Глава I

Введение

I.1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

$\mathfrak{Def}$: Множество A - подмножество B, если все элементы A содержатся и в B.

$$A \subset B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \; x \in B$$

$\mathfrak{Def}$: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \land B \subset A$$

$\mathfrak{Def}$: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \; x \notin \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: 2^A — множество всех подмножеств A.

$$2^A \overset{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

- $\{a_1, a_2, ...\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}$, $\Phi(x)$ – условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p$ имеет ровно 2 натуральных делителя$\}$.

Бывают некорректно заданные „множества“. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как „Наименьший элемент множества...“

$\mathfrak{Def}$: Пересечение двух множеств — множество, состоящие из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \overset{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Симметрическя разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \overset{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\ x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность
$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$
2. Коммутативность
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
3. Рефлексивность
$$A \cap A = A; A \cup A = A$$
4. Дистрибутивность
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема I.1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)\,; A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \; \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

◀

Теорема I.1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I \colon x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ \forall \alpha \in I \; x \in B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \; \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная n-ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i = b_i$$

I.2. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: Декартого произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n \; a_i \in A_i$$

$\mathfrak{Def}$: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a \, R \, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

$\mathfrak{Def}$: Область определения отношения

$$\beta_R = dom_R = \{a \in A \mid \exists b \in B\colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обсласть значения отношения

$$\rho_R = ran_R = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обратное отношение

$$R^{-1}\colon \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b \, R^{-1} \, a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a \, R \, b$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отношений

$$R_1\colon A \to B; R_2\colon B \to C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a \, R_1 \, b \wedge b \, R_2 \, c\}$$

Про значок — его использовать не будем

Пример композиции: $<\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$< \circ <= \{(a, b) \mid b - a \geqslant 2\}$$

$\mathfrak{Def}$: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f\colon A \to B$$

$$a \, f \, b_1 \wedge a \, f \, b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a \, f \, b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A \text{ — область определения})$$

$\mathfrak{Def}$: Свойтва отображеий:

1. Рефлексивность $a \, R \, a$
2. Симметричность $a \, R \, b \Leftrightarrow b \, R \, a$
3. Транзитивность $a \, R \, b \wedge b \, R \, c \Rightarrow a \, R \, c$

4. Иррефлексивность $\neg a\,R\,a$

5. Антисимметричность $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- $\underset{5}{\equiv}$: 1, 2, 3
- $\leqslant$: 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- $\subset$: 1, 3, 5

I.3. Вещественные числа

$\mathfrak{Def}$: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и $\times$, причём:

1. Коммутативность $\forall a, b\; a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c\; a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o\colon \forall a\; a + o = a; \exists e\colon \forall a\; a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a\; \exists {-a}\colon a + -a = o; \forall a \neq o\; \exists a^{-1} : a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c\; a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения $\leqslant$ (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c\; a \leqslant b => a + c \leqslant b + c$
6. $\forall a, b\; a > 0 \wedge b \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cup B \neq \emptyset$, $\forall a \in A\; \forall b \in B\; a \leqslant b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A\; a \leqslant c \wedge \forall b \in B\; c \leqslant b$$

REM: На $\mathbb{Q}$ аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема I.3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$$

▶
$$A \leftrightharpoons \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}\,; y \in A$$
Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \leftrightharpoons \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.
$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$
Таким образом
$$\forall a \in A\, \forall b \in B\; a \leqslant b$$
Тогда
$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A\; a \leqslant c \land \forall b \in B\; c \leqslant b$$
$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$
Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда
$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n+1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$
Значит
$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geqslant c \Rightarrow y \leqslant 0 \text{ — противоречие}$$
Таким образом $A = \mathbb{R}$ ◀

Следствие I.3.1.1.
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < \varepsilon$$

▶ Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$ ◀

Следствие I.3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$
$$\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$$

▶
$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < y - x$$
Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z}\colon m \leqslant nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \overset{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.
$$M \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant nx\}$$
$$x \geqslant 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$
$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N}\colon \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$
Рассмторим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда
$$\exists k \in \mathbb{N}\colon k > nx$$
Тогда
$$\forall m \in M\; m < k \Rightarrow \exists m = \max M\colon m \leqslant nx < m + 1$$
$$m \leqslant nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$$
Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.
$$\frac{m}{n} \leqslant x \land \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m+1}{n} < y$$

◀

Следствие I.3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$$

▶

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$
$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2} : z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < z < y$$

◀

I.4. Верхняя и нижняя граница

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in R$ — верхняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \leqslant x$$
$x \in R$ — нижняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \geqslant x$$

$\mathfrak{Def}$: A ограничено сверху, если
$$\exists x \in R : x \text{ — верхняя граница} A$$
A ограничено снизу, если
$$\exists x \in R : x \text{ — нижняя граница} A$$
A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A, если x — наименьшая из верхних границ.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A, если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:
$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.

▶ x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀

Теорема I.4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.

2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

▶

1. B — множество всех верхних границ A.

$$\forall a \in A \, \forall b \in B \; a \leqslant b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A \; a \leqslant c \wedge \forall b \in B \; c \leqslant b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

$\blacktriangleleft$

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$
Теорема I.4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \leqslant b \land \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A\colon a > b - \varepsilon)$$

2. A ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \geqslant c \land \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A\colon a < c + \varepsilon)$$

$\blacktriangleright$

$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \land \forall \varepsilon > 0\; b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A\; a \leqslant b \land \forall \varepsilon > 0\; \exists a \in A\colon a > b - \varepsilon)$$

$\blacktriangleleft$

Теорема I.4.3. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{i=1}^n : \forall i \in \mathbb{N}\,(a_i <= a_{i+1} \land b_i >= b_{i+1}) \land \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

$\blacktriangleright$ $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall i \in \mathbb{N}\; c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

$\blacktriangleleft$

REM: Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, +\infty) = \emptyset$$

REM: $\mathbb{R}$. Рассмотрим приблежения $\sqrt{2}$.

Глава II

Последовательности в метрических пространствах

II.1. Метрические пространства

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть множество X и отображение $\rho\colon X\times X\to[0;+\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geqslant\rho(x,z)$

Также пара (X,ρ) называется метричесикм пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x\neq y\\ 1 & x=y\end{cases}$
2. $\rho(x,y)=|x-y|$
3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
5. Расстояния на сфере.
6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O. Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A,B)=|AB|$, иначе $\rho(A,B)=|AO|+|BO|/$
7. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрика
$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y,\rho|_{Y\times Y})$ — подпространство X. $Y\subset X$.
$\mathfrak{Def}$: $B_r(a)=\{x\in X\mid\rho(x,a)<r\}$ — открытый шар.
$\mathfrak{Def}$: $\bar{B}_r(a)=\{x\in X\mid\rho(x,a)\leqslant r\}$ — замкнутый шар.
Свойства:

1. $B_{r_1}(a)\cap B_{r_2}(a)=B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$

2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

   ▶ Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$. ◀

Теорема II.1.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

▶

$$f(t) \leftrightharpoons \sum_{k=1}^{n}(a_k t - b_k)^2 = \left(\underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}_{\leftrightharpoons A}\right) t^2 - 2\left(\underbrace{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}_{\leftrightharpoons C}\right) t + \left(\underbrace{b_1^2 + \dots + b_2^2}_{\leftrightharpoons B}\right)$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0 \Rightarrow 4\left(C^2 - AB\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow C^2 \leqslant AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны.

▶

$$a_i = \alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень} t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

◀ ◀

Теорема II.1.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}$$

▶ Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}_{\leftrightharpoons A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}_{\leftrightharpoons B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leqslant A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{AB} \Leftarrow$$

$\Leftarrow$ Неравенство Коши-Буняковского

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны. ◀

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G\, \exists r > 0\colon B_r(x) \subset G$$

Теорема II.1.3. О свойтсвах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — открыты.

2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.

▶

1. Очевидно.
2. $$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \colon x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$
3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$
$$\forall k = 1..n \; x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \, \exists r_k > 0 \colon B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k \colon G_r \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$
4. $$\forall x \in B_r(a) \, \exists r_x = \frac{1}{2}(r - \rho(a,x))$$
$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y,x) < r_x \Rightarrow \rho(y,x) + \rho(a,x) < r_x + \rho(a,x) \Rightarrow \rho(y,a) < r$$

◀

REM:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0;1] \text{ — не открытое множество}$$

$\mathfrak{Def}$: $x \in A$ — внутренняя точка A, если $\exists r > 0 \colon B_r(x) \in A$
REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x.
$\mathfrak{Def}$: Внутренность множества A:

$$A^0 = \operatorname{int} A \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\operatorname{int} A \subset A$
2. $\operatorname{int} A$ — множество всех внутренних точек.
3. $\operatorname{int} A$ открыто.
4. A открыто $\Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$
5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$
6. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$
7. $\operatorname{int} \operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

$\mathfrak{Def}$: Закрытое множество — множество, дополнение которого открыто.
Теорема II.1.4. О свойствах закмнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — закмнуты.

2. Перечечение замкнутых — замкнуто.

3. Объеднинение конечного числа замкнутых замкнуто.

4. Замкнутый шар замкнут.

▶

1. Очевидно

2. По формулам де Моргана
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению
$$\rho(a, x) > r$$
Покажем, что
$$B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$
Пусть $\exists y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда
$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leqslant r$$
$$y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$
$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

◀

REM:
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1\right] = (0; 1]$$

$\mathfrak{Def}$: $A \subset X$, (X, ρ). Тогда замыкание множества A — перечесение всех замкнутых множеств, содержащих A.
$$\operatorname{cl} A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

Теорема II.1.5. О связи замыкания и внутренности.
$$X \setminus \operatorname{cl} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$$
$$X \setminus \operatorname{int} A = \operatorname{cl}(X \setminus A)$$

▶
$$X \setminus \operatorname{cl} A = X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F)$$
$$X \setminus F \text{ открыто}$$

$$X \setminus F \subset X \setminus A$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \operatorname{int}(X \setminus A)$$

Аналогично ◀

Следствие II.1.5.1.

$$\operatorname{int} A = \operatorname{cl}(X \setminus A)$$

$$\operatorname{cl} A = \operatorname{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A \subset \operatorname{cl} A$
2. clA замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A = \operatorname{cl} A$
4. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{cl} A \subset \operatorname{cl} B$
5. $\operatorname{cl}(A \cup B) = \operatorname{cl} A \cup \operatorname{cl} B$
6. $\operatorname{cl} \operatorname{cl} A = \operatorname{cl} A$

Теорема II.1.6. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X; \rho)$ — пространство, $(Y; \rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в $X\colon A = G \cap Y$
2. A замкнутыо в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в $X\colon A = F \cap Y$

▶

1. $\Rightarrow$:

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A\, \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A$$

$$G \leftrightharpoons \bigcup_{x \in A} B^X_{r_x}(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} \left(B^X_{r_x}(x) \cap Y\right) = \bigcup_{x \in A} B^Y_{r_x}(x) = A$$

$\Leftarrow$:

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G$$

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к доплнениям

◀

Теорема II.1.7. О замыканиях. (X, ρ), $A \subset X$

$$x \in \operatorname{cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $\exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замнкуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\operatorname{cl} A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \operatorname{cl} A$$

$\Leftarrow$: Пусть $x \notin \operatorname{cl} A \Rightarrow \exists F \supset A\colon x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$$

◀

Следствие II.1.7.1. U открытое $\wedge\, U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$

▶ Пусть $x \in U \cap \operatorname{cl} A$.

$$x \in \operatorname{cl} A \Rightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ ◀

$\mathfrak{Def}$: Проколотая окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

$\mathfrak{Def}$: Точка $x \in X$ предельная у множества A, если

$$\forall r > 0\; \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: A' — множество предельных точек.

Свойства:

1. $\operatorname{cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   ▶ $\supset$:

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$

$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

$\subset$: Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0\, B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leqslant r_0\, \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

Тогда

$$\forall r > 0\; \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

◀

Теорема II.1.8. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \, |B_r(x) \cap A| = \infty$$

▶
$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A\colon y_1 \neq x \wedge y \in B_r(x)$$

Тогда
$$\dot{B}_{\rho(x,y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A\colon y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y \in B_{\rho(x,y_1)}$$

Тогда рассмотрим
$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}\colon y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

◀

Следствие II.1.8.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

Теорема II.1.9. О точной границе замкнутого множества.

$$A \text{ ограниченно сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограниченно снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

▶ $a = \sup A$. Тогда
$$\forall x \in A \; x \leqslant a \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists x \in A\colon x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.
$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$

◀

II.2. Предел последовательности

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i). Тогда

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists N\colon \forall n \geqslant N \; \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n\to\infty} x = x$
- $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема II.2.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некотрого элемента

2. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограниченна
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x$

▶

1. $\Rightarrow$: Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0\colon B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U$$

$\Leftarrow$: $U \leftrightharpoons B_\varepsilon(x^*)$.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n \geqslant N\ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{\rho(x^*; x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1\, \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_2\colon \forall n \geqslant N_2\, \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1; N_2\} \begin{cases} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leqslant \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon$$

3. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n<N}\{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n\, x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2}; \rho(x; x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3}; \rho(x; x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$\vdots$$

$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n}; \rho(x; x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geqslant N\ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

◀

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n.

REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$

REM:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \operatorname{cl} A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x - y|)$.

Теорема II.2.2. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leqslant y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leqslant y$.

▶ Пусть $y < x$; $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \, |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \, |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\} \, x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

◀

REM: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

REM: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие II.2.2.1. $x_n \leqslant b \Rightarrow x \leqslant b$

Следствие II.2.2.2. $x_n \geqslant a \Rightarrow x \geqslant a$

Следствие II.2.2.3. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

Теорема II.2.3. О двух миллиционерах. Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

▶ Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \colon \forall n \geqslant N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2 \colon \forall n \geqslant N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\} \colon \forall n \geqslant N \; l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$ ◀

Следствие II.2.3.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leqslant z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие II.2.3.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограниченна, то $\lim x_n y_n = 0$.

$\mathfrak{Def}$: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

Теорема II.2.4. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограниченна тогда и только тогда, когда имеет предел.

▶ $\Leftarrow$: Очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть (x_n) возрастает. Она ограниченна, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k \colon x_k > x - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \dots \leqslant a$$

Тогда

$$\forall n \geqslant k \; |x_n - a| < \varepsilon$$

◀

II.3. Конечное векторное пространство

$\mathfrak{Def}$: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+ \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

1. Сложение
   (a) Коммутативно
   (b) Ассоциативно
   (c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{d}$
   (d) Существует обратный элемент
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
5. $1x = x$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение векторного пространства —

$$" + " : X + X \to X$$

$$" \times " : \mathbb{R} \times X \to X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

$\mathfrak{Def}$: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение скалярного произведения: X — веторное пространство. Задана операция $\langle x, y\rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ обладающая указынными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

$\mathfrak{Def}$: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

1. $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
3. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковкского)
4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)
5. $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)
6. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$

   ▶ $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

   $$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geqslant \|x\|$$

   А это неравнство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространтво на $\mathbb{R}^d$.

$\mathfrak{Def}$: Общее определение нормы: $\|x\|\colon X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скаляроного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|$
2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1..d} |x_k|$

   ▶

   $$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leqslant \max_{k=1..d}(|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

   ◀

3. $$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p}$$

II.4. Арифметические свойства предела

Пусть есть $(\mathbb{R}^d, \rho)$ со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

▶

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$

◀

REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограниченно $\Leftrightarrow \exists M \colon \forall x \in A\ \|x\| \leqslant M$

Теорема II.4.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$, $\lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$
5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$

▶

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1 \colon \forall n > N_1\ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_2 \colon \forall n > N_2\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_3 \colon \forall n > N_3\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.
$$\forall \varepsilon > 0\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.
$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| =$$
$$= |\lambda_n|\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\| \leqslant M\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\|x_0\|$$

Но тогда

$$\forall n > \max N_1, N_3\ \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2
4. $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\right); y_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)}\right)$ Это докажем позже
5.
$$0 \leqslant |\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$$

◀

Теорема II.4.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim |x_n| = |x_0|$
5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

▶ Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \leftrightharpoons A$$

$$\exists N_1 \colon \forall n > N_1\ |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

◀

$\mathfrak{Def}$: $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\} \colon \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема II.4.3. О сходимости покоординатно. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.

▶

$$\left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{d} \left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)$$

◀

Следствие II.4.3.1. $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$

▶

$$\left.\begin{array}{c} x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \to y_n^{(i)} \\ y_n \to y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \to y_0^{(i)} \end{array}\right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{d} x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to \sum_{i=1}^{d} x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$$

◀

II.5. Бесконечно малые и большие

$\mathfrak{Def}$:

$$\lim x_n = +\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N \colon \forall n > N\ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N \colon \forall n > N\ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N \colon \forall n > N\ \ |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array}\right. \Rightarrow \lim x_n = \infty$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единтсвенность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух миллиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$
3. $c > 0\colon \pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0\colon \pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$
6. $c < 0\colon \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$
7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$
8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$
12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$
13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечнен.

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

Теорема II.5.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

▶

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

◀

Теорема II.5.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограниченна. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая
2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

Теорема II.5.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

1. $x_n \to +\infty \land y_n$ ограниченна снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
2. $x_n \to -\infty \land y_n$ ограниченна сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$

3. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$

4. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$

5. $x_n \to \pm\infty \wedge y_n \leqslant a < 0 \Rightarrow x_n y_n \to -\infty$

6. $x_n \to \infty \wedge |y_n| \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$

7. $x_n \to a \neq 0 \wedge y_n \to 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

8. x_n ограниченна $\wedge\, y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$

9. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\wedge\, y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0 \colon \exists N \colon \forall n > N\ x_n \geqslant a$$
$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0 \colon \exists N \colon \forall n > N\ x_n \leqslant a$$

II.6. Компактность

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет покрытие множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подкокрытие.

$$\forall B_\alpha \colon K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \colon K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

Теорема II.6.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть B_α — открытое в Y, что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соотвествующими множествами в X, выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y.

$\Leftarrow$: Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y, в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X. ◀

REM: Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

Теорема II.6.2. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограниченно.

▶

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограниченно}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но ($r \leftrightharpoons \min_{i=1}^{k} \left\{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)\right\}$)

$$\forall i = 1..k \; B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема II.6.3. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

▶ Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

Теорема II.6.4. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

▶ K_0 — любое их них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus K_{x_i}\right) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^{k} K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

◀

Следствие II.6.4.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто.

$\mathfrak{Def}$: Параллелепипедом на $\mathbb{R}^d$ и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (закрытый)}$$

$$(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \, a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (открытый)}$$

Теорема II.6.5. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset ...$ имеют непустое пересечение.

▶ Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

Теорема II.6.6. Теорема Гейне-Бореля. Замкнутый куб компактен

▶

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, 0 \leqslant x_i \leqslant a\right\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобъём куб по кажому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покроет ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрыл куб. ◀

$\mathfrak{Def}$: Подпоследовательность:

$$\left\{x_{n_i}\right\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема II.6.7. Предел подпоследовательности. Подпоследовательность имеет тот же предел. Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

Теорема II.6.8. Компактность в $\mathbb{R}^d$. Следующее в $\mathbb{R}^d$ равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограниченно
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюсю к некоторой точке множества (*секвенциально компактно*)

▶ $2 \Rightarrow 1$: ограниченно, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$: Возьмём последовательность $\{x_n\} \leftrightarrows E$ элементов множества F. Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X\, \exists r_x > 0\colon \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} B_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^{k} \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} \{y_i\}$$

Получили, что E конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K. Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K.

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1\colon \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a,x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2\colon \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

$$\vdots$$

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R. Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho\left(b, x_{n_k}\right) > \rho\left(a, x_{n_k}\right) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \to \infty$$

Значит K ограниченно. ◀

REM: $1 \Rightarrow 3; 3 \Rightarrow 2; 1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на $\mathbb{R}$ с дискретной метрикой.

Следствие II.6.8.1. В $\mathbb{R}^d$ компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

▶ В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие II.6.8.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в $\mathbb{R}^d$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

▶ Множество значений ограниченно, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие II.6.8.3. В любой последовательности в $\mathbb{R}$ есть сходящаяся в $\bar{\mathbb{R}}$ подпоследовательность.

▶ Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

$\mathfrak{Def}$: Диаметр множеста:

$$\operatorname{diam} A = \sup \rho(x, y)$$

Теорема II.6.9. Свойства диаметра.

1. $\operatorname{diam} E = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$
2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$ (последовательность вложенных компактов); $\operatorname{diam} K_n \to 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечно

▶

1.

$$E \subset \operatorname{cl} E \Rightarrow \operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

$$d = \operatorname{diam} \operatorname{cl} E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_0, y_0\colon \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists x_1 \in E\colon \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \operatorname{cl} E \Rightarrow \exists y_1 \in E\colon \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geqslant \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$

Устремив $\varepsilon \to 0$, получим

$$\operatorname{diam} E \geqslant \operatorname{diam} \operatorname{cl} E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого n хотя бы $\rho(a, b)$. Противоречие.

◀

𝔇𝔢𝔣: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > N\ \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM: $E \leftrightharpoons \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \operatorname{diam} E \to 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена
2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.

▶

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists K \colon \forall k > K\ \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > K\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Т.о.

$$\exists n_k > M = \max\{N, K\} \colon \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$

◀

𝔇𝔢𝔣: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Теорема II.6.10. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В $\mathbb{R}^d$ фундаментальная последовательность всегда сходится.

▶ $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n, m > N\ \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

x_n — фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^d$. $E_n \leftrightharpoons \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ — ограниченно. $\operatorname{cl} E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\operatorname{cl} E_1 \supset \operatorname{cl} E_2 \supset \operatorname{cl} E_3 \supset \cdots$$
$$\operatorname{diam} \operatorname{cl} E_n = \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о.

$$\exists!\, a \colon a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \operatorname{cl} E_n$$
$$a \in \operatorname{cl} E_n \Rightarrow \forall i > n\, 0 \leqslant \rho(a, x_i) \leqslant \operatorname{diam} E_n \to 0$$

Т.о $x_n \to a$. ◀

REM: $\mathbb{R}^d$ полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема II.6.11. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

▶ В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

II.7. Верхний и нижний предел

$\mathfrak{Def}$: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim}\, x_n = \lim_{x\to\infty} \inf_{k>n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim}\, x_n = \lim_{x\to\infty} \sup_{k>n} x_k$$

REM: $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

$\mathfrak{Def}$: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Лемма II.7.1. Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема II.7.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\bar{\mathbb{R}}$, при этом

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$$

▶ $y_n \leftrightharpoons \inf_{k>n} x_n$, $z_n \leftrightharpoons \sup_{k>n} x_n$. Если x_n ограниченно, то и y_n ограниченно. Если x_n не ограниченно снизу, то и y_n не ограниченно снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim}\, x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема II.7.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. $\limsup$ — наибольший частичный предел.
2. $\liminf$ — наименьший частичный предел.
3. $\lim$ существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$

▶

1. $a = \limsup x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

   $$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geqslant a$$

   Выберем

   $$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

   Оно стремится к a.

   Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b, уйдёт выше супремума, что плохо.
2. Аналогично.
3. Два миллиционера.

◀

Теорема II.7.3. Определение верхнего и нижнего предела через N и ε.

1.

$$a = \underline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \forall n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \forall N\colon \exists n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$a = \overline{\lim}\, x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \forall N\colon \exists n > N\ x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

▶

1. Запишем в терминах y_n:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0\, \exists N\colon \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

   Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

◀

Теорема II.7.4. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leqslant b_n \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lim}\, a_n \leqslant \underline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n \leqslant \overline{\lim}\, b_n \end{cases}$$

▶ Просто сводим к пределам инфимумов. ◀

Теорема II.7.5. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1\ \forall n \in \mathbb{N}\ (1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

▶ Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geqslant 1 + nk$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k}_{>0}(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1 + kx + x + kx^2 \geqslant 1 + (k+1)x$$

◀

Следствие II.7.5.1. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

Теорема II.7.6. Предел убывающей по отношению. $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \to 0$.

▶ С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀

Следствие II.7.6.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

▶

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} < 1$$

◀

Следствие II.7.6.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Определим число e:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \uparrow; y_n \downarrow$.

▶

$$x_n < x_{n+1} \Leftarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \Leftarrow 1-\frac{1}{n+2} < 1-\frac{n}{n^2+2n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

$$y_n < y_{n-1} \Leftarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \frac{n+1}{n} < \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftarrow 1+\frac{1}{n} < 1-\frac{n}{n^2-1} \leqslant \left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)^n$$

◀

Заметим, что при этом $x_n < y_n$. Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \risingdotseq e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$
2. $x_n < e < y_n$

Следствие II.7.6.3.

$$\lim\frac{n!}{n^n} = 0$$

▶

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1+\frac{1}{n})^{-n} \to \frac{1}{e} < 1$$

◀

Теорема II.7.7. Теорема Штольца для бесконечно малых. $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\lim\frac{x_n}{y_n} = a$$

▶

1. $a = 0$.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to 0$$

$n > m$:

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n}\varepsilon_k(y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}\varepsilon_k(y_k - y_{k-1})\right| = \sum_{k=m+1}^{n}|\varepsilon_k|(y_{k-1} - y_k) <$$

$$\forall \varepsilon < 0\, \exists N \colon \forall k > N\ |\varepsilon_k| < \varepsilon$$

Тогда при $n > m > N$

$$< \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

$n \to \infty$

$$|x_m| < \varepsilon y_m$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon$$

2. $a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - a y_n$.

3. $a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n. Проверим свойство для x:

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

$$x_n - x_{n-1} < y_n - y_{n-1} < 0$$

◀

Теорема II.7.8. Теорема Штольца для бесконечно больших. $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = a$$

▶

1. $a = 0$:

$$\varepsilon_n \leftrightharpoons \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} + \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n}$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| = \sum_{i=N+1}^{n} |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^{n} \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^{n} (y_i - y_{i-1}) = \varepsilon \frac{y_n - y_N}{y_n} < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leqslant \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^{N} \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$$

2. $a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$. Фактом $x_n \to \infty$ мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \to 0$$

3. $a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n. Проверим, что x_n монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1$$

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

4. $a = -\infty$: Сменим знаки x_n.

◀

Глава III

Пределы и непрерывность отображений

III.1. Пределы функций

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) — метрические пространства. $E \subset X$, a — предельная точка E. $f\colon X \to Y$. Тогда b является пределом f в a по Коши

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x\, x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x\, (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

REM: Для бесконечности на $\mathbb{R}$ есть частные случаи.

$\mathfrak{Def}$: По Гейне,

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E\colon x_n \neq a\ \lim_{n \to \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$$

Теорема III.1.1. Равносильность определений предела функции. Определения равносильны.

▶ Коши $\Rightarrow$ Гейне:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall x\, x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

Рассмотрим произвольную $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Для неё выполнено указанное выше. Тогда $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Гейне $\Rightarrow$ Коши: от противного. Пусть

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall \delta > 0\, \exists x\, x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

Возьмём данный ε и выберем последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$. Тогда получим, что

$$\exists \{x_n\}\colon x_n / nea \wedge x_n \to a \wedge f(x_n) \nrightarrow b$$

что противоречит Гейне. ◀

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

▶ Возьмём две сходящиеся последовательности x_n и y_n, после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям b и c. Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

Утверждение. Единственность предела $f\colon E \subset X \to Y$, a — предельная точка. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ единственнен.

▶ Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

Теорема III.1.2. Ограниченность. $f\colon E \subset X \to Y$, $\lim\limits_{x\to a} = b$. Тогда

$$\exists r > 0\colon f\,|_{E\cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

Теорема III.1.3. Уход от нуля. $f\colon E \to \mathbb{R}^d$, $\lim\limits_{x\to a} = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0\colon \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E\ f(x) \neq \emptyset$$

▶ $\varepsilon \leftrightharpoons \rho(x, \vec{0})$ ◀

Теорема III.1.4. Арифметические свойства предела функции. $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}^d$, $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$, a предельная точка E.

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$
2. $\lim\limits_{x\to a}(\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$
4. $\lim\limits_{x\to a}\|f(x)\| = \|f_0\|$
5. $\lim\limits_{x\to a}\langle f(x), g(x)\rangle = \langle f_0, g_0\rangle$

▶ Возьмём любые сходящиеся к a последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

Теорема III.1.5. Арифметические свойства предела функции. $f, g\colon E \subset\to \mathbb{R}$, a предельная точка E.

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = f_0 g_0$
3. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |f_0|$
4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_0}{g_0}$

▶ Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

Теорема III.1.6. Предельный переход в неравенстве. $f, g\colon E \to Y$, a предельная точка E, $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leqslant g(x)$. Тогда

$$f_0 \leqslant g_0$$

Теорема III.1.7. О двух миллиционерах. $f, g, h\colon E \to Y$, a предельная точка E, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. Тогда

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

$\mathfrak{Def}$: Пределы слева и справа. $f\colon E \cap \mathbb{R} \to Y$.

$$\lim_{x\to a-} = \lim_{x\to a-0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to a} f\mid_{E\cap(-\inf, a)}$$

$$\lim_{x\to a+} = \lim_{x\to a+0} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{x\to a} f\mid_{E\cap(a, +\inf)}$$

Теорема III.1.8. Существование предела возрастающей и ограниченой функции.

Теорема III.1.9. Критерий Коши. Функция с полной областью значений имеет предел в точке тогда и только тогда, когда для любого разброса существует выколотый шарик вокруг предельной точки, все расстояния в котором малы.

Следствие III.1.9.1. sin и cos непрерывны.

▶
$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \leqslant |x-y|$$
◀

Следствие III.1.9.2. tg и ctg непрерывны.

Следствие III.1.9.3.

$$\sin\uparrow\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos\downarrow[0, \pi]$$

$$\operatorname{tg}\uparrow\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\mathfrak{Def}$:

$$\arcsin = \left(\sin\mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}$$

$$\arccos = \left(\cos\mid_{[0,\pi]}\right)^{-1}$$

$$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}\mid_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$$

Теорема III.1.10. .

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

▶ $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x\to 0} 1 \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqslant 1$$
◀

III.1.1. Степенная функция

$$x^n \quad x \in [0; +\infty); n \in \mathbb{N}$$

Больше нуля, непрерывна, инфимум 0, супремум бесконечен, строго монотонная.

$$x^{\frac{1}{n}} \text{ обратная}$$

Тоже непрерывна.

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right) m$$

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

Утверждение. Определение корректно.

Утверждение. Свойства степени выполняются.

Лемма III.1.1.

$$\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}}$$

▶ $a \geqslant 1$:

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + \varepsilon n > \varepsilon n > \varepsilon N > a$$

$$N > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N \ (1+\varepsilon)^n > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \geqslant 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

$0 < a < 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

◀

Теорема III.1.11. . Пусть $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $a > 0$. Тогда последовательноть a^{x_n} имеет предел, зависящий только от x и a.

▶

$$a^{x_n} - a^{x_m} = a^{x_n}\left(a^{x_m - x_n} - 1\right)$$

$$\forall n \ |x_n| \leqslant M \Rightarrow a^{x_n} \in \left[a^{-M}; a^M\right]$$

Т.о.

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leqslant \underbrace{a^M}_{\eqqcolon C} \Big(a_{x_n - x_m} - 1\Big) < C\varepsilon$$

По лемме

$$\exists N \colon \forall k > N \ |a^{\frac{1}{n}} < 1| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{N} \to -\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a_{x_n - x_m} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < 1 + \varepsilon$$

Т.о. предел существует.

Пусть теперь

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = x \qquad \lim_{n \to +\infty} a^{x_n} \neq \lim_{n \to +\infty} a^{y_n}$$

Но рассмотрим

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, ...\} \to x$$

Но тогда a^{z_n} не имеет предела, что противоречит доказанному выше. ◀

$\mathfrak{Def}$:

$$a^x = \lim_{\substack{x_n \to x \\ x_n \in \mathbb{Q}}}$$

Свойства степени:

1. Для $x \in \mathbb{Q}$ корректно.
2. $x^a x^b = x^{a+b}$
3. $(x^a)^b = x^{ab}$
4. $x^a y^a = (xy)^a$
5. $x < y \land a > 0 \to x^a < y^a$

▶

$$a_n \to a > 0 \Rightarrow a_n > 0 \text{ с какого-то места}$$
$$x_n^a < x_n^b \Rightarrow x^a \leqslant x^b$$

Теперь хотим строгое

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$$
$$z \leftrightharpoons \frac{x}{y}$$
$$z^{a_n} < 1 \land z^{a_n} \downarrow \Rightarrow z_a < 1$$

◀

6. $x^a < x^b$ при $x > 1 \land a < b$ или $0 < x < 1 \land a > b$

▶ $x > 1 \land a < b$:

$$a < p < q < b \quad p, q \in Q$$
$$x^{a_n} < x^p < x^q < x^{b_n}$$
$$x^a \leqslant x^p < x^q \leqslant x^b$$

◀

Лемма III.1.2.

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} a^x = 1$$

▶

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \colon \forall n > N \, \left|a^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$$
$$\forall |x| < \frac{1}{N} 1 - \varepsilon < \frac{1}{1+\varepsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$

Возьмём $\delta = \frac{1}{N}$ ◀

Теорема III.1.12. .

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \leftrightharpoons a^x \text{ непрерывна}$$

▶ Надо доказать, что $a^{\lim_{n \to +\infty} x_n} = \lim_{n \to +\infty} a^{x_n}$
$x_0 \leftrightharpoons \lim_{n \to +\infty} x_n$

$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0} \left(a^{x_n - x_0} - 1\right) \to 0$$

◀

Следствие III.1.12.1. Есть обратная

$$\log_a x$$

Теорема III.1.13. .

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

▶ $x_n \to +\infty$. $[x_n] = k$

$$\left(1+1\frac{k+1}{)}^{k}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x}_{n} \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$x_n \to +\infty$. $y_n = -x_n$

$$f(x_n) = \left(1+\frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n} \to e$$

А для смеси возьмём две части, в каждой есть хороший номер. ◀

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin(x-\varepsilon)-\sin x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{\varepsilon}{2})}{=}\cos x$$

III.2. Теоремы о среднем

Теорема III.2.1. Теорема Ферма. $f\colon \langle a,b\rangle$, $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема в x_0, x_0 — точка экстремума. Тогда

$$f'(x_0) = 0$$

▶ Пусть $x > x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

Пусть $x < x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

Но тогда

$$f'(x_0) = 0$$

◀

Теорема III.2.2. Теорема Ролля. $f\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b), $f(a) = f(b)$. Тогда

$$\exists c \in (a,b)\colon f'(c) = 0$$

▶ Если функция константна, то всё доказано. Иначе есть глобальный максимум и минимум, причём они не могут быть оба в концах. ◀

Следствие III.2.2.1. Между корнями функции есть корень производной.

Теорема III.2.3. Теорема Лагранжа. $f\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b).

$$\exists c \in (a,b)\colon f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$$

Теорема III.2.4. Теорема Коши. $f,g\colon [a,b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a,b), $g'(x) \neq 0 \neq g(b)-g(a)$.

$$\exists c\colon \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

▶ $h(x) = f(x) - Kg(x)$, $h(a) = h(b)$.

$$K = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Тогда

$$\exists c\colon h'(c) = 0$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

◀

Следствие III.2.4.1. $f\colon [a, b] \in \mathbb{R}$, f непрерывна, f дифференцируема на (a, b), $|f'(x)| \leqslant M$. Тогда

$$\forall x, y \in (a, b)\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

III.3. Формула Тейлора

Теорема III.3.1. Формула Тейлора.

$$T(x) = \sum i = 0^n \frac{T^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

▶

$$T(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

$$((x - x_o)^k)^{(m)} = \begin{cases} 0 & k < m \\ m! & k = m \\ k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)(x-x_0)^{k-m} & k > m \end{cases}$$

$$T(x)^{(m)} = \sum_{i=m}^{n} a_k k(k-1)(k-2)(k-3)\cdots(k-i+1)(x-x_0)^{k-m}$$

$$T(x_0)^{(m)} = a_m m!$$

$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$$

◀

$\mathfrak{Def}$: f дифференцируема n раз в точке x_0. Тогда многочленом Тейлора функции f в точке x_0 есть

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{k!}(x - x_0)^k$$

$\mathfrak{Def}$: Формула Тейлора:

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + R_{n,x_0} f(x)$$

Лемма III.3.1. g дифференцируема n раз в x_0. $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \cdots = g^{(n)}(x_0) = 0$. Тогда

$$g(x) = o\left((x - x_0)^n\right) x \to x_0$$

▶

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim x \to x_0 \frac{g'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{g^(n-1)}{n!\,(x-x_0)}$$

$g^{(n-1)}$ дифференцируема в x_0, а значит

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Т.о.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g^(n-1)}{n!\,(x - x_0)} = 0$$

Тогда

$$g(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

◀

Теорема III.3.2. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано. f дифференцируема n раз в x_0.

$$f(x) = T_{n,k}f(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \to x_0$$

▶

$$g(x) = f(x) - T_{n,k}f(x)$$

$$\forall k \leqslant n \; g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - \left(T_{n,x_0}f\right)^{(k)}(x_0) = 0$$

Пользуемся леммой. ◀

Следствие III.3.2.1.

$$\exists!\, P \in \mathbb{R}[x] \colon f(x) = P(x) + o((x - x_n)^k) \quad x \to x_0$$

▶ $x \to x_0$:

$$T_{n,x_0}f(x) + o\left((x - x_0)^n\right) = f(x) = P(x) + o\left((x - x_0)^n\right)$$

$$q(x) \leftrightharpoons T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o\left((x - x_0)^k\right)$$

$$q(x_0) = 0$$

$q \in \mathbb{R}[x]$

$$q(x) = (x - x_0)q_1(x)$$

$$q_1(x) = o\left((x - x_0)^{n-1}\right)$$

$$q_1(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$q_n(x_0) = o(1)$$

$$q_n \equiv 0$$

$$q \equiv 0$$

$$P \equiv T_{n,x_0}f$$

◀

Теорема III.3.3. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа. f дифференцируема $n/+1/$ раз в x_0, $f^{(n)}$ непрерывна на $[x, x_0]$.

$$\exists c \in (x, x_0) \colon f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

REM: Теорема Лагража — частный случай для $n = 0$.

$$\exists c \in (x, x_0) \colon f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$

▶

$$f(x) = T_{n,x_0} f(x) + M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Надо доказать, что в форме

$$\exists c \in (x, x_0) \colon M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$g(t) \leftrightharpoons f(t) - T_{n,x_0} f(t) - M(t - x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (T_{n,x_0})^{(k)}(t) - M(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n-k+2)(t - x_0)^{n-k+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

Тогда у функции g первые n производных равны нулю, а также $g(x) = 0$, значит

$$g(x_0) = g(x) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_1 \in (x, x_0) \colon g'(x_1) = 0$$

$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_2 \in (x, x_1) \colon g'(x_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_{n+1} \in (x, x_0) \colon g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$

$$g^{(n+1)}(t) = f(n-1)(t) - M(n+1)!$$

$$c = x_{n+1}$$

◀

Следствие III.3.3.1. $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $n{+}1$ раз дифференцируема на $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$.

$$\left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| \leqslant \frac{M \left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} = O\left((x - x_0)^n\right)$$

▶

$$\exists c \in (x, x_0) \colon \left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right|$$

◀

Следствие III.3.3.2. $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $n{+}1$ раз дифференцируема на $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$, $foralln$ $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$.

$$\lim_{n \to \infty} T_{n,x_0} = f(x)$$

▶

$$\left|f(x) - T_{n,x_0} f(x)\right| \leqslant \frac{M \left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

◀

$x_0 = 0$:

$$e^x = 1 \quad +x + \frac{x^2}{2!} \quad + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad + \dots + o(x^n)$$
$$e^x = 1 \quad +x + \frac{x^2}{2!} \quad + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \quad + \dots + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\sin x = 0 \quad +x + 0 \quad -\frac{x^3}{3!} + 0 \quad + \dots + o(x^{2n+1})$$
$$\cos x = 1 \quad +0 + \frac{x^2}{2!} \quad +0 - \frac{x^4}{4!} \quad + \dots + o(x^{2n+1})$$
$$\ln(x+1) = 0 \quad +x - \frac{x^2}{2} \quad + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad + \dots + o(x^n)$$
$$(x+1)^p = 1 \quad +px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 \quad + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 \quad + \dots + o(x^n)$$

$\mathfrak{Def}$: $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \overset{\text{Def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum i = 0^n a_n$$

Следствие III.3.3.3. $\forall x\ in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Теорема III.3.4. Иррациональность e.

$$e \notin \mathbb{Q}$$

▶

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$
$$2 < e < 3$$

Пусть $e = \frac{m}{n}$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1\frac{3!}{+} \dots + \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{n!\,(1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1\frac{3!}{+} \dots)}_{\in\mathbb{N}} + \frac{e^c}{n+1} = \underbrace{m(n-1)!}_{\in N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{N}$$
$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < e^c < 3$$
$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1} < 1$$

Т.о. $e \neq \frac{m}{n}$ ◀

III.4. Экстремумы функции

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$. x_0 — точка строгого локального минимума, если

$$\exists\delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta)\ \{x_0\} f(x) > f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального минимума, если

$$\exists\delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta) f(x) \geqslant f(x_0)$$

x_0 — точка строгого локального максимума, если

$$\exists\delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta)\ \{x_0\} f(x) < f(x_0)$$

x_0 — точка нестрогого локального максимума, если

$$\exists\delta > 0\colon \forall x \in (x-\delta, x+\delta) f(x) \leqslant f(x_0)$$

Точка локального максимума или минимума также называется точкой локального экстремума.

Теорема III.4.1. Необходимое условие экстремума. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема в x_0.

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

▶ Сузим до окрестности, там по теореме Ферма всё работает. ◀

REM: Обратное неверно, смотри $f(x) = x^3$.

Теорема III.4.2. Достаточное условие экстремума. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, f непрерывна на $(x_0-\delta, x_0+\delta) f$ дифференцируема на $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0+\delta)$. Тогда

- $f'((x_0-\delta, x_0)) > 0 \wedge f'((x_0, x_0+\delta)) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f'((x_0-\delta, x_0)) < 0 \wedge f'((x_0, x_0+\delta)) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

▶

$$f'((x_0-\delta, x_0)) > 0 \Rightarrow f \text{ возрастает на } (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0-\delta, x_0))$$

$$f'((x_0, x_0+\delta)) < 0 \Rightarrow f \text{ убывает на } (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0, x_0+\delta))$$

◀

Теорема III.4.3. Достаточное условие экстремума через вторую производную. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, f дважды дифференцируема в x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума

Теорема III.4.4. Достаточное условие экстремума через n-ую производную. $f\colon \langle a,b\rangle \to R$, $x_0 \in (a,b)$, f дифференцируема n раз в x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогда

- $2 \mid n \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ — точка максимума
- $2 \mid n \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ — точка минимума
- $2 \nmid 2 \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ — не экстремум

▶

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right)$$

$2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\ f(x) - f(x_0) > 0$ $2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\ f(x) - f(x_0) < 0$ $2 \not\div n \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)\ sign(f(x) - f(x_0)) = sign(x - x_0)$ ◀

III.5. Выпуклость

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.
f выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle\ \ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f строго выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle : x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle\ \ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f строго выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle : x \neq y\ \forall \lambda \in (0,1) f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Абсолютно эквивалентная запись, геом. смысл... 0,0301 10.12

REM: Сумма выпуклых и выпуклая, умноженная на положительную, выпуклы.

Лемма III.5.1. О трёх хордах. $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ — выпуклая, $u < v < w$, $u, v, w \in \langle a, b\rangle$. Тогда

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leqslant \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leqslant \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$

▶

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leqslant \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \Leftrightarrow (w-u)(f(v) - f(u)) \leqslant (v-u)(f(w) - f(u)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w-u)f(v) - (w-u)f(u) \leqslant (v-u)f(w) - (v-u)f(u) \Leftrightarrow (w-u)f(v) \leqslant (v-u)f(w) + (w-v)f(u)$$

◀

Теорема III.5.1. . $f\colon \langle a, b\rangle \to R$ — выпуклая. Тогда

$$\forall x \in (a, b)\ f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$$

▶ $u_1 < u_2 < x < v$

$$\frac{f(x) - f(u_1)}{x - u_1} \leqslant \frac{f(x) - f(u_2)}{x - u_2} \leqslant \frac{f(x) - f(v)}{x - v}$$

Тогда $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ растёт и ограничено, т.е. предел $f'_-(x)$ существует. Аналогично существует $f'_+(x)$, она убывает. Как видно, они в правильном порадке. ◀

Теорема III.5.2. . f — выпуклая на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда

$$\forall x, x_0 \in \langle a,b\rangle \;\; f(x) \geqslant f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0)$$

▶ $\Rightarrow$:
$x > x_0$, $y \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{y\to x_0} \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \leqslant \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$$

$x_0 - x > 0$

$$f'(x_0)(x-x_0) \leqslant f(x_0) - f(x)$$

Аналогично $x < x_0$, $y \in (x, x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}$$

$\Leftarrow$:
$u < v < w$

$$\forall x \;\; f(x) \geqslant f(v) + (x-v)f'(v)$$

$$f(u) \geqslant f(v) + (u-v)f'(v)$$

$$f(w) \geqslant f(v) + (w-v)f'(v)$$

Сложим с правильными коэффициентами:

$$(w-v)f(u) \geqslant (w-v)f(v) + (w-v)(u-v)f'(v)$$

$$(v-u)f(w) \geqslant (v-u)f(v) + (w-v)(v-u)f'(v)$$

$$(w-v)f(u) + (v-u)f(w) \geqslant (w-u)f(v)$$

◀

Теорема III.5.3. Критерий выпуклости. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема на (a,b).

$$f \text{ (строго) выпукла} \Leftrightarrow f' \text{ (строго) возрастает}$$

▶ $\Rightarrow$: $x_1 < x_2$

$$f(x) \geqslant f(x_1) + (x-x_1)f'(x_1)$$

$$f(x) \geqslant f(x_2) + (x-x_2)f'(x_2)$$

Подставим

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + (x_2-x_1)f'(x_1)$$

$$f(x_1) \geqslant f(x_2) + (x_1-x_2)f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)$$

La: Нужно проверить, что

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} \leqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$$

По теороеме Лагранжа, есть точки $\xi < \eta$

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v} = f'(\xi) \leqslant f'(\eta) = \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$$

◀

Теорема III.5.4. Критерий выпуклости через вторую производную. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, f дважды дифференцируема на (a,b).

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' > 0$$

▶ Смотрим на теоремы о монотонности. ◀

Теорема III.5.5. Неравенство Денсена. $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла.

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset \langle a,b\rangle\ \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]\colon\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

▶ Метод математической индукции. Теорема при $n = 2$ совпадает с определением выпуклости.

$$f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\leftrightharpoons y} + \lambda x_{n+1} x_{n+1}\right) = f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}x_i\right) \leqslant (1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

◀

Следствие III.5.5.1. Неравенство о средних — достаточно рассмотреть

$$f(x) = -\ln x$$

Следствие III.5.5.2. Неравенство Гельдера:

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} \quad p, q > 1 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

▶ Если есть нули или отрицательные — перейдём к модулям.

$$f(x) = x^p$$

$$f\left(\right) =$$

$$\lambda_i a_i = \frac{x_i y_i}{(\sum_{i=1}^n y_i^p)^{\frac{1}{q}}}$$

◀

Следствие III.5.5.3. Неравентсво Минковского

Глава IV

Интегральное исчисление

IV.1. Неопределённый интеграл

$\mathfrak{Def}$: $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$. Функция $F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ называется первообразной f, если

$$F' = f$$

Не для всех f существует F. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

▶ Пусть есть $F' = f$. Тогда по теореме Дарбу

$$\forall a, b \in (-1, 1), c \in (F'(a), F'(b))\, \exists c \in (a, b)\colon F'(c) = C$$

◀

Теорема IV.1.1. О существовании первообразной. Для любой непрерывной $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ есть первообразная F. Докажем в следующем семестре.

Теорема IV.1.2. . $f, F\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, F — первоообразная. Тогда

1. $F + , c \in \mathbb{R}$ также первообразная.
2. $\varPhi$ — певрообразная только если $\varPhi = F + c$.

▶

$$(F + c)' = F' + 0 = f$$

Рассмотрим $G = \varPhi - F$. Она дифференцируема и

$$G' = (\varPhi - F)' = \varPhi' - F' = f - f = 0$$

Но тогда

$$G = const$$

◀

$\mathfrak{Def}$: Неопределённым интегралом функции f называется множество её первообразных.

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

Пока стоит воспринимать все символы интеграла как некоторые „скобки".

Если есть некоторая первообразная F, то

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Тот же смысл имеют записи

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$$

$$\int f\mathrm{d}x = F + c$$

Для того, чтобы найти неопределённый интеграл, достаточно найти какую-то первообразную, а для проверки первообразной достаточно взять от неё производную.

Таблица интегралов:

$$\int 0\mathrm{d}x = c$$
$$\int x^p\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$$
$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arccos x + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$$

IV.1.1. Арифметические действия с интегралами

.

$\mathfrak{Def}$: Пусть A, B — множества. Тогда

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$$

Теорема IV.1.3. Об арифметических операциях с интегралами.

$$\int (f \pm g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x$$

$\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f\mathrm{d}x = \alpha \int f\mathrm{d}x$$

REM: Именно из-за того, что константы в записи нет, мы исключаем ноль.

▶ F, G — первообразные соотвественно f, g.

$$\int f\mathrm{d}x = \{F + c_1\}$$

$$\int g\mathrm{d}x = \{G + c_2\}$$

$$\int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x = \{F + c_1\} \pm \{G + c_2\} = \{F + G + c_3\} =$$

$(F + G)' = f + g$

$$= \int (f + g)\mathrm{d}x$$

$$\alpha \int f\mathrm{d}x = \alpha\{F + c_1\} = \{\alpha F + c_2\} =$$

$(\alpha F)' = \alpha f$

$$= \int \alpha f\mathrm{d}x$$

◀

Теорема IV.1.4. Замена переменной в неопределённом интеграле. $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ непрерывна, $\varphi\colon \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ непрерывно дифференцируема.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c$$

▶

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

◀

Следствие IV.1.4.1.

$$\int f(\alpha x + \beta)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x + \beta) + c$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$$

$f = x^2, \varphi = \ln x$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x = \int (\ln x)^2(\ln x)'\mathrm{d}x = \frac{(\ln x)^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$a > 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c =$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

$f = \frac{1}{x^2+1}$

Теорема IV.1.5. Интегрирование по частям. f, g — дифференцируемые, $f'g$ — интегрируемая.

$$\int fg' \mathrm{d}x = fg - \int f'g \mathrm{d}x$$

▶ Φ — первообразная $f'g$.

$$(fg - \Phi + c)' = fg' + f'g - f'g = fg'$$

◀

Пример:

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - \int 2xe^x \mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x \mathrm{d}x =$$

$$= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x \mathrm{d}x\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

Есть термин „берущеися” интегралы. Это интегралы, выражаемые через элементарные функции. Их, вообще говоря, мало. К ним относятся рациональные функции (отношение многочленов), произведение тригинометрических функций, $x\sqrt{ax^2+bx+c}$. Не берутся, например,

$$\int e^{x^2} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{e^x}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$$