Лекции по математическому анализу
Лектор: Храбров Александр Игоревич

Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

Содержание

1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

$\mathfrak{Def}$: Множество A - подмножество B, если все элементы A содержатся и в B.

$$A \subset B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \; x \in B$$

$\mathfrak{Def}$: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \land B \subset A$$

$\mathfrak{Def}$: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \; x \notin \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: 2^A — множество всех подмножеств A.

$$2^A \overset{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}, \Phi(x) -$ условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p$ имеет ровно 2 натуральных делителя$\}$.

Бывают некорректно заданные «множества». Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как «Наименьший элемент множества...»

$\mathfrak{Def}$: Пересечение двух множеств — множество, состоящие из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \overset{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Симметрическя разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \overset{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \colon x \in A_i\}\,; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\; x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность
$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность
$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема 1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)\,; A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I\; x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I\; \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I\; x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

◀

Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I \colon x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная n-ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i = b_i$$

$\mathfrak{Def}$: Декартого произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i \in A_i$$

2. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a \, R \, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

$\mathfrak{Def}$: Область определения отношения

$$\beta_R = dom_R = \{a \in A \mid \exists b \in B \colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обсласть значения отношения

$$\rho_R = ran_R = \{b \in B \mid \exists a \in A \colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обратное отношение

$$R^{-1}\colon \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b\, R^{-1}\, a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a\, R\, b$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отношений

$$R_1\colon A \to B; R_2\colon B \to C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a\, R_1\, b \wedge b\, R_2\, c\}$$

Про значок — его использовать не будем

Пример композиции: $<\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$< \circ <= \{(a, b) \mid b - a \geqslant 2\}$$

$\mathfrak{Def}$: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f\colon A \to B$$

$$a\, f\, b_1 \wedge a\, f\, b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a\, f\, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A \text{ — область определения})$$

$\mathfrak{Def}$: Свойтва отображеий:

1. Рефлексивность $a\, R\, a$
2. Симметричность $a\, R\, b \Leftrightarrow b\, R\, a$
3. Транзитивность $a\, R\, b \wedge b\, R\, c \Rightarrow a\, R\, c$
4. Иррефлексивность $\neg a\, R\, a$
5. Антисимметричность $a\, R\, b \wedge b\, R\, a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- $\underset{5}{\equiv}$: 1, 2, 3
- $\leqslant$: 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- $\subset$: 1, 3, 5

3. Вещественные числа

$\mathfrak{Def}$: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и $\times$, причём:

1. Коммутативность $\forall a, b\; a+b=b+a; a\times b=b\times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c\; a+(b+c)=(a+b)+c; a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o\colon \forall a\; a+o=a; \exists e\colon \forall a\; a\times e=a; o\neq e$
4. Обратный элемент $\forall a\; \exists -a\colon a+-a=o; \forall a\neq o\; \exists a^{-1}: a\times a^{-1}=a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c\; a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

Кроме того, есть отношения $\leqslant$ (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c\; a\leqslant b => a+c\leqslant b+c$
6. $\forall a, b\; a>0\wedge b\geqslant 0\Rightarrow ab\geqslant 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B\subset\mathbb{R}$, $A\cup B\neq\emptyset$, $\forall a\in A\;\forall b\in B\; a\leqslant b$. Тогда

$$\exists c\in\mathbb{R}\colon \forall a\in A\; a\leqslant c\wedge\forall b\in B\; c\leqslant b$$

REM: На $\mathbb{Q}$ аксиома не выполняется:

$$A=\{r\in\mathbb{Q}\mid r^2<2\}; B=\{r\in\mathbb{Q}_+\mid r^2>2\}; c=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$$

Теорема 3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y\in\mathbb{R}, y>0$. Тогда

$$\exists n\in\mathbb{N}: x<ny$$

▶

$$A\leftrightharpoons\{u\in\mathbb{R}\mid\exists n\in\mathbb{N}: u<ny\}; y\in A$$

Пусть $A\neq\mathbb{R}$. Тогда $B\leftrightharpoons\mathbb{R}-A\neq\emptyset$. Рассмотрим $a\in A; b\in B$.

$$b<a\Rightarrow b<a<ny\Rightarrow b\in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a\in A\;\forall b\in B\; a\leqslant b$$

Тогда

$$\exists c\in\mathbb{R}\colon \forall a\in A\; a\leqslant c\wedge\forall b\in B\; c\leqslant b$$

$$c\in A\Rightarrow c+y\in A\Rightarrow c>c+y\Rightarrow y<0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n+1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geqslant c \Rightarrow y \leqslant 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$ ◀

Следствие 3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < \varepsilon$$

▶ Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$ ◀

Следствие 3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$$

▶

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z} \colon m \leqslant nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \overset{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant nx\}$$

$$x \geqslant 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N} \colon \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмторим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N} \colon k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M\; m < k \Rightarrow \exists m = \max M \colon m \leqslant nx < m + 1$$

$$m \leqslant nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leqslant x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m+1}{n} < y$$

◀

Следствие 3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$$

▶

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2} : z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < z < y$$

◀

4. Верхняя и нижняя граница

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in R$ — верхняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \leqslant x$$
$x \in R$ — нижняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \geqslant x$$

$\mathfrak{Def}$: A ограничено сверху, если
$$\exists x \in R : x \text{ — верхняя граница} A$$
A ограничено снизу, если
$$\exists x \in R : x \text{ — нижняя граница} A$$
A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A, если x — наименьшая из верхних границ.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A, если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:
$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.

▶ x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀

Теорема 4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.
2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

▶

1. B — множество всех верхних границ A.
$$\forall a \in A \, \forall b \in B \; a \leqslant b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A \; a \leqslant c \land \forall b \in B \; c \leqslant b \Rightarrow \exists \sup A = c$$
2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда
$$\inf A = -\sup B$$

◀

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$

Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда
$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A \; a \leqslant b \land \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A \colon a > b - \varepsilon)$$
2. A ограничено снизу. Тогда
$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A \; a \geqslant c \land \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A \colon a < c + \varepsilon)$$

▶
$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \land \forall \varepsilon > 0 \; b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A \; a \leqslant b \land \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A \colon a > b - \varepsilon)$$

◀

5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{i=1}^{n} : \forall i \in \mathbb{N}\ (a_i \leqslant a_{i+1} \wedge b_i \geqslant b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N}\ a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

▶ $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall i \in \mathbb{N}\ c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

◀

REM: Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

REM: $\mathbb{R}$. Рассмотрим приблежения $\sqrt{2}$.

6. Метрические пространства

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть множество X и отображение $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Также пара (X, ρ) называется метричесикм пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$
2. $\rho(x, y) = |x - y|$
3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. Расстояния на сфере.
6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O. Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$

7. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрика

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y, \rho|_{Y\times Y})$ — подпространство X. $Y \subset X$.
$\mathfrak{Def}$: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) < r\}$ — открытый шар.
$\mathfrak{Def}$: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) \leqslant r\}$ — замкнутый шар.
Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$
2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

   ▶ Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x,y) > 0$. ◀

7. Неравентсва Коши-Буняковского и Минковского

Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

▶

$$f(t) \leftrightharpoons \sum_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 = \left(\underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}_{\leftrightharpoons A}\right) t^2 - 2\left(\underbrace{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}_{\leftrightharpoons C}\right) t + \left(\underbrace{b_1^2 + \dots + b_2^2}_{\leftrightharpoons B}\right)$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0 \Rightarrow 4\left(C^2 - AB\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow C^2 \leqslant AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны.

▶

$$a_i = \alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень} t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

◀ ◀

Теорема 7.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}$$

▶ Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}_{\leftrightharpoons A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}_{\leftrightharpoons B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{AB} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{Неравенство Коши-Буняковского}$$

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны. ◀

8. Открытые множества

$\mathfrak{Def}$: (X,ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G\, \exists r > 0 \colon B_r(x) \subset G$$

Теорема 8.1. О свойтсвах открытых множеств. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.

▶

1. Очевидно.
2. $$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \colon x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$
3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$
$$\forall k = 1..n\; x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n\, \exists r_k > 0 \colon B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k \colon G_r \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$
4. $$\forall x \in B_r(a)\, \exists r_x = \frac{1}{2}\left(r - \rho(a,x)\right)$$
$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y,x) < r_x \Rightarrow \rho(y,x) + \rho(a,x) < r_x + \rho(a,x) \Rightarrow \rho(y,a) < r$$

◀

REM:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0;1] \text{ — не открытое множество}$$

9. Внутренние точки и внутренность множества

$\mathfrak{Def}$: $x \in A$ — внутренняя точка A, если $\exists r > 0 \colon B_r(x) \in A$

REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x.

$\mathfrak{Def}$: Внутренность множества A:

$$A^0 = \operatorname{int} A \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\operatorname{int} A \subset A$

2. $\operatorname{int} A$ — множество всех внутренних точек.

3. $\operatorname{int} A$ открыто.

4. A открыто $\Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$

5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$

6. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

7. $\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

10. Замкнутые множества

$\mathfrak{Def}$: Замкнутые множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема 10.1. О свойствах закмнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — закмнуты.

2. Перечечение замкнутых — замкнуто.

3. Объеднинение конечного числа замкнутых замкнуто.

4. Замкнутый шар замкнут.

▶

1. Очевидно

2. По формулам де Моргана
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению
$$\rho(a, x) > r$$
Покажем, что
$$B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$
Пусть $\exists y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда
$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leqslant r$$
$$y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$
$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

◀

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n};1\right]=(0;1]$$

$\mathfrak{Def}$: $A\subset X$, (X,ρ). Тогда замыкание множества A — перечесение всех замкнутых множеств, содержащих A.

$$\operatorname{cl}A=\bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}}F$$

Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.

$$X\setminus\operatorname{cl}A=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

$$X\setminus\operatorname{int}A=\operatorname{cl}(X\setminus A)$$

▶

$$X\setminus\operatorname{cl}A=X\setminus\bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}}=\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}}(X\setminus F)$$

$$X\setminus F \text{ открыто}$$

$$X\setminus F\subset X\setminus A$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто}\\ F\supset A}}(X\setminus F)=\bigcup_{\substack{G \text{ открыто}\\ G\subset X\setminus A}}G=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

Аналогично ◀

Следствие 10.2.1.

$$\operatorname{int}A=\operatorname{cl}(X\setminus A)$$

$$\operatorname{cl}A=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A\subset\operatorname{cl}A$
2. clA замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A=\operatorname{cl}A$
4. $A\subset B\Rightarrow\operatorname{cl}A\subset\operatorname{cl}B$
5. $\operatorname{cl}(A\cup B)=\operatorname{cl}A\cup\operatorname{cl}B$
6. $\operatorname{cl}\operatorname{cl}A=\operatorname{cl}A$

11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема 11.1. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X;\rho)$ — пространство, $(Y;\rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в $X\colon A = G \cap Y$
2. A замкнутыю в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в $X\colon A = F \cap Y$

▶

1. $\Rightarrow$:

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A\, \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A$$

$$G \leftrightharpoons \bigcup_{x \in A} B^X_{r_x}(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} \left(B^X_{r_x}(x) \cap Y\right) = \bigcup_{x \in A} B^Y_{r_x}(x) = A$$

$\Leftarrow$:

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G$$

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к доплнениям

◀

Теорема 11.2. О замыканиях. (X,ρ), $A \subset X$

$$x \in \operatorname{cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $\exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замнкуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\operatorname{cl} A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \operatorname{cl} A$$

$\Leftarrow$: Пусть $x \notin \operatorname{cl} A \Rightarrow \exists F \supset A\colon x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$$

◀

Следствие 11.2.1. U открытое $\wedge\, U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$
▶ Пусть $x \in U \cap \operatorname{cl} A$.

$$x \in \operatorname{cl} A \Rightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ ◀

12. Предельные точки

$\mathfrak{Def}$: Проколотая окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

$\mathfrak{Def}$: Точка $x \in X$ предельная у множества A, если

$$\forall r > 0 \, \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: A' — множество предельных точек.
Свойства:

1. $\operatorname{cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   ▶ $\supset$:

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$
$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

   Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

   $\subset$: Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 \, B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0 \colon \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leqslant r_0 \, \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

   Тогда

$$\forall r > 0 \, \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

◀

Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \, |B_r(x) \cap A| = \infty$$

▶

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A \colon y_1 \neq x \wedge y \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x,y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A \colon y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y \in B_{\rho(x,y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \colon y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

◀

Следствие 12.1.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.

$$A \text{ ограниченно сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограниченно снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

▶ $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A\, x \leqslant a \land \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A\colon x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a-r, a+r) \setminus \{a\}$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$

◀

14. Предел последовательности

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i). Тогда

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \land \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n\to\infty} x = x$
- $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема 14.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некотрого элемента
2. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \land x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограниченна
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x$

▶

1. $\Rightarrow$: Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0\colon B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U$$

$\Leftarrow$: $U \leftrightharpoons B_\varepsilon(x^*)$.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{\rho(x^*;x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_1 \colon \forall n \geqslant N_1\, \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_2 \colon \forall n \geqslant N_2\, \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1; N_2\} \begin{cases} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leqslant \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon$$

3. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N \colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n<N}\{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n\, x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2};\rho(x;x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3};\rho(x;x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$\vdots$$
$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n};\rho(x;x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geqslant N\ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

◀

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n.
REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$
REM:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \operatorname{cl} A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x-y|)$.

15. Предельный переход в неравенстве

Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leqslant y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leqslant y$.

▶ Пусть $y < x$; $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\, |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\, |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\, x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

◀

REM: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

REM: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие 15.1.1. $x_n \leqslant b \Rightarrow x \leqslant b$

Следствие 15.1.2. $x_n \geqslant a \Rightarrow x \geqslant a$

Следствие 15.1.3. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

16. Теорема о двух миллиционерах

Теорема 16.1. О двух миллиционерах. Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

▶ Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \colon \forall n \geqslant N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2 \colon \forall n \geqslant N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\} \colon \forall n \geqslant N \; l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$ ◀

Следствие 16.1.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leqslant z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие 16.1.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограниченна, то $\lim x_n y_n = 0$.

17. Предел монотонной последовательности

$\mathfrak{Def}$: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограниченна тогда и только тогда, когда имеет предел.

▶ $\Leftarrow$: Очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть (x_n) возрастает. Она ограниченна, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k \colon x_k > x - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant a$$

Тогда

$$\forall n \geqslant k \; |x_n - a| < \varepsilon$$

◀

18. Конечное векторное пространство

$\mathfrak{Def}$: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

1. Сложение
   - (a) Коммутативно
   - (b) Ассоциативно
   - (c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{d}$
   - (d) Существует обратный элемент
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
5. $1x = x$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение векторного пространства —

$$"+" : X + X \to X$$

$$"\times" : \mathbb{R} \times X \to X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

$\mathfrak{Def}$: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение скалярного произведения: X — веторное пространство. Задана операция $\langle x, y \rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ обладающая указынными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

$\mathfrak{Def}$: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковкского)

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)

5. $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)

6. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$

   ▶ $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

   $$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geqslant \|x\|$$

   А это неравнство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространтво на $\mathbb{R}^d$.

$\mathfrak{Def}$: Общее определение нормы: $\|x\|\colon X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скаляроного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|$

2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1..d} |x_k|$

   ▶
   $$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leqslant \max_{k=1..d}(|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leqslant \|x\| + \|y\|$$
   ◀

3. $$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p}$$

19. Арифметические свойства предела

Пусть есть $(\mathbb{R}^d, \rho)$ со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

▶
$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$
◀

REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограниченно $\Leftrightarrow \exists M\colon \forall x \in A\ \|x\| \leqslant M$

Теорема 19.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$, $\lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$

5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$

▶

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 \colon \forall n > N_1 \; \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 \colon \forall n > N_2 \; \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_3 \colon \forall n > N_3 \; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.
$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.
$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| =$$
$$= |\lambda_n|\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\| \leqslant M\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\|$$

Но тогда
$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots, x_n^{(d)}\right); y_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \ldots, y_n^{(d)}\right)$ Это докажем позже

5.
$$0 \leqslant |\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$$

◀

Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim |x_n| = |x_0|$
5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

▶ Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \leftrightharpoons A$$
$$\exists N_1 \colon \forall n > N_1 \; |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда
$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

◀

20. Покоординатная сходимость

$\mathfrak{Def}$: $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}\colon \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема 20.1. О сходимости покоординатно. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.

▶

$$\left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{d}\left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)$$

◀

Следствие 20.1.1. $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$

▶

$$\left.\begin{matrix} x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \to y_n^{(i)} \\ y_n \to y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \to y_0^{(i)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{d} x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to \sum_{i=1}^{d} x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$$

◀

21. Бесконечно малые и большие

$\mathfrak{Def}$:

$$\lim x_n = +\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{matrix} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{matrix}\right. \Rightarrow \lim x_n = \infty$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единтсвенность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух миллиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$
3. $c > 0\colon\ \pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0\colon\ \pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0\colon\ \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$

6. $c < 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$

7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$

10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$

13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечнен.
$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

22. Связь между бесконечно большими и малыми

Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

▶

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

◀

Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограниченна. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая

2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

1. $x_n \to +\infty \land y_n$ ограниченна снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

2. $x_n \to -\infty \land y_n$ ограниченна сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$

3. $x_n \to \infty \land y_n$ ограниченна $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

4. $x_n \to \pm\infty \land y_n \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$

5. $x_n \to \pm\infty \land y_n \leqslant a < 0 \Rightarrow x_n y_n \to -\infty$

6. $x_n \to \infty \land |y_n| \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$

7. $x_n \to a \neq 0 \land y_n \to 0 \land y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

8. x_n ограниченна $\land\, y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$

9. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\wedge\, y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \geqslant a$$

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \leqslant a$$

23. Компактность

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет покрытие множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подкокрытие.

$$\forall B_\alpha\colon K \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\colon K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

Теорема 23.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X,\rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y,\rho)$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть B_α — открытое в Y, что

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соотвествующими множествами в X, выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y.

$\Leftarrow$: Пусть $K = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\right) \cap Y = \bigcup_{\alpha\in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y, в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X. ◀

REM: Например, $(0,1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1\right)$$

не выбрать.

24. Свойства компактного множества

Теорема 24.1. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограниченно.

▶

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограниченно}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \leftrightharpoons \min_{i=1}^{k} \left\{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\right\})$

$$\forall i = 1..k \; B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема 24.2. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

▶ Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

25. Теорема о пересечение семейства компактов

Теорема 25.1. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

▶ K_0 — любое их них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus K_{x_i}\right) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^{k} K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

◀

Следствие 25.1.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто.

26. Теорема о вложенных параллелепипедах

$\mathfrak{Def}$: Параллелепипедом на $\mathbb{R}^d$ и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (закрытый)}$$

$$(a, b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (открытый)}$$

Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ имеют непустое пересечение.

▶ Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

27. Теорема Гейне-Бореля

Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля. Замкнутый куб компактен

▶

$$I = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, 0 \leqslant x_i \leqslant a\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобъём куб по кажому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покроет ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрыл куб. ◀

28. Подпоследовательность

$\mathfrak{Def}$: Подпоследовательность:

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.
Подпоследовательность имеет тот же предел.
Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

29. Секвенциальная компактность

Теорема 29.1. Компактность в $\mathbb{R}^d$. Следующее в $\mathbb{R}^d$ равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограниченно
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (*секвенциально компактно*)

▶ $2 \Rightarrow 1$: ограниченно, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$: Возьмём последовательность $\{x_n\} \leftrightharpoons E$ элементов множества F. Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X\, \exists r_x > 0 \colon \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^{k} \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}$$

Получили, что E конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K. Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K.

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1 \colon \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a,x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2 \colon \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

$$\vdots$$

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R. Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho\left(b, x_{n_k}\right) > \rho\left(a, x_{n_k}\right) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \to \infty$$

Значит K ограниченно. ◀

REM: $1 \Rightarrow 3; 3 \Rightarrow 2; 1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой.

30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

Следствие 30.0.1. В $\mathbb{R}^d$ компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

▶ В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие 30.0.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

▶ Множество значений ограниченно, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие 30.0.3. В любой последовательности в $\mathbb{R}^d$ есть сходящаяся в $\bar{R}$ подпоследовательность.

▶ Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

31. Диаметр множества

$\mathfrak{Def}$: Диаметр множеста:

$$\operatorname{diam} A = \sup \rho(x, y)$$

Теорема 31.1. Свойства диаметра.

1. $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$

2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \ldots$ (последовательность вложенных компактов); $\operatorname{diam} K_n \to 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечно

▶

1.
$$E \subset \operatorname{cl} E \Rightarrow \operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$
$$d = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E = \sup \rho(x, y)$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_0, y_0 \colon \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$
$$x_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists x_1 \in E \colon \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$
$$y_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists y_1 \in E \colon \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$
Тогда
$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geqslant \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$
$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$
Устремив $\varepsilon \to 0$, получим
$$\operatorname{diam} E \geqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого n хотя бы $\rho(a, b)$. Противоречие.

◀

32. Фундамитальные последовательности

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называется фундаментальной, если
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > N\ \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM: $E \leftrightharpoons \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$
$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \operatorname{diam} E \to 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.

▶
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \colon \forall k > K\ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > K\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$
Т.о.
$$\exists n_k > M = \max\{N, K\} \colon \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$
◀

$\mathfrak{Def}$: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

33. Полнота компактных метрических пространств

Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В $\mathbb{R}^d$ фундаментальная последовательность всегда сходится.

▶ $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n, m > N\ \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

x_n — фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^d$. $E_n \leftrightharpoons \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ — ограниченно. $\operatorname{cl} E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\operatorname{cl} E_1 \supset \operatorname{cl} E_2 \supset \operatorname{cl} E_3 \supset \cdots$$

$$\operatorname{diam} \operatorname{cl} E_n = \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о.

$$\exists!\, a\colon a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{cl} E_n$$

$$a \in \operatorname{cl} E_n \Rightarrow \forall i > n\, 0 \leqslant \rho(a, x_i) \leqslant \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о $x_n \to a$. ◀

REM: $\mathbb{R}^d$ полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема 33.2. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

▶ В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

34. Верхний и нижний предел

$\mathfrak{Def}$: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \varliminf x_n = \lim_{x \to \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \varlimsup x_n = \lim_{x \to \infty} \sup_{k > n} x_k$$

REM: $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

$\mathfrak{Def}$: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Лемма 34.1. Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\bar{\mathbb{R}}$, при этом

$$\varliminf x_n \leqslant \varlimsup x_n$$

▶ $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$. Если x_n ограниченно, то и y_n ограниченно. Если x_n не ограниченно снизу, то и y_n не ограниченно снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim}\, x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. $\limsup$ — наибольший частичный предел.
2. $\liminf$ — наименьший частичный предел.
3. $\lim$ существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$

▶

1. $a = \limsup x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geqslant a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к a.

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b, уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два миллиционера

◀

35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и eps

Теорема 35.1. Определение верхнего и нижнего предела через N и ε.

1.

$$a = \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N \colon \forall n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N \colon \exists n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$a = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \forall N \colon \exists n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

▶

1. Запишем в терминах y_n:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

◀

Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leqslant b_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \end{cases}$$

▶ Просто сводим к пределам инфимумов. ◀

36. Неравенство Бернули

Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1\ \forall n \in \mathbb{N}\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

▶ Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geqslant 1 + nk$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>0}(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1 + kx + x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x$$

◀

Следствие 36.1.1. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

37. Число e

Определим число e:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \uparrow; y_n \downarrow$.

▶

$$x_n < x_{n+1} \Leftarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \Leftarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

$$y_n < y_{n-1} \Leftarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 - \frac{n}{n^2-1} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

◀

Заметим, что при этом $x_n < y_n$. Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leftrightharpoons e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$
2. $x_n < e < y_n$

38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

Теорема 38.1. Предел убывающей по отношению. $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$.
▶ С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀
Следствие 38.1.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

▶

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1a}{<}1$$

◀

Следствие 38.1.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Следствие 38.1.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

▶

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1 + \frac{1}{n})^{-}n \to \frac{1}{e} < 1$$

◀

39. Теорема Штольца

Теорема 39.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.
▶

1. Пусть a = 0.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = |\sum| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем N, такое что $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$, тогда при n и m > N

$$< \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon|y_n - y_m|$$

устремим n к бесконености.

$$|x_m| < \varepsilon(y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{при } m > N$$

2. $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - a y_n$$

◀

40. Теорема Штольца

Теорема 40.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

▶ $a = 0$:

$$\varepsilon_n \leftrightharpoons \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n > N \, |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{N} + \sum_{i=N+1}^{n}$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leqslant \sum_{i=N+1}^{n} |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^{n} (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leqslant \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$$

$a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$. Фактом $x_n \to \infty$ мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \to 0$$

$a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n. Проверим, что x_n монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1 x_n - x_{n11} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$: Сменим знаки x_n. ◀

41. Пределы функций

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) — метрические пространства. $E \subset X$, a — предельная точка E. $f\colon X \to Y$. Тогда говорят, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x\, (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

REM: Для бесконечности на $\mathbb{R}$ есть частные случаи.

$\mathfrak{Def}$: По Гейне,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E \colon x_n \neq a \lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$$

42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции. Определения равносильны.

▶

1. Коши $\Rightarrow$ Гейне

   $$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

   Пусть $lim x_n = a$, $x_n \in E, x_n \neq a$

   По δ выберем N $\forall n > N x_n \in B_\delta(a)$, тогда $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

   Нашли номер N при котором $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow lim f(x_n) = b$

2. Гейне $\Rightarrow$ Коши

   от противного.

   По Коши $\to \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

   $$\exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0 \colon \exists x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

Выберем последовательность $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow lim(f(x_n)) \neq b$$

Противоречие с определением по Гейне

◀

REM: В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все x_n различны.

REM: Можно рассматривать лишь такие последовательности, что $\rho(x_n, a)$ убывает.

43. Свойства функций, имеющих предел

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

▶ Возьмём две сходящиеся последовательности x_n и y_n, после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям b и c. Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

Утверждение. Единственность предела $f\colon E \subset X \to Y$, a — предельная точка. Тогда предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ единственнен.

▶ Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

Теорема 43.1. Ограниченность. $f\colon E \subset X \to Y$, $\lim\limits_{x \to a} = b$. Тогда

$$\exists r > 0\colon f\mid_{E \cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

Теорема 43.2. Уход от нуля. $f\colon E \to \mathbb{R}^d$, $\lim\limits_{x \to a} = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0\colon \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E \; f(x) \neq \emptyset$$

▶ $\varepsilon \leftrightharpoons \rho(x, \vec{0})$ ◀

44. Арифметические действия с пределами

Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции.. $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}^d$, $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, a предельная точка E.

1. $\lim x \to a(f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$
2. $\lim x \to a(\lambda(x) g(x)) = \lambda_0 g_0$

3. $\lim x \to a(f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$

4. $\lim x \to a \|f(x)\| = \|f_0\|$

5. $\lim x \to a \langle f(x), g(x)\rangle = \langle f_0, g_0\rangle$

▶ Возьмём любые сходящиеся к a последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции.. $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}$, a предельная точка E.

1. $\lim x \to a(f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$

2. $\lim x \to a(f(x)g(x)) = f_0 g_0$

3. $\lim x \to a |f(x)| = |f_0|$

4. $\lim x \to a \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_0}{g_0}$

▶ Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве.. $f, g\colon E \to Y$, a предельная точка E, $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leqslant g(x)$. Тогда $f_0 \leqslant g_0$.

Теорема 45.2. О двух миллиционерах.

46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

$\mathfrak{Def}$: Пределы слева и справа. $f\colon E \cap \mathbb{R} \to Y$.

$$\lim_{x\to a-} = \lim_{x\to a-0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to a} f\mid_{E\cap(-\inf, a)}$$

$$\lim_{x\to a+} = \lim_{x\to a+0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to a} f\mid_{E\cap(a, +\inf)}$$

Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченой функции..

47. Критерий Коши для отображений и для функций

Теорема 47.1. Критерий Коши.

$$f : E \subset X \to Y, a \text{ — предельная точка E, Y — полное}$$

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

▶

1. $\Rightarrow$ Если $\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2. $\Leftarrow$

   Берем любую последовательность x_n $x_n \neq a \in E \to a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$$\Rightarrow f(x_n) \text{ — фундументальная последовательность точек из Y}$$

$$\Rightarrow \exists lim(f(x_n)) \text{полнота Y}$$

◀

48. Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа

𝔇𝔢𝔣: (По Коши)

$$f : E \subset x \to y a \in E$$

$$f \text{ — непрерывно в точке a, если} \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

𝔇𝔢𝔣: (По Гейне)

$$\forall\{x_n\} \subset E x_n \to a : f(x_n) \to f(a) \Leftrightarrow f(\ ---\ )$$

𝔇𝔢𝔣:

$$f : E \subset \mathbb{R} \to Y, a \in E$$

$$f \text{ — непрерывно слева в точке a}$$

$$g = f|_{(-\infty,a] \cap E}, \text{g — непрерывно в точке a}$$

$\mathfrak{Def}$:

$$f : E \subset \mathbb{R} \to Y, a \in E$$

f — непрерывно справа в точке a

$g = f|_{[a,+\infty)\cap E}$, g — непрерывно в точке a

49. Арифметические действия с непрерывными функциями

Теорема 49.1. Арифметические действия с непрерывными функциями.

$$f, g : E \subset X \to \mathbb{R}^d, a \in E f, g \text{непрерывны в точке a}$$

Тогда

1. f(x) + g(x) непрерывно в точке a
2. cf(x) непрерывно в точке a
3. f(x) - g(x) непрерывно в точке a
4. $\|f(x)\|$ непрерывно в точке a
5. $<$ f(x), g(x) $>$ непрерывно в точке a

Теорема 49.2.

$$f, g : E \subset X \to \mathbb{R}, a \in E f, g \text{непрерывны в точке a}$$

Тогда

1. f(x) + g(x) непрерывно в точке a
2. f(x)g(x) непрерывно в точке a
3. f(x) - g(x) непрерывно в точке a
4. |f(x)| непрерывно в точке a
5. Если g(a) $\neq$ 0, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывно в точке a

Теорема 49.3. о стабильном знаке.

$$f : E \subset X \to \mathbb{R} a \in E, f \text{ — непрерывно в точке a и} f(a) \neq 0$$

Тогда

$$\exists B_\delta(a) \text{такое что } \forall x \in B_\delta(a) sign(f(x)) = sign(f(a))$$

▶

$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$$

◀

Теорема 49.4. о непрерывности композиции.

$$f : E_1 \subset X \to Y$$

$$g : E_2 \subset Y \to Z$$

$$f(E_1) \subset E_2, a \in E_2$$

f — непрерывна в точке a
g — непрерывна в точке f(a)
тогда $g \circ f$ — непрерывно в точке a.
▶ Надо проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$

Берем ε

$$\exists \gamma > 0 \forall y \in B_\gamma(f(a)) \cap E_2 : g(y) \in B_\varepsilon(g(f(a)))(\text{по непрерывности g в точке f(a)})$$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : f(x) \in B_\gamma(f(a))(\text{по непрерывности f в точке a})$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a))$$

◀

50. Характеристика непрерывности в терминах прообразов

Теорема 50.1.

$$f : x \to y$$

f непрерывно во всех точках ⇔ прообраз любого открытого множества открыто.
▶

1. $\Rightarrow$
   $G \subset Y$(открытое), надо доказать, что $f^{-1}(G)$ — открытое.
   Возьмем $a \in f^{-1}(G)$ надо доказать, что $\exists$ шар с центром в точке a содержащийся в $f^{-1}(G)$
   $f(a) \in G$ — открыто $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(a)) \subset G$
   Знаем,что f непрерывнв в точке a

   $$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

   то есть

   $$\forall x \in B_\delta(a), f(x) \in G$$

   то есть

   $$B_\delta(a) \subset f^{-1}(G)$$

2. $\Leftarrow$

   Зафиксируем $a \in x$

   Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a), f(x) \in B_{epsilon}(f(a))$

   Возьмем $B_\varepsilon(f(a))$ — открытое множество, $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открытое $\Rightarrow$

   $\exists B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

◀

51. Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное

Теорема 51.1. ааа.
$f : E \subset X \to \mathbb{R}^d a \in E$
Тогда f непрерывна в точке a $\Leftrightarrow$ все координаты функции f непрерывны в точке a.
▶

1. $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

   то есть

$$\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$$|f_i(x) - f_i(a)| \leqslant \sqrt{((f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 + \ldots)}$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \Rightarrow f_i \in B_\varepsilon(f_i(a))$$

$$f_i \ - - -$$

   непрерывна в точке a.

2. $\Leftarrow$

   Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_d\} > 0$

   Тогда $\forall x \in B_\delta(a) \forall i = 1 \ldots d |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

   $\Rightarrow (f_1(x) - f_1(a))^2 + \ldots < d\varepsilon$

   $\rho(f(x), f(a)) < \sqrt{(d)}\varepsilon$

◀

52. Непрерывность и компактность

$\mathfrak{Def}$:

$$f : E \subset x \to y$$

f — ограниченное отображение, если $f(E)$ — ограничено.

Теорема 52.1. Непрерывный образ компакта — компакт.

$$f : x \to y, f \text{ — непрерывен на X}, K \subset X, K \text{ — компакт} \Rightarrow f(K) \text{ — компакт}$$

▶ Пусть G_α — открытые множества.
$\cup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset f(K)$ надо выбрать конечное подпокрытие.
Рассмотрим $f^{-1}(G_\alpha)$ — открытое множество(по непрерывности f)
$\cup_{\alpha \in I} f^{-1}(G_\alpha) \supset K$
$\Rightarrow \exists$ конечное подпокрытие.
$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \cup_{i=1} f^{-1}(G_{\alpha_i}) \supset$
$\cup_{i=1}^{n} G_{\alpha_1} \supset f(K)$ конечное подпокрытие для f(k)

◀

Следствие 52.1.1.

1. Непрерывный образ компакта — компакт.
2. (Теорема Вейерштрасса)

$$f : K \to \mathbb{R} \text{непрерывен на K} \Rightarrow f \text{ — ограничена}$$

3. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывен на [a, b] $\Rightarrow$ $---$ ограничена
4. $f : K \to \mathbb{R}$ f — непрерывен на K, K — компакт $\Rightarrow \exists a, b \in K, \forall x \in K f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

   ▶ f(K) — ограниченное подмножество $\mathbb{R}$

$$A = inf f(K)$$

$$B = sup f(K)$$

$$f(K)$$

   — замкнуто $\Rightarrow A, B \in f(K)$ ◀

5. (теорема Вейерштрасса)

   $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на [a, b], тогда она принимает наибольшее и наименьшее значение.

53. Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции

Теорема 53.1. $f : K \to Y$ непрерывно на K биекция между K и Y, тогда $f^{-1} : Y \to K$ непрерывно.

▶

Надо проверить, что для f^{-1} прообраз открытого множество — открытое. Т.е. надо проверить для f, что образ открытого — открыто.

Берем $G \subset K$ — открытое.

$\Rightarrow K \setminus G$ — замкнутое подмножество K.

$\Rightarrow K \setminus G$ — компакт.

$\Rightarrow f(K \setminus G)$ — компакт $\Rightarrow$ замкнутое

$\Rightarrow f(G)$ — открыто. ◀

Следствие 53.1.1.

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ строго монотонно и f непреывна на [a, b] $\Rightarrow$ f^{-1} непрерывно на множестве задания.

   ▶ [a, b] = K — компакт.

   строго монотонная $\Rightarrow$ инъекция.

   f — биекция между [a, b] и f([a,b]) ◀

2. $f : ([a, b], (a, b], [a, b), (a, b)) \to \mathbb{R}$ строго монотона и непрерывна на нем $\Rightarrow$ f^{-1} непрерывна на множестве задания.

   ▶

   $$y = f(< a, b >)$$

   $$f^{-1} : y \to \mathbb{R}$$

   Надо доказать непрерывность $\forall c \in y$

   Берем $c \in y \Rightarrow c = f(x_0)$ для некоторого $x_0 \in < a, b >$

   Возьмем $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset < a, b >$

   $g = f|_{[\alpha,\beta]} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ применяем следствие 1.

   $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B_\delta(c) \cap f([\alpha, \beta]) : g^{-1}(y) \in B_\varepsilon(g^{-1}(c))$

   $f : X \to Y$ непрерывно на X.

   $$\forall a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

   ◀

54. Равномерная непрерывность на функции. Теорема Кантора

$\mathfrak{Def}$: $f : X \to Y$ равномерно непрерывна, если
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X \rho(x, y) < \delta : \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Теорема 54.1. Кантора.
$f : K \to Y$ K – компакт, f непрерывен на K $\Rightarrow$ f равномерно непрерывно.

▶
От противного.
Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ нет $\delta > 0$, т.е не подходит $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n, \tilde{x}_n \in K \text{т.ч} \rho(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{1}{n} \rho(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \geq \varepsilon$$

$x_n, \tilde{x}_n$ последовательность точек из K извлеем из x_n сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}, $x_{n_k} \to a \in K$
$\tilde{x}_{n_k} \to a$, т.к. $\rho(x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0$
f непрерывно в точке a.
$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_{frac\varepsilon 2}(f(a))$
Начиная с какого-то N $x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k} \in B_\delta(a)$

$$\Rightarrow f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k}) \in B_\varepsilon(f(a))$$

$$\Rightarrow \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) < \varepsilon \text{противоречие}$$

◀

Следствие 54.1.1. Непрерывное на [a, b] функция равномерно непрерывна.

55. Теорема Больцано-Коши

Лемма 55.1. о связности отрезка Пусть $[a, b] \subset U \cup V, U, V$ — открытые и $U \cap V = \emptyset$ тогда либо $[a, b] \subset U$, либо $[a, b] \subset V$
▶ Рассмотрим точку b. Пусть b $\in V$
$S = [a, b] \cap U$, пусть $S \neq \emptyset$

$$b_1 = supS$$

Поскольку b $\in V$ — открытое $\Rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset V$ для некоторого $\varepsilon \Rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap S = \emptyset$
$\Rightarrow b_1 \leq b - \varepsilon \Rightarrow b_1 < b$
Пусть $b_1 \in V \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon) \subset V$
$(b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon) \cap S = \emptyset \Rightarrow supS \leq b_1 - \varepsilon$. Противоречие.
Тогда $b_1 \in U \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset U$
$\delta = min\{\varepsilon_1, b - b_1\} > 0$
$[b_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset S \Rightarrow supS \geq b_1 + \delta$ — противоречие.

◀

Теорема 55.1. Больцано-Коши. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ f — непрерывно на [a, b]
$\forall C$ между f(a) и f(b) $\exists c \in (a, b) f(c) = C$
▶ От противного. Пусть $f(x) \neq C \forall x \in [a, b]$, тогда $[a, b] \subset f^{-1}((-\infty, c)) \cup (f^{-1}(C, +\infty))$ — открытые и не пересекаются, a и b принадлежат разным множествам. Противоречие. ◀
Следствие 55.1.1.

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и непрерывно на [a,b], тогда $f([a, b])$ — отрезок.

   ▶ $\exists u, v \in [a, b], f(u) \leq f(x) \leq f(v) \forall x \in [a, b] \Rightarrow f([a, b]) \subset [f(u), f(v)]$

   По теореме Б-К $\forall C \in (f(u), f(v)) \exists c \in (u, v)$, т.ч. $f(c) = C$ т.е. $f([a, b]) = [f(u), f(v)]$ ◀

2. $f :< a, b >\to \mathbb{R}$ и непрерывно на $< a, b >$, тогда f принимает все значения из (inf f(x), sup f(x))

   ▶ Пусть $C \in (inf, sup) \Rightarrow \exists u : f(u) < C, \exists v : f(v) > C \Rightarrow C$ лежит между $f(u)$ и $f(v)$, но f непрерывно на [u, v] $\Rightarrow$ принимает все промежуточные значения. ◀

56. Непрерывность тригонометрических функций

Теорема 56.1.
$$\sin x < x < tgx$$

Следствие 56.1.1. sin и cos непрерывны.
▶
$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leqslant |x-y|$$
◀

Следствие 56.1.2. tg и ctg непрерывны.
Следствие 56.1.3.
$$\sin\uparrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\cos\downarrow[0,\pi]$$
$$\operatorname{tg}\uparrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$\mathfrak{Def}$:
$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$
$$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$
$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$$

Теорема 56.2.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

▶ $0 < x < \frac{\pi}{2}$:
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x\to 0} 1 \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$
◀

57. Степенная функция

$$x^n \quad x\in[0;+\infty); n\in\mathbb{N}$$

Больше нуля, непрерывна, инфимум 0, супремум бесконечен, строго монотонная.

$$x^{\frac{1}{n}} \text{ обратная}$$

Тоже непрерывна.
$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)m$$
$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

Утверждение. Определение корректно. $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^{\frac{1}{nk}})^{mk}$
Утверждение. Свойства степени выполняются.

1. $x^a x^b = x^{a+b} a, b \in \mathbb{Q}$

2. $(x^a)^b = x^{ab}$

3. $x^a y^a = (xy)^a a \in \mathbb{Q}$

4. $x^a < y^a$ при x < y

5. $x^a < x^b$ при x > 1 и a < b или при 0 < x < 1 и a > b

Лемма 57.1.

$$\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \text{при a} > 0$$

▶ $a \geqslant 1$:

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + \varepsilon n > \varepsilon n > \varepsilon N > a$$

$$N > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N \ (1+\varepsilon)^n > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \geqslant 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

$0 < a < 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

◀

Теорема 57.1. Пусть $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Тогда последовательноть a^{x_n} имеет предел, зависящий только от x и a.

▶

$$a^{x_n} - a^{x_m} = a^{x_n} \left(a^{x_m - x_n} - 1\right)$$

$$\forall n \ |x_n| \leqslant M \Rightarrow a^{x_n} \in \left[a^{-M}; a^M\right]$$

Т.о.

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leqslant \underbrace{a^M}_{\leftrightharpoons C} \left(a_{x_n - x_m} - 1\right) < C\varepsilon$$

По лемме

$$\exists N \colon \forall k > N \ |a^{\frac{1}{n}} < 1| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{N} \to -\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a_{x_n - x_m} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < 1 + \varepsilon$$

Т.о. предел существует.

Пусть теперь

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x \qquad \lim_{n \to +\infty} a^{x_n} \neq \lim_{n \to +\infty} a^{y_n}$$

Но рассмотрим

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, ...\} \to x$$

Но тогда a^{z_n} не имеет предела, что противоречит доказанному выше. ◀

$\mathfrak{Def}$:

$$a^x = \lim_{\substack{x_n \to x \\ x_n \in \mathbb{Q}}}$$

Свойства степени:

1. Для $x \in \mathbb{Q}$ корректно.

2. $x^a x^b = x^{a+b}$

3. $(x^a)^b = x^{ab}$

4. $x^a y^a = (xy)^a$

5. $x < y \wedge a > 0 \to x^a < y^a$

   ▶
$$a_n \to a > 0 \Rightarrow a_n > 0 \text{ с какого-то места}$$
$$x_n^a < x_n^b \Rightarrow x^a \leqslant x^b$$
   Теперь хотим строгое
$$\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$$
$$z \leftrightharpoons \frac{x}{y}$$
$$z^{a_n} < 1 \wedge z^{a_n} \downarrow \Rightarrow z_a < 1$$
◀

6. $x^a < x^b$ при $x > 1 \wedge a < b$ или $0 < x < 1 \wedge a > b$

   ▶ $x > 1 \wedge a < b$:
$$a < p < q < b \quad p, q \in Q$$
$$x^{a_n} < x^p < x^q < x^{b_n}$$
$$x^a \leqslant x^p < x^q \leqslant x^b$$
◀

Лемма 57.2.
$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} a^x = 1$$

▶
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n > N\ \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$$
$$\forall |x| < \frac{1}{N} 1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$
Возьмём $\delta = \frac{1}{N}$ ◀

58. Логарифм

Теорема 58.1.
$$a > 0 \Rightarrow f(x) \leftrightharpoons a^x \text{ непрерывна}$$

▶ Надо доказать, что $a^{\lim_{n\to+\infty} x_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{x_n}$
$x_0 \leftrightharpoons \lim_{n\to+\infty} x_n$
$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{x_n - x_0} - 1\right) \to 0$$
◀

Следствие 58.1.1. Есть обратная
$$\log_a x$$

Теорема 58.2.
$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

▶ $x_n \to +\infty$. $[x_n] = k$

$$\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^k \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$x_n \to +\infty$. $y_n = -x_n$

$$f(x_n) = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n} \to e$$

А для смеси возьмём две части, в каждой есть хороший номер. ◀

59. Следствия

Следствие 59.0.1.

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
2. $\lim_{x\to 0}(\frac{ln(1+x)}{x}) = 1$

   ▶

   $$\lim(\frac{ln(1+x)}{x}) = \lim(ln(1+\frac{1}{x})^x) = ln(lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{)}^x) = lne = 1$$

   ◀

3. $lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = lna$

   ▶ $y = a^x - 1 \to 0$ при $x \to 0$(непрерывность a^x)

   $$a^x = y+1$$

   $$xlna = ln(y+1)$$

   $$\frac{a^x-1}{x} = \frac{y}{\frac{ln(y+1)}{ln(a)}} = ln(a)\frac{y}{ln(1+y)} = ln(a)$$

   ◀

4. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^p-1}{x} = p$

   ▶ $y = (1+x)^p - 1 \to 0$ при $x \to 0$

   $$(1+x)^p = 1+y$$

   $$pln(1+x) = ln(1+y)$$

   $$\frac{(1+x)^p-1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{ln(1+y)}\frac{ln(1+y)}{pln(1+x)}\frac{ln(1+x)}{x}p = p$$

   ◀

60. Сравнение функций

$\mathfrak{Def}$: $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, a — предельная точка E. Если существует такая $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\forall x \in E \; f(x) = \varphi(x)g(x)$$

и

1. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 1$, то $f \sim g$ при $x \to a$.
2. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, то $f = o(g)$ при $x \to a$.
3. φ ограничена, то $f = O(g)$ при $x \to a$.
4. Если
$$\forall x \in E \; |f(x)| \leqslant c|g(x)|$$
то $f = O(g)$ на E.

Свойства:

1. $\sim$ — отношение эквиваленции.
2. $f_1 \sim f_2 \wedge g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1g_1 \sim f_2g_2$
3. $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f) \Leftrightarrow f = g + o(f)$
▶
$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \varphi \to 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g, \varphi - 1 \to 0 \Leftrightarrow f = g + o(g)$$
◀
4. $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$
5. $f \cdot o(g) = o(fg)$

Примеры ($x \to 0$):

$$\begin{aligned} \sin x &\sim x \\ \ln(x+1) &\sim x \\ a^x - 1 &\sim \ln a \cdot x \\ (x+1)^p - 1 &\sim px \end{aligned}$$

61. Производная

$\mathfrak{Def}$:
$$f : (a, b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a, b)$$
Если существует конечный $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется производной f в точке x_0. $f'(x_0)$
$\mathfrak{Def}$:
$$f : (a, b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a, b)$$
f — диффиренцируема в точке x_0, если $\exists A \in \mathbb{R}$ т.ч. $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$

Теорема 61.1. $f : (a, b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a, b)$
f — дифф. в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists$ конечная производная $f'(x_0)$

И в этом случае $A = f'(x_0)$

▶ f — дифф.в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - A \to 0 \Leftrightarrow$$

$$lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Дифференциал функции f в точке x_0 — это отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ умноженное на A. $df(x_0)$
$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейно, если $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

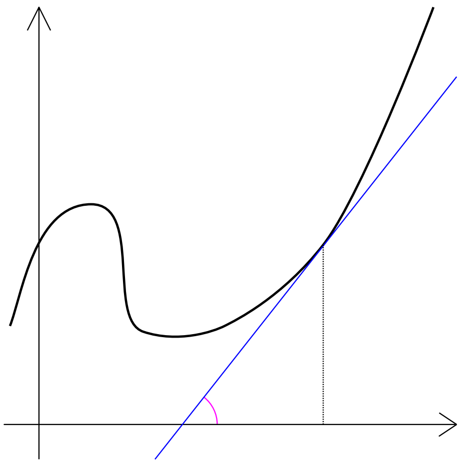
62. Геометрический смысл производной

Если рассмотреть график непрерывной функции

$$y = f(x)$$

то в каждой точке x_0, где функция непрерывна, можно рассмотреть касательную к её графику

$$y = kx + b$$



Давайте посчитаем угловой коэффициент касательной k.

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Таким образом, производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в соотвествующей точке.

63. Одностороние производные

REM: Бесконечные производные.

$$lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$$

$\mathfrak{Def}$:
$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — правая производная.
$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ — левая производная.
REM: Если $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ существуют и $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, то существует $f'(x_0) = f'_+(x_0)$
Пример: $f(x) = |x|$

$$lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = lim_{x\to 0^+}1 = 1$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = lim_{x\to 0^+}-1 = -1$$

$$f'_-(0) = -1$$

В частоности f не дифф. в точке 0.

64. Непрерывность дифференцируемой функции

Утверждение. f — дифф. в точке $x_0 \Rightarrow f$ — непрерывна в точке x_0
▶ f — дифф. в точке $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0) + \lim_{x\to x_0}(A(x-x_0)+o(x-x_0)) = f(x_0)$$

◀

REM: Обратное не верно.
Примеры

1. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \infty$$

   $x^{\frac{1}{3}}$ — не дифф. в точке 0, но непрерывна.

2. $f(x) = x\sin(x)$, f(0) = 0. Непрерывна.
   $lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует.

65. Арифметические действия с диффиренцируемыми функциями

Теорема 65.1. Арифметические действия с диффиренцируемыми функциями.
$f, g : (a, b) \to \mathbb{R} x_0 \in (a, b)$
f, g — дифф. в точке x_0, тогда

1. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если $g \neq 0$ в окрестности точки x_0
   $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

▶

1. $(f \pm g)'(x_0) = lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} = lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2.
3. $$(fg)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
   $$= \lim_{x \to x_0} (\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}) =$$
   $$= lim_{x \to x_0}(g(x)) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$
   $$= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
4. Достаточно доказать, что $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
   $$(\frac{1}{g})'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$
   $$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g^2(x)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

◀

66. Производная композиции

Теорема 66.1. Производная композиции. g дифференцируема в x_0, f дифференцируема в $f(x_0)$. Тогда $f \circ g$ дифференцируема, причём

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

▶

$$(f \circ g)'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(g(x))g'(x)$$

◀

67. Теорема о дифференцируемости обратной функции

Теорема 67.1. Производная обратной функции. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f^{-1} — обратная функция.
f — дифф. в точке $x_0 \in (a,b)$
Тогда $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$
▶

$$f^{-1} = g$$
$$g(f(x)) = x$$
$$g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

Нужна дифф. функции g в точке $f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)\text{где } \alpha(x) \to 0$$
$$g(f(x)) = g(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0))$$
$$g(y) = g(f(x_0)) + A(y - f(x_0)) + \beta(y)(y - f(x_0))$$
$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + A(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x))(f(x) - f(x_0))$$
$$x = x_0 + A(f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0)) + \beta(f(x))(f'(x_0)(x-x_0) + \alpha(x)(x-x_0))$$
$$A = \frac{1}{f'(x_0)}, o = \frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} + \beta(f(x))(f'(x_0 + \alpha(x)))$$
$$\beta(f(x)) = -\frac{\alpha(x)}{f'(x_0)}\frac{1}{f'(x_0)+\alpha(x)}$$
$$\beta(y) = -\frac{\alpha(g(y))}{f'(x_0)}\frac{1}{f'(x_0)+\alpha(g(y))}$$

Надо понять,что $\beta(y) \to 0$ при $y \to f(x_0)$
Если $y \to f(x_0)$, то $g(y) \to g(f(x_0))$

$$\lim_{y \to f(x_0)} \alpha(g(y)) = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$$

◀

Следствие 67.1.1.
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

68. Производные элементарных функций

$$c' = 0$$
$$(x^p)' = px^{p-1}$$
$$(a^x)' = \ln a a^x$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\cos' x = -\sin x$$
$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

▶

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^p - x^p}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^p}{x}\frac{\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^p - 1\right)}{\frac{h}{x}}\right) = x^{p-1}p$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a_x \frac{a^h - 1}{h} = a_x \ln a$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Лооооооооол что такое, Таня?
$\sin x = y$

$$\arcsin' y = (\sin^{-1} y)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\operatorname{tg} x = y$

$$\operatorname{arctg}' y = (\operatorname{tg}^{-1} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

◀

69. Теоремы Ферма и Ролля

Теорема 69.1. Теорема Ферма. $f\colon \langle a, b\rangle$, $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема в x_0, x_0 — точка экстремума. Тогда

$$f'(x_0) = 0$$

▶ Пусть $x > x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

Пусть $x < x_0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

Но тогда

$$f'(x_0) = 0$$

◀

Теорема 69.2. Теорема Ролля. $f\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b), $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = 0$$

▶ Если функция константна, то всё доказано. Иначе есть глобальный максимум и минимум, причём они не могут быть оба в концах. ◀

Следствие 69.2.1. Между корнями функции есть корень производной.

70. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 70.1. Теорема Лагранжа. $f\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b).

$$\exists c \in (a,b)\colon f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Теорема 70.2. Теорема Коши. $f, g\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b), $g'(x) \neq 0 \neq g(b) - g(a)$.

$$\exists c\colon \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

▶ $h(x) = f(x) - Kg(x)$, $h(a) = h(b)$.

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда

$$\exists c\colon h'(c) = 0$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

◀

Следствие 70.2.1. $f\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b), $|f'(x)| \leqslant M$. Тогда

$$\forall x, y \in (a,b)\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

71. Следствия теоремы Лагранжа

Следствие 71.0.2.

1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ f — непрерывна на $[a,b]$, дифф. на (a, b) и $|f'(x)| \leq M \forall x \in [a,b]$, тогда $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \forall x, y \in [a,b]$

   ▶
   $$f : [x,y] \to \mathbb{R}$$
   $$\Rightarrow \exists c \in (x,y), f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$$
   $$\Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x-y||f'(c)| \leq M(x-y)$$
   ◀

2. При тех же условиях f равномерно непрерывна на (a, b)

   ▶
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (a,b), |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
   По следствию 1
   $$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < M\delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{M} \text{ подходит}$$
   ◀

3. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b) и $f'(x) = 0 \forall x \in (a,b)$, тогда f(x) = const.

   ▶
   $$[x, x_0] \subset [a,b]$$
   $$\exists c \in (x, x_0) \subset (a,b), f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$$
   $$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \forall x \in [a,b]$$
   ◀

4. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b) и $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a,b)$, тогда f(x) монотонно возрастает. А если $f'(x) > 0 \forall x \in (a,b)$, тогда f(x) строго монотонно возрастает.

   ▶
   $$x < y x, y \in < a, b >$$
   $$f(y) - f(x) = (y-x)f'(c) \Rightarrow f(y) > f(x)$$
   ◀

5. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b) и $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a,b)$, тогда f(x) монотонно убывает. А если $f'(x) < 0 \forall x \in (a,b)$, тогда f(x) строго монотонно убывает.

Теорема 71.1.

1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b), тогда f(x) монотонно возрастае $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a,b)$.

2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f — непрерывна на [a, b] и диф. на (a, b), тогда f(x) монотонно убывает $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in (a,b)$.

▶ $\Rightarrow$
Пусть x < y, тогда $f(x) < f(y) \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$ ◀

72. Теорема Дарбу

Теорема 72.1. Теорема Дарбу. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на $[a,b]$, $C \in [f'(a), f'(b)]$. Тогда

$$\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = C$$

▶ Пусть $C = 0$, тогда $f'(a)$ и $f'(b)$ разных знаков.
f непрерывна, поэтому функиця достигает свои максимум и минимум (по теореме Вейерштрасса). Достаточно показать, что один из них достигаются не в конце.

От противного: пусть минимум находится в точке a, а максимум в точке b. Тогда

$$\forall x > a\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \wedge \forall x < b\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geqslant 0$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ f'(b) &= \lim_{x\to b-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} f'(a) \geqslant 0 \\ f'(b) \geqslant 0 \end{aligned} \quad \text{— противоречие}$$

Таким образом хотя бы один экстремум не в конце, и искомое c существует.

В общем случае перейдём к

$$g(x) = f(x) - Cx$$
$$g'(x) = f'(x) - C$$

◀

73. Правило Лопиталя

Теорема 73.1. Правило Лопиталя. $-infty \leq a < b \leq +infty$ f и g дифф. на (a, b)

$$g'(x) \neq 0 \forall x \in (a,b)$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0(+\infty)$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

▶ Возьмем $x_n \downarrow a x_n \in (a,b)$, надо доказать, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = l$$

По теореме Штольца достаточно проверить, что $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1}-g(x_n)}$ и что $g(x_n)$ — монотонна

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1}-g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \to l$$

$$a < x_{n+1} < c_n < x_n \Rightarrow c_n \to a$$

Осталось доказать монотонность $g(x_n)$.

Заметим, что g' везде одного знака, иначе по теореме Дарбу была бы точка, где g' = 0. $\Rightarrow g(x_n)$ — строго монотонно. ◀

Примеры

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, при p > 0

▶

$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(lnx)'}{(x^p)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = 0$$

◀

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$ при a > 1

▶

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \lim \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a}$$

◀

3. $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{lim(ln(x^x))} = 1$

▶

$$ln(x^x) = xln(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} xln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(lnx)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to 0^+} = 0$$

◀

74. Производные высших порядков

$\mathfrak{Def}$: Производной $n \geqslant 2$ порядка функции f называется производная производной $n-1$ порядка.

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

$\mathfrak{Def}$: $C(E), C[a,b], C(a,b)$ — множество непрерывных на E, $[a,b]$, (a,b) функций. Соотвественно, $C^n(E)$ — множество n раз дифференцируемых функций.

$$C^\infty(E) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C^i(E)$$

Утверждение.

$$C^n(E) \supset C^{n+1}(E)$$

REM: При том, что множества вложены друг в друга, они не равны.

$$f(x) = x^{n+\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$f^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(i + \frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}}$$

Т.о. $f \in C^n(\mathbb{R})$, но $f^{(n)} = C\sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в 0, поэтому $f \notin C^{(n+1)}(\mathbb{R})$

75. Арифметические действия с производными высших порядков

Теорема 75.1. Арифметические действия с производными высших порядков.

1.
$$(\alpha x f+\beta g)^{(n)}=\alpha f^{(n)}+\beta g^{(n)}$$

2. Правило Лейбница
$$(fg)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n-i)}$$

▶ Метод математической индукции: база $n=1$ уже доказана. Докажем переход

$$(fg)^{(n+1)}=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n-i)}\right)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(f^{(i+1)}g^{(n-i)}+f^{(i)}g^{(n-i+1)}\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i+1)}g^{(n-i)}+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n-i+1)}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1}\right)f^{(i+1)}g^{(n-i)}+fg^{(n+1)}+f^{(n+1)}g=$$

$$=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n+1-i)}$$

◀

76. Формула Тейлора

Теорема 76.1. Формула Тейлора.

$$T(x)=\sum i=0^n\frac{T^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

▶

$$T(x)=\sum_{i=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$$

$$((x-x_o)^k)^{(m)}=\begin{cases}0 & k<m\\ m! & k=m\\ k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m} & k>m\end{cases}$$

$$T(x)^{(m)}=\sum_{i=m}^{n}a_k k(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-i+1)(x-x_0)^{k-m}$$

$$T(x_0)^{(m)}=a_m m!$$

$$a_m=\frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$$

◀

$\mathfrak{Def}$: f дифференцируема n раз в точке x_0. Тогда многочленом Тейлора функции f в точке x_0 есть

$$T_{n,x_0}f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x)}{k!}(x-x_0)^k$$

$\mathfrak{Def}$: Формула Тейлора:

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$$

Лемма 76.1. g дифференцируема n раз в x_0. $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Тогда

$$g(x) = o\left((x-x_0)^n\right) x \to x_0$$

▶

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim x \to x_0 \frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{g^(n-1)}{n!\,(x-x_0)}$$

$g^{(n-1)}$ дифференцируема в x_0, а значит

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = o(x-x_0)$$

Т.о.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g^(n-1)}{n!\,(x-x_0)} = 0$$

Тогда

$$g(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

◀

77. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 77.1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. f дифференцируема n раз в x_0.

$$f(x) = T_{n,k}f(x) + o((x-x_0)^n) \quad x \to x_0$$

▶

$$g(x) = f(x) - T_{n,k}f(x)$$

$$\forall k \leqslant n \; g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \left(T_{n,x_0}f\right)^{(k)}(x_0) = 0$$

Пользуемся леммой. ◀

Следствие 77.1.1.

$$\exists!\, P \in \mathbb{R}[x]\colon f(x) = P(x) + o((x-x_n)^k) \quad x \to x_0$$

▶ $x \to x_0$:

$$T_{n,x_0}f(x) + o\left((x-x_0)^n\right) = f(x) = P(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$q(x) \risingdotseq T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o\left((x-x_0)^k\right)$$

$$q(x_0) = 0$$

$q \in \mathbb{R}[x]$

$$q(x) = (x-x_0)q_1(x)$$

$$q_1(x) = o\left((x-x_0)^{n-1}\right)$$

$$q_1(x_0) = 0$$

$$\vdots$$
$$q_n(x_0) = o(1)$$
$$q_n \equiv 0$$
$$q \equiv 0$$
$$P \equiv T_{n,x_0} f$$

◀

78. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Теорема 78.1. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. f дифференцируема $n/+1/$ раз в x_0, $f^{(n)}$ непрерывна на $[x, x_0]$.

$$\exists c \in (x, x_0)\colon f(x) = T_{n,x_0} f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

REM: Теорема Лагража — частный случай для $n = 0$.

$$\exists c \in (x, x_0)\colon f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

▶

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + M\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Надо доказать, что в форме

$$\exists c \in (x, x_0)\colon M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$
$$g(t) \leftrightharpoons f(t) - T_{n,x_0} f(t) - M(t - x_0)^{n+1}$$
$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (T_{n,x_0})^{(k)}(t) - M(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n-k+2)(t - x_0)^{n-k+1}$$
$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

Тогда у функции g первые n производных равны нулю, а также $g(x) = 0$, значит

$$g(x_0) = g(x) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_1 \in (x, x_0)\colon g'(x_1) = 0$$
$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_2 \in (x, x_1)\colon g'(x_2) = 0$$
$$\vdots$$
$$\exists x_{n+1} \in (x, x_0)\colon g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$
$$g^{(n+1)}(t) = f(n-1)(t) - M(n+1)!$$
$$c = x_{n+1}$$

$\blacktriangleleft$

Следствие 78.1.1. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$.

$$\left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| \leqslant \frac{M\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = O\left((x - x_0)^n\right)$$

$\blacktriangleright$

$$\exists c \in (x, x_0)\colon \left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right|$$

$\blacktriangleleft$

Следствие 78.1.2. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $foralln$ $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$.

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,x_0} = f(x)$$

$\blacktriangleright$

$$\left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| \leqslant \frac{M\left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

$\blacktriangleleft$

79. Формула Тейлора для некоторых функций

$x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 && +x + \frac{x^2}{2!} && +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} && + \dots + o(x^n) \\
e^x &= 1 && +x + \frac{x^2}{2!} && +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} && + \dots + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x &= 0 && +x + 0 && -\frac{x^3}{3!} + 0 && + \dots + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 && +0 + \frac{x^2}{2!} && +0 - \frac{x^4}{4!} && + \dots + o(x^{2n+1}) \\
\ln(x+1) &= 0 && +x - \frac{x^2}{2} && +\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} && + \dots + o(x^n) \\
(x+1)^p &= 1 && +px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 && +\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 && + \dots + o(x^n)
\end{aligned}$$

80. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$\mathfrak{Def}$: $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum i = 0^n a_n$$

Следствие 80.0.3. $\forall x\ in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

81. Иррациональность числа e

Теорема 81.1. Иррациональность e.

$$e \notin \mathbb{Q}$$

▶

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$2 < e < 3$$

Пусть $e = \frac{m}{n}$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1\frac{3!}{+} \cdots + \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{n!\,(1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1\frac{3!}{+} \cdots)}_{\in\mathbb{N}} + \frac{e^c}{n+1} = \underbrace{m(n-1)!}_{\in N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{N}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < e^c < 3$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1} < 1$$

Т.о. $e \neq \frac{m}{n}$ ◀

82. Локальные максимумы и минимумы

83. Экстремумы функции

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. x_0 — точка строгого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta)\ \{x_0\} f(x) > f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta) f(x) \geqslant f(x_0)$$

x_0 — точка строгого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta)\ \{x_0\} f(x) < f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta) f(x) \leqslant f(x_0)$$

Точка локального максимума или минимума также называется точкой локального экстремума.

Теорема 83.1. Необходимое условие экстремума. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема в x_0.

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

▶ Сузим до окрестности, там по теореме Ферма всё работает. ◀

REM: Обратное неверно, смотри $f(x) = x^3$.

84. Достаточные условия экстремума

Теорема 84.1. Достаточное условие экстремума. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, f непрерывна на $(x_0-\delta, x_0+\delta) f$ дифференцируема на $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0+\delta)$. Тогда

- $f'((x_0-\delta, x_0)) > 0 \wedge f'((x_0, x_0+\delta)) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f'((x_0-\delta, x_0)) < 0 \wedge f'((x_0, x_0+\delta)) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

▶

$$f'((x_0-\delta, x_0)) > 0 \Rightarrow f \text{ возрастает на } (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0-\delta, x_0))$$

$$f'((x_0, x_0+\delta)) < 0 \Rightarrow f \text{ убывает на } (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0, x_0+\delta))$$

◀

Теорема 84.2. Достаточное условие экстремума через вторую производную. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, f дважды дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

Теорема 84.3. Достаточное условие экстремума через n-ую производную. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема n раз в x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда

- $2 \mid n \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $2 \mid n \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума
- $2 \nmid 2 \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ — не экстремум

▶

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)$$

$2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0+\varepsilon)\ f(x) - f(x_0) > 0$ $2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0+\varepsilon)\ f(x) - f(x_0) < 0$ $2 \not\div n \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0+\varepsilon)\ sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x-x_0)$ ◀

85. Выпуклость

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$.
f выпукла вниз, если

$$\forall x,y\in\langle a,b\rangle\ \ \forall\lambda\in(0,1) f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

f строго выпукла вниз, если

$$\forall x,y\in\langle a,b\rangle : x\neq y\ \forall\lambda\in(0,1) f(\lambda x+(1-\lambda)y)< \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

f выпукла вверх, если

$$\forall x,y\in\langle a,b\rangle\ \ \forall\lambda\in(0,1) f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

f строго выпукла вверх, если

$$\forall x,y\in\langle a,b\rangle : x\neq y\ \forall\lambda\in(0,1) f(\lambda x+(1-\lambda)y)> \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Абсолютно эквивалентная запись, геом. смысл... 0,0301 10.12

REM: Сумма выпуклых и выпуклая, умноженная на положительную, выпуклы.

Лемма 85.1. О трёх хордах. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$ — выпуклая, $u<v<w$, $u,v,w\in\langle a,b\rangle$. Тогда

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\leqslant\frac{f(w)-f(u)}{w-u}\leqslant\frac{f(w)-f(v)}{w-v}$$

▶

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}\leqslant\frac{f(w)-f(u)}{w-u}\Leftrightarrow (w-u)(f(v)-f(u))\leqslant (v-u)(f(w)-f(u))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w-u)f(v)-(w-u)f(u)\leqslant (v-u)f(w)-(v-u)f(u)\Leftrightarrow (w-u)f(v)\leqslant (v-u)f(w)+(w-v)f(u)$$

◀

86. Непрерывность и дифференциеруемость выпуклой функции

Теорема 86.1. Монотонность производной выпуклой функции. $f\colon \langle a,b\rangle\to R$ — выпуклая. Тогда

$$\forall x\in(a,b)\ f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$$

▶ $u_1<u_2<x<v$

$$\frac{f(x)-f(u_1)}{x-u_1}\leqslant\frac{f(x)-f(u_2)}{x-u_2}\leqslant\frac{f(x)-f(v)}{x-v}$$

Тогда $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ растёт и ограничено, т.е. предел $f'_-(x)$ существует. Аналогично существует $f'_+(x)$, она убывает. Как видно, они в правильном порадке. ◀

Теорема 86.2. Свойство и признак выпуклости. f — выпуклая на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x,x_0\in\langle a,b\rangle\ \ f(x)\geqslant f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$$

▶ $\Rightarrow$:
$x > x_0$, $y \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{y\to x_0} \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$x_0 - x > 0$

$$f'(x_0)(x-x_0) \leqslant f(x_0) - f(x)$$

Аналогично $x < x_0$, $y \in (x, x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$\Leftarrow$:
$u < v < w$

$$\forall x\ f(x) \geqslant f(v) + (x-v)f'(v)$$

$$f(u) \geqslant f(v) + (u-v)f'(v)$$

$$f(w) \geqslant f(v) + (w-v)f'(v)$$

Сложим с правильными коэффициентами:

$$(w-v)f(u) \geqslant (w-v)f(v) + (w-v)(u-v)f'(v)$$

$$(v-u)f(w) \geqslant (v-u)f(v) + (w-v)(v-u)f'(v)$$

$$(w-v)f(u) + (v-u)f(w) \geqslant (w-u)f(v)$$

◀

87. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных

Теорема 87.1. Критерий выпуклости. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (a,b).

$$f \text{ (строго) выпукла} \Leftrightarrow f' \text{ (строго) возрастает}$$

▶ $\Rightarrow$: $x_1 < x_2$

$$f(x) \geqslant f(x_1) + (x-x_1)f'(x_1)$$

$$f(x) \geqslant f(x_2) + (x-x_2)f'(x_2)$$

Подставим

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + (x_2-x_1)f'(x_1)$$

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + (x_1-x_2)f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)$$

La: Нужно проверить, что

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$$

По теороеме Лагранжа, есть точки $\xi < \eta$

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'(\xi) \leqslant f'(\eta) = \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$$

◀

Теорема 87.2. Критерий выпуклости через вторую производную. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, f дважды дифференцируема на (a,b).

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' > 0$$

▶ Смотрим на теоремы о монотонности. ◀

88. Неравенство Йенсена

Теорема 88.1. Неравенство Йенсена. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла.

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset \langle a,b\rangle \; \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]\colon \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

▶ Метод математической индукции. Теорема при $n=2$ совпадает с определением выпуклости.

$$f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\eqqcolon y} + \lambda x_{n+1} x_{n+1}\right) = f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

◀

89. Неопределённый интеграл

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной f, если

$$F' = f$$

Не для всех f существует F. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

▶ Пусть есть $F' = f$. Тогда по теореме Дарбу

$$\forall a, b \in (-1, 1), c \in (F'(a), F'(b))\, \exists c \in (a, b) \colon F'(c) = C$$

◀

Теорема 89.1. О существовании первообразной. Для любой непрерывной $f \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ есть первообразная F. Докажем в следующем семестре.

Теорема 89.2. $f, F \colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F — первоообразная. Тогда

1. $F + c$ $(c \in \mathbb{R})$ — также первообразная.
2. $\varPhi$ — первообразная $\iff$ $\varPhi = F + c$.

▶

$$(F + c)' = F' + 0 = f$$

Рассмотрим $G = \varPhi - F$. Она дифференцируема и

$$G' = (\varPhi - F)' = \varPhi' - F' = f - f = 0$$

Но тогда

$$G = const$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Неопределённым интегралом функции f называется множество её первообразных.

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

Пока стоит воспринимать все символы интеграла как некоторые «скобки».

Если есть некоторая первообразная F, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Тот же смысл имеют записи

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

$$\int f\mathrm{d}x = F + c$$

Для того, чтобы найти неопределённый интеграл, достаточно найти какую-то первообразную, а для проверки первообразной достаточно взять от неё производную.

90. Таблица интегралов

Таблица интегралов:

$$\int 0\mathrm{d}x = c$$
$$\int x^p\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$$
$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arccos x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть A, B — множества. Тогда

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
$$A - B = \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$$

Теорема 90.1. Об арифметических операциях с интегралами.

$$\int (f \pm g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x$$

$\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f\mathrm{d}x = \alpha \int f\mathrm{d}x$$

REM: Именно из-за того, что константы в записи нет, мы исключаем ноль.
▶ F, G — первообразные соотвественно f, g.

$$\int f\mathrm{d}x = \{F + c_1\}$$

$$\int g\mathrm{d}x = \{G + c_2\}$$

$$\int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x = \{F + c_1\} \pm \{G + c_2\} = \{F + G + c_3\} =$$

$(F + G)' = f + g$

$$= \int (f + g)\mathrm{d}x$$

$$\alpha \int f\mathrm{d}x = \alpha \{F + c_1\} = \{\alpha F + c_2\} =$$

$(\alpha F)' = \alpha f$

$$= \int \alpha f\mathrm{d}x$$

◀

91. Замена переменной

Теорема 91.1. Замена переменной в неопределённом интеграле. $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\varphi\colon \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ непрерывно дифференцируема.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c$$

▶

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

◀

Следствие 91.1.1.

$$\int f(\alpha x + \beta)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$$

$f = x^2, \varphi = \ln x$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$a > 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

$f = \frac{1}{x^2+1}$

92. Интегрирование по частям

Теорема 92.1. Интегрирование по частям. f, g — дифференцируемые, $f'g$ — интегрируемая.

$$\int fg'\mathrm{d}x = fg - \int f'g\mathrm{d}x$$

▶ $\varPhi$ — первообразная $f'g$.

$$(fg - \varPhi + c)' = fg' + f'g - f'g = fg'$$

◀

Пример:

$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = x^2e^x - \int 2xe^x\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\mathrm{d}x =$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\mathrm{d}x\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Есть термин «берущеися» интегралы. Это интегралы, выражаемые через элементарные функции. Их, вообще говоря, мало. К ним относятся рациональные функции (отношение многочленов), произведение тригинометрических функций, $x\sqrt{ax^2+bx+c}$. Не берутся, например,

$$\int e^{x^2}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$
