

**Лекции по математическому анализу**  
**Лектор: Храбров Александр Игоревич**  
Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

---

## Содержание

1	Множества	3
2	Бинарные отношения	5
3	Вещественные числа	7
4	Верхняя и нижняя граница	9
5	Теорема о вложенных отрезках	10
6	Метрические пространства	10
7	Неравенства Коши-Буняковского и Минковского	11
8	Открытые множества	12
9	Внутренние точки и внутренность множества	12
10	Замкнутые множества	13
11	Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве	15
12	Предельные точки	16
13	Супремум и инфимум замкнутых множеств	17
14	Предел последовательности	17
15	Предельный переход в неравенстве	18
16	Теорема о двух милиционерах	19
17	Предел монотонной последовательности	19
18	Конечное векторное пространство	20
19	Арифметические свойства предела	21
20	Покоординатная сходимость	23
21	Бесконечно малые и большие	23
22	Связь между бесконечно большими и малыми	24
23	Компактность	25

24	Свойства компактного множества	25
25	Теорема о пересечении семейства компактов	26
26	Теорема о вложенных параллелепипедах	26
27	Теорема Гейне-Бореля	27
28	Подпоследовательность	27
29	Секвенциальная компактность	27
30	Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия	28
31	Диаметр множества	28
32	Фундаментальные последовательности	29
33	Полнота компактных метрических пространств	30
34	Верхний и нижний предел	30
35	Характеристика верхних и нижних пределов с помощью $N$ и $\epsilon$	31
36	Неравенство Бернулли	32
37	Число $e$	32
38	Сравнение скорости роста возрастания последовательностей	33
39	Теорема Штольца	33
40	Теорема Штольца	34
41	Пределы функций	35
42	Равносильность определения по Коши и по Гейне	35
43	Свойства функций, имеющих предел	36
44	Арифметические действия с пределами	36
45	Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах	37
46	Левый и правый пределы. Предел монотонной функции	37
47	Критерий Коши для отображений и для функций	37

# 1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ( $x \in A$ ) или нет ( $x \notin A$ ).

**Def:** Множество  $A$  — подмножество  $B$ , если все элементы  $A$  содержатся и в  $B$ .

$$A \subset B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \ x \in B$$

**Def:** Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge B \subset A$$

**Def:** Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \ x \notin \emptyset$$

**Def:**  $2^A$  — множество всех подмножеств  $A$ .

$$2^A \stackrel{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$  — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$  — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}$ ,  $\Phi(x)$  — условие.

Например,  $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ имеет ровно 2 натуральных делителя}\}$ .

Бывают некорректно заданные „множества“. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим  $\Phi(n)$  — истина, если  $n$  нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда  $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$  — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как „Наименьший элемент множества...“

**Def:** Пересечение двух множеств — множество, состоящее из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

**Def:** Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

**Def:** Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

**Def:** Симметрическая разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \stackrel{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I: x \in A_i\}; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность

$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

**Теорема 1.1. Правила де Моргана.**  $A, B_\alpha, \alpha \in I$ . Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha); A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$



$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \forall \alpha \in I x \notin B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I x \in B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

**Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности.**  $A, B_\alpha, \alpha \in I$ . Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ \forall \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I: \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

**Def:** Упорядоченная пара  $\langle a, b \rangle$  или  $(a, b)$  — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

**Def:** Упорядоченная  $n$ -ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i = b_i$$

**Def:** Декартово произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i \in A_i$$

## 2. Бинарные отношения

**Def:** Отношение на множествах  $A$  и  $B$  — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a R b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

**Def:** Область определения отношения

$$\beta_R = \text{dom}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in R\}$$

**Def:** Область значения отношения

$$\rho_R = \text{ran}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in R\}$$

Def: Обратное отношение

$$R^{-1}: \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b R^{-1} a \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a R b$$

Def: Композиция отношений

$$R_1: A \rightarrow B; R_2: B \rightarrow C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a R_1 b \wedge b R_2 c\}$$

Про значок  $\circ$  — его использовать не будем

Пример композиции:  $<: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$$< \circ < = \{(a, b) \mid b - a \geq 2\}$$

Def: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f: A \rightarrow B$$

$$a f b_1 \wedge a f b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a f b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A — \text{область определения})$$

Def: Свойства отображений:

1. Рефлексивность  $a R a$
2. Симметричность  $a R b \Leftrightarrow b R a$
3. Транзитивность  $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$
4. Иррефлексивность  $\neg a R a$
5. Антисимметричность  $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$ : 1, 2, 3, 5
- $\equiv_5$ : 1, 2, 3
- $\leq$ : 1, 3, 5
- $<$ : 3, 4, 5
- $\subset$ : 1, 3, 5

### 3. Вещественные числа

**Def:** Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции  $+$  и  $\times$ , причём:

1. Коммутативность  $\forall a, b \ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность  $\forall a, b, c \ a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент  $\exists o: \forall a \ a + o = a; \exists e: \forall a \ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент  $\forall a \ \exists -a: a + (-a) = o; \forall a \neq o \ \exists a^{-1}: a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность  $\forall a, b, c \ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения  $\leq$  (и аналогично  $<$ , также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5.  $\forall a, b, c \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6.  $\forall a, b \ a > 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Также выполнена аксиома полноты:  $A, B \subset \mathbb{R}, A \cup B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$ . Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

REM: На  $\mathbb{Q}$  аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

**Теорема 3.1. Принцип Архимеда.** Пусть  $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$ . Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N}: x < ny$$



$$A \Leftrightarrow \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}: u < ny\}; y \in A$$

Пусть  $A \neq \mathbb{R}$ . Тогда  $B \Leftrightarrow \mathbb{R} - A \neq \emptyset$ . Рассмотрим  $a \in A; b \in B$ .

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда  $c \in B$ . Пусть  $c - y \notin B$ , тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geq c \Rightarrow y \leq 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом  $A = \mathbb{R}$

Следствие 3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$$

► Рассмотрим  $x = 1, y = \varepsilon$

Следствие 3.1.2.  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q}: x < r < y$$

►

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что  $\exists m \in \mathbb{Z}: m \leq nx < m + 1$ . Вообще говоря,  $m \stackrel{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$ .

$$M \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq nx\}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: \tilde{n} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{n} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмотрим  $y = 1; x = nx; y > 0$ . По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N}: k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \ m < k \Rightarrow \exists m = \max M: m \leq nx < m + 1$$

$$m \leq nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x < \frac{m + 1}{n}$$

Осталось проверить  $\frac{m+1}{n} < y$ .

$$\frac{m}{n} \leq x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m + 1}{n} < y$$

Следствие 3.1.3.  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ .

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x < z < y$$

►

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2}: z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: x < z < y \end{aligned}$$



## 4. Верхняя и нижняя граница

**Def:**  $A \subset \mathbb{R}$ .

$x \in \mathbb{R}$  — верхняя граница  $A$ , если

$$\forall a \in A : a \leq x$$

$x \in \mathbb{R}$  — нижняя граница  $A$ , если

$$\forall a \in A : a \geq x$$

**Def:**  $A$  ограничено сверху, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — верхняя граница } A$$

$A$  ограничено снизу, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — нижняя граница } A$$

$A$  ограничено, если  $A$  ограничено сверху и снизу.

**REM:** Границ, если они есть, много.

**Def:**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  ограничено сверху.  $x$  — супремум  $A$ , если  $x$  — наименьшая из верхних границ.

**Def:**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  ограничено снизу.  $x$  — инфимум  $A$ , если  $x$  — наибольшая из нижних границ.

Пример:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

**Утверждение.**  $\mathbb{N}$  не ограничено сверху.

►  $x$  — верхняя граница  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ .

**Теорема 4.1. Существование точной границы.**  $A \neq \emptyset$ .

1. Если  $A$  ограничено сверху, то  $\exists x = \sup A$ .

2. Если  $A$  ограничено снизу, то  $\exists x = \inf A$ .

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.



1.  $B$  — множество всех верхних границ  $A$ .

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq c \wedge \forall b \in B : c \leq b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим  $B = \{-a : a \in A\}$ . Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

**REM:** Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$

**Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.**

1.  $A$  ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

2.  $A$  ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \geq c \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < c + \varepsilon)$$



$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0 : b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

## 5. Теорема о вложенных отрезках

**Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках.** Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту.  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall i \in \mathbb{N} (a_i \leq a_{i+1} \wedge b_i \geq b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$ . Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

►  $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$ . Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

REM: Существенна замкнутость отрезков. ◀

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

REM:  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим приближения  $\sqrt{2}$ .

## 6. Метрические пространства

**Def:** Пусть есть множество  $X$  и отображение  $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ . Тогда  $\rho$  называется метрикой, если:

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Также пара  $(X, \rho)$  называется метрическим пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

2.  $\rho(x, y) = |x - y|$

3. Евклидовская метрика.  $\rho$  — длина отрезка на плоскости между точками

4. Манхеттанская метрика.  $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

5. Расстояния на сфере.

6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка  $O$ . Тогда для точек на одном луче из  $O$  расстояние  $\rho(A, B) = |AB|$ , иначе  $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$

## 7. Пространство $\mathbb{R}^n$ , метрика

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

**Def:** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда  $(Y, \rho|_{Y \times Y})$  — подпространство  $X$ .  $Y \subset X$ .

**Def:**  $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$  — открытый шар.

**Def:**  $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$  — замкнутый шар.

Свойства:

1.  $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2.  $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

► Рассмотрим  $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$ .

## 7. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского

**Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского.**  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

►

$$f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = \underbrace{\left( a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right)}_{\Leftarrow A} t^2 - 2 \underbrace{\left( a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)}_{\Leftarrow C} t + \underbrace{\left( b_1^2 + \dots + b_n^2 \right)}_{\Leftarrow B}$$

$f$  имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leq 0 \Rightarrow 4(C^2 - AB) \leq 0 \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

►

$$a_i = \alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень } t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

**Теорема 7.2. Неравенство Минковского.**

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$$

► Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i^2}_{\Leftarrow A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k b_i^2}_{\Leftarrow B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{AB} \Leftarrow$$

$\Leftarrow$  Неравенство Коши-Буняковского

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

## 8. Открытые множества

**Def:**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $G \subset X$  — открытое множество, если

$$\forall x \in G \exists r > 0: B_r(x) \subset G$$

**Теорема 8.1. О свойствах открытых множеств.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

1.  $\emptyset$  и  $X$  — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4.  $B_r(a)$  открыт.



1. Очевидно.

- 2.

$$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3.  $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n \ x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \ \exists r_k > 0: B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k: G_r \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$

- 4.

$$\forall x \in B_r(a) \exists r_x = \frac{1}{2} (r - \rho(a, x))$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$



REM:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

## 9. Внутренние точки и внутренность множества

**Def:**  $x \in A$  — внутренняя точка  $A$ , если  $\exists r > 0: B_r(x) \subset A$

REM:  $x$  — внутренняя точка  $A$  эквивалентно тому, что в  $A$  содержится некое открытое множество, содержащее  $x$ .

**Def:** Внутренность множества  $A$ :

$$A^0 = \text{int } A \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1.  $\text{int } A \subset A$

2.  $\text{int } A$  — множество всех внутренних точек.
3.  $\text{int } A$  открыто.
4.  $A$  открыто  $\Leftrightarrow A = \text{int } A$
5.  $A \subset B \Rightarrow \text{int } A \subset \text{int } B$
6.  $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7.  $\text{int int } A = \text{int } A$

## 10. Замкнутые множества

**Def:** Замкнутое множество — множество, дополнение которого открыто.

**Теорема 10.1. О свойствах замкнутых множеств.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

1.  $\emptyset$  и  $X$  — замкнуты.
2. Перечисление замкнутых — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых замкнуто.
4. Замкнутый шар замкнут.



1. Очевидно
2. По формулам де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_{\alpha})$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что  $X \setminus \bar{B}_r(a)$  открыт. Рассмотрим  $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$ . Тогда по определению

$$\rho(a, x) > r$$

Покажем, что

$$B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$

Пусть  $\exists y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$ . Тогда

$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leq r$$

$$y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}; 1 \right] = (0; 1]$$

**Def:**  $A \subset X, (X, \rho)$ . Тогда замыкание множества  $A$  — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

$$\text{cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

**Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.**

$$X \setminus \text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

$$X \setminus \text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\begin{aligned} X \setminus \text{cl } A &= X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) \\ X \setminus F &\text{ открыто} \\ X \setminus F &\subset X \setminus A \end{aligned}$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \text{int}(X \setminus A)$$

Аналогично

Следствие 10.2.1.

$$\text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1.  $A \subset \text{cl } A$
2.  $\text{cl } A$  замкнуто.
3.  $A$  замкнуто  $\Leftrightarrow A = \text{cl } A$
4.  $A \subset B \Rightarrow \text{cl } A \subset \text{cl } B$
5.  $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$
6.  $\text{cl cl } A = \text{cl } A$

## 11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

**Теорема 11.1.** Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве.  $(X; \rho)$  — пространство,  $(Y; \rho)$  — подпространство.

1.  $A$  открыто в  $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$  — открытое в  $X$ :  $A = G \cap Y$
2.  $A$  замкнуто в  $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$  — замкнутое в  $X$ :  $A = F \cap Y$



1.  $\Rightarrow$ :

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A$$

$$G \Leftarrow \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A$$

$\Leftarrow$ :

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к дополнениям

**Теорема 11.2.** О замыканиях.  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$

$$x \in \text{cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

►  $\Rightarrow$ : Пусть  $\exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$ . Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замкнуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\text{cl } A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \text{cl } A$$

$\Leftarrow$ : Пусть  $x \notin \text{cl } A \Rightarrow \exists F \supset A: x \notin F \wedge F$  закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$$

**Следствие 11.2.1.**  $U$  открытое  $\wedge U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \text{cl } A = \emptyset$

► Пусть  $x \in U \cap \text{cl } A$ .

$$x \in \text{cl } A \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0: B_{r_0} \subset U$$

Но  $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

## 12. Пределные точки

**Def:** Проколота окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

**Def:** Точка  $x \in X$  предельная у множества  $A$ , если

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

**Def:**  $A'$  — множество предельных точек.

Свойства:

1.  $\text{cl } A = A \cup A'$
2.  $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

►  $\supset$ :

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$

$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

$\subset$ : Пусть  $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$ .

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0: \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leq r_0 \dot{B}_r(x) \cap B = \emptyset$$

Тогда

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

**Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.**

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 |B_r(x) \cap A| = \infty$$

►

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A: y_1 \neq x \wedge y_1 \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x, y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A: y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y_2 \in B_{\rho(x, y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}: y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

Следствие 12.1.1.  $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$



## 13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

**Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.**

$A$  ограничено сверху и замкнуто  $\Rightarrow \sup A \in A$

$A$  ограничено снизу и замкнуто  $\Rightarrow \inf A \in A$

►  $a = \sup A$ . Тогда

$$\forall x \in A \ x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: x > a - \varepsilon$$

Пусть  $a \notin A$ . Рассмотрим  $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$ .

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$



## 14. Предел последовательности

**Def:** Пусть есть пространство  $(X, \rho)$  и последовательность  $(x_i)$ . Тогда

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x$
- $\mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на  $(0; +\infty)$  нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

**Теорема 14.1. Свойства предела.**

1.  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$  каждая окрестность  $x^*$  содержит всю последовательность с некоторого элемента
2.  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3.  $\exists x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow (x_n)$  ограничена
4.  $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$



1.  $\Rightarrow$ : Пусть  $x^* \in U$  — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0: B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U$$

$$\Leftarrow: U \ni B_\varepsilon(x^*).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

2. Пусть  $\varepsilon \Leftarrow \frac{\rho(x^*; x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1 \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2 \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall n \geq \max\{N_1; N_2\} \left\{ \begin{array}{l} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leq \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

3.  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \rho(x^*; x_n) < 1$ . Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n < N} \{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n \ x_n \in B_R(x^*)$$

4.  $x \in A'$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} x_1 &\in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_2 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2}; \rho(x; x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_3 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3}; \rho(x; x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ &\vdots \\ x_n &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n}; \rho(x; x_{n-1})\}}(x) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall n \geq N \ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

REM: В пункте 4 можно выбрать различные  $x_n$ .

REM: Если  $x_n$  — различные и  $x^*$  — их предел, то  $x^* \in \{x_n\}'$

REM:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \text{cl } A$$

Далее будем работать с  $(\mathbb{R}; |x - y|)$ .

## 15. Предельный переход в неравенстве

**Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве.** Пусть  $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leq y_n$  (или  $x_n < y_n$ ). Тогда  $x \leq y$ .

► Пусть  $y < x; \varepsilon \Leftarrow \frac{x-y}{2}$ . Тогда

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

РЕМ: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

РЕМ: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие 15.1.1.  $x_n \leq b \Rightarrow x \leq b$

Следствие 15.1.2.  $x_n \geq a \Rightarrow x \geq a$

Следствие 15.1.3.  $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

## 16. Теорема о двух милиционерах

**Теорема 16.1. О двух милиционерах.** Пусть  $x_n \leq y_n \leq z_n$  и  $\lim x_n = \lim z_n = l$ . Тогда  $\lim y_n = l$ .

► Выберем  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \forall n \geq N l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon$$

Тогда  $\lim y_n = l$

Следствие 16.1.1.  $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leq z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие 16.1.2. Если  $\lim x_n = 0$ , а  $y_n$  ограничена, то  $\lim x_n y_n = 0$ .

## 17. Предел монотонной последовательности

**Def:**  $(x_n)$  нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

$(x_n)$  строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

$(x_n)$  нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

$(x_n)$  строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

**Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса.** Монотонная последовательность ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

►  $\Leftarrow$ : Очевидно.

$\Rightarrow$ : Пусть  $(x_n)$  возрастает. Она ограничена, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k: x_k > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq a$$

Тогда

$$\forall n \geq k |x_n - a| < \varepsilon$$

## 18. Конечное векторное пространство

**Def:** Вектор — кортеж  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Операция сложения

$$+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$$

### 1. Сложение

(a) Коммутативно

(b) Ассоциативно

(c) Существует ноль  $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_d$

(d) Существует обратный элемент

2.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

3.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

4.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

5.  $1x = x$

**Def:** Общее определение векторного пространства —

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\times : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

Обладает свойствами 1-4 и  $1X = X$

**Def:** Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Свойства:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

**Def:** Общее определение скалярного произведения:  $X$  — векторное пространство. Задана операция  $\langle x, y \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  обладающая указанными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

**Def:** (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1.  $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  (нер-во Коши–Вуняковского)
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (нер-во треугольника)
5.  $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$  (нер-во Минковского)
6.  $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

►  $\|x - y\| = \|y - x\|$ . Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|$$

А это неравенство треугольника. ◀

7.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  — метрика. Это ровно евклидово пространство на  $\mathbb{R}^d$ .

**Def:** Общее определение нормы:  $\|x\|: X \Rightarrow \mathbb{R}$ , обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скалярного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1.  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|$
2.  $\|x\|_\infty = \max_{k=1..d} |x_k|$



$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leq \max_{k=1..d} (|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leq \|x\| + \|y\|$$



- 3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^d |x_k|^p}$$

## 19. Арифметические свойства предела

Пусть есть  $(\mathbb{R}^d, \rho)$  со стандартной метрикой и нормой.

**Утверждение.**  $x_n \in \mathbb{R}^d$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$



$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$



REM:  $A \subset \mathbb{R}^d$  ограничено  $\Leftrightarrow \exists M: \forall x \in A \|x\| \leq M$

**Теорема 19.1. Арифметические свойства предела.**  $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, \lim x_n = x_0, \lim y_n = y_0, \lim \lambda = \lambda_0$ .

1.  $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2.  $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3.  $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4.  $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

5.  $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3: \forall n > N_3 |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = \\ &= |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \leq M \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Но тогда

$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4.  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}); y_n = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)})$  Это докажем позже

5.

$$0 \leq \|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

**Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных.**  $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1.  $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2.  $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3.  $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4.  $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если  $y_n, y_0 \neq 0$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

► Докажем, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$ .

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n| |y_0|} \Leftrightarrow A$$

$$\exists N_1: \forall n > N_1 |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geq |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|}$$

## 20. Покоординатная сходимость

**Def:**  $\{x_n\}$  — последовательность в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда  $\{x_n\}$  сходится в  $x_0$  покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}: \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

**Теорема 20.1. О сходимости покоординатно.**  $\{x_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.



$$|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})^2} \leq \sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})$$



Следствие 20.1.1.  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ . Тогда  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$



$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \rightarrow y_n^{(i)} \\ y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \rightarrow y_0^{(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow \sum_{i=1}^d x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$$



## 21. Бесконечно малые и большие

**Def:**

$$\lim x_n = +\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ |x_n| > E$$

REM:

$$\left[ \begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array} \Rightarrow \lim x_n = \infty \right.$$

Также заметим, что обратное неверно ( $x_n = (-1)^n n$ ).

REM:  $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$  неограниченна

REM: Единственность предела справедлива и расширенная на  $\pm\infty$ .

REM: Теорема о двух милиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM:  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$1. \pm c + \pm\infty = \pm\infty$$

$$2. \pm c - \pm\infty = \mp\infty$$

$$3. c > 0: \pm\infty \times c = \pm\infty$$

$$4. c < 0: \pm\infty \times c = \mp\infty$$

$$5. c > 0: \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$$

$$6. c < 0: \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$$

$$7. \frac{c}{\pm\infty} = 0$$

$$8. (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$9. (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$10. (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$11. (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$12. \pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$$

$$13. \pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$$

**Def:** Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечен.

**Def:** Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

## 22. Связь между бесконечно большими и малыми

**Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых.** Пусть  $x_n \neq 0$ . Тогда

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists N: \forall n > N |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



**Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми.** Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}$  — бесконечно малые,  $\{z_n\}$  ограничена. Тогда

$$1. x_n \pm y_n — бесконечно малая$$

$$2. x_n z_n — бесконечно малая$$

**Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.**

$$1. x_n \rightarrow +\infty \wedge y_n \text{ ограничена снизу} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$$

$$2. x_n \rightarrow -\infty \wedge y_n \text{ ограничена сверху} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$$

$$3. x_n \rightarrow \infty \wedge y_n \text{ ограничена} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow \infty$$

$$4. x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$$

$$5. x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \leq a < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow -\infty$$

$$6. x_n \rightarrow \infty \wedge |y_n| \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$$

$$7. x_n \rightarrow a \neq 0 \wedge y_n \rightarrow 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$$

$$8. x_n \text{ ограничена} \wedge y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$



9.  $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$  ограничена  $\wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \geq a$$

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \leq a$$

## 23. Компактность

**Def:** Множество  $A$  имеет покрытие множествами  $B_\alpha$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ .

**Def:** Множество  $A$  имеет открытое покрытие открытыми множествами  $B_\alpha$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ .

**Def:** Множество  $A$  компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\forall B_\alpha: K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n: K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$$

**Теорема 23.1. Компактность и подпространства.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset Y \subset X$ . Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

►  $\Rightarrow$ : Пусть  $B_\alpha$  — открытое в  $Y$ , что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в  $Y$  покрытием соответствующими множествами в  $X$ , выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в  $Y$ .

$\Leftarrow$ : Пусть  $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ . Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left( \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве  $Y$ , в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из  $X$ . ◀

REM: Например,  $(0, 1)$  не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left( \frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

## 24. Свойства компактного множества

**Теорема 24.1. Свойства компактного множества.** Если  $K$  компактно, то  $K$  замкнуто и ограничено.

►

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограничено}$$

Возьмём произвольный  $a \notin K$ . Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но  $(r \Leftarrow \min_{i=1}^k \{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\})$

$$\forall i = 1..k \ B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но  $K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$ . Т. о.  $B_r(a) \cap K = \emptyset$ . ◀

**Теорема 24.2. Признак компактного множества.** Замкнутое подмножество компактного компактно.

► Добавим к покрытию подмножества  $X \setminus K_1$ . ◀

## 25. Теорема о пересечении семейства компактов

**Теорема 25.1. Пересечение компактных.** Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

►  $K_0$  — любое из них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^k (X \setminus K_{x_i}) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^k K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

Следствие 25.1.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто. ◀

## 26. Теорема о вложенных параллелепипедах

**Def:** Параллелепипедом на  $\mathbb{R}^d$  и  $a, b \in \mathbb{R}^d$  назовём

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i \leq x_i \leq b_i\} \quad (\text{закрытый})$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i < x_i < b_i\} \quad (\text{открытый})$$

**Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах.**  $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$  имеют непустое пересечение.

► Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

## 27. Теорема Гейне-Бореля

**Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля.** Замкнутый куб компактен



$$I = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ 0 \leq x_i \leq a\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобьём куб по какому-то измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покрывает ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрывает куб. ◀

## 28. Подпоследовательность

Def: Подпоследовательность:

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

**Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.**

Подпоследовательность имеет тот же предел.

Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

## 29. Секвенциальная компактность

**Теорема 29.1. Компактность в  $\mathbb{R}^d$ .** Следующее в  $\mathbb{R}^d$  равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограничено
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (секвенциально компактно)

►  $2 \Rightarrow 1$ : ограничено, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$ : Возьмём последовательность  $\{x_n\} \subset E$  элементов множества  $F$ . Если множество элементов  $E$  конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X \exists r_x > 0: \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} \dot{B}_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^k \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k \{y_i\}$$

Получили, что  $E$  конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$ : Пусть  $K$  не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в  $K$ . Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу  $K$ .

Пусть  $K$  не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1: \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a, x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2: \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

$\vdots$

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса  $R$ . Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho(b, x_{n_k}) > \rho(a, x_{n_k}) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \rightarrow \infty$$

Значит  $K$  ограничено. ◀

РЕМ:  $1 \Rightarrow 3$ ;  $3 \Rightarrow 2$ ;  $1 \Rightarrow 2$  справедливы для всех пространств.  $2 \Rightarrow 1$  ломается, например, на  $\mathbb{R}$  с дискретной метрикой.

## 30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

Следствие 30.0.1. В  $\mathbb{R}^d$  компактность  $K$  равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

► В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие 30.0.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

► Множество значений ограничено, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие 30.0.3. В любой последовательности в  $\mathbb{R}^d$  есть сходящаяся в  $\bar{R}$  подпоследовательность.

► Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

## 31. Диаметр множества

Def: Диаметр множества:

$$\text{diam } A = \sup \rho(x, y)$$

**Теорема 31.1. Свойства диаметра.**

1.  $\text{diam } E = \text{diam cl } E$

2.  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$  (последовательность вложенных компактов);  $\text{diam } K_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigcap K_i$  — одноточечное



1.

$$E \subset \text{cl } E \Rightarrow \text{diam } E \leq \text{diam cl } E$$

$$d = \text{diam cl } E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0, y_0: \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists x_1 \in E: \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists y_1 \in E: \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geq \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$

Устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\text{diam } E \geq \text{diam cl } E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого  $n$  хотя бы  $\rho(a, b)$ . Противоречие.



## 32. Фундаментальные последовательности

**Def:** Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM:  $E \Leftarrow \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \text{diam } E \rightarrow 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.



$$\forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > K \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Т.о.

$$\exists n_k > M = \max\{N, K\}: \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$



**Def:** Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

### 33. Полнота компактных метрических пространств

**Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.**

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В  $\mathbb{R}^d$  фундаментальная последовательность всегда сходится.

►  $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

$x_n$  — фундаментальная последовательность в  $\mathbb{R}^d$ .  $E_n \Leftarrow \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  — ограничено.  $\text{cl } E_n$  — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\text{cl } E_1 \supset \text{cl } E_2 \supset \text{cl } E_3 \supset \dots$$

$$\text{diam cl } E_n = \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.

$$\exists! a: a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl } E_n$$

$$a \in \text{cl } E_n \Rightarrow \forall i > n \ 0 \leq \rho(a, x_i) \leq \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.  $x_n \rightarrow a$ . ◀

REM:  $\mathbb{R}^d$  полно.  $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$  не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

**Теорема 33.2. О полноте компактного пространства.** Компактное метрическое пространство полно.

► В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

### 34. Верхний и нижний предел

Def: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k$$

REM:  $y_n \Leftarrow \inf_{k > n} x_n, z_n \Leftarrow \sup_{k > n} x_n$ .

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

Def:  $a$  — частичный предел последовательности, если  $a$  предел подпоследовательности.

Лемма 34.1. Если  $x_n$  монотонно возрастает и неограничена, то  $\lim x_n = +\infty$

**Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов.** У любой последовательности есть верхний и нижний предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , при этом

$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

►  $y_n \Leftrightarrow \inf_{k>n} x_n$ ,  $z_n \Leftrightarrow \sup_{k>n} x_n$ . Если  $x_n$  ограничено, то и  $y_n$  ограничено. Если  $x_n$  не ограничено снизу, то и  $y_n$  не ограничено снизу. Т.о.  $\lim y_n = \underline{\lim} x_n$ . Аналогично существует верхний предел. ◀

**Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.**

1.  $\limsup$  — наибольший частичный предел.
2.  $\liminf$  — наименьший частичный предел.
3.  $\lim$  существует  $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$



1.  $a = \liminf x_n$ . Покажем, что  $a$  — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geq a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к  $a$ .

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к  $b$ , уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два миллионера



## 35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью $\mathbb{N}$ и $\varepsilon$

**Теорема 35.1. .**

- 1.

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

- 2.

$$a = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$



1. Запишем в терминах  $y_n$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0 \exists N : \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

**Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.**

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \liminf a_n \leq \liminf b_n \\ \limsup a_n \leq \limsup b_n \end{cases}$$

► Просто сводим к пределам инфимумов.

## 36. Неравенство Бернулли

**Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.**

$$\forall x > -1 \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq 1+nx$$

► Индукция: база очевидна. Пусть  $(1+x)^k \geq 1+kx$ . Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>0} (1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

Следствие 36.1.1. Если  $|t| > 1$ , то  $\lim t^n = +\infty$ . Если  $|t| < 1$ , то  $\lim t^n = 0$ .

## 37. Число e

Определим число e:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что  $x_n \nearrow; y_n \searrow$ .

►

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n-1}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n-1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2+2n-1}\right)^n \\ y_n < y_{n-1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{n}{n^2-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

Собственно, тогда  $\lim x_n$  существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e$$

Свойства:

1.  $\lim y_n = e$
2.  $x_n < e < y_n$



## 38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

**Теорема 38.1.** .  $x_n > 0$ ,  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Тогда  $x_n \rightarrow 0$ .

► С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1).

Следствие 38.1.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$



$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} < 1$$

Следствие 38.1.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Следствие 38.1.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$



$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

## 39. Теорема Штольца

**Теорема 39.1. Теорема Штольца.**  $0 < y_n < y_{n-1}$ ,  $\lim x_n = \lim y_n = 0$ ,  $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Тогда  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ .



1. Пусть  $a = 0$ .

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \left| \sum \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем  $N$ , такое что  $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$ , тогда при  $n$  и  $m > N$

$$< \sum_{k=m+1}^n \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

устремим  $n$  к бесконечности.

$$|x_m| < \varepsilon(y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{ при } m > N$$

2.  $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - ay_n$$



## 40. Теорема Штольца

**Теорема 40.1. Теорема Штольца.**  $0 < y_n < y_{n+1}$ ,  $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ ,  $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$ .  
Тогда  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ .

►  $a = 0$ :

$$\varepsilon_n \Leftarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^N + \sum_{i=N+1}^n$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leq \sum_{i=N+1}^n |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^n \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^n (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leq \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

$a \in \mathbb{R}$ :  $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$ . Фактом  $x_n \rightarrow \infty$  мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \rightarrow 0$$

$a = +\infty$ : Поменяем местами  $x_n$  и  $y_n$ . Проверим, что  $x_n$  монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$ : Сменим знаки  $x_n$ .



## 41. Пределы функций

**Def:**  $(X, \rho_x)$  и  $(Y, \rho_y)$  — метрические пространства.  $E \subset X$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ .  $f: X \rightarrow Y$ . Тогда говорят, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

если  $b \in Y$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

**REM:** Для бесконечности на  $\mathbb{R}$  есть частные случаи.

**Def:** По Гейне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E: x_n \neq a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

## 42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

**Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции.** Определения равносильны.



1. Коши  $\Rightarrow$  Гейне

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

Пусть  $\lim x_n = a$ ,  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq a$

По  $\delta$  выберем  $N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$ , тогда  $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

Нашли номер  $N$  при котором  $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

2. Гейне  $\Rightarrow$  Коши

от противного.

По Коши  $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

Выберем последовательность  $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow \lim(f(x_n)) \neq b$$

Противоречие с определением по Гейне

REM: В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все  $x_n$  различны. ◀

REM: Можно рассматривать лишь такие последовательности, что  $\rho(x_n, a)$  убывает.

### 43. Свойства функций, имеющих предел

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

► Возьмём две сходящиеся последовательности  $x_n$  и  $y_n$ , после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям  $b$  и  $c$ . Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

**Утверждение.** Единственность предела  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка. Тогда предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  единственен.

► Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

**Теорема 43.1. Ограниченность.**  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Тогда

$$\exists r > 0: f|_{E \cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

**Теорема 43.2. Уход от нуля.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \vec{0}$ . Тогда

$$\exists r > 0: \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E \quad f(x) \neq \vec{0}$$

►  $\varepsilon \Leftarrow \rho(x, \vec{0})$  ◀

### 44. Арифметические действия с пределами

**Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции.**  $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка  $E$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$

$$3. \lim x \rightarrow a (f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$$

$$4. \lim x \rightarrow a \|f(x)\| = \|f_0\|$$

$$5. \lim x \rightarrow a \langle f(x), g(x) \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle$$

► Возьмём любые сходящиеся к  $a$  последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

**Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции..**  $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка  $E$ .

$$1. \lim x \rightarrow a (f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$$

$$2. \lim x \rightarrow a (f(x)g(x)) = f_0g_0$$

$$3. \lim x \rightarrow a |f(x)| = |f_0|$$

$$4. \lim x \rightarrow a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$$

► Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

## 45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

**Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве..**  $f, g: E \rightarrow Y$ ,  $a$  предельная точка  $E$ ,  $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leq g(x)$ . Тогда  $f_0 \leq g_0$ .

**Теорема 45.2. О двух милиционерах.**

## 46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

Def: Пределы слева и справа.  $f: E \cap \mathbb{R} \rightarrow Y$ .

$$\lim_{x \rightarrow a-} = \lim_{x \rightarrow a-0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (-\inf, a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} = \lim_{x \rightarrow a+0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (a, +\inf)}$$

**Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченной функции..**

## 47. Критерий Коши для отображений и для функций

**Теорема 47.1. Критерий Коши.**

$f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $Y$  — полное

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



1.  $\Rightarrow$  Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2.  $\Leftarrow$

Берем любую последовательность  $x_n \neq a \in E \rightarrow a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$\Rightarrow f(x_n)$  — фундаментальная последовательность точек из  $Y$

$$\Rightarrow \exists \lim(f(x_n)) \text{ полнота } Y$$

