Лекции по математическому анализу
Лектор: Храбров Александр Игоревич

Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

Содержание

1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

$\mathfrak{Def}$: Множество A - подмножество B, если все элементы A содержатся и в B.

$$A \subset B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \; x \in B$$

$\mathfrak{Def}$: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge B \subset A$$

$\mathfrak{Def}$: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \; x \notin \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: 2^A — множество всех подмножеств A.

$$2^A \overset{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}, \Phi(x) -$ условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p$ имеет ровно 2 натуральных делителя$\}$.

Бывают некорректно заданные „множества“. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как „Наименьший элемент множества...“

$\mathfrak{Def}$: Пересечение двух множеств — множество, состоящие из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \overset{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Симметрическя разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \overset{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \colon x \in A_i\}\,; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\; x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность
$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$
2. Коммутативность
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
3. Рефлексивность
$$A \cap A = A; A \cup A = A$$
4. Дистрибутивность
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
5. Нейтральный элемент
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема 1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)\,; A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I\; x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I\; \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I\; x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

◀

Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I \colon x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \; \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \land b_1 = b_2$$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная n-ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i = b_i$$

$\mathfrak{Def}$: Декартого произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i \in A_i$$

2. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a \, R \, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

$\mathfrak{Def}$: Область определения отношения

$$\beta_R = dom_R = \{a \in A \mid \exists b \in B \colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обсласть значения отношения

$$\rho_R = ran_R = \{b \in B \mid \exists a \in A \colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обратное отношение

$$R^{-1}\colon \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b\,R^{-1}\,a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a\,R\,b$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отношений

$$R_1\colon A \to B; R_2\colon B \to C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a\,R_1\,b \wedge b\,R_2\,c\}$$

Про значок — его использовать не будем

Пример композиции: $<\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$< \circ <= \{(a, b) \mid b - a \geqslant 2\}$$

$\mathfrak{Def}$: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f\colon A \to B$$

$$a\,f\,b_1 \wedge a\,f\,b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a\,f\,b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A \text{ — область определения})$$

$\mathfrak{Def}$: Свойтва отображейий:

1. Рефлексивность $a\,R\,a$
2. Симметричность $a\,R\,b \Leftrightarrow b\,R\,a$
3. Транзитивность $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$
4. Иррефлексивность $\neg a\,R\,a$
5. Антисимметричность $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- $\underset{5}{\equiv}$: 1, 2, 3
- $\leqslant$: 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- $\subset$: 1, 3, 5

3. Вещественные числа

$\mathfrak{Def}$: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и $\times$, причём:

1. Коммутативность $\forall a, b\ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c\ a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o \colon \forall a\ a + o = a; \exists e \colon \forall a\ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a\ \exists {-a} \colon a + -a = o; \forall a \neq o\ \exists a^{-1} : a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c\ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения $\leqslant$ (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c\ a \leqslant b => a + c \leqslant b + c$
6. $\forall a, b\ a > 0 \wedge b \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cup B \neq \emptyset$, $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A\ a \leqslant c \wedge \forall b \in B\ c \leqslant b$$

REM: На $\mathbb{Q}$ аксиома не выполняется:

$$A = \left\{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\right\}; B = \left\{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\right\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема 3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$$

▶

$$A \leftrightharpoons \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \leftrightharpoons \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \leqslant b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A\ a \leqslant c \wedge \forall b \in B\ c \leqslant b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n+1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geqslant c \Rightarrow y \leqslant 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$ ◀

Следствие 3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < \varepsilon$$

▶ Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$ ◀

Следствие 3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$$

▶

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z} \colon m \leqslant nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \overset{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant nx\}$$

$$x \geqslant 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N} \colon \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмторим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N} \colon k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M\; m < k \Rightarrow \exists m = \max M \colon m \leqslant nx < m + 1$$

$$m \leqslant nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leqslant x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m+1}{n} < y$$

◀

Следствие 3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$$

▶

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2} : z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < z < y$$

◀

4. Верхняя и нижняя граница

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in R$ — верхняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \leqslant x$$
$x \in R$ — нижняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \geqslant x$$

$\mathfrak{Def}$: A ограничено сверху, если
$$\exists x \in R : x \text{ — верхняя граница} A$$
A ограничено снизу, если
$$\exists x \in R : x \text{ — нижняя граница} A$$
A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A, если x — наименьшая из верхних границ.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A, если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:
$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.

▶ x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀

Теорема 4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.
2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

▶

1. B — множество всех верхних границ A.
$$\forall a \in A\, \forall b \in B\; a \leqslant b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A\; a \leqslant c \land \forall b \in B\; c \leqslant b \Rightarrow \exists \sup A = c$$
2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда
$$\inf A = -\sup B$$

◀

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$

Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда
$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \leqslant b \land \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A \colon a > b - \varepsilon)$$
2. A ограничено снизу. Тогда
$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \geqslant c \land \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A \colon a < c + \varepsilon)$$

▶
$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \land \forall \varepsilon > 0\; b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \leqslant b \land \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A \colon a > b - \varepsilon)$$
◀

5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{i=1}^{n} : \forall i \in \mathbb{N}\,(a_i <= a_{i+1} \wedge b_i >= b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

▶ $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall i \in \mathbb{N}\; c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

◀

REM: Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, +\infty) = \emptyset$$

REM: $\mathbb{R}$. Рассмотрим приблежения $\sqrt{2}$.

6. Метрические пространства

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть множество X и отображение $\rho \colon X \times X \to [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Также пара (X, ρ) называется метричесикм пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$
2. $\rho(x, y) = |x - y|$
3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. Расстояния на сфере.
6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O. Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|/$

7. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрика

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y,\rho|_{Y\times Y})$ — подпространство X. $Y\subset X$.
$\mathfrak{Def}$: $B_r(a)=\{x\in X\mid \rho(x,a)<r\}$ — открытый шар.
$\mathfrak{Def}$: $\bar{B}_r(a)=\{x\in X\mid \rho(x,a)\leqslant r\}$ — замкнутый шар.
Свойства:

1. $B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(a)=B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$
2. $x\neq y\Rightarrow \exists r>0\colon B_r(x)\cap B_r(y)=\emptyset$

▶ Рассмотрим $r=\frac{1}{3}\rho(x,y)>0$. ◀

7. Неравентсва Коши-Буняковского и Минковского

Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1,a_2,\dots a_n,b_1,b_2,\dots,b_n\in\mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

▶

$$f(t)\leftrightharpoons\sum_{k=1}^{n}(a_kt-b_k)^2=\left(\underbrace{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}_{\leftrightharpoons A}\right)t^2-2\left(\underbrace{a_1b_1+\dots+a_nb_n}_{\leftrightharpoons C}\right)t+\left(\underbrace{b_1^2+\dots+b_2^2}_{\leftrightharpoons B}\right)$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2-4AB\leqslant 0\Rightarrow 4\left(C^2-AB\right)\leqslant 0\Leftrightarrow C^2\leqslant AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.
REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны.

▶

$$a_i=\alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2=AB\Leftrightarrow \text{есть корень} t_0\Leftrightarrow \forall a_kt_0-b_k=0$$

◀ ◀

Теорема 7.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}$$

▶ Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}_{\leftrightharpoons A}}+\sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}_{\leftrightharpoons B}}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\leqslant A+2\sqrt{AB}+B\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A+B+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Leftrightarrow A+B+2\sqrt{AB}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sqrt{AB}\Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{Неравенство Коши-Буняковского}$$

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны. ◀

8. Открытые множества

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G\, \exists r > 0 \colon B_r(x) \subset G$$

Теорема 8.1. О свойтсвах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.

▶

1. Очевидно.
2. $$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \colon x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$
3. $x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$
$$\forall k = 1..n\; x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n\, \exists r_k > 0 \colon B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k \colon G_r \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$$
4. $$\forall x \in B_r(a)\, \exists r_x = \frac{1}{2}\,(r - \rho(a, x))$$
$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$

◀

REM:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

9. Внутренние точки и внутренность множества

$\mathfrak{Def}$: $x \in A$ — внутренняя точка A, если $\exists r > 0 \colon B_r(x) \in A$
REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x.
$\mathfrak{Def}$: Внутренность множества A:

$$A^0 = \operatorname{int} A \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\operatorname{int} A \subset A$

2. $\operatorname{int} A$ — множество всех внутренних точек.

3. $\operatorname{int} A$ открыто.

4. A открыто $\Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$

5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$

6. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

7. $\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

10. Замкнутые множества

$\mathfrak{Def}$: Замкнутые множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема 10.1. О свойствах закмнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — закмнуты.

2. Перечечение замкнутых — замкнуто.

3. Объеднинение конечного числа замкнутых замкнуто.

4. Замкнутый шар замкнут.

▶

1. Очевидно

2. По формулам де Моргана
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению
$$\rho(a, x) > r$$
Покажем, что
$$B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$
Пусть $\exists y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда
$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leqslant r$$
$$y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$
$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

◀

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n};1\right]=(0;1]$$

$\mathfrak{Def}$: $A\subset X$, (X,ρ). Тогда замыкание множества A — перечесение всех замкнутых множеств, содержащих A.

$$\operatorname{cl}A=\bigcap_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}F$$

Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.

$$X\setminus\operatorname{cl}A=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

$$X\setminus\operatorname{int}A=\operatorname{cl}(X\setminus A)$$

▶

$$X\setminus\operatorname{cl}A=X\setminus\bigcap_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}=\bigcup_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}(X\setminus F)$$

$$X\setminus F\text{ открыто}$$

$$X\setminus F\subset X\setminus A$$

То

$$\bigcup_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}(X\setminus F)=\bigcup_{\substack{G\text{ открыто}\\ G\subset X\setminus A}}G=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

Аналогично ◀

Следствие 10.2.1.

$$\operatorname{int}A=\operatorname{cl}(X\setminus A)$$

$$\operatorname{cl}A=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A\subset\operatorname{cl}A$
2. clA замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A=\operatorname{cl}A$
4. $A\subset B\Rightarrow\operatorname{cl}A\subset\operatorname{cl}B$
5. $\operatorname{cl}(A\cup B)=\operatorname{cl}A\cup\operatorname{cl}B$
6. $\operatorname{cl}\operatorname{cl}A=\operatorname{cl}A$

11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема 11.1. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X;\rho)$ — пространство, $(Y;\rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в $X\colon A = G \cap Y$
2. A замкнутыо в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в $X\colon A = F \cap Y$

▶

1. $\Rightarrow$:

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A\, \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A$$

$$G \leftrightharpoons \bigcup_{x\in A} B^X_{r_x}(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x\in A} \left(B^X_{r_x}(x) \cap Y\right) = \bigcup_{x\in A} B^Y_{r_x}(x) = A$$

   $\Leftarrow$:

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G$$

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к доплнениям

◀

Теорема 11.2. О замыканиях. (X,ρ), $A \subset X$

$$x \in \operatorname{cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $\exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замнкуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\operatorname{cl} A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \operatorname{cl} A$$

$\Leftarrow$: Пусть $x \notin \operatorname{cl} A \Rightarrow \exists F \supset A\colon x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$$

◀

Следствие 11.2.1. U открытое $\wedge\, U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$
▶ Пусть $x \in U \cap \operatorname{cl} A$.

$$x \in \operatorname{cl} A \Rightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ ◀

12. Предельные точки

$\mathfrak{Def}$: Проколотая окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

$\mathfrak{Def}$: Точка $x \in X$ предельная у множества A, если

$$\forall r > 0 \, \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: A' — множество предельных точек.
Свойства:

1. $\operatorname{cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   ▶ $\supset$:

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$
$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

   Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

   $\subset$: Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 \, B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0 \colon \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leqslant r_0 \, \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

   Тогда

$$\forall r > 0 \, \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

◀

Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \, |B_r(x) \cap A| = \infty$$

▶

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A \colon y_1 \neq x \wedge y \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x,y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A \colon y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y \in B_{\rho(x,y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \colon y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

◀

Следствие 12.1.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.

$$A \text{ ограниченно сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограниченно снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

▶ $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A\ x \leqslant a \land \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A \colon x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$

◀

14. Предел последовательности

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i). Тогда

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \land \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n\to\infty} x = x$
- $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема 14.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некотрого элемента
2. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \land x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограниченна
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A \colon \lim_{n\to\infty} x_n = x$

▶

1. $\Rightarrow$: Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0 \colon B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N \colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U$$

$\Leftarrow$: $U \leftrightharpoons B_\varepsilon(x^*)$.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{\rho(x^*;x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1\, \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_2\colon \forall n \geqslant N_2\, \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1; N_2\} \begin{cases} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leqslant \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon$$

3. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n<N}\{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n\, x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2};\rho(x;x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3};\rho(x;x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$\vdots$$
$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n};\rho(x;x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geqslant N\ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

◀

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n.
REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$
REM:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \operatorname{cl} A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x-y|)$.

15. Предельный переход в неравенстве

Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leqslant y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leqslant y$.

▶ Пусть $y < x$; $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\, |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\, |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\, x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

◀

REM: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

REM: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие 15.1.1. $x_n \leqslant b \Rightarrow x \leqslant b$

Следствие 15.1.2. $x_n \geqslant a \Rightarrow x \geqslant a$

Следствие 15.1.3. $x_n \in [a;b] \Rightarrow x \in [a;b]$

16. Теорема о двух миллиционерах

Теорема 16.1. О двух миллиционерах. Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

▶ Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \colon \forall n \geqslant N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2 \colon \forall n \geqslant N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\} \colon \forall n \geqslant N \; l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$ ◀

Следствие 16.1.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leqslant z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие 16.1.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограниченна, то $\lim x_n y_n = 0$.

17. Предел монотонной последовательности

$\mathfrak{Def}$: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограниченна тогда и только тогда, когда имеет предел.

▶ $\Leftarrow$: Очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть (x_n) возрастает. Она ограниченна, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k \colon x_k > x - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant ... \leqslant a$$

Тогда

$$\forall n \geqslant k \; |x_n - a| < \varepsilon$$

◀

18. Конечное векторное пространство

$\mathfrak{Def}$: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+ \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

1. Сложение
   (a) Коммутативно
   (b) Ассоциативно
   (c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{d}$
   (d) Существует обратный элемент
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
5. $1x = x$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение векторного пространства —

$$"+" : X + X \to X$$

$$"\times" : \mathbb{R} \times X \to X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

$\mathfrak{Def}$: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение скалярного произведения: X — веторное пространство. Задана операция $\langle x, y \rangle \colon X \times X \to \mathbb{R}$ обладающая указынными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

$\mathfrak{Def}$: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковкского)

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)

5. $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)

6. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$

   ▶ $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geqslant \|x\|$$

   А это неравнство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространтво на $\mathbb{R}^d$.

$\mathfrak{Def}$: Общее определение нормы: $\|x\|\colon X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скаляроного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|$

2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1..d} |x_k|$

   ▶

$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leqslant \max_{k=1..d}(|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

◀

3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p}$$

19. Арифметические свойства предела

Пусть есть $(\mathbb{R}^d, \rho)$ со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

▶

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$

◀

REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограниченно $\Leftrightarrow \exists M\colon \forall x \in A\ \|x\| \leqslant M$

Теорема 19.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$, $\lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$

5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$

▶

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\colon \forall n > N_1\ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\colon \forall n > N_2\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_3\colon \forall n > N_3\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.
$$\forall \varepsilon > 0\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.
$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| =$$
$$= |\lambda_n|\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\| \leqslant M\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\|$$

Но тогда
$$\forall n > \max N_1, N_3\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\right); y_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)}\right)$ Это докажем позже

5.
$$0 \leqslant |\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$$

◀

Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim |x_n| = |x_0|$
5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

▶ Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \eqqcolon A$$
$$\exists N_1\colon \forall n > N_1\ |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда
$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

◀

20. Покоординатная сходимость

$\mathfrak{Def}$: $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}\} \colon \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема 20.1. О сходимости покоординатно. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.

▶

$$\left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{d} \left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)$$

◀

Следствие 20.1.1. $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$

▶

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \to y_n^{(i)} \\ y_n \to y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \to y_0^{(i)} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{d} x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to \sum_{i=1}^{d} x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$$

◀

21. Бесконечно малые и большие

$\mathfrak{Def}$:

$$\lim x_n = +\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \; \exists N \colon \forall n > N \; x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \; \exists N \colon \forall n > N \; x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \; \exists N \colon \forall n > N \; |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim x_n = \infty$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единтсвенность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух миллиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$
3. $c > 0$: $\pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0$: $\pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0$: $\frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$

6. $c < 0$: $\frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$

7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$

10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$

13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечнен.
$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

22. Связь между бесконечно большими и малыми

Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

▶

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

◀

Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограниченна. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая

2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

1. $x_n \to +\infty \wedge y_n$ ограниченна снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

2. $x_n \to -\infty \wedge y_n$ ограниченна сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$

3. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

4. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$

5. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \leqslant a < 0 \Rightarrow x_n y_n \to -\infty$

6. $x_n \to \infty \wedge |y_n| \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$

7. $x_n \to a \neq 0 \wedge y_n \to 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

8. x_n ограниченна $\wedge\, y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$

9. $x_n \to \infty \land y_n$ ограниченна $\land\, y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \land l > 0 \Rightarrow \exists a > 0 \colon \exists N \colon \forall n > N\ x_n \geqslant a$$
$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \land l < 0 \Rightarrow \exists a < 0 \colon \exists N \colon \forall n > N\ x_n \leqslant a$$

23. Компактность

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет покрытие множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подкокрытие.

$$\forall B_\alpha \colon K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \colon K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

Теорема 23.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть B_α — открытое в Y, что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соотвествующими множествами в X, выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y.

$\Leftarrow$: Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y, в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X. ◀

REM: Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

24. Свойства компактного множества

Теорема 24.1. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограниченно.

▶

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограниченно}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \leftrightharpoons \min_{i=1}^{k} \left\{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)\right\})$

$$\forall i = 1..k \; B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема 24.2. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

▶ Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

25. Теорема о пересечение семейства компактов

Теорема 25.1. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

▶ K_0 — любое их них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus K_{x_i}\right) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^{k} K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

◀

Следствие 25.1.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто.

26. Теорема о вложенных параллелепипедах

$\mathfrak{Def}$: Параллелепипедом на $\mathbb{R}^d$ и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (закрытый)}$$

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (открытый)}$$

Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ имеют непустое пересечение.

▶ Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

27. Теорема Гейне-Бореля

Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля. Замкнутый куб компактен

▶

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, 0 \leqslant x_i \leqslant a\right\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобъём куб по кажому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покроет ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрыл куб. ◀

28. Подпоследовательность

$\mathfrak{Def}$: Подпоследовательность:

$$\left\{x_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.
Подпоследовательность имеет тот же предел.
Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

29. Секвенциальная компактность

Теорема 29.1. Компактность в $\mathbb{R}^d$. Следующее в $\mathbb{R}^d$ равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограниченно
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (секвенциально компактно)

▶ 2 $\Rightarrow$ 1: ограниченно, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

1 $\Rightarrow$ 3: Возьмём последовательность $\{x_n\} \leftrightharpoons E$ элементов множества F. Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X\, \exists r_x > 0 \colon \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^{k} \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит
$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}$$
Получили, что E конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K. Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K.

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1 \colon \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a,x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2 \colon \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

$$\vdots$$

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R. Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \cdots > n$$

$$R > \rho\left(b, x_{n_k}\right) > \rho\left(a, x_{n_k}\right) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \to \infty$$

Значит K ограниченно. ◀

REM: $1 \Rightarrow 3; 3 \Rightarrow 2; 1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой.

30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

Следствие 30.0.1. В $\mathbb{R}^d$ компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

▶ В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие 30.0.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

▶ Множество значений ограниченно, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие 30.0.3. В любой последовательности в $\mathbb{R}^d$ есть сходящаяся в $\bar{R}$ подпоследовательность.

▶ Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

31. Диаметр множества

$\mathfrak{Def}$: Диаметр множеста:
$$\operatorname{diam} A = \sup \rho(x, y)$$

Теорема 31.1. Свойства диаметра.

1. $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$

2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 ...$ (последовательность вложенных компактов); $\operatorname{diam} K_n \to 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечно

▶

1. $$E \subset \operatorname{cl} E \Rightarrow \operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$
$$d = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E = \sup \rho(x, y)$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_0, y_0 \colon \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$
$$x_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists x_1 \in E \colon \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$
$$y_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists y_1 \in E \colon \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$
Тогда
$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geqslant \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$
$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$
Устремив $\varepsilon \to 0$, получим
$$\operatorname{diam} E \geqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого n хотя бы $\rho(a, b)$. Противоречие.

◀

32. Фундамитальные последовательности

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > N\ \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM: $E \leftrightharpoons \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$
$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \operatorname{diam} E \to 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.

▶

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \colon \forall k > K\ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > K\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Т.о.
$$\exists n_k > M = \max\{N, K\} \colon \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

33. Полнота компактных метрических пространств

Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В $\mathbb{R}^d$ фундаментальная последовательность всегда сходится.

▶ $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n, m > N\ \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

x_n — фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^d$. $E_n \leftrightharpoons \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ — ограниченно. $\operatorname{cl} E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\operatorname{cl} E_1 \supset \operatorname{cl} E_2 \supset \operatorname{cl} E_3 \supset \cdots$$

$$\operatorname{diam} \operatorname{cl} E_n = \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о.

$$\exists!\, a\colon a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{cl} E_n$$

$$a \in \operatorname{cl} E_n \Rightarrow \forall i > n\, 0 \leqslant \rho(a, x_i) \leqslant \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о $x_n \to a$. ◀

REM: $\mathbb{R}^d$ полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема 33.2. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

▶ В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

34. Верхний и нижний предел

$\mathfrak{Def}$: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim_{x \to \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim_{x \to \infty} \sup_{k > n} x_k$$

REM: $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

$\mathfrak{Def}$: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Лемма 34.1. Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\bar{\mathbb{R}}$, при этом

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$$

▶ $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$. Если x_n ограниченно, то и y_n ограниченно. Если x_n не ограниченно снизу, то и y_n не ограниченно снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim}\, x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. $\limsup$ — наибольший частичный предел.
2. $\liminf$ — наименьший частичный предел.
3. $\lim$ существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$

▶

1. $a = \limsup x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geqslant a$$

   Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

   Оно стремится к a.

   Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b, уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два миллиционера

◀

35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и eps

Теорема 35.1. Определение верхнего и нижнего предела через N и ε.

1.
$$a = \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N\colon \forall n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\colon \exists n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.
$$a = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \forall N\colon \exists n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

▶

1. Запишем в терминах y_n:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

   Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

◀

Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leqslant b_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \end{cases}$$

▶ Просто сводим к пределам инфимумов. ◀

36. Неравенство Бернули

Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1\ \forall n \in \mathbb{N}\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

▶ Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geqslant 1 + nk$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>0}(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1 + kx + x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x$$

◀

Следствие 36.1.1. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

37. Число e

Определим число e:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \nearrow; y_n \searrow$.

▶

$$x_n < x_{n+1} \Leftarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^2 n} \Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n-1}\right)^n \Leftarrow$$

$$\Leftarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2+2n-1}\right)^n$$

$$y_n < y_{n-1} \Leftarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftarrow$$

$$\Leftarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 - \frac{n}{n^2-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

◀

Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leftrightharpoons e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$
2. $x_n < e < y_n$

38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

Теорема 38.1. Предел убывающей по отношению. $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$.
▶ С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀
Следствие 38.1.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

▶

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1a}{<}1$$

◀

Следствие 38.1.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Следствие 38.1.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

▶

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1 + \frac{1}{n})^- n \to \frac{1}{e} < 1$$

◀

39. Теорема Штольца

Теорема 39.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.
▶

1. Пусть a = 0.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = |\sum| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем N, такое что $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$, тогда при n и m > N

$$< \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

устремим n к бесконености.

$$|x_m| < \varepsilon(y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{при } m > N$$

2. $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - a y_n$$

◀

40. Теорема Штольца

Теорема 40.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

▶ $a = 0$:

$$\varepsilon_n \leftrightharpoons \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n > N \; |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{N} + \sum_{i=N+1}^{n}$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leqslant \sum_{i=N+1}^{n} |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^{n} (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leqslant \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$$

$a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$. Фактом $x_n \to \infty$ мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \to 0$$

$a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n. Проверим, что x_n монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 x_n - x_{n11} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$: Сменим знаки x_n. ◀

41. Пределы функций

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) — метрические пространства. $E \subset X$, a — предельная точка E. $f\colon X \to Y$. Тогда говорят, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x\, (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

REM: Для бесконечности на $\mathbb{R}$ есть частные случаи.

$\mathfrak{Def}$: По Гейне,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E\colon x_n \neq a \lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$$

42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции. Определения равносильны.

▶

1. Коши $\Rightarrow$ Гейне

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

   Пусть $lim x_n = a$, $x_n \in E, x_n \neq a$

   По δ выберем N $\forall n > N x_n \in B_\delta(a)$, тогда $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

   Нашли номер N при котором $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow lim f(x_n) = b$

2. Гейне $\Rightarrow$ Коши

   от противного.

   По Коши $\to \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

   $$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\colon \exists x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

Выберем последовательность $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow lim(f(x_n)) \neq b$$

Противоречие с определением по Гейне

◀

REM: В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все x_n различны.

REM: Можно рассматривать лишь такие последовательности, что $\rho(x_n, a)$ убывает.

43. Свойства функций, имеющих предел

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

▶ Возьмём две сходящиеся последовательности x_n и y_n, после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям b и c. Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

Утверждение. Единственность предела $f\colon E \subset X \to Y$, a — предельная точка. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ единственнен.

▶ Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

Теорема 43.1. Ограниченность. $f\colon E \subset X \to Y$, $\lim\limits_{x\to a} = b$. Тогда

$$\exists r > 0\colon f\mid_{E\cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

Теорема 43.2. Уход от нуля. $f\colon E \to \mathbb{R}^d$, $\lim\limits_{x\to a} = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0\colon \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E\ f(x) \neq \emptyset$$

▶ $\varepsilon \leftrightharpoons \rho(x, \vec{0})$ ◀

44. Арифметические действия с пределами

Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции.. $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}^d$, $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, a предельная точка E.

1. $\lim x \to a(f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$
2. $\lim x \to a(\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$

3. $\lim x \to a(f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$
4. $\lim x \to a \|f(x)\| = \|f_0\|$
5. $\lim x \to a \langle f(x), g(x)\rangle = \langle f_0, g_0\rangle$

▶ Возьмём любые сходящиеся к a последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции.. $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}$, a предельная точка E.

1. $\lim x \to a(f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$
2. $\lim x \to a(f(x)g(x)) = f_0 g_0$
3. $\lim x \to a |f(x)| = |f_0|$
4. $\lim x \to a\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_0}{g_0}$

▶ Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве.. $f, g\colon E \to Y$, a предельная точка E, $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leqslant g(x)$. Тогда $f_0 \leqslant g_0$.

Теорема 45.2. О двух миллиционерах.

46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

$\mathfrak{Def}$: Пределы слева и справа. $f\colon E \cap \mathbb{R} \to Y$.

$$\lim_{x\to a-} = \lim_{x\to a-0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to a} f \mid_{E\cap(-\inf, a)}$$

$$\lim_{x\to a+} = \lim_{x\to a+0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to a} f \mid_{E\cap(a, +\inf)}$$

Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченой функции..

47. Критерий Коши для отображений и для функций

Теорема 47.1. Критерий Коши.

$$f : E \subset X \to Y, a \text{ — предельная точка E, Y — полное}$$

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

▶

1. $\Rightarrow$ Если $\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2. $\Leftarrow$

   Берем любую последовательность x_n $x_n \neq a \in E \to a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$$\Rightarrow f(x_n) \text{ — фундументальная последовательность точек из Y}$$

$$\Rightarrow \exists lim(f(x_n)) \text{полнота Y}$$

◀

48. Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа

$\mathfrak{Def}$: (По Коши)

$$f : E \subset x \to y a \in E$$

$$f \text{ — непрерывно в точке a, если} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

$\mathfrak{Def}$: (По Гейне)

$$\forall \{x_n\} \subset E x_n \to a : f(x_n) \to f(a) \Leftrightarrow f(\ \ ---\ )$$

$\mathfrak{Def}$:

$$f : E \subset \mathbb{R} \to Y, a \in E$$

$$f \text{ — непрерывно слева в точке a}$$

$$g = f|_{(-\infty,a] \cap E}, \text{g} \text{ — непрерывно в точке a}$$

$$f : E \subset \mathbb{R} \to Y, a \in E$$

f — непрерывно справа в точке a

$g = f|_{[a,+\infty)\cap E}$, g — непрерывно в точке a