

Глава I

Введение

I.1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

Def: Множество A — подмножество B , если все элементы A содержатся и в B .

$$A \subset B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \ x \in B$$

Def: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge B \subset A$$

Def: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \ x \notin \emptyset$$

Def: 2^A — множество всех подмножеств A .

$$2^A \stackrel{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- \mathbb{N} — множество натуральных чисел.
- \mathbb{Z} — множество целых чисел.
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел.
- \mathbb{R} — множества вещественных чисел.
- \mathbb{C} — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}, \Phi(x)$ — условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ имеет ровно 2 натуральных делителя}\}$.

Бывают некорректно заданные „множества“. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как „Наименьший элемент множества...“

Def: Пересечение двух множеств — множество, состоящее из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

Def: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Def: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Def: Симметрическая разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \stackrel{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение можно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I: x \in A_i\}; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность

$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема I.1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha); A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$



$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$



Теорема I.1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$



$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$



Def: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Def: Упорядоченная n -ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n a_i = b_i$$

I.2. Бинарные отношения

Def: Декартово произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n a_i \in A_i$$

Def: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a R b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

Def: Область определения отношения

$$\beta_R = \text{dom}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in R\}$$

Def: Область значения отношения

$$\rho_R = \text{ran}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in R\}$$

Def: Обратное отношение

$$R^{-1}: \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b R^{-1} a \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a R b$$

Def: Композиция отношений

$$R_1: A \rightarrow B; R_2: B \rightarrow C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a R_1 b \wedge b R_2 c\}$$

Про значок \circ — его использовать не будем

Пример композиции: $<: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$< \circ < = \{(a, b) \mid b - a \geq 2\}$$

Def: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f: A \rightarrow B$$

$$a f b_1 \wedge a f b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a f b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A — \text{область определения})$$

Def: Свойства отображений:

1. Рефлексивность $a R a$
2. Симметричность $a R b \Leftrightarrow b R a$
3. Транзитивность $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$
4. Иррефлексивность $\neg a R a$
5. Антисимметричность $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- \equiv : 1, 2, 3
- \leq : 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- \subset : 1, 3, 5

I.3. Вещественные числа

Def: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и \times , причём:

1. Коммутативность $\forall a, b \ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c \ a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o: \forall a \ a + o = a; \exists e: \forall a \ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a \ \exists -a: a + -a = o; \forall a \neq o \ \exists a^{-1}: a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c \ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения \leq (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \ a > 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}, A \cup B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

REM: На \mathbb{Q} аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема I.3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N}: x < ny$$



$$A \Leftrightarrow \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}: u < ny\}; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \Leftrightarrow \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geq c \Rightarrow y \leq 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$

Следствие I.3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$$

► Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$

Следствие I.3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q}: x < r < y$$

►

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z}: m \leq nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \stackrel{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq nx\}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N}: \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмотрим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N}: k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \ m < k \Rightarrow \exists m = \max M: m \leq nx < m + 1$$

$$m \leq nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x \leq \frac{m + 1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leq x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m + 1}{n} < y$$

Следствие I.3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x < z < y$$

►

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2}: z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: x < z < y \end{aligned}$$

I.4. Верхняя и нижняя граница

Def: $A \subset \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$ — верхняя граница A , если

$$\forall a \in A : a \leq x$$

$x \in \mathbb{R}$ — нижняя граница A , если

$$\forall a \in A : a \geq x$$

Def: A ограничено сверху, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — верхняя граница } A$$

A ограничено снизу, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — нижняя граница } A$$

A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A , если x — наименьшая из верхних границ.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A , если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. \mathbb{N} не ограничено сверху.

► x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀

Теорема I.4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.

2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.



1. B — множество всех верхних границ A .

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq c \wedge \forall b \in B : c \leq b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$, $U = \mathbb{Q}$ ◀

Теорема I.4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

2. A ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \geq c \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < c + \varepsilon)$$



$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0 \, b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\forall a \in A \, a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$



Теорема I.4.3. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall i \in \mathbb{N} (a_i \leq a_{i+1} \wedge b_i \geq b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

► $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} \, c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$



REM: Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

REM: \mathbb{R} . Рассмотрим приближения $\sqrt{2}$.

Глава II

Последовательности в метрических пространствах

II.1. Метрические пространства

Def: Пусть есть множество X и отображение $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Также пара (X, ρ) называется метрическим пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$
2. $\rho(x, y) = |x - y|$
3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. Расстояния на сфере.
6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O . Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$
7. Пространство \mathbb{R}^n , метрика

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Def: Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ — подпространство X . $Y \subset X$.

Def: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$ — открытый шар.

Def: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$ — замкнутый шар.

Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$

2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

► Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$.

Теорема II.1.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

►

$$f(t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = \underbrace{\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right)}_{\Leftrightarrow A} t^2 - 2 \underbrace{\left(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)}_{\Leftrightarrow C} t + \underbrace{\left(b_1^2 + \dots + b_n^2 \right)}_{\Leftrightarrow B}$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leq 0 \Rightarrow 4(C^2 - AB) \leq 0 \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

►

$$a_i = \alpha b_i$$

\Leftrightarrow

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень } t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

►

Теорема II.1.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$$

► Возведём в квадрат

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} &\leq \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i^2}_{\Leftrightarrow A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k b_i^2}_{\Leftrightarrow B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A + B + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{AB} \Leftarrow \\ &\Leftarrow \text{Неравенство Коши-Буняковского} \end{aligned}$$

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

Def: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G \exists r > 0: B_r(x) \subset G$$

Теорема II.1.3. О свойствах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. \emptyset и X — открыты.

2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.



1. Очевидно.

- 2.

$$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n \ x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \ \exists r_k > 0: B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k: G_r \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$

- 4.

$$\forall x \in B_r(a) \ \exists r_x = \frac{1}{2}(r - \rho(a, x))$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$



REM:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

Def: $x \in A$ — внутренняя точка A , если $\exists r > 0: B_r(x) \in A$

REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x .

Def: Внутренность множества A :

$$A^0 = \text{int } A \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\text{int } A \subset A$
2. $\text{int } A$ — множество всех внутренних точек.
3. $\text{int } A$ открыто.
4. $A \text{ открыто} \Leftrightarrow A = \text{int } A$
5. $A \subset B \Rightarrow \text{int } A \subset \text{int } B$
6. $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7. $\text{int int } A = \text{int } A$

Def: Закрытое множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема II.1.4. О свойствах замкнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. \emptyset и X — замкнуты.
2. Перечесение замкнутых — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых замкнуто.
4. Замкнутый шар замкнут.



1. Очевидно
2. По формулам де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_{\alpha})$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению

$$\rho(a, x) > r$$

Покажем, что

$$B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$

Пусть $\exists y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда

$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leq r$$

$$y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$



REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1 \right] = (0; 1]$$

Def: $A \subset X, (X, \rho)$. Тогда замыкание множества A — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

$$\text{cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

Теорема II.1.5. О связи замыкания и внутренней.

$$X \setminus \text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

$$X \setminus \text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$



$$X \setminus \text{cl } A = X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F)$$

$X \setminus F$ открыто

$$X \setminus F \subset X \setminus A$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \text{int}(X \setminus A)$$

Аналогично

Следствие II.1.5.1.

$$\text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A \subset \text{cl } A$
2. $\text{cl } A$ замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{cl } A$
4. $A \subset B \Rightarrow \text{cl } A \subset \text{cl } B$
5. $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$
6. $\text{cl cl } A = \text{cl } A$

Теорема II.1.6. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X; \rho)$ — пространство, $(Y; \rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в X : $A = G \cap Y$
2. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в X : $A = F \cap Y$



1. \Rightarrow :

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A$$

$$G \Leftarrow \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A$$

\Leftarrow :

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к дополнениям

Теорема II.1.7. О замыканиях. (X, ρ) , $A \subset X$

$$x \in \text{cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0 \ B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$



► \Rightarrow : Пусть $\exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} B_r(x) &\subset X \setminus A \\ X \setminus B_r(x) &\text{ замкнуто} \\ X \setminus B_r(x) &\supset A \\ x &\notin X \setminus B_r(x) \end{aligned}$$

Тогда

$$\text{cl } A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \text{cl } A$$

\Leftarrow : Пусть $x \notin \text{cl } A \Rightarrow \exists F \supset A: x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$$

Следствие II.1.7.1. U открытое $\wedge U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \text{cl } A = \emptyset$

► Пусть $x \in U \cap \text{cl } A$.

$$\begin{aligned} x \in \text{cl } A &\Rightarrow \forall r > 0: B_r(x) \cap A \neq \emptyset \\ x \in U &\Rightarrow \exists r_0 > 0: B_{r_0} \subset U \end{aligned}$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

Def: Проколота окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

Def: Точка $x \in X$ предельная у множества A , если

$$\forall r > 0: \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

Def: A' — множество предельных точек.

Свойства:

1. $\text{cl } A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

► \supset :

$$\begin{aligned} A \cup B \supset A &\Rightarrow (A \cup B)' \supset A' \\ A \cup B \supset B &\Rightarrow (A \cup B)' \supset B' \end{aligned}$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

\subset : Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow \forall r > 0: B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \\ x \notin B' &\Rightarrow \exists r_0 > 0: \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leq r_0: \dot{B}_r(x) = \emptyset \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall r > 0: \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

Теорема II.1.8. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 |B_r(x) \cap A| = \infty$$



$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A: y_1 \neq x \wedge y \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x, y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A: y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y \in B_{\rho(x, y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}: y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$



Следствие II.1.8.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

Теорема II.1.9. О точной границе замкнутого множества.

$$A \text{ ограничено сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограничено снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

► $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A \ x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$



II.2. Предел последовательности

Def: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i) . Тогда

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x$
- $\mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема II.2.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некоторого элемента

2. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограничена
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$



1. \Rightarrow : Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0: B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N x_n \in U$$

$$\Leftarrow: U \Leftarrow B_\varepsilon(x^*).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n \geq N x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \Leftarrow \frac{\rho(x^*; x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1 \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2 \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall n \geq \max\{N_1; N_2\} \left\{ \begin{array}{l} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{array} \right. &\Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leq \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

3. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n < N} \{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2}; \rho(x; x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3}; \rho(x; x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

⋮

$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n}; \rho(x; x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geq N \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n .

REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$

REM:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \text{cl } A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x - y|)$.

Теорема II.2.2. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leq y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leq y$.

► Пусть $y < x; \varepsilon \Leftrightarrow \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

REM: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

REM: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие II.2.2.1. $x_n \leq b \Rightarrow x \leq b$

Следствие II.2.2.2. $x_n \geq a \Rightarrow x \geq a$

Следствие II.2.2.3. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

Теорема II.2.3. О двух милиционерах. Пусть $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

► Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 : \forall n \geq N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geq N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n \geq N l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$

Следствие II.2.3.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leq z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие II.2.3.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограничена, то $\lim x_n y_n = 0$.

Def: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

Теорема II.2.4. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

► ⇐: Очевидно.

⇒: Пусть (x_n) возрастает. Она ограничена, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k: x_k > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq a$$

Тогда

$$\forall n \geq k |x_n - a| < \varepsilon$$

II.3. Конечное векторное пространство

Def: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$$

1. Сложение

(a) Коммутативно

(b) Ассоциативно

(c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_d$

(d) Существует обратный элемент

$$2. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$3. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$4. (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$5. 1x = x$$

Def: Общее определение векторного пространства —

$$+ : X + X \rightarrow X$$

$$\times : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

Def: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Def: Общее определение скалярного произведения: X — векторное пространство. Задана операция $\langle x, y \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ обладающая указанными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

Def: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковского)
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)
5. $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)
6. $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

► $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|$$

А это неравенство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространство на \mathbb{R}^d .

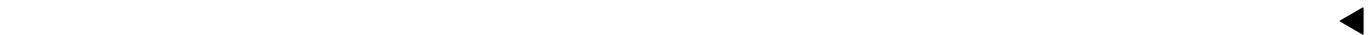
Def: Общее определение нормы: $\|x\|: X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скалярного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|$
2. $\|x\|_\infty = \max_{k=1..d} |x_k|$



$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leq \max_{k=1..d} (|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leq \|x\| + \|y\|$$



- 3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^d |x_k|^p}$$

II.4. Арифметические свойства предела

Пусть есть (\mathbb{R}^d, ρ) со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$



$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$



REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограничено $\Leftrightarrow \exists M: \forall x \in A \|x\| \leq M$

Теорема II.4.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, \lim x_n = x_0, \lim y_n = y_0, \lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim\langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$
5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3: \forall n > N_3 |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

$$1. \quad \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$2. \quad \begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = \\ &= |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \leq M \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Но тогда

$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}); y_n = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)})$ Это докажем позже

$$5. \quad 0 \leq |\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$



Теорема II.4.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

► Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \Leftrightarrow A$$

$$\exists N_1: \forall n > N_1 |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geq |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon|y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

Def: $\{x_n\}$ — последовательность в \mathbb{R}^d . Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 по координатам, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}: \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема II.4.3. О сходимости по координатам. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится по координатам.



$$|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})^2} \leq \sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})$$

Следствие II.4.3.1. $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$



$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \rightarrow y_n^{(i)} \\ y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \rightarrow y_0^{(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow \sum_{i=1}^d x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$$

II.5. Бесконечно малые и большие

Def:

$$\lim x_n = +\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array} \right] \Rightarrow \lim x_n = \infty$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единственность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух милиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$
3. $c > 0$: $\pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0$: $\pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0$: $\frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$
6. $c < 0$: $\frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$
7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$
8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$
12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$
13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

Def: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечен.

Def: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

Теорема II.5.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists N: \forall n > N |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



Теорема II.5.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограничена. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая
2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

Теорема II.5.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

1. $x_n \rightarrow +\infty \wedge y_n$ ограничена снизу $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$
2. $x_n \rightarrow -\infty \wedge y_n$ ограничена сверху $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$

3. $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$ ограничена $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$
4. $x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$
5. $x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \leq a < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow -\infty$
6. $x_n \rightarrow \infty \wedge |y_n| \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$
7. $x_n \rightarrow a \neq 0 \wedge y_n \rightarrow 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$
8. x_n ограничена $\wedge y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$
9. $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$ ограничена $\wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

REM:

$$\begin{aligned}\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 &\Rightarrow \exists a > 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \geq a \\ \lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 &\Rightarrow \exists a < 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \leq a\end{aligned}$$

II.6. Компактность

Def: Множество A имеет покрытие множествами B_α , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Def: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Def: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\forall B_\alpha: K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n: K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$$

Теорема II.6.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

► \Rightarrow : Пусть B_α — открытое в Y , что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соответствующими множествами в X , выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y .

◀: Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y , в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X . ◀

REM: Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

Теорема II.6.2. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограничено.



$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограничено}$$

Возьмём произвольный $a \notin X$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \Leftarrow \min_{i=1}^k \{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\})$

$$\forall i = 1..k \ B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема II.6.3. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

► Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

Теорема II.6.4. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

► K_0 — любое их них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_{\alpha} = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_{\alpha}) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^k (X \setminus K_{x_i}) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^k K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

Следствие II.6.4.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто. ◀

Def: Параллелепипедом на \mathbb{R}^d и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i \leq x_i \leq b_i\} \quad (\text{закрытый})$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i < x_i < b_i\} \quad (\text{открытый})$$

Теорема II.6.5. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ имеют непустое пересечение.

► Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

Теорема II.6.6. Теорема Гейне-Бориса. Замкнутый куб компактен

►

$$I = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ 0 \leq x_i \leq a\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобьём куб по какому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покрое ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрывает куб. ◀

Def: Подпоследовательность:

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема II.6.7. Предел подпоследовательности. Подпоследовательность имеет тот же предел. Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

Теорема II.6.8. Компактность в \mathbb{R}^d . Следующее в \mathbb{R}^d равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограничено
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (секвенциально компактно)

► $2 \Rightarrow 1$: ограничено, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$: Возьмём последовательность $\{x_n\} \subset E$ элементов множества F . Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X \exists r_x > 0: \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} \dot{B}_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^k \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k \{y_i\}$$

Получили, что E конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K . Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K .

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1: \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a, x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2: \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

\vdots

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R . Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho(b, x_{n_k}) > \rho(a, x_{n_k}) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \rightarrow \infty$$

Значит K ограничено. ◀

РЕМ: $1 \Rightarrow 3$; $3 \Rightarrow 2$; $1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на \mathbb{R} с дискретной метрикой.

Следствие II.6.8.1. В \mathbb{R}^d компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

► В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие II.6.8.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

► Множество значений ограничено, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие II.6.8.3. В любой последовательности в \mathbb{R}^d есть сходящаяся в \bar{R} подпоследовательность.

► Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

Def: Диаметр множества:

$$\text{diam } A = \sup \rho(x, y)$$

Теорема II.6.9. Свойства диаметра.

1. $\text{diam } E = \text{diam cl } E$
2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots; \text{diam } K_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечное

►

$$E \subset \text{cl } E \Rightarrow \text{diam } E \leq \text{diam cl } E$$

$$d = \text{diam cl } E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0, y_0: \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists x_1 \in E: \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists y_1 \in E: \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) < 3\varepsilon$$

Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\text{diam } E \geq \text{diam cl } E$$

Но тогда во втором пункте получим, что в пересечении не может быть и двух точек. ◀

Def: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM: $E \Leftrightarrow \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \text{diam } E \rightarrow 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена
2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.



$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > K \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \end{aligned}$$

Т.о.

$$\exists n_k > M = \max\{N, K\}: \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$



Теорема II.6.10. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В \mathbb{R}^d фундаментальная последовательность всегда сходится.

▶ $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > n: \begin{aligned} &\forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ &\forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{aligned}$$

x_n — фундаментальная последовательность в \mathbb{R}^d . $E_n \Leftrightarrow \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ — ограничено. $\text{cl } E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\text{cl } E_1 \supset \text{cl } E_2 \supset \text{cl } E_3 \supset \dots$$

$$\text{diam cl } E_n = \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.

$$\exists! a: a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl } E_n$$

$$a \in \text{cl } E_n \Rightarrow \forall i > n \ 0 \leq \rho(a, x_i) \leq \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о $x_n \rightarrow a$. ◀

Def: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

REM: \mathbb{R}^d полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема II.6.11. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

▶ В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

II.7. Верхний и нижний предел

Def: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k$$

REM: $y_n \Leftrightarrow \inf_{k > n} x_n$, $z_n \Leftrightarrow \sup_{k > n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

Def: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема II.7.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\overline{\mathbb{R}}$, при этом

$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

► $y_n \Leftrightarrow \inf_{k > n} x_n$, $z_n \Leftrightarrow \sup_{k > n} x_n$. Если x_n ограничено, то и y_n ограничено. Если x_n не ограничено снизу, то и y_n не ограничено снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim} x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема II.7.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. \limsup — наибольший частичный предел.
2. \liminf — наименьший частичный предел.
3. \lim существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$



1. $a = \liminf x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k > n} x_k \geq a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к a .

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b , уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два миллионера

Теорема II.7.3. .



1.

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$a = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$



1. Запишем в терминах y_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \inf_{n > N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0 \exists N: \inf_{n > N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

Теорема II.7.4. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n \\ \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \end{cases}$$

► Просто сводим к пределам инфимумов.

Теорема II.7.5. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1 \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq 1+nx$$

► Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geq 1+kx$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

Следствие II.7.5.1. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

Теорема II.7.6. . $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \rightarrow 0$.

► С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1).

Следствие II.7.6.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$



$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^k \frac{1}{a} < 1$$

Следствие II.7.6.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Определим число e :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \nearrow; y_n \searrow$.



$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Leftarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftarrow \\ &\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n - 1}\right)^n \Leftarrow \\ &\Leftarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2 + 2n - 1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2 + 2n - 1}\right)^n \\ y_n < y_{n-1} &\Leftarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftarrow \\ &\Leftarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \Leftarrow \\ &\Leftarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 - \frac{n}{n^2 - 1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \end{aligned}$$



Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$
2. $x_n < e < y_n$

Следствие II.7.6.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$



$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n!}{n^n} \\ \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$



Теорема II.7.7. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

► $a = 0$:

$$\varepsilon_n \Leftrightarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x_n}{y_n} &= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} = \\
 &\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |\varepsilon_n| < \varepsilon \\
 &= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^N + \sum_{i=N+1}^n \\
 \left| \sum_{i=N+1}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| &\leq \sum_{i=N+1}^n |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^n \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \\
 &< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^n (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon \\
 \sum_{i=2}^N \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} &\leq \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon \\
 \frac{x_1}{y_n} &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

$a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$. Фактом $x_n \rightarrow \infty$ мы не пользовались.

$a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n . Проверим, что x_n монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$: Сменим знаки x_n .

Теорема II.7.8. Теорема Штольца №2. $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$.

► Я выпал, иам, видимо, аналогично. ◀

Глава III

Пределы и непрерывность отображений

III.1. Пределы функций

Def: (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) — метрические пространства. $E \subset X$, a — предельная точка E . $f: X \rightarrow Y$. Тогда говорят, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

REM: Для бесконечности на \mathbb{R} есть частные случаи.

Def: По Гейне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E: x_n \neq a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

Теорема III.1.1. Равносильность определений предела функции. Определения равносильны.



◀ Продолжим док-во.

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

► Возьмём две сходящиеся последовательности x_n и y_n , после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям b и c . Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы.



Утверждение. Единственность предела $f: E \subset X \rightarrow Y$, a — предельная точка. Тогда предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ единственен.

► Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

Теорема III.1.2. Ограниченность. $f: E \subset X \rightarrow Y$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда

$$\exists r > 0: f|_{E \cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

Теорема III.1.3. Уход от нуля. $f: E \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0: \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E \quad f(x) \neq \vec{0}$$

► $\varepsilon \Leftarrow \rho(x, \vec{0})$

Теорема III.1.4. Арифметические свойства предела функции.. $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка E . ◀

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 + g_0$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \|f(x)\| = \|f_0\|$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \langle f(x), g(x) \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle$

► Возьмём любые сходящиеся к a последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

Теорема III.1.5. Арифметические свойства предела функции.. $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка E .

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = f_0g_0$
3. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f_0|$
4. $\lim_{x \rightarrow a} a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$

► Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

Теорема III.1.6. Предельный переход в неравенстве.. $f, g: E \rightarrow Y$, a предельная точка E , $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leq g(x)$. Тогда $f_0 \leq g_0$.

Теорема III.1.7. О двух милиционерах.

Def: Пределы слева и справа. $f: E \cap \mathbb{R} \rightarrow Y$.

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f(x) |_{E \cap (-\inf, a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f(x) |_{E \cap (a, +\inf)}$$

Теорема III.1.8. Существование предела возрастающей и ограниченной функции..

Теорема III.1.9. Критерий Коши. Функция с полной областью значений имеет предел в точке тогда и только тогда, когда для любого разброса существует выколотый шарик вокруг предельной точки, все расстояния в котором малы.

Следствие III.1.9.1. \sin и \cos непрерывны.

►

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq |x-y|$$

Следствие III.1.9.2. tg и ctg непрерывны.

Следствие III.1.9.3.

$$\begin{aligned}\sin &\uparrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos &\downarrow [0, \pi] \\ \operatorname{tg} &\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Def:

$$\begin{aligned}\arcsin &= \left(\sin \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} \\ \arccos &= \left(\cos \mid_{[0, \pi]}\right)^{-1} \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg} \mid_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Теорема III.1.10. .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

► $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

III.1.1. Степенная функция

$$x^n \quad x \in [0; +\infty); n \in \mathbb{N}$$

Больше нуля, непрерывна, инфимум 0, супремум бесконечен, строго монотонная.

$$x^{\frac{1}{n}} \text{ обратная}$$

Тоже непрерывна.

$$\begin{aligned}x^{\frac{m}{n}} &= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m \\ x^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}\end{aligned}$$

Утверждение. Определение корректно.

Утверждение. Свойства степени выполняются.

Лемма III.1.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}}$$

► $a \geq 1$:

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + \varepsilon n > \varepsilon n > \varepsilon N > a$$

$$N > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N \quad (1 + \varepsilon)^n > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \geq 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

$0 < a < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

Теорема III.1.11. Пусть $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Тогда последовательность a^{x_n} имеет предел, зависящий только от x и a .

$$a^{x_n} - a^{x_m} = a^{x_n} (a^{x_m - x_n} - 1)$$

$$\forall n |x_n| \leq M \Rightarrow a^{x_n} \in [a^{-M}; a^M]$$

Т.о.

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leq \underbrace{a^M}_{\leq C} (a_{x_n - x_m} - 1) < C\varepsilon$$

По лемме

$$\exists N: \forall k > N |a^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{N} \rightarrow -\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a_{x_n - x_m} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < 1 + \varepsilon$$

Т.о. предел существует.

Пусть теперь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{y_n}$$

Но рассмотрим

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} \rightarrow x$$

Но тогда a^{z_n} не имеет предела, что противоречит доказанному выше.

Def:

$$a^x = \lim_{\substack{x_n \rightarrow x \\ x_n \in \mathbb{Q}}} a^{x_n}$$

Свойства степени:

1. Для $x \in \mathbb{Q}$ корректно.
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $x^a y^a = (xy)^a$
5. $x < y \wedge a > 0 \rightarrow x^a < y^a$

$$a_n \rightarrow a > 0 \Rightarrow a_n > 0 \text{ с какого-то места}$$

$$x_n^a < x_n^b \Rightarrow x^a \leq x^b$$

Теперь хотим строгое

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$$

$$z \leq \frac{x}{y}$$

$$z^{a_n} < 1 \wedge z^{a_n} \downarrow \Rightarrow z_a < 1$$

6. $x^a < x^b$ при $x > 1 \wedge a < b$ или $0 < x < 1 \wedge a > b$

► $x > 1 \wedge a < b$:

$$a < p < q < b \quad p, q \in \mathbb{Q}$$

$$x^{a_n} < x^p < x^q < x^{b_n}$$

$$x^a \leq x^p < x^q \leq x^b$$

Лемма III.1.2.

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

►

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$$

$$\forall |x| < \frac{1}{N} \quad 1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{N}$

Теорема III.1.12. .

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \Leftarrow a^x \text{ непрерывна}$$

► Надо доказать, что $a^{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n}$

$$x_0 \Leftarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0} (a^{x_n - x_0} - 1) \rightarrow 0$$

Следствие III.1.12.1. Есть обратная

$$\log_a x$$

Теорема III.1.13. .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

► $x_n \rightarrow +\infty. [x_n] = k$

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$x_n \rightarrow +\infty. y_n = -x_n$$

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} \rightarrow e$$

А для смеси возьмём две части, в каждой есть хороший номер.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \varepsilon) - \sin x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{\varepsilon}{2})}{=} \cos x$$

III.2. Теоремы о среднем

Теорема III.2.1. Теорема Ферма. $f: \langle a, b \rangle, x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема в x_0 , x_0 — точка экстремума. Тогда

$$f'(x_0) = 0$$

► Пусть $x > x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Пусть $x < x_0$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Но тогда

$$f'(x_0) = 0$$

Теорема III.2.2. Теорема Ролля. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) , $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

► Если функция константна, то всё доказано. Иначе есть глобальный максимум и минимум, причём они не могут быть оба в концах. ◀

Следствие III.2.2.1. Между корнями функции есть корень производной.

Теорема III.2.3. Теорема Лагранжа. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) .

$$\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Теорема III.2.4. Теорема Коши. $f, g: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) , $g'(x) \neq 0 \neq g(b) - g(a)$.

$$\exists c: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

► $h(x) = f(x) - Kg(x)$, $h(a) = h(b)$.

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда

$$\exists c: h'(c) = 0$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Следствие III.2.4.1. $f: [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b) , $|f'(x)| \leq M$. Тогда

$$\forall x, y \in (a, b) |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

III.3. Формула Тейлора

Теорема III.3.1. Формула Тейлора.

$$T(x) = \sum_{i=0}^n \frac{T^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$



$$T(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

$$((x - x_0)^k)^{(m)} = \begin{cases} 0 & k < m \\ m! & k = m \\ k(k-1)(k-2) \cdots (k-m+1)(x - x_0)^{k-m} & k > m \end{cases}$$

$$T(x)^{(m)} = \sum_{k=m}^n a_k k(k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k-m+1)(x - x_0)^{k-m}$$

$$T(x_0)^{(m)} = a_m m!$$

$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$$



Def: f дифференцируема n раз в точке x_0 . Тогда многочленом Тейлора функции f в точке x_0 есть

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Def: Формула Тейлора:

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x)$$

Лемма III.3.1. g дифференцируема n раз в x_0 . $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Тогда

$$g(x) = o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n! (x - x_0)}$$

$g^{(n-1)}$ дифференцируема в x_0 , а значит

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Т.о.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n! (x - x_0)} = 0$$

Тогда

$$g(x) = o((x - x_0)^n)$$



Теорема III.3.2. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. f дифференцируема n раз в x_0 .

$$f(x) = T_{n,k} f(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$



$$g(x) = f(x) - T_{n,k}f(x)$$

$$\forall k \leq n \quad g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - (T_{n,x_0}f)^{(k)}(x_0) = 0$$

Пользуемся леммой.

Следствие III.3.2.1.

$$\exists! P \in \mathbb{R}[x]: f(x) = P(x) + o((x - x_0)^k) \quad x \rightarrow x_0$$

► $x \rightarrow x_0$:

$$T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) = f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$q(x) \Leftarrow T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o((x - x_0)^k)$$

$$q(x_0) = 0$$

$q \in \mathbb{R}[x]$

$$q(x) = (x - x_0)q_1(x)$$

$$q_1(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

$$q_1(x_0) = 0$$

⋮

$$q_n(x_0) = o(1)$$

$$q_n \equiv 0$$

$$q \equiv 0$$

$$P \equiv T_{n,x_0}f$$

Теорема III.3.3. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. f дифференцируема $n/ + 1/$ раз в x_0 , $f^{(n)}$ непрерывна на $[x, x_0]$.

$$\exists c \in (x, x_0): f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

REM: Теорема Лагранжа — частный случай для $n = 0$.

$$\exists c \in (x, x_0): f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$



$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Надо доказать, что в форме

$$\exists c \in (x, x_0): M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$g(t) \Leftarrow f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t - x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (T_{n,x_0})^{(k)}(t) - M(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n-k+2)(t - x_0)^{n-k+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

Тогда у функции g первые n производных равны нулю, а также $g(x) = 0$, значит

$$g(x_0) = g(x) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_1 \in (x, x_0): g'(x_1) = 0$$

$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_2 \in (x, x_1): g'(x_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_{n+1} \in (x, x_0): g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!$$

$$c = x_{n+1}$$

Следствие III.3.3.1. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$. ◀

$$|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = O((x-x_0)^n)$$



$$\exists c \in (x, x_0): |f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$$

Следствие III.3.3.2. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n+1$ раз дифференцируема на $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $\text{for all } n \quad |f^{(n+1)}(t)| \leq M$. ◀

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,x_0} = f(x)$$



$$|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

$x_0 = 0$:

$$\begin{array}{llll} e^x = 1 & +x + \frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} & +\dots + o(x^n) \\ e^x = 1 & +x + \frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} & +\dots + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sin x = 0 & +x + 0 & -\frac{x^3}{3!} + 0 & +\dots + o(x^{2n+1}) \\ \cos x = 1 & +0 + \frac{x^2}{2!} & +0 - \frac{x^4}{4!} & +\dots + o(x^{2n+1}) \\ \ln(x+1) = 0 & +x - \frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} & +\dots + o(x^n) \\ (x+1)^p = 1 & +px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 & +\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 & +\dots + o(x^n) \end{array}$$

Def: $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum i = 0^n a_n$$

Следствие III.3.3.3. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Теорема III.3.4. Иррациональность e .

$$e \notin \mathbb{Q}$$



$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$2 < e < 3$$

Пусть $e = \frac{m}{n}$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1 \frac{3!}{+} \dots + \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1 \frac{3!}{+} \dots\right)}_{\in \mathbb{N}} + \frac{e^c}{n+1} = \underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{N}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < e^c < 3$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1} < 1$$

Т.о. $e \neq \frac{m}{n}$



III.4. Экстремумы функции

Def: $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$. x_0 — точка строгого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) > f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) \geq f(x_0)$$

x_0 — точка строгого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) < f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) \leq f(x_0)$$

Точка локального максимума или минимума также называется точкой локального экстремума.

Теорема III.4.1. Необходимое условие экстремума. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема в x_0 .

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

► Сузим до окрестности, там по теореме Ферма всё работает. ◀

REM: Обратное неверно, смотри $f(x) = x^3$.

Теорема III.4.2. Достаточное условие экстремума. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f непрерывна на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, f дифференцируема на $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда

- $f'((x_0 - \delta, x_0)) > 0 \wedge f'((x_0, x_0 + \delta)) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f'((x_0 - \delta, x_0)) < 0 \wedge f'((x_0, x_0 + \delta)) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

►

$$f'((x_0 - \delta, x_0)) > 0 \Rightarrow f \text{ возрастает на } (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0 - \delta, x_0))$$

$$f'((x_0, x_0 + \delta)) < 0 \Rightarrow f \text{ убывает на } (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0, x_0 + \delta))$$

Теорема III.4.3. Достаточное условие экстремума через вторую производную. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дважды дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда ◀

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

Теорема III.4.4. Достаточное условие экстремума через n -ую производную. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f дифференцируема n раз в x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда

- $2 \mid n \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $2 \mid n \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума
- $2 \nmid n \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ — не экстремум

►

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right)$$

$2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) - f(x_0) > 0$
 $2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) - f(x_0) < 0$
 $2 \nmid n \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}(x - x_0)$ ◀

III.5. Выпуклость

Def: $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

f выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f строго выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f строго выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Абсолютно эквивалентная запись, геом. смысл... 0,0301 10.12

РЕМ: Сумма выпуклых и выпуклая, умноженная на положительную, выпуклы.

Лемма III.5.1. О трёх хордах. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$ — выпуклая, $u < v < w$, $u, v, w \in \langle a, b \rangle$. Тогда

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$

►

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \Leftrightarrow (w - u)(f(v) - f(u)) \leq (v - u)(f(w) - f(u)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w - u)f(v) - (w - u)f(u) \leq (v - u)f(w) - (v - u)f(u) \Leftrightarrow (w - u)f(v) \leq (v - u)f(w) + (w - v)f(u)$$

◀

Теорема III.5.1. . $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$ — выпуклая. Тогда

$$\forall x \in (a, b) \quad f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

► $u_1 < u_2 < x < v$

$$\frac{f(x) - f(u_1)}{x - u_1} \leq \frac{f(x) - f(u_2)}{x - u_2} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}$$

Тогда $\frac{f(x) - f(u)}{x - u}$ растёт и ограничено, т.е. предел $f'_-(x)$ существует. Аналогично существует $f'_+(x)$, она убывает. Как видно, они в правильном порядке. ◀

Теорема III.5.2. . f — выпуклая на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle \quad f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

► \Rightarrow :

$x > x_0, y \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$x_0 - x > 0$$

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x_0) - f(x)$$

Аналогично $x < x_0, y \in (x, x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

\Leftarrow :

$$u < v < w$$

$$\forall x \quad f(x) \geq f(v) + (x - v)f'(v)$$

$$f(u) \geq f(v) + (u - v)f'(v)$$

$$f(w) \geq f(v) + (w - v)f'(v)$$

Сложим с правильными коэффициентами:

$$(w - v)f(u) \geq (w - v)f(v) + (w - v)(u - v)f'(v)$$

$$(v - u)f(w) \geq (v - u)f(v) + (w - v)(v - u)f'(v)$$

$$(w - v)f(u) + (v - u)f(w) \geq (w - u)f(v)$$

Теорема III.5.3. Критерий выпуклости. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дифференцируема на (a, b) . ◀

$$f \text{ (строго) выпукла} \Leftrightarrow f' \text{ (строго) возрастает}$$

► $\Rightarrow: x_1 < x_2$

$$f(x) \geq f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

$$f(x) \geq f(x_2) + (x - x_2)f'(x_2)$$

Подставим

$$f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + (x_1 - x_2)f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

La: Нужно проверить, что

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

По теореме Лагранжа, есть точки $\xi < \eta$

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

Теорема III.5.4. Критерий выпуклости через вторую производную. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, f дважды дифференцируема на (a, b) . ◀

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' > 0$$

► Смотрим на теоремы о монотонности.

Теорема III.5.5. Неравенство Денсена. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла.

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset \langle a, b \rangle \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0, 1]: \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

► Метод математической индукции. Теорема при $n = 2$ совпадает с определением выпуклости.

$$\begin{aligned} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\Leftarrow y} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) &= f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \geq \\ &\geq (1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = (1 - \lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Следствие III.5.5.1. Неравенство о средних — достаточно рассмотреть

$$f(x) = -\ln x$$

Следствие III.5.5.2. Неравенство Гельдера:

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \quad p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

► Если есть нули или отрицательные — перейдём к модулям.

$$f(x) = x^p$$

$$f() =$$

$$\lambda_i a_i = \frac{x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{q}}}$$

Следствие III.5.5.3. Неравенство Минковского

Глава IV

Интегральное исчисление

IV.1. Неопределённый интеграл

Def: $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Функция $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ называется первообразной f , если

$$F' = f$$

Не для всех f существует F . Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

► Пусть есть $F' = f$. Тогда по теореме Дарбу

$$\forall a, b \in (-1, 1), c \in (F'(a), F'(b)) \exists c \in (a, b): F'(c) = C$$

Теорема IV.1.1. О существовании первообразной. Для любой непрерывной $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ есть первообразная F . Докажем в следующем семестре. ◀

Теорема IV.1.2. . $f, F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, F — первообразная. Тогда

1. $F + c, c \in \mathbb{R}$ также первообразная.
2. Φ — первообразная только если $\Phi = F + c$.

►

$$(F + c)' = F' + 0 = f$$

Рассмотрим $G = \Phi - F$. Она дифференцируема и

$$G' = (\Phi - F)' = \Phi' - F' = f - f = 0$$

Но тогда

$$G = const$$

Def: Неопределённым интегралом функции f называется множество её первообразных. ◀

$$\int f(x) dx$$

Пока стоит воспринимать все символы интеграла как некоторые „скобки”.

Если есть некоторая первообразная F , то

$$\int f(x)dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Тот же смысл имеют записи

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

$$\int f dx = F + c$$

Для того, чтобы найти неопределённый интеграл, достаточно найти какую-то первообразную, а для проверки первообразной достаточно взять от неё производную.

Таблица интегралов:

$$\begin{aligned} \int 0 dx &= c \\ \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + c \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arccos x + c \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + c \end{aligned}$$

IV.1.1. Арифметические действия с интегралами

Def: Пусть A, B — множества. Тогда

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$$

Теорема IV.1.3. Об арифметических операциях с интегралами.

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

$\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

REM: Именно из-за того, что константы в записи нет, мы исключаем ноль.

► F, G — первообразные соответственно f, g .

$$\int f dx = \{F + c_1\}$$

$$\int g dx = \{G + c_2\}$$

$$\int f dx \pm \int g dx = \{F + c_1\} \pm \{G + c_2\} = \{F + G + c_3\} =$$

$(F + G)' = f + g$

$$= \int (f + g) dx$$

$$\alpha \int f dx = \alpha \{F + c_1\} = \{\alpha F + c_2\} =$$

$(\alpha F)' = \alpha f$

$$= \int \alpha f dx$$

Теорема IV.1.4. Замена переменной в неопределённом интеграле. $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, $\varphi: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ непрерывно дифференцируема. ◀

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c$$

►

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

Следствие IV.1.4.1. ◀

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + c$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$f = x^2, \varphi = \ln x$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$a > 0$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\frac{1}{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c =$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$$f = \frac{1}{x^2+1}$$

Теорема IV.1.5. Интегрирование по частям. f, g — дифференцируемые, $f'g$ — интегрируемая.

$$\int f g' dx = f g - \int f' g dx$$

► Φ — первообразная $f'g$.

$$(fg - \Phi + c)' = fg' + f'g - f'g = fg'$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Есть термин „берущиеся” интегралы. Это интегралы, выражаемые через элементарные функции. Их, вообще говоря, мало. К ним относятся рациональные функции (отношение многочленов), произведение тригонометрических функций, $x\sqrt{ax^2+bx+c}$. Не берутся, например,

$$\int e^{x^2} dx$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$