; $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\, |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\, |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\, x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

◀

*REM:* Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

*REM:* Строгие неравенства не сохраняются.

*Следствие 15.1.1.* $x_n \leqslant b \Rightarrow x \leqslant b$

*Следствие 15.1.2.* $x_n \geqslant a \Rightarrow x \geqslant a$

*Следствие 15.1.3.* $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

# 16. Теорема о двух миллиционерах

**Теорема 16.1. О двух миллиционерах.** Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

▶ Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2\colon \forall n \geqslant N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\}\colon \forall n \geqslant N\; l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$ ◀

*Следствие 16.1.1.* $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leqslant z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

*Следствие 16.1.2.* Если $\lim x_n = 0$, а $y_n$ ограниченна, то $\lim x_n y_n = 0$.

▶ Пусть $|y_n| < M$

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq |x_n| M \to 0 \text{ (Возьмем } \varepsilon' = \varepsilon/M)$$

◀

# 17. Предел монотонной последовательности

$\mathfrak{Def}$: $(x_n)$ нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots$$

$(x_n)$ строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

$(x_n)$ нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$$

$(x_n)$ строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

**Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса.** Монотонная последовательность ограниченна тогда и только тогда, когда имеет предел.

▶ $\Leftarrow$: Очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть $(x_n)$ возрастает. Она ограниченна, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k \colon x_k > x - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant a$$

Тогда

$$\forall n \geqslant k \; |x_n - a| < \varepsilon$$

◀

# 18. Конечное векторное пространство

$\mathfrak{Def}$: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

1. Сложение
   (a) Коммутативно
   (b) Ассоциативно
   (c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{d}$
   (d) Существует обратный элемент
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
5. $1x = x$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение векторного пространства —

$$+ : X + X \to X$$

$$\times : \mathbb{R} \times X \to X$$

Обладает свойствами 1–4 и $1X = X$

$\mathfrak{Def}$: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение скалярного произведения: $X$ — веторное пространство. Задана операция $\langle x, y\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ обладающая указынными свойствами.

Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

$\mathfrak{Def}$: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

1. $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковкского)

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)

5. $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)

6. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$

   $\blacktriangleright$ $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

   $$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geqslant \|x\|$$

   А это неравнство треугольника. $\blacktriangleleft$

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространтво на $\mathbb{R}^d$.

$\mathfrak{Def}$: Общее определение нормы: $\|x\|\colon X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4.
Свойство 3 касается скаляроного произведения, которого может и не быть.
Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|$

2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1..d} |x_k|$

   $\blacktriangleright$

   $$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leqslant \max_{k=1..d}(|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

   $\blacktriangleleft$

3. $$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p}$$

# 19. Арифметические свойства предела

Пусть есть $(\mathbb{R}^d, \rho)$ со стандартной метрикой и нормой.

**Утверждение.** $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

▶

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$

◀

*REM:* $A \subset \mathbb{R}^d$ ограниченно $\Leftrightarrow \exists M\colon \forall x \in A\ \|x\| \leqslant M$

**Теорема 19.1. Арифметические свойства предела.** $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$, $\lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$
5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$

▶

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\colon \forall n > N_1\ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\colon \forall n > N_2\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_3\colon \forall n > N_3\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1. $$\forall \varepsilon > 0\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2. $$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| =$$
$$= |\lambda_n|\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\| \leqslant M\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\|$$

   Но тогда
$$\forall n > \max N_1, N_3\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2
4. $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\right); y_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)}\right)$ Это докажем позже
5. $$0 \leqslant |\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$$

◀

**Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных.** $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

▶ Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \eqqcolon A$$

$$\exists N_1\colon \forall n > N_1\ |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

◀

# 20. Покоординатная сходимость

$\mathfrak{Def}$: $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\{x_n\}$ сходится в $x_0$ покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}\colon \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

**Теорема 20.1. О сходимости покоординатно.** $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.

▶

$$\left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{d} \left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)$$

◀

*Следствие 20.1.1.* $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$

▶

$$\left.\begin{array}{r} x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \to y_n^{(i)} \\ y_n \to y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \to y_0^{(i)} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{d} x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to \sum_{i=1}^{d} x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$$

◀

# 21. Бесконечно малые и большие

$\mathfrak{Def}$:

$$\lim x_n = +\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ \ |x_n| > E$$

*REM:*
$$\left[\begin{array}{l}\lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty\end{array}\right. \Rightarrow \lim x_n = \infty$$
Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

*REM:* $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

*REM:* Единтсвенность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

*REM:* Теорема о двух миллиционерах справедлива и для бесконечно больших.

*REM:* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$
3. $c > 0\colon \pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0\colon \pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$
6. $c < 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$
7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$
8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$
12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$
13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечнен.

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

# 22. Связь между бесконечно большими и малыми

**Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых.** Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

▶

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

◀

**Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми.** Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограниченна. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая

2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

**Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.**

1. $x_n \to +\infty \wedge y_n$ ограниченна снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
2. $x_n \to -\infty \wedge y_n$ ограниченна сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$
3. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
4. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$
5. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \leqslant a < 0 \Rightarrow x_n y_n \to -\infty$
6. $x_n \to \infty \wedge |y_n| \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$
7. $x_n \to a \neq 0 \wedge y_n \to 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$
8. $x_n$ ограниченна $\wedge\, y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$
9. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\wedge\, y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

*REM:*

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \geqslant a$$
$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \leqslant a$$

# 23. Компактность

$\mathfrak{Def}$: Множество $A$ имеет покрытие множествами $B_\alpha$, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество $A$ имеет открытое покрытие открытыми множествами $B_\alpha$, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество $A$ компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подкокрытие.

$$\forall B_\alpha\colon K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\colon K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

**Теорема 23.1. Компактность и подпространства.** Пусть $(X, \rho)$ — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $B_\alpha$ — открытое в $Y$, что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в $Y$ покрытием соотвествующими множествами в $X$, выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в $Y$.

$\Leftarrow$: Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left( \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве $Y$, в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из $X$. ◀

*REM:* Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left( \frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

# 24. Свойства компактного множества

**Теорема 24.1. Свойства компактного множества.** Если $K$ компактно, то $K$ замкнуто и ограниченно.

▶

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограниченно}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но ($r \leftrightharpoons \min_{i=1}^{k} \left\{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\right\}$)

$$\forall i = 1..k \; B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

**Теорема 24.2. Признак компактного множества.** Замкнутое подмножество компактного компактно.

▶ Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

# 25. Теорема о пересечение семейства компактов

**Теорема 25.1. Пересечение компактных.** Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

▶ $K_0$ — любое их них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus K_{x_i}\right) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^{k} K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

◀

*Следствие 25.1.1.* Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто.

# 26. Теорема о вложенных параллелепипедах

$\mathfrak{Def}$: Параллелепипедом на $\mathbb{R}^d$ и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (закрытый)}$$

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, a_i < x_i < b_i\right\} \text{ (открытый)}$$

**Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах.** $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ имеют непустое пересечение.

▶ Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

# 27. Теорема Гейне-Бореля

**Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля.** Замкнутый куб компактен

▶

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, 0 \leqslant x_i \leqslant a\right\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобъём куб по кажому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покроет ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрыл куб. ◀

# 28. Подпоследовательность

$\mathfrak{Def}$: Подпоследовательность:

$$\left\{x_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

**Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.**
Подпоследовательность имеет тот же предел.
Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

# 29. Секвенциальная компактность

**Теорема 29.1. Компактность в $\mathbb{R}^d$.** Следующее в $\mathbb{R}^d$ равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограниченно
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (*секвенциально компактно*)

▶ 2 $\Rightarrow$ 1: ограниченно, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и замкнуто, значит компактно.

1 $\Rightarrow$ 3: Возьмём последовательность $\{x_n\} \leftrightarrows E$ элементов множества $F$. Если множество элементов $E$ конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X\, \exists r_x > 0 \colon \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие
$$\bigcup_{x\in X} B_{r_x}(x)$$
В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его
$$\bigcup_{i=1}^{k} \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$
Но также
$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$
Значит
$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}$$
Получили, что $E$ конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть $K$ не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в $K$. Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу $K$.

Пусть $K$ не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.
$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1\colon \rho(x_1, a) > 1$$
$$K \not\subset B_{\rho(a,x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2\colon \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$
$$\vdots$$
Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса $R$. Но
$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$
$$R > \rho\left(b, x_{n_k}\right) > \rho\left(a, x_{n_k}\right) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \to \infty$$
Значит $K$ ограниченно. ◀

*REM:* $1 \Rightarrow 3; 3 \Rightarrow 2; 1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой.

# 30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

*Следствие 30.0.1.* В $\mathbb{R}^d$ компактность $K$ равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

▶ В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

*Следствие 30.0.2.*Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

▶ Множество значений ограниченно, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

*Следствие 30.0.3.* В любой последовательности в $\mathbb{R}$ есть сходящаяся в $\bar{\mathbb{R}}$ подпоследовательность.

▶ Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

# 31. Диаметр множества

$\mathfrak{Def}$: Диаметр множеста:

$$\operatorname{diam} A = \sup \rho(x, y)$$

**Теорема 31.1. Свойства диаметра.**

1. $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$

2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \cdots$ — последовательность вложенных компактов, $\operatorname{diam} K_n \to 0$. Тогда $\bigcap K_i$ — одноточечное.

▶

1.

$$E \subset \operatorname{cl} E \Rightarrow \operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$
$$d = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E = \sup \rho(x, y)$$
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists x_0, y_0 \colon \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$
$$x_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists x_1 \in E \colon \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$
$$y_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists y_1 \in E \colon \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geqslant \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$
$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$

Устремив $\varepsilon \to 0$, получим

$$\operatorname{diam} E \geqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого n хотя бы $\rho(a, b)$. Противоречие.

◀

# 32. Фундамитальные последовательности

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n, m > N \; \rho(n, m) < \varepsilon$$

*REM:* $E \leftrightharpoons \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \operatorname{diam} E \to 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.

   ▶

   $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K \colon \forall k > K \; \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$
   $$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n, m > K \; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

   Т.о.

   $$\exists n_k > M = \max\{N, K\} \colon \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$

   ◀

$\mathfrak{Def}$: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

# 33. Полнота компактных метрических пространств

**Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.**

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

2. В $\mathbb{R}^d$ фундаментальная последовательность всегда сходится.

▶ $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n, m > N \; \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

$x_n$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^d$. $E_n \leftrightharpoons \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ — ограниченно. $\operatorname{cl} E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\operatorname{cl} E_1 \supset \operatorname{cl} E_2 \supset \operatorname{cl} E_3 \supset \cdots$$

$$\operatorname{diam} \operatorname{cl} E_n = \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о.

$$\exists! \, a \colon a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{cl} E_n$$

$$a \in \operatorname{cl} E_n \Rightarrow \forall i > n \, 0 \leqslant \rho(a, x_i) \leqslant \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о $x_n \to a$. ◀

*REM:* $\mathbb{R}^d$ полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

**Теорема 33.2. О полноте компактного пространства.** Компактное метрическое пространство полно.

▶ В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

# 34. Верхний и нижний предел

$\mathfrak{Def}$: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \varliminf x_n = \lim_{x \to \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \varlimsup x_n = \lim_{x \to \infty} \sup_{k > n} x_k$$

*REM:* $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

$\mathfrak{Def}$: $a$ — частичный предел последовательности, если $a$ предел подпоследовательности.

*Лемма 34.1.* Если $x_n$ монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

**Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов.** У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\overline{\mathbb{R}}$, при этом

$$\varliminf x_n \leqslant \varlimsup x_n$$

▶ $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$. Если $x_n$ ограниченно, то и $y_n$ ограниченно. Если $x_n$ не ограниченно снизу, то и $y_n$ не ограниченно снизу. Т.о. $\lim y_n = \varliminf x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

**Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.**

1. $\limsup$ — наибольший частичный предел.
2. $\liminf$ — наименьший частичный предел.
3. $\lim$ существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$

▶

1. $a = \limsup x_n$. Покажем, что $a$ — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geqslant a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к $a$.

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к $b$, уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два миллиционера

◀

# 35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и eps

**Теорема 35.1. Определение верхнего и нижнего предела через $N$ и $\varepsilon$.**

1.
$$a = \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \,\exists N \colon \forall n > N \; x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \,\forall N \colon \exists n > N \; x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.
$$a = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \,\forall N \colon \exists n > N \; x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \,\exists N \colon \forall n > N \; x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

▶

1. Запишем в терминах $y_n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists N \colon \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0 \,\exists N \colon \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

◀

**Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.**

$$a_n \leqslant b_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \end{cases}$$

▶ Просто сводим к пределам инфимумов. ◀

# 36. Неравенство Бернули

**Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.**

$$\forall x > -1 \; \forall n \in \mathbb{N} \; (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

▶ Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geqslant 1 + nk$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>0}(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1 + kx + x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x$$

◀

*Следствие 36.1.1.* Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

# 37. Число e

Определим число $e$:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \uparrow; y_n \downarrow$.

▶

$$x_n < x_{n+1} \Leftarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \Leftarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

$$y_n < y_{n-1} \Leftarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 - \frac{n}{n^2-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

◀

Заметим, что при этом $x_n < y_n$. Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \fallingdotseq e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$

2. $x_n < e < y_n$

# 38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

**Теорема 38.1. Предел убывающей по отношению.** $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$.

▶ С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀

*Следствие 38.1.1.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

▶

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} < 1$$

◀

*Следствие 38.1.2.*

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

*Следствие 38.1.3.*

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

▶

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1 + \frac{1}{n})^- n \to \frac{1}{e} < 1$$

◀

# 39. Теорема Штольца

**Теорема 39.1. Теорема Штольца.** $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

▶

1. Пусть a = 0.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = |\sum| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем N, такое что $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$, тогда при n и m > N

$$< \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon (y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

устремим n к бесконености.

$$|x_m| < \varepsilon (y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{при } m > N$$

2. $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - a y_n$$

◀

# 40. Теорема Штольца

**Теорема 40.1. Теорема Штольца.** $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

▶ $a = 0$:

$$\varepsilon_n \leftrightharpoons \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n > N \, |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{N} + \sum_{i=N+1}^{n}$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leqslant \sum_{i=N+1}^{n} |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^{n} (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leqslant \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$$

$a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - a y_n$. Фактом $x_n \to \infty$ мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - a y_n) - (x_{n-1} - a y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \to 0$$

$a = +\infty$: Поменяем местами $x_n$ и $y_n$. Проверим, что $x_n$ монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 x_n - x_{n11} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$: Сменим знаки $x_n$. ◀

# 41. Пределы функций

$\mathfrak{Def}$: $(X, \rho_x)$ и $(Y, \rho_y)$ — метрические пространства. $E \subset X$, $a$ — предельная точка $E$. $f\colon E \to Y$. Тогда говорят, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a)\, \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in E\, (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

*REM:* Для бесконечности на $\mathbb{R}$ есть частные случаи.

$\mathfrak{Def}$: По Гейне,

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E\colon x_n \neq a \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$$

# 42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

**Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции.** Определения равносильны.

▶

1. Коши $\Rightarrow$ Гейне

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a)\, \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

   Пусть $lim x_n = a$, $x_n \in E, x_n \neq a$

   По $\delta$ выберем N $\forall n > N x_n \in B_\delta(a)$, тогда $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

   Нашли номер N при котором $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow lim f(x_n) = b$

2. Гейне $\Rightarrow$ Коши

   от противного.

   По Коши $\to \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a)\, \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\colon \exists x \in \dot{B}_\delta(a)\, \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

   Выберем последовательность $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow lim(f(x_n)) \neq b$$

   Противоречие с определением по Гейне

◀

*REM:* В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все $x_n$ различны.

*REM:* Можно рассматривать лишь такие последовательности, что $\rho(x_n, a)$ убывает.

# 43. Свойства функций, имеющих предел

*REM:* Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны. То есть достаточно доказать, что для любой сходящейся последовательности $\{x_n\}$ предел $f(x_n)$ существует, из этого будет следовать по Гейне.

▶ Возьмём две сходящиеся последовательности $x_n$ и $y_n$, после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям $b$ и $c$. Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

**Утверждение.** Единственность предела $f\colon E \subset X \to Y$, $a$ — предельная точка. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ единственнен.

▶ Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

**Теорема 43.1. Ограниченность.** $f\colon E \subset X \to Y$, $\lim\limits_{x\to a} = b$. Тогда

$$\exists r > 0\colon f\,|_{E\cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

**Теорема 43.2. Уход от нуля.** $f\colon E \to \mathbb{R}^d$, $\lim\limits_{x\to a} = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0\colon \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E\ f(x) \neq 0$$

▶ $\varepsilon \leftrightharpoons \rho(x, \vec{0})$ ◀

# 44. Арифметические действия с пределами

**Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции..** $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}^d$, $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, $a$ предельная точка $E$.

1. $\lim x \to a(f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$
2. $\lim x \to a(\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$
3. $\lim x \to a(f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$
4. $\lim x \to a\,\|f(x)\| = \|f_0\|$
5. $\lim x \to a\,\langle f(x), g(x)\rangle = \langle f_0, g_0\rangle$

▶ Возьмём любые сходящиеся к $a$ последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

**Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции..** $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}$, $a$ предельная точка $E$.

1. $\lim x \to a(f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$
2. $\lim x \to a(f(x)g(x)) = f_0 g_0$
3. $\lim x \to a\,|f(x)| = |f_0|$
4. $\lim x \to a\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_0}{g_0}$

▶ Аналогично. ◀

*REM:* Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

# 45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

**Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве..** $f, g\colon E \to Y$, $a$ предельная точка $E$, $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leqslant g(x)$. Тогда $f_0 \leqslant g_0$.

**Теорема 45.2. О двух миллиционерах.**

# 46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

$\mathfrak{Def}$: Пределы слева и справа. $f\colon E \cap \mathbb{R} \to Y$.

$$\lim_{x \to a-} = \lim_{x \to a-0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x \to a} f \mid_{E \cap (-\inf, a)}$$

$$\lim_{x \to a+} = \lim_{x \to a+0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x \to a} f \mid_{E \cap (a, +\inf)}$$

**Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченой функции..**

# 47. Критерий Коши для отображений и для функций

**Теорема 47.1. Критерий Коши.**

$$f : E \subset X \to Y, a \text{ — предельная точка E, Y  — полное}$$

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

▶

1. $\Rightarrow$ Если $\lim_{x \to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2. $\Leftarrow$

   Берем любую последовательность $x_n$ $x_n \neq a \in E \to a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$$\Rightarrow f(x_n) \text{ — фундументальная последовательность точек из Y}$$

$$\Rightarrow \exists lim(f(x_n)) \text{полнота Y}$$

◀

# 48. Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа

$\mathfrak{Def}$: (По Коши) $f : E \subset x \to ya \in E$

$$f \text{ — непрерывно в точке a, если } \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x \in B_\delta(a)\, f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

$\mathfrak{Def}$: (По Гейне)

$$\forall \{x_n\} \subset E \wedge x_n \to a\, f(x_n) \to f(a) \Leftrightarrow f \text{ — непрерывно в точке a}$$

$\mathfrak{Def}$: $f : E \subset \mathbb{R} \to Y, a \in E$

$$f \text{ — непрерывно слева в точке a} \Leftrightarrow g = f|_{(-\infty,a]\cap E} \text{ — непрерывно в точке a}$$

$\mathfrak{Def}$: $f : E \subset \mathbb{R} \to Y, a \in E$

$$f \text{ — непрерывно справа в точке a} \Leftrightarrow g = f|_{[a,+\infty)\cap E} \text{ — непрерывно в точке a}$$

# 49. Арифметические действия с непрерывными функциями

**Теорема 49.1. Арифметические действия с непрерывными функциями.** $f, g \colon E \subset X \to \mathbb{R}^d$, $a \in E$, $f, g$ непрерывны в точке $a$. Тогда

1. $f(x) + g(x)$ непрерывно в точке $a$
2. $f(x)$ непрерывно в точке $a$
3. $f(x) - g(x)$ непрерывно в точке $a$
4. $\|f(x)\|$ непрерывно в точке $a$
5. $\langle f(x), g(x)\rangle$ непрерывно в точке $a$

**Теорема 49.2. Арифметические действия с непрерывными вещественными функциями.** $f, g \colon E \subset X \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $f, g$ непрерывны в точке $a$. Тогда

1. $f(x) + g(x)$ непрерывно в точке $a$
2. $f(x)g(x)$ непрерывно в точке $a$
3. $f(x) - g(x)$ непрерывно в точке $a$
4. $|f(x)|$ непрерывно в точке $a$
5. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывно в точке $a$

**Теорема 49.3. О стабильном знаке.** $f \colon E \subset X \to \mathbb{R}$, $a \in E$, $f$ — непрерывно в точке $a$ и $f(a) \neq 0$. Тогда

$$\exists B_\delta(a) \colon \forall x \in B_\delta(a)\, sign(f(x)) = sign(f(a))$$

▶

$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$$

◀

**Теорема 49.4. О непрерывности композиции.** $f\colon E_1 \subset X \to Y$, $g\colon E_2 \subset Y \to Z$, $f(E_1) \subset E_2$, $a \in E_2$, $f$ непрерывна в точке $a$, $g$ непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $g \circ f$ непрерывна в точке $a$.

▶ Надо проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1\, g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$

Берем $\varepsilon$

$$\exists \gamma > 0\colon \forall y \in B_\gamma(f(a)) \cap E_2\, g(y) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \quad \text{по непрерывности } g \text{ в точке } f(a)$$

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1\, f(x) \in B_\gamma(f(a)) \quad \text{по непрерывности } f \text{ в точке } a$$

Тогда

$$g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))$$

◀

# 50. Характеристика непрерывности в терминах прообразов

**Теорема 50.1.** $f\colon X \to Y$. $f$ непрерывна во всех точках $\Leftrightarrow$ прообраз любого открытого множества открыт.

▶

1. $\Rightarrow$:

   $G \subset Y$, $G$ открытое. Надо доказать, что $f^{-1}(G)$ — открытое. Возьмем $a \in f^{-1}(G)$. Надо доказать, что существует шар с центром в точке $a$, содержащийся в $f^{-1}(G)$.

   $$f(a) \in G \Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

   Знаем,что $f$ непрерывна в точке

   $$\exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(a)\, f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

   То есть

   $$\forall x \in B_\delta(a)\, f(x) \in G$$

   То есть

   $$B_\delta(a) \subset f^{-1}(G)$$

2. $\Leftarrow$ Зафиксируем $a \in x$. Надо доказать, что

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(a)\, f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

   Возьмем $B_\varepsilon(f(a))$ — открытое множество, $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открытое, поэтому

   $$\exists B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

◀

# 51. Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное

**Теорема 51.1. Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное.** $f\colon E \subset X \to \mathbb{R}^d$, $a \in E$. Тогда $f$ непрерывна в точке $a \Leftrightarrow$ все координаты функции $f$ непрерывны в точке $a$.

▶

$\Rightarrow$:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(a) \cap E\, f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

То есть

$$\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$$|f_i(x) - f_i(a)| \leqslant \sqrt{(f_1(x) - f_1(a))^2 + \dots + (f_d(x) - f_d(a))^2} = \rho(f(x), f(a))$$

Тогда

$$|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \Rightarrow f_i \in B_\varepsilon(f_i(a))$$

То есть $f_i$ непрерывна в точке $a$.

$\Leftarrow$: Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_d\} > 0$. Тогда

$$\forall x \in B_\delta(a)\, \forall i = 1..d\, |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$$

Тогда

$$(f_1(x) - f_1(a))^2 + \dots + (f_d(x) - f_d(a))^2 < d\varepsilon$$

Тогда

$$\rho(f(x), f(a)) < \sqrt{d}\varepsilon$$

◀

# 52. Непрерывность и компактность

$\mathfrak{Def}$: $f\colon E \subset x \to y$. $f$ — ограниченное отображение, если $f(E)$ ограничено.

**Теорема 52.1. Непрерывный образ компакта — компакт.** $f\colon x \to y$, $f$ непрерывен на $X$, $K \subset X$, $K$ — компакт. Тогда $f(K)$ — компакт.

▶ Пусть $G_\alpha$ — открытые множества.

$$\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset f(K)$$

Надо выбрать конечное подпокрытие. Рассмотрим $f^{-1}(G_\alpha)$ — открытое множество (так как $f$ непрерывна).

$$\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(G_\alpha) \supset K$$

Существует конечное покрытие

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n\colon \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i}) \supset K$$

Тогда
$$\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_1} \supset f(K)$$
является конечным подпокрытием для $f(K)$. ◀

*Следствие 52.1.1.* Непрерывный образ компакта — замкнут и ограничен.

*Следствие 52.1.2.* Теорема Вейерштрасса. $f\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте $K$. Тогда $f$ ограничена.

*Следствие 52.1.3.* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывена на $[a,b]$. Тогда $f$ ограничена.

*Следствие 52.1.4.* $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f$ непрерывна на компакте $K$. Тогда
$$\exists a, b \in K\colon \forall x \in K\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$
▶ $f(K)$ — ограниченное подмножество $\mathbb{R}$.
$$A = \inf f(K); B = \sup f(K)$$
$f(K)$ — замкнуто $\Rightarrow A, B \in f(K)$ ◀

*Следствие 52.1.5.* Теорема Вейерштрасса. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда она принимает наибольшее и наименьшее значение.

# 53. Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции

**Теорема 53.1.** $f\colon K \to Y$ непрерывно на компакте $K$ и биективно. Тогда $f^{-1}\colon Y \to K$ непрерывно.

▶ Надо проверить, что для $f^{-1}$ прообраз открытого множества — открытое. То есть надо проверить для $f$, что образ открытого — открытое.

Берем $G \subset K$ — открытое. Тогда $K \setminus G$ — замкнутое подмножество K. Тогда $K \setminus G$ — компакт. Тогда $f(K \setminus G)$ — компакт, в том числе замкнутое. Тогда $f(G)$ — открытое. ◀

*Следствие 53.1.1.* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ строго монотонна и $f$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $f^{-1}$ непрерывна на множестве задания.

▶ $[a,b] = K$ — компакт. Так как $f$ строго монотонна, то $f$ — биекция между $[a,b]$ и $f([a,b])$. ◀

*Следствие 53.1.2.* $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ строго монотона и непрерывна. Тогда $f^{-1}$ непрерывна на множестве задания.

▶
$$Y = f(\langle a,b\rangle)$$
$$f^{-1}\colon Y \to \mathbb{R}$$
Надо доказать непрерывность. Берем $c \in Y$. Тогда
$$\exists x_0 \in \langle a,b\rangle : c = f(x_0)$$
Возьмем $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset \langle a,b\rangle$
$$g = f\,|_{[\alpha,\beta]}\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$$
Применяем к $g$ следствие 1.
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall y \in B_\delta(c) \cap f([\alpha,\beta])\, g^{-1}(y) \in B_\varepsilon(g^{-1}(c))$$
$f\colon X \to Y$ непрерывно на $X$.
$$\forall a \in X\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in B_\delta(a)\, f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$
◀

# 54. Равномерная непрерывность на функции. Теорема Кантора

$\mathfrak{Def}$: $f\colon X \to Y$ равномерно непрерывна, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x, y \in X \land \rho(x,y) < \delta\; \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

**Теорема 54.1. Теорема Кантора.** $f\colon K \to Y$, $K$ — компакт, $f$ непрерывна на $K$. Тогда $f$ равномерно непрерывно.

▶ От противного. Пусть

$$\exists \varepsilon > 0 \colon \exists x_n, \tilde{x}_n \in K \colon \rho(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{1}{n} \land \rho(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \geq \varepsilon$$

$x_n$, $\tilde{x}_n$ последовательность точек из $K$. Возьмём из $x_n$ сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}$, $x_{n_k} \to a \in K$. Тогда $\tilde{x}_{n_k} \to a$, так как

$$\rho(x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0$$

$f$ непрерывно в точке $a$

$$\exists \delta > 0 \colon \forall x \in B_\delta(a)\, f(x) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$$

Начиная с какого-то $N$

$$x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k} \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k}) \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(a))$$

$$\Rightarrow \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) < \varepsilon \quad \text{противоречие}$$

◀

*Следствие 54.1.1.* Непрерывная на $[a,b]$ функция равномерно непрерывна.

# 55. Теорема Больцано—Коши

*Лемма 55.1.* О связности отрезка. Пусть $[a,b] \subset U \cup V$, $U, V$ — открытые и $U \cap V = \emptyset$. Тогда либо $[a,b] \subset U$, либо $[a,b] \subset V$.

▶ Рассмотрим точку $b$. Пусть $b \in V$. $S = [a,b] \cap U$, пусть $S \neq \emptyset$.

$$b_1 = \sup S$$

Поскольку $b \in V$ — открытое, то

$$\exists \varepsilon > 0 \colon (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset V$$

Тогда

$$(b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap S = \emptyset \Rightarrow b_1 \leqslant b - \varepsilon \Rightarrow b_1 < b$$

Пусть $b_1 \in V$. Тогда

$$(b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon) \subset V \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon) \cap S = \emptyset \Rightarrow \sup S \leqslant b_1 - \varepsilon \quad \text{противоречие}$$

Тогда

$$b_1 \in U \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset U$$

$\delta = min\{\varepsilon_1, b - b_1\} > 0$

$$[b_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset S \Rightarrow supS \geq b_1 + \delta \quad \text{противоречие}$$

◀

**Теорема 55.1. Теорема Больцано—Коши.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f$ — непрерывна на $[a,b]$. Тогда

$$\forall C \in [f(a), f(b)]\, \exists c \in (a,b)\colon f(c) = C$$

▶ От противного. Пусть

$$\forall x \in [a,b]\, f(x) \neq C$$

Тогда

$$[a,b] \subset f^{-1}\left((-\infty, C)\right) \cup f^{-1}((C, +\infty))$$

они открытые и не пересекаются, $a$ и $b$ принадлежат разным множествам. Противоречие. ◀

*Следствие 55.1.1.* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда $f([a,b])$ — отрезок.

▶

$$\exists u, v \in [a,b]\colon \forall x \in [a,b]\, f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v) \Rightarrow f([a,b]) \subset [f(u), f(v)]$$

По теореме

$$\forall C \in (f(u), f(v)) \exists c \in (u,v)\colon f(c) = C$$

Таким образом $f([a,b]) = [f(u), f(v)]$ ◀

*Следствие 55.1.2.* $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда $f$ принимает все значения из $(\inf f(x), \sup f(x))$.

▶ Пусть $C \in (\inf f, \sup f)$. Тогда

$$\exists u\colon f(u) < C; \exists v\colon f(v) > C$$

Тогда $C$ лежит между $f(u)$ и $f(v)$, но f непрерывно на $[u,v]$, значит она принимает все промежуточные значения. ◀

# 56. Непрерывность тригонометрических функций

**Теорема 56.1.**

$$\sin x < x < tgx$$

*Следствие 56.1.1.* sin и cos непрерывны.

▶

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin \frac{x-y}{2}\right| \left|\cos \frac{x+y}{2}\right| \leqslant |x - y|$$

◀

*Следствие 56.1.2.* tg и ctg непрерывны.

*Следствие 56.1.3.*

$$\sin \uparrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos \downarrow [0, \pi]$$

$$\operatorname{tg} \uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

𝔇𝔢𝔣:

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$

$$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$$

**Теорема 56.2.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

▶ $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x\to 0} 1 \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$

◀

# 57. Степенная функция

$$x^n \quad x \in [0;+\infty); n \in \mathbb{N}$$

Больше нуля, непрерывна, инфимум 0, супремум бесконечен, строго монотонная.

$$x^{\frac{1}{n}} \text{ обратная}$$

Тоже непрерывна.

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)m$$

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

**Утверждение.** Определение корректно. $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^{\frac{1}{nk}})^{mk}$
**Утверждение.** Свойства степени выполняются.

1. $x^a x^b = x^{a+b} a, b \in \mathbb{Q}$
2. $(x^a)^b = x^{ab}$
3. $x^a y^a = (xy)^a a \in \mathbb{Q}$
4. $x^a < y^a$ при x < y
5. $x^a < x^b$ при x > 1 и a < b или при 0 < x < 1 и a > b

*Лемма 57.1.*

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \text{при a} > 0$$

▶ $a \geqslant 1$:

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + \varepsilon n > \varepsilon n > \varepsilon N > a$$

$$N > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N\ (1+\varepsilon)^n > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \geqslant 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

$0 < a < 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

◀

**Теорема 57.1.** Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Тогда последовательность $a^{x_n}$ имеет предел, зависящий только от $x$ и $a$.

▶

$$a^{x_n} - a^{x_m} = a^{x_n}\left(a^{x_m - x_n} - 1\right)$$

$$\forall n\ |x_n| \leqslant M \Rightarrow a^{x_n} \in [a^{-M}; a^M]$$

Т.о.

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leqslant \underbrace{a^M}_{\leftrightharpoons C}\left(a_{x_n - x_m} - 1\right) < C\varepsilon$$

По лемме

$$\exists N \colon \forall k > N\ |a^{\frac{1}{n}} < 1| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{N} \to -\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a_{x_n - x_m} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < 1 + \varepsilon$$

Т.о. предел существует.

Пусть теперь

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = x \qquad \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} \neq \lim_{n\to+\infty} a^{y_n}$$

Но рассмотрим

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, ...\} \to x$$

Но тогда $a^{z_n}$ не имеет предела, что противоречит доказанному выше. ◀

$\mathfrak{Def}$:

$$a^x = \lim_{\substack{x_n \to x \\ x_n \in \mathbb{Q}}}$$

Свойства степени:

1. Для $x \in \mathbb{Q}$ корректно.
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $x^a y^a = (xy)^a$
5. $x < y \wedge a > 0 \to x^a < y^a$

   ▶

   $$a_n \to a > 0 \Rightarrow a_n > 0 \text{ с какого-то места}$$

   $$x_n^a < x_n^b \Rightarrow x^a \leqslant x^b$$

   Теперь хотим строгое

   $$\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$$

   $$z \leftrightharpoons \frac{x}{y}$$

   $$z^{a_n} < 1 \wedge z^{a_n} \downarrow \Rightarrow z_a < 1$$

   ◀

6. $x^a < x^b$ при $x > 1 \wedge a < b$ или $0 < x < 1 \wedge a > b$

   ▶ $x > 1 \wedge a < b$:

   $$a < p < q < b \quad p, q \in Q$$

   $$x^{a_n} < x^p < x^q < x^{b_n}$$

   $$x^a \leqslant x^p < x^q \leqslant x^b$$

   ◀

*Лемма 57.2.*

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} a^x = 1$$

▶

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\forall |x| < \frac{1}{N} 1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{N}$ ◀

# 58. Логарифм

**Теорема 58.1.**

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \leftrightharpoons a^x \text{ непрерывна}$$

▶ Надо доказать, что $a^{\lim_{n\to+\infty} x_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}$
$x_0 \leftrightharpoons \lim_{n\to+\infty} x_n$

$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x_n - x_0} - 1\right) \to 0$$

◀

*Следствие 58.1.1.* Есть обратная

$$\log_a x$$

**Теорема 58.2.**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

▶ $x_n \to +\infty$. $[x_n] = k$

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \leqslant \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$x_n \to +\infty$. $y_n = -x_n$

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} \to e$$

А для смеси возьмём две части, в каждой есть хороший номер. ◀

# 59. Следствия

*Следствие 59.0.1.*

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x\to 0}(\frac{ln(1+x)}{x}) = 1$

▶

$$\lim(\frac{ln(1+x)}{x}) = \lim(ln(1+\frac{1}{x})^x) = ln(lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{)}^x) = lne = 1$$

◀

3. $lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$

   ▶ $y = a^x - 1 \to 0$ при $x \to 0$(непрерывность $a^x$)

$$a^x = y + 1$$

$$xlna = ln(y+1)$$

$$\frac{a^x-1}{x} = \frac{y}{\frac{ln(y+1)}{ln(a)}} = ln(a)\frac{y}{ln(1+y)} = ln(a)$$

◀

4. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x} = p$

   ▶ $y = (1+x)^p - 1 \to 0$ при $x \to 0$

$$(1+x)^p = 1 + y$$

$$pln(1+x) = ln(1+y)$$

$$\frac{(1+x)^p-1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{ln(1+y)}\frac{ln(1+y)}{pln(1+x)}\frac{ln(1+x)}{x}p = p$$

◀

# 60. Сравнение функций

$\mathfrak{Def}$: $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, $a$ — предельная точка $E$. Если существует такая $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in E\ f(x) = \varphi(x)g(x)$$

и

1. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$, то $f \sim g$ при $x \to a$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$, то $f = o(g)$ при $x \to a$.
3. $\varphi$ ограничена, то $f = O(g)$ при $x \to a$.
4. Если

$$\forall x \in E\ |f(x)| \leqslant c|g(x)|$$

   то $f = O(g)$ на $E$.

Свойства:

1. $\sim$ — отношение эквиваленции.
2. $f_1 \sim f_2 \land g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1g_1 \sim f_2g_2$
3. $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f) \Leftrightarrow f = g + o(f)$

   ▶

$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \varphi \to 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g, \varphi - 1 \to 0 \Leftrightarrow f = g + o(g)$$

◀

4. $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$
5. $f \cdot o(g) = o(fg)$

Примеры ($x \to 0$):

$$\sin x \sim x$$
$$\ln(x+1) \sim x$$
$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$$
$$(x+1)^p - 1 \sim px$$

# 61. Производная

$\mathfrak{Def}$:

$$f : (a,b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a,b)$$

Если существует конечный $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется производной f в точке $x_0$. $f'(x_0)$
$\mathfrak{Def}$:

$$f : (a,b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a,b)$$

f — диффиренцируема в точке $x_0$, если $\exists A \in \mathbb{R}$ т.ч. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$

**Теорема 61.1.** $f : (a,b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a,b)$
f — дифф. в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists$ конечная производная $f'(x_0)$
И в этом случае $A = f'(x_0)$
▶ f — дифф.в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - A \to 0 \Leftrightarrow$$

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Дифференциал функции f в точке $x_0$ — это отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ умноженное на A. $df(x_0)$
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейно, если $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

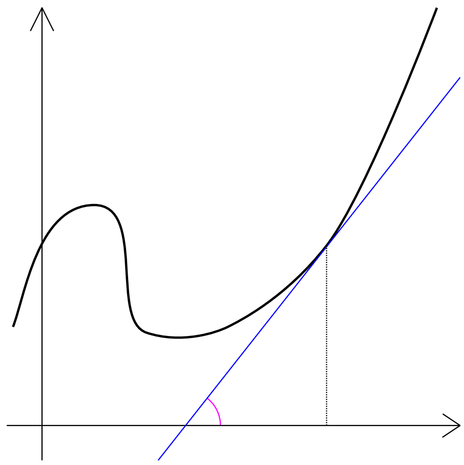
# 62. Геометрический смысл производной

Если рассмотреть график непрерывной функции

$$y = f(x)$$

то в каждой точке $x_0$, где функция непрерывна, можно рассмотреть касательную к её графику

$$y = kx + b$$



Давайте посчитаем угловой коэффициент касательной $k$.

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Таким образом, производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в соотвествующей точке.

# 63. Односторonие производные

*REM:* Бесконечные производные.

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

$\mathfrak{Def}$:
$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — правая производная.
$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ — левая производная.
*REM:* Если $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ существуют и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то существует $f'(x_0) = f'_+(x_0)$
**Пример:** $f(x) = |x|$

$$lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = lim_{x \to 0^+} - 1 = -1$$

$$f'_-(0) = -1$$

В частоности f не дифф. в точке 0.

# 64. Непрерывность дифференцируемой функции

**Утверждение.** f — дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f$ — непрерывна в точке $x_0$
▶ f — дифф. в точке $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0}(A(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0)$$

◀

*REM:* Обратное не верно.
**Примеры**

1. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \infty$$

   $x^{\frac{1}{3}}$ — не дифф. в точке 0, но непрерывна.

2. $f(x) = x \sin(x)$, f(0) = 0. Непрерывна.
   $lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

# 65. Арифметические действия с диффиренцируемыми функциями

**Теорема 65.1. Арифметические действия с диффиренцируемыми функциями.**
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a, b)$
$f, g$ — дифф. в точке $x_0$, тогда

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g \neq 0$ в окрестности точки $x_0$
   $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

▶

1. $(f \pm g)'(x_0) = lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} = lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. 
3. 

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}) =$$

$$= lim_{x \to x_0}(g(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4. Достаточно доказать, что $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$$(\frac{1}{g})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g^2(x)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

◀

# 66. Производная композиции

**Теорема 66.1. Производная композиции.** $g$ дифференцируема в $x_0$, $f$ дифференцируема в $f(x_0)$. Тогда $f \circ g$ дифференцируема, причём

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

▶

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(g(x))g'(x)$$

◀

# 67. Теорема о дифференцируемости обратной функции

**Теорема 67.1. Производная обратной функции.** $f : (a, b) \to \mathbb{R}, f^{-1}$ — обратная функция. $f$ — дифф. в точке $x_0 \in (a, b)$
Тогда $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$
▶

$$f^{-1} = g$$

$$g(f(x)) = x$$

$$g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

Нужна дифф. функции g в точке $f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)\text{где } \alpha(x) \to 0$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0))$$

$$g(y) = g(f(x_0)) + A(y - f(x_0)) + \beta(y)(y - f(x_0))$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + A(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

$$x = x_0 + A(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)) + \beta(f(x))(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0))$$

$$A = \frac{1}{f'(x_0)}, o = \frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} + \beta(f(x))(f'(x_0 + \alpha(x)))$$

$$\beta(f(x)) = -\frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(x)}$$

$$\beta(y) = -\frac{\alpha(g(y))}{f'(x_0)}\frac{1}{f'(x_0)+\alpha(g(y))}$$

Надо понять,что $\beta(y) \to 0$ при $y \to f(x_0)$
Если $y \to f(x_0)$, то $g(y) \to g(f(x_0))$

$$\lim_{y\to f(x_0)} \alpha(g(y)) = \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$$

◀

*Следствие 67.1.1.*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

# 68. Производные элементарных функций

$$\begin{aligned}
c' &= 0\\
(x^p)' &= px^{p-1}\\
(a^x)' &= \ln a a^x\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}\\
\sin' x &= \cos x\\
\cos' x &= -\sin x\\
\operatorname{tg}' x &= \frac{1}{\cos^2 x}\\
\operatorname{ctg}' x &= -\frac{1}{\sin^2 x}\\
\operatorname{arctg}' x &= \frac{1}{1+x^2}\\
\arcsin' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

▶

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^p - x^p}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^p}{x}\frac{\left((1+\frac{h}{x})^p - 1\right)}{\frac{h}{x}}\right) = x^{p-1}p$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a_x \frac{a^h - 1}{h} = a_x \ln a$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Лоооооооол что такое, Таня?
$\sin x = y$

$$\arcsin' y = (\sin^{-1} y)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\operatorname{tg} x = y$

$$\operatorname{arctg}' y = (\operatorname{tg}^{-1} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

◀

# 69. Теоремы Ферма и Ролля

**Теорема 69.1. Теорема Ферма.** $f\colon \langle a, b\rangle$, $x_0 \in (a, b)$, $f$ дифференцируема в $x_0$, $x_0$ — точка экстремума. Тогда

$$f'(x_0) = 0$$

▶ Пусть $x > x_0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

Пусть $x < x_0$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

Но тогда

$$f'(x_0) = 0$$

◀

**Теорема 69.2. Теорема Ролля.** $f\colon [a, b] \in \mathbb{R}$, $f$ непрерывна, $f$ дифференцируема на $(a, b)$, $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists c \in (a, b)\colon f'(c) = 0$$

▶ Если функция константна, то всё доказано. Иначе есть глобальный максимум и минимум, причём они не могут быть оба в концах. ◀

*Следствие 69.2.1.* Между корнями функции есть корень производной.

# 70. Теоремы Лагранжа и Коши

**Теорема 70.1. Теорема Лагранжа.** $f\colon [a, b] \in \mathbb{R}$, $f$ непрерывна, $f$ дифференцируема на $(a, b)$.

$$\exists c \in (a, b)\colon f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

**Теорема 70.2. Теорема Коши.** $f, g\colon [a, b] \in \mathbb{R}$, $f$ непрерывна, $f$ дифференцируема на $(a, b)$, $g'(x) \neq 0 \neq g(b) - g(a)$.

$$\exists c\colon \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

▶ $h(x) = f(x) - Kg(x)$, $h(a) = h(b)$.

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда

$$\exists c\colon h'(c) = 0$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

◀

*Следствие 70.2.1.* $f\colon [a, b] \in \mathbb{R}$, $f$ непрерывна, $f$ дифференцируема на $(a, b)$, $|f'(x)| \leqslant M$. Тогда

$$\forall x, y \in (a, b)\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

# 71. Следствия теоремы Лагранжа

*Следствие 71.0.2.*

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f — непрерывна на $[a, b]$, дифф. на (a, b) и $|f'(x)| \le M \forall x \in [a, b]$, тогда $|f(x) - f(y)| \le M|x - y| \forall x, y \in [a, b]$

   ▶
   $$f : [x, y] \to \mathbb{R}$$
   $$\Rightarrow \exists c \in (x, y), f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$$
   $$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x - y||f'(c)| \le M(x - y)$$
   ◀

2. При тех же условиях f равномерно непрерывна на (a, b)

   ▶
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (a, b), |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
   По следствию 1
   $$|f(x) - f(y)| \le M|x - y| < M\delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{M} \text{ подходит}$$
   ◀

3. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b) и $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, тогда f(x) = const.

   ▶
   $$[x, x_0] \subset [a, b]$$
   $$\exists c \in (x, x_0) \subset (a, b), f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$$
   $$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \forall x \in [a, b]$$
   ◀

4. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b) и $f'(x) \ge 0 \forall x \in (a, b)$, тогда f(x) монотонно возрастает. А если $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, тогда f(x) строго монотонно возрастает.

   ▶
   $$x < y x, y \in < a, b >$$
   $$f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \Rightarrow f(y) > f(x)$$
   ◀

5. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b) и $f'(x) \le 0 \forall x \in (a, b)$, тогда f(x) монотонно убывает. А если $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$, тогда f(x) строго монотонно убывает.

**Теорема 71.1.**

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b), тогда f(x) монотонно возрастае $\Leftrightarrow f'(x) \ge 0 \forall x \in (a, b)$.

2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b), тогда f(x) монотонно убывает $\Leftrightarrow f'(x) \le 0 \forall x \in (a, b)$.

▶ $\Rightarrow$
Пусть x < y, тогда $f(x) < f(y) \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 0$ ◀

# 72. Теорема Дарбу

**Теорема 72.1. Теорема Дарбу.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f$ дифференцируема на $[a,b]$, $C \in [f'(a), f'(b)]$. Тогда

$$\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = C$$

▶ Пусть $C = 0$, тогда $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков.
$f$ непрерывна, поэтому функицą достигает свои максимум и минимум (по теореме Вейерштрасса). Достаточно показать, что один из них достигаются не в конце.

От противного: пусть минимум находится в точке $a$, а максимум в точке $b$. Тогда

$$\forall x > a\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \land \forall x < b\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geqslant 0$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'(b) &= \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} f'(a) \geqslant 0 \\ f'(b) \geqslant 0 \end{aligned} \text{ — противоречие}$$

Таким образом хотя бы один экстремум не в конце, и искомое $c$ существует.

В общем случае перейдём к

$$g(x) = f(x) - Cx$$
$$g'(x) = f'(x) - C$$

◀

# 73. Правило Лопиталя

**Теорема 73.1. Правило Лопиталя.** $-infty \leq a < b \leq +infty$ f и g дифф. на (a, b)

$$g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0(+\infty)$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

▶ Возьмем $x_n \downarrow a x_n \in (a,b)$, надо доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = l$$

По теореме Штольца достаточно проверить, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1} - g(x_n)}$ и что $g(x_n)$ — монотонна

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1} - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to l$$

$$a < x_{n+1} < c_n < x_n \Rightarrow c_n \to a$$

Осталось доказать монотонность $g(x_n)$.

Заметим, что g' везде одного знака, иначе по теореме Дарбу была бы точка, где g' = 0. $\Rightarrow g(x_n)$ — строго монотонно. ◀

**Примеры**

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, при р $> 0$

▶

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(x^p)' = px^{p-1}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(lnx)'}{(x^p)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = 0$$

◀

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ при а $> 1$

▶

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \lim \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a}$$

◀

3. $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{lim(ln(x^x))} = 1$

▶

$$ln(x^x) = xln(x)$$
$$\lim_{x\to 0^+} xln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(lnx)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0^+} = 0$$

◀

# 74. Производные высших порядков

$\mathfrak{Def}$: Производной $n \geqslant 2$ порядка функции $f$ называется производная производной $n-1$ порядка.

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

$\mathfrak{Def}$: $C(E), C[a,b], C(a,b)$ — множество непрерывных на $E$, $[a,b]$, $(a,b)$ функций. Соотвественно, $C^n(E)$ — множество $n$ раз дифференцируемых функций.

$$C^\infty(E) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C^i(E)$$

**Утверждение.**

$$C^n(E) \supset C^{n+1}(E)$$

*REM:* При том, что множества вложены друг в друга, они не равны.

$$f(x) = x^{n+\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$f^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(i + \frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}}$$

Т.о. $f \in C^n(\mathbb{R})$, но $f^{(n)} = C\sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в 0, поэтому $f \notin C^{(n+1)}(\mathbb{R})$

# 75. Арифметические действия с производными высших порядков

**Теорема 75.1. Арифметические действия с производными высших порядков.**

1.
$$(\alpha x f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

2. Правило Лейбница
$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

▶ Метод математической индукции: база $n = 1$ уже доказана. Докажем переход

$$(fg)^{(n+1)} = \left( \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)} \right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left( f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n-i+1)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right) f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)}$$

◀

# 76. Формула Тейлора

**Теорема 76.1. Формула Тейлора.**

$$T(x) = \sum i = 0^n \frac{T^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

▶

$$T(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

$$((x - x_o)^k)^{(m)} = \begin{cases} 0 & k < m \\ m! & k = m \\ k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m} & k > m \end{cases}$$

$$T(x)^{(m)} = \sum_{i=m}^{n} a_k k(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-i+1)(x-x_0)^{k-m}$$

$$T(x_0)^{(m)} = a_m m!$$

$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$$

◀

$\mathfrak{Def}$: $f$ дифференцируема $n$ раз в точке $x_0$. Тогда многочленом Тейлора функции $f$ в точке $x_0$ есть

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{k!} (x - x_0)^k$$

$\mathfrak{Def}$: Формула Тейлора:

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$$

*Лемма 76.1.* $g$ дифференцируема $n$ раз в $x_0$. $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Тогда

$$g(x) = o\left((x - x_0)^n\right) x \to x_0$$

▶

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim x \to x_0 \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \to x_0} \frac{g^(n-1)}{n!\,(x - x_0)}$$

$g^{(n-1)}$ дифференцируема в $x_0$, а значит

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Т.о.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g^(n-1)}{n!\,(x - x_0)} = 0$$

Тогда

$$g(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

◀

## 77. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

**Теорема 77.1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.** $f$ дифференцируема $n$ раз в $x_0$.

$$f(x) = T_{n,k}f(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \to x_0$$

▶

$$g(x) = f(x) - T_{n,k}f(x)$$

$$\forall k \leqslant n \; g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \left(T_{n,x_0}f\right)^{(k)}(x_0) = 0$$

Пользуемся леммой. ◀

*Следствие 77.1.1.*

$$\exists!\, P \in \mathbb{R}[x]\colon f(x) = P(x) + o((x - x_n)^k) \quad x \to x_0$$

▶ $x \to x_0$:

$$T_{n,x_0}f(x) + o\left((x - x_0)^n\right) = f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

$$q(x) \leftrightharpoons T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o\left((x - x_0)^k\right)$$

$$q(x_0) = 0$$

$q \in \mathbb{R}[x]$

$$q(x) = (x - x_0)q_1(x)$$

$$q_1(x) = o\left((x - x_0)^{n-1}\right)$$

$$q_1(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$q_n(x_0) = o(1)$$

$$q_n \equiv 0$$

$$q \equiv 0$$

$$P \equiv T_{n,x_0}f$$

◀

# 78. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

**Теорема 78.1. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.** $f$ дифференцируема $n/+1/$ раз в $x_0$, $f^{(n)}$ непрерывна на $[x, x_0]$.

$$\exists c \in (x, x_0)\colon f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*REM:* Теорема Лагража — частный случай для $n = 0$.

$$\exists c \in (x, x_0)\colon f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

▶

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Надо доказать, что в форме

$$\exists c \in (x, x_0)\colon M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$g(t) \leftrightharpoons f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t-x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (T_{n,x_0})^{(k)}(t) - M(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n-k+2)(t-x_0)^{n-k+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

Тогда у функции $g$ первые $n$ производных равны нулю, а также $g(x) = 0$, значит

$$g(x_0) = g(x) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_1 \in (x, x_0)\colon g'(x_1) = 0$$

$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_2 \in (x, x_1)\colon g'(x_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_{n+1} \in (x, x_0)\colon g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$

$$g^{(n+1)}(t) = f(n-1)(t) - M(n+1)!$$

$$c = x_{n+1}$$

◀

*Следствие 78.1.1.* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$.

$$\left|f(x) - T_{n,x_0}f(x)\right| \leqslant \frac{M\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = O\left((x-x_0)^n\right)$$

▶

$$\exists c \in (x, x_0)\colon \left|f(x) - T_{n,x_0}f(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

◀

*Следствие 78.1.2.* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $foralln$ $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$.

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,x_0} = f(x)$$

▶

$$\left|f(x) - T_{n,x_0}f(x)\right| \leqslant \frac{M\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

◀

# 79. Формула Тейлора для некоторых функций

$x_0 = 0$:

$$e^x = 1 \quad +x + \frac{x^2}{2!} \quad + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad + \dots + o(x^n)$$
$$e^x = 1 \quad +x + \frac{x^2}{2!} \quad + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad + \dots + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\sin x = 0 \quad +x + 0 \quad -\frac{x^3}{3!} + 0 \quad + \dots + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 \quad +0 + \frac{x^2}{2!} \quad +0 - \frac{x^4}{4!} \quad + \dots + o(x^{2n+1})$$
$$\ln(x+1) = 0 \quad +x - \frac{x^2}{2} \quad +\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad + \dots + o(x^n)$$
$$(x+1)^p = 1 \quad +px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 \quad + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 \quad + \dots + o(x^n)$$

# 80. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$\mathfrak{Def}$: $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum i = 0^n a_n$$

*Следствие 80.0.3.* $\forall x\ in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

# 81. Иррациональность числа e

**Теорема 81.1. Иррациональность $e$.**

$$e \notin \mathbb{Q}$$

▶

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$2 < e < 3$$

Пусть $e = \frac{m}{n}$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1\frac{3!}{+} \dots + \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{n!\,(1+1+\frac{1}{2!}+1\frac{3!}{+}\cdots)}_{\in\mathbb{N}}+\frac{e^c}{n+1}=\underbrace{m(n-1)!}_{\in N}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{n+1}\in\mathbb{N}$$

$$0<c<1\Rightarrow 1<e^c<3$$

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{e^c}{n+1}<\frac{3}{n+1}<1$$

Т.о. $e \neq \frac{m}{n}$ ◀

# 82. Локальные максимумы и минимумы

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. $x_0$ — точка строгого локального минимума, если

$$\exists\delta>0\colon \forall x\in(x-\delta,x+\delta)\ \{x_0\}f(x)>f(x_0)$$

$x_0$ — точка нестрогого локального минимума, если

$$\exists\delta>0\colon \forall x\in(x-\delta,x+\delta)f(x)\geqslant f(x_0)$$

$x_0$ — точка строгого локального максимума, если

$$\exists\delta>0\colon \forall x\in(x-\delta,x+\delta)\ \{x_0\}f(x)<f(x_0)$$

$x_0$ — точка нестрогого локального максимума, если

$$\exists\delta>0\colon \forall x\in(x-\delta,x+\delta)f(x)\leqslant f(x_0)$$

Точка локального максимума или минимума также называется точкой локального экстремума.

**Теорема 82.1. Необходимое условие экстремума.** $f\colon \langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $f$ дифференцируема в $x_0$.

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0)=0$$

▶ Сузим до окрестности, там по теореме Ферма всё работает. ◀

*REM:* Обратное неверно, смотри $f(x)=x^3$.

# 83. Достаточные условия экстремума

**Теорема 83.1. Достаточное условие экстремума.** $f\colon \langle a,b\rangle\to R$, $x_0\in(a,b)$, $f$ непрерывна на $(x_0-\delta,x_0+\delta)f$ дифференцируема на $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0+\delta)$. Тогда

- $f'((x_0-\delta,x_0))>0\wedge f'((x_0,x_0+\delta))<0\Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f'((x_0-\delta,x_0))<0\wedge f'((x_0,x_0+\delta))>0\Rightarrow x_0$ — точка минимума

▶

$$f'((x_0-\delta,x_0))>0\Rightarrow f \text{ возрастает на } (x_0-\delta,x_0)\Rightarrow f(x_0)>f((x_0-\delta,x_0))$$

$$f'((x_0,x_0+\delta))<0\Rightarrow f \text{ убывает на } (x_0,x_0+\delta)\Rightarrow f(x_0)>f((x_0,x_0+\delta))$$

◀

**Теорема 83.2. Достаточное условие экстремума через вторую производную.** $f\colon \langle a,b\rangle\to R$, $x_0\in(a,b)$, $f$ дважды дифференцируема в $x_0$ и $f'(x_0)=0$. Тогда

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

**Теорема 83.3. Достаточное условие экстремума через $n$-ую производную.** $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, $f$ дифференцируема $n$ раз в $x_0$ и $f'(x_0) = f''(x_0) \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда

- $2 \mid n \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $2 \mid n \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума
- $2 \not| 2 \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ — не экстремум

▶

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)$$

$2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0+\varepsilon)\ f(x) - f(x_0) > 0$ $2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0+\varepsilon)\ f(x) - f(x_0) < 0$ $2 \not\div n \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0+\varepsilon)\ sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x - x_0)$ ◀

# 84. Выпуклость

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.
$f$ выпукла вниз, если

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle\ \ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$f$ строго выпукла вниз, если

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$f$ выпукла вверх, если

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle\ \ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$f$ строго выпукла вверх, если

$$\forall x,y \in \langle a,b\rangle : x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Абсолютно эквивалентная запись, геом. смысл... 0,0301 10.12
*REM:* Сумма выпуклых и выпуклая, умноженная на положительную, выпуклы.
*Лемма 84.1.* О трёх хордах. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ — выпуклая, $u < v < w$, $u,v,w \in \langle a,b\rangle$. Тогда

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$$

▶

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \Leftrightarrow (w-u)(f(v)-f(u)) \leqslant (v-u)(f(w)-f(u)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w-u)f(v) - (w-u)f(u) \leqslant (v-u)f(w) - (v-u)f(u) \Leftrightarrow (w-u)f(v) \leqslant (v-u)f(w) + (w-v)f(u)$$

◀

# 85. Непрерывность и дифференциеруемость выпуклой функции

**Теорема 85.1. Монотонность производной выпуклой функции.** $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ — выпуклая. Тогда
$$\forall x \in (a,b)\ f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$$

▶ $u_1 < u_2 < x < v$
$$\frac{f(x)-f(u_1)}{x-u_1} \leqslant \frac{f(x)-f(u_2)}{x-u_2} \leqslant \frac{f(x)-f(v)}{x-v}$$
Тогда $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ растёт и ограничено, т.е. предел $f'_-(x)$ существует. Аналогично существует $f'_+(x)$, она убывает. Как видно, они в правильном порядке. ◀

**Теорема 85.2. Свойство и признак выпуклости.** $f$ — выпуклая на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда
$$\forall x, x_0 \in \langle a,b\rangle\ \ f(x) \geqslant f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$$

▶ $\Rightarrow$:
$x > x_0$, $y \in (x_0, x)$
$$\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$
$$f'(x_0) = \lim_{y\to x_0}\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$
$x_0 - x > 0$
$$f'(x_0)(x-x_0) \leqslant f(x_0) - f(x)$$
Аналогично $x < x_0$, $y \in (x, x_0)$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$
$\Leftarrow$:
$u < v < w$
$$\forall x\ f(x) \geqslant f(v) + (x-v)f'(v)$$
$$f(u) \geqslant f(v) + (u-v)f'(v)$$
$$f(w) \geqslant f(v) + (w-v)f'(v)$$
Сложим с правильными коэффициентами:
$$(w-v)f(u) \geqslant (w-v)f(v) + (w-v)(u-v)f'(v)$$
$$(v-u)f(w) \geqslant (v-u)f(v) + (w-v)(v-u)f'(v)$$
$$(w-v)f(u) + (v-u)f(w) \geqslant (w-u)f(v)$$
◀

# 86. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных

**Теорема 86.1. Критерий выпуклости.** $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ дифференцируема на $(a, b)$.

$$f \text{ (строго) выпукла} \Leftrightarrow f' \text{ (строго) возрастает}$$

▶ $\Rightarrow$: $x_1 < x_2$

$$f(x) \geqslant f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$
$$f(x) \geqslant f(x_2) + (x - x_2)f'(x_2)$$

Подставим

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1)$$
$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + (x_1 - x_2)f'(x_2)$$
$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

$La$: Нужно проверить, что

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leqslant \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

По теороеме Лагранжа, есть точки $\xi < \eta$

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = f'(\xi) \leqslant f'(\eta) = \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

◀

**Теорема 86.2. Критерий выпуклости через вторую производную.** $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f$ дважды дифференцируема на $(a, b)$.

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' > 0$$

▶ Смотрим на теоремы о монотонности. ◀

# 87. Неравенство Йенсена

**Теорема 87.1. Неравенство Йенсена.** $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла.

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset \langle a, b\rangle \; \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0, 1]\colon \; \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

▶ Метод математической индукции. Теорема при $n = 2$ совпадает с определением выпуклости.

$$f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\leftrightharpoons y} + \lambda x_{n+1} x_{n+1}\right) = f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \geqslant$$

$$\geqslant (1 - \lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) \leqslant (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

◀

# 88. Неравенство о средних. Неравенства Гельдера и Минковского

*Следствие 88.0.1.* Неравенство о средних — достаточно рассмотреть

$$f(x) = -\ln x$$

*Следствие 88.0.2.* Неравенство Гельдера:

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \quad p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

▶ Если есть нули или отрицательные — перейдём к модулям.

$$f(x) = x^p$$

$$f\left(\right) =$$

$$\lambda_i a_i = \frac{x_i y_i}{(\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{q}}}$$

◀

*Следствие 88.0.3.* Неравентсво Минковского

# 89. Неопределённый интеграл

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной $f$, если

$$F' = f$$

Не для всех $f$ существует $F$. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

▶ Пусть есть $F' = f$. Тогда по теореме Дарбу

$$\forall a, b \in (-1, 1), c \in (F'(a), F'(b))\, \exists c \in (a, b)\colon F'(c) = C$$

◀

**Теорема 89.1. О существовании первообразной.** Для любой непрерывной $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ есть первообразная $F$.

Докажем в следующем семестре.

**Теорема 89.2.** $f, F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $F$ — первоообразная. Тогда

1. $F + c$ $(c \in \mathbb{R})$ — также первообразная.

2. $\varPhi$ — первообразная $\iff$ $\varPhi = F + c$.

▶

$$(F+c)' = F' + 0 = f$$

Рассмотрим $G = \varPhi - F$. Она дифференцируема и

$$G' = (\varPhi - F)' = \varPhi' - F' = f - f = 0$$

Но тогда

$$G = const$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Неопределённым интегралом функции $f$ называется множество её первообразных.

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

Пока стоит воспринимать все символы интеграла как некоторые «скобки».

Если есть некоторая первообразная $F$, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Тот же смысл имеют записи

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

$$\int f\mathrm{d}x = F + c$$

Для того, чтобы найти неопределённый интеграл, достаточно найти какую-то первообразную, а для проверки первообразной достаточно взять от неё производную.

# 90. Таблица интегралов

Таблица интегралов:

$$\int 0 \mathrm{d}x = c$$
$$\int x^p \mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$$
$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$$
$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arccos x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + c$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть $A, B$ — множества. Тогда

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
$$A - B = \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$$

**Теорема 90.1. Об арифметических операциях с интегралами.**

$$\int (f \pm g) \mathrm{d}x = \int f \mathrm{d}x \pm \int g \mathrm{d}x$$

$\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f \mathrm{d}x = \alpha \int f \mathrm{d}x$$

*REM:* Именно из-за того, что константы в записи нет, мы исключаем ноль.

▶ $F, G$ — первообразные соотвественно $f, g$.

$$\int f \mathrm{d}x = \{F + c_1\}$$

$$\int g \mathrm{d}x = \{G + c_2\}$$

$$\int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x = \{F + c_1\} \pm \{G + c_2\} = \{F + G + c_3\} =$$

$(F+G)' = f + g$

$$= \int (f+g)\mathrm{d}x$$

$$\alpha \int f\mathrm{d}x = \alpha \{F + c_1\} = \{\alpha F + c_2\} =$$

$(\alpha F)' = \alpha f$

$$= \int \alpha f \mathrm{d}x$$

◀

# 91. Замена переменной

**Теорема 91.1. Замена переменной в неопределённом интеграле.** $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\varphi\colon \langle c,d\rangle \to \langle a,b\rangle$ непрерывно дифференцируема.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c$$

▶

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

◀

*Следствие 91.1.1.*

$$\int f(\alpha x + \beta)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$$

$f = x^2, \varphi = \ln x$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2 (\ln x)' \mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$a > 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$f = \frac{1}{x^2+1}$

# 92. Интегрирование по частям

**Теорема 92.1. Интегрирование по частям.** $f, g$ — дифференцируемые, $f'g$ — интегрируемая.

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int f'g\mathrm{d}x$$

▶ $\varPhi$ — первообразная $f'g$.

$$(fg - \varPhi + c)' = fg' + f'g - f'g = fg'$$