

**Лекции по математическому анализу**  
**Лектор: Храбров Александр Игоревич**  
Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

---

## Содержание

|    |   |    |
|----|---|----|
| 1  | Множества   | 5  |
| 2  | Бинарные отношения  | 7  |
| 3  | Вещественные числа  | 9  |
| 4  | Верхняя и нижняя граница  | 11 |
| 5  | Теорема о вложенных отрезках                                    | 12 |
| 6  | Метрические пространства  | 12 |
| 7  | Неравенства Коши-Буняковского и Минковского                     | 13 |
| 8  | Открытые множества  | 14 |
| 9  | Внутренние точки и внутренность множества                       | 14 |
| 10 | Замкнутые множества   | 15 |
| 11 | Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве | 17 |
| 12 | Предельные точки  | 18 |
| 13 | Супремум и инфимум замкнутых множеств                           | 19 |
| 14 | Предел последовательности                                       | 19 |
| 15 | Предельный переход в неравенстве                                | 20 |
| 16 | Теорема о двух милиционерах                                     | 21 |
| 17 | Предел монотонной последовательности                            | 21 |
| 18 | Конечное векторное пространство                                 | 22 |
| 19 | Арифметические свойства предела                                 | 23 |
| 20 | Покоординатная сходимость                                       | 25 |
| 21 | Бесконечно малые и большие                                      | 25 |
| 22 | Связь между бесконечно большими и малыми                        | 26 |
| 23 | Компактность  | 27 |

|    |   |    |
|----|---|----|
| 24 | Свойства компактного множества  | 27 |
| 25 | Теорема о пересечении семейства компактов                                 | 28 |
| 26 | Теорема о вложенных параллелепипедах                                      | 28 |
| 27 | Теорема Гейне-Бореля  | 29 |
| 28 | Подпоследовательность   | 29 |
| 29 | Секвенциальная компактность   | 29 |
| 30 | Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия                          | 30 |
| 31 | Диаметр множества   | 30 |
| 32 | Фундаментальные последовательности  | 31 |
| 33 | Полнота компактных метрических пространств                                | 32 |
| 34 | Верхний и нижний предел   | 32 |
| 35 | Характеристика верхних и нижних пределов с помощью $N$ и $\varepsilon$    | 33 |
| 36 | Неравенство Бернулли  | 34 |
| 37 | Число $e$   | 34 |
| 38 | Сравнение скорости роста возрастания последовательностей                  | 35 |
| 39 | Теорема Штольца   | 35 |
| 40 | Теорема Штольца   | 36 |
| 41 | Пределы функций   | 37 |
| 42 | Равносильность определения по Коши и по Гейне                             | 37 |
| 43 | Свойства функций, имеющих предел  | 38 |
| 44 | Арифметические действия с пределами                                       | 38 |
| 45 | Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах | 39 |
| 46 | Левый и правый пределы. Предел монотонной функции                         | 39 |
| 47 | Критерий Коши для отображений и для функций                               | 39 |
| 48 | Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа                     | 40 |
| 49 | Арифметические действия с непрерывными функциями                          | 41 |
| 50 | Характеристика непрерывности в терминах прообразов                        | 42 |
| 51 | Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное        | 43 |

|   |    |
|---|----|
| 52 Непрерывность и компактность   | 44 |
| 53 Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции | 45 |
| 54 Равномерная непрерывность на функции. Теорема Кантора                              | 45 |
| 55 Теорема Больцано-Коши  | 46 |
| 56 Непрерывность тригонометрических функций   | 47 |
| 57 Степенная функция  | 47 |
| 58 Логарифм   | 49 |
| 59 Следствия  | 50 |
| 60 Сравнение функций  | 51 |
| 61 Производная  | 51 |
| 62 Геометрический смысл производной   | 52 |
| 63 Односторонние производные  | 53 |
| 64 Непрерывность дифференцируемой функции   | 53 |
| 65 Арифметические действия с дифференцируемыми функциями                              | 54 |
| 66 Производная композиции   | 54 |
| 67 Теорема о дифференцируемости обратной функции                                      | 55 |
| 68 Производные элементарных функций   | 56 |
| 69 Теоремы Ферма и Ролля  | 56 |
| 70 Теоремы Лагранжа и Коши  | 57 |
| 71 Следствия теоремы Лагранжа   | 57 |
| 72 Теорема Дарбу  | 59 |
| 73 Правило Лопиталя   | 59 |
| 74 Производные высших порядков  | 60 |
| 75 Арифметические действия с производными высших порядков                             | 61 |
| 76 Формула Тейлора  | 61 |
| 77 Формула Тейлора с остатком в форме Пеано   | 62 |
| 78 Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа  | 63 |

|    |  |    |
|----|--|----|
| 79 | Формула Тейлора для некоторых функций                      | 64 |
| 80 | Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа      | 64 |
| 81 | Иррациональность числа $e$                                 | 65 |
| 82 | Локальные максимумы и минимумы                             | 65 |
| 83 | Экстремумы функции   | 65 |
| 84 | Достаточные условия экстремума                             | 66 |
| 85 | Выпуклость   | 67 |
| 86 | Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции        | 67 |
| 87 | Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных | 68 |
| 88 | Неравенство Йенсена  | 69 |
| 89 | Неопределённый интеграл                                    | 69 |
| 90 | Таблица интегралов   | 71 |
| 91 | Замена переменной  | 72 |
| 92 | Интегрирование по частям                                   | 73 |

# 1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ( $x \in A$ ) или нет ( $x \notin A$ ).

**Def:** Множество  $A$  — подмножество  $B$ , если все элементы  $A$  содержатся и в  $B$ .

$$A \subset B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \ x \in B$$

**Def:** Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge B \subset A$$

**Def:** Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \ x \notin \emptyset$$

**Def:**  $2^A$  — множество всех подмножеств  $A$ .

$$2^A \stackrel{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$  — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$  — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}$ ,  $\Phi(x)$  — условие.

Например,  $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ имеет ровно 2 натуральных делителя}\}$ .

Бывают некорректно заданные «множества». Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим  $\Phi(n)$  — истина, если  $n$  нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда  $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$  — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как «Наименьший элемент множества...»

**Def:** Пересечение двух множеств — множество, состоящее из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

**Def:** Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

**Def:** Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

**Def:** Симметрическая разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \stackrel{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I: x \in A_i\}; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность

$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

**Теорема 1.1. Правила де Моргана.**  $A, B_\alpha, \alpha \in I$ . Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha); A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$



$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

**Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности.**  $A, B_\alpha, \alpha \in I$ . Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ \forall \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I: \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

**Def:** Упорядоченная пара  $\langle a, b \rangle$  или  $(a, b)$  — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

**Def:** Упорядоченная  $n$ -ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i = b_i$$

**Def:** Декартово произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i \in A_i$$

## 2. Бинарные отношения

**Def:** Отношение на множествах  $A$  и  $B$  — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a R b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

**Def:** Область определения отношения

$$\beta_R = \text{dom}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in R\}$$

**Def:** Область значения отношения

$$\rho_R = \text{ran}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in R\}$$

Def: Обратное отношение

$$R^{-1}: \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b R^{-1} a \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a R b$$

Def: Композиция отношений

$$R_1: A \rightarrow B; R_2: B \rightarrow C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a R_1 b \wedge b R_2 c\}$$

Про значок  $\circ$  — его использовать не будем

Пример композиции:  $<: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

$$< \circ < = \{(a, b) \mid b - a \geq 2\}$$

Def: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f: A \rightarrow B$$

$$a f b_1 \wedge a f b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a f b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A — \text{область определения})$$

Def: Свойства отображений:

1. Рефлексивность  $a R a$
2. Симметричность  $a R b \Leftrightarrow b R a$
3. Транзитивность  $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$
4. Иррефлексивность  $\neg a R a$
5. Антисимметричность  $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$ : 1, 2, 3, 5
- $\equiv_5$ : 1, 2, 3
- $\leq$ : 1, 3, 5
- $<$ : 3, 4, 5
- $\subset$ : 1, 3, 5



### 3. Вещественные числа

**Def:** Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции  $+$  и  $\times$ , причём:

1. Коммутативность  $\forall a, b \ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность  $\forall a, b, c \ a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент  $\exists o: \forall a \ a + o = a; \exists e: \forall a \ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент  $\forall a \ \exists -a: a + (-a) = o; \forall a \neq o \ \exists a^{-1}: a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность  $\forall a, b, c \ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения  $\leq$  (и аналогично  $<$ , также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5.  $\forall a, b, c \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6.  $\forall a, b \ a > 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Также выполнена аксиома полноты:  $A, B \subset \mathbb{R}, A \cup B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$ . Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

*REM:* На  $\mathbb{Q}$  аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

**Теорема 3.1. Принцип Архимеда.** Пусть  $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$ . Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N}: x < ny$$



$$A \Leftrightarrow \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}: u < ny\}; y \in A$$

Пусть  $A \neq \mathbb{R}$ . Тогда  $B \Leftrightarrow \mathbb{R} - A \neq \emptyset$ . Рассмотрим  $a \in A; b \in B$ .

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда  $c \in B$ . Пусть  $c - y \notin B$ , тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geq c \Rightarrow y \leq 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом  $A = \mathbb{R}$

*Следствие 3.1.1.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$$

► Рассмотрим  $x = 1, y = \varepsilon$

*Следствие 3.1.2.*  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q}: x < r < y$$

►

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что  $\exists m \in \mathbb{Z}: m \leq nx < m + 1$ . Вообще говоря,  $m \stackrel{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$ .

$$M \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq nx\}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N}: \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмотрим  $y = 1; x = nx; y > 0$ . По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N}: k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \quad m < k \Rightarrow \exists m = \max M: m \leq nx < m + 1$$

$$m \leq nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x < \frac{m + 1}{n}$$

Осталось проверить  $\frac{m+1}{n} < y$ .

$$\frac{m}{n} \leq x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m + 1}{n} < y$$

*Следствие 3.1.3.*  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ .

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x < z < y$$

►

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2}: z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: x < z < y \end{aligned}$$

## 4. Верхняя и нижняя граница

**Def:**  $A \subset \mathbb{R}$ .

$x \in \mathbb{R}$  — верхняя граница  $A$ , если

$$\forall a \in A : a \leq x$$

$x \in \mathbb{R}$  — нижняя граница  $A$ , если

$$\forall a \in A : a \geq x$$

**Def:**  $A$  ограничено сверху, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — верхняя граница } A$$

$A$  ограничено снизу, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — нижняя граница } A$$

$A$  ограничено, если  $A$  ограничено сверху и снизу.

*REM:* Границ, если они есть, много.

**Def:**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  ограничено сверху.  $x$  — супремум  $A$ , если  $x$  — наименьшая из верхних границ.

**Def:**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A$  ограничено снизу.  $x$  — инфимум  $A$ , если  $x$  — наибольшая из нижних границ.

Пример:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

**Утверждение.**  $\mathbb{N}$  не ограничено сверху.

►  $x$  — верхняя граница  $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ . ◀

**Теорема 4.1. Существование точной границы.**  $A \neq \emptyset$ .

1. Если  $A$  ограничено сверху, то  $\exists x = \sup A$ .
2. Если  $A$  ограничено снизу, то  $\exists x = \inf A$ .

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

►

1.  $B$  — множество всех верхних границ  $A$ .

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq c \wedge \forall b \in B : c \leq b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим  $B = \{-a : a \in A\}$ . Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

*REM:* Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$  ◀

**Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.**

1.  $A$  ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

2.  $A$  ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \geq c \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < c + \varepsilon)$$

►

$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0 : b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$
 ◀

## 5. Теорема о вложенных отрезках

**Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках.** Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту.  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall i \in \mathbb{N} (a_i \leq a_{i+1} \wedge b_i \geq b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$ . Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

►  $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$ . Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

*REM:* Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

*REM:* Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

*REM:*  $\mathbb{R}$ . Рассмотрим приближения  $\sqrt{2}$ .

## 6. Метрические пространства

**Def:** Пусть есть множество  $X$  и отображение  $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ . Тогда  $\rho$  называется метрикой, если:

1.  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Также пара  $(X, \rho)$  называется метрическим пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

2.  $\rho(x, y) = |x - y|$

3. Евклидовская метрика.  $\rho$  — длина отрезка на плоскости между точками

4. Манхеттанская метрика.  $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

5. Расстояния на сфере.

6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка  $O$ . Тогда для точек на одном луче из  $O$  расстояние  $\rho(A, B) = |AB|$ , иначе  $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$

## 7. Пространство $\mathbb{R}^n$ , метрика

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

**Def:** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство. Тогда  $(Y, \rho|_{Y \times Y})$  — подпространство  $X$ .  $Y \subset X$ .

**Def:**  $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$  — открытый шар.

**Def:**  $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$  — замкнутый шар.

Свойства:

1.  $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2.  $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

► Рассмотрим  $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$ .

## 7. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского

**Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского.**  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

►

$$f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = \underbrace{\left( a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right)}_{\Leftarrow A} t^2 - 2 \underbrace{\left( a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)}_{\Leftarrow C} t + \underbrace{\left( b_1^2 + \dots + b_n^2 \right)}_{\Leftarrow B}$$

$f$  имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leq 0 \Rightarrow 4(C^2 - AB) \leq 0 \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

*REM:* Равенство в случае, если числа пропорциональны.

►

$$a_i = \alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень } t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

**Теорема 7.2. Неравенство Минковского.**

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$$

► Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i^2}_{\Leftarrow A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k b_i^2}_{\Leftarrow B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{AB} \Leftarrow$$

$\Leftarrow$  Неравенство Коши-Буняковского

*REM:* Равенство в случае, если числа пропорциональны.

## 8. Открытые множества

**Def:**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.  $G \subset X$  — открытое множество, если

$$\forall x \in G \exists r > 0: B_r(x) \subset G$$

**Теорема 8.1. О свойствах открытых множеств.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

1.  $\emptyset$  и  $X$  — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4.  $B_r(a)$  открыт.



1. Очевидно.

- 2.

$$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3.  $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n \ x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \ \exists r_k > 0: B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k: G_r \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$

- 4.

$$\forall x \in B_r(a) \exists r_x = \frac{1}{2} (r - \rho(a, x))$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$



*REM:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

## 9. Внутренние точки и внутренность множества

**Def:**  $x \in A$  — внутренняя точка  $A$ , если  $\exists r > 0: B_r(x) \subset A$

*REM:*  $x$  — внутренняя точка  $A$  эквивалентно тому, что в  $A$  содержится некое открытое множество, содержащее  $x$ .

**Def:** Внутренность множества  $A$ :

$$A^0 = \text{int } A \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1.  $\text{int } A \subset A$

2.  $\text{int } A$  — множество всех внутренних точек.
3.  $\text{int } A$  открыто.
4.  $A$  открыто  $\Leftrightarrow A = \text{int } A$
5.  $A \subset B \Rightarrow \text{int } A \subset \text{int } B$
6.  $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7.  $\text{int int } A = \text{int } A$

## 10. Замкнутые множества

**Def:** Замкнутое множество — множество, дополнение которого открыто.

**Теорема 10.1. О свойствах замкнутых множеств.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

1.  $\emptyset$  и  $X$  — замкнуты.
2. Перечисление замкнутых — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых замкнуто.
4. Замкнутый шар замкнут.



1. Очевидно
2. По формулам де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_{\alpha})$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что  $X \setminus \bar{B}_r(a)$  открыт. Рассмотрим  $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$ . Тогда по определению

$$\rho(a, x) > r$$

Покажем, что

$$B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$

Пусть  $\exists y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$ . Тогда

$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leq r$$

$$y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}; 1 \right] = (0; 1]$$

**Def:**  $A \subset X, (X, \rho)$ . Тогда замыкание множества  $A$  — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ .

$$\text{cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

**Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.**

$$X \setminus \text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

$$X \setminus \text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\begin{aligned} X \setminus \text{cl } A &= X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) \\ X \setminus F &\text{ открыто} \\ X \setminus F &\subset X \setminus A \end{aligned}$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \text{int}(X \setminus A)$$

Аналогично

*Следствие 10.2.1.*

$$\text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1.  $A \subset \text{cl } A$
2.  $\text{cl } A$  замкнуто.
3.  $A$  замкнуто  $\Leftrightarrow A = \text{cl } A$
4.  $A \subset B \Rightarrow \text{cl } A \subset \text{cl } B$
5.  $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$
6.  $\text{cl cl } A = \text{cl } A$



## 11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

**Теорема 11.1.** Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве.  $(X; \rho)$  — пространство,  $(Y; \rho)$  — подпространство.

1.  $A$  открыто в  $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$  — открытое в  $X$ :  $A = G \cap Y$
2.  $A$  замкнуто в  $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$  — замкнутое в  $X$ :  $A = F \cap Y$



1.  $\Rightarrow$ :

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A$$

$$G \Leftarrow \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A$$

$\Leftarrow$ :

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к дополнениям

**Теорема 11.2.** О замыканиях.  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$

$$x \in \text{cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

►  $\Rightarrow$ : Пусть  $\exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$ . Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замкнуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\text{cl } A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \text{cl } A$$

$\Leftarrow$ : Пусть  $x \notin \text{cl } A \Rightarrow \exists F \supset A: x \notin F \wedge F$  закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$$

*Следствие 11.2.1.*  $U$  открытое  $\wedge U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \text{cl } A = \emptyset$

► Пусть  $x \in U \cap \text{cl } A$ .

$$x \in \text{cl } A \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0: B_{r_0} \subset U$$

Но  $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

## 12. Предельные точки

**Def:** Проколота окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

**Def:** Точка  $x \in X$  предельная у множества  $A$ , если

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

**Def:**  $A'$  — множество предельных точек.

Свойства:

1.  $\text{cl } A = A \cup A'$
2.  $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3.  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

►  $\supset$ :

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$

$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

$\subset$ : Пусть  $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$ .

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0: \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leq r_0 \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

Тогда

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

**Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.**

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 |B_r(x) \cap A| = \infty$$

►

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A: y_1 \neq x \wedge y_1 \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x, y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A: y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y_2 \in B_{\rho(x, y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}: y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

*Следствие 12.1.1.*  $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

## 13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

**Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.**

$A$  ограничено сверху и замкнуто  $\Rightarrow \sup A \in A$

$A$  ограничено снизу и замкнуто  $\Rightarrow \inf A \in A$

►  $a = \sup A$ . Тогда

$$\forall x \in A \ x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: x > a - \varepsilon$$

Пусть  $a \notin A$ . Рассмотрим  $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$ .

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$



## 14. Предел последовательности

**Def:** Пусть есть пространство  $(X, \rho)$  и последовательность  $(x_i)$ . Тогда

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x$
- $\mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

*REM:* Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на  $(0; +\infty)$  нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

**Теорема 14.1. Свойства предела.**

1.  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$  каждая окрестность  $x^*$  содержит всю последовательность с некоторого элемента
2.  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3.  $\exists x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow (x_n)$  ограничена
4.  $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$



1.  $\Rightarrow$ : Пусть  $x^* \in U$  — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0: B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U$$

$$\Leftarrow: U \ni B_\varepsilon(x^*).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

2. Пусть  $\varepsilon \Leftarrow \frac{\rho(x^*; x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1 \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2 \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall n \geq \max\{N_1; N_2\} \left\{ \begin{array}{l} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leq \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

3.  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \rho(x^*; x_n) < 1$ . Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n < N} \{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n \ x_n \in B_R(x^*)$$

4.  $x \in A'$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} x_1 &\in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_2 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2}; \rho(x; x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_3 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3}; \rho(x; x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ &\vdots \\ x_n &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n}; \rho(x; x_{n-1})\}}(x) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall n \geq N \ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

*REM:* В пункте 4 можно выбрать различные  $x_n$ .

*REM:* Если  $x_n$  — различные и  $x^*$  — их предел, то  $x^* \in \{x_n\}'$

*REM:*

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \text{cl } A$$

Далее будем работать с  $(\mathbb{R}; |x - y|)$ .

## 15. Предельный переход в неравенстве

**Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве.** Пусть  $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leq y_n$  (или  $x_n < y_n$ ). Тогда  $x \leq y$ .

► Пусть  $y < x; \varepsilon \Leftarrow \frac{x-y}{2}$ . Тогда

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

*РЕМ:* Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

*РЕМ:* Строгие неравенства не сохраняются.

*Следствие 15.1.1.*  $x_n \leq b \Rightarrow x \leq b$

*Следствие 15.1.2.*  $x_n \geq a \Rightarrow x \geq a$

*Следствие 15.1.3.*  $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

## 16. Теорема о двух милиционерах

**Теорема 16.1. О двух милиционерах.** Пусть  $x_n \leq y_n \leq z_n$  и  $\lim x_n = \lim z_n = l$ . Тогда  $\lim y_n = l$ .

► Выберем  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \forall n \geq N l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon$$

Тогда  $\lim y_n = l$

*Следствие 16.1.1.*  $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leq z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

*Следствие 16.1.2.* Если  $\lim x_n = 0$ , а  $y_n$  ограничена, то  $\lim x_n y_n = 0$ .

## 17. Предел монотонной последовательности

**Def:**  $(x_n)$  нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

$(x_n)$  строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

$(x_n)$  нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

$(x_n)$  строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

**Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса.** Монотонная последовательность ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

►  $\Leftarrow$ : Очевидно.

$\Rightarrow$ : Пусть  $(x_n)$  возрастает. Она ограничена, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k: x_k > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq a$$

Тогда

$$\forall n \geq k |x_n - a| < \varepsilon$$

## 18. Конечное векторное пространство

**Def:** Вектор — кортеж  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ . Операция сложения

$$+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$$

### 1. Сложение

(a) Коммутативно

(b) Ассоциативно

(c) Существует ноль  $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_d$

(d) Существует обратный элемент

2.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

3.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

4.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

5.  $1x = x$

**Def:** Общее определение векторного пространства —

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\times : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

Обладает свойствами 1-4 и  $1X = X$

**Def:** Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Свойства:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

**Def:** Общее определение скалярного произведения:  $X$  — векторное пространство. Задана операция  $\langle x, y \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  обладающая указанными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

**Def:** (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1.  $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  (нер-во Коши–Вуняковского)
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (нер-во треугольника)
5.  $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$  (нер-во Минковского)
6.  $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

►  $\|x - y\| = \|y - x\|$ . Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|$$

А это неравенство треугольника. ◀

7.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  — метрика. Это ровно евклидово пространство на  $\mathbb{R}^d$ .

**Def:** Общее определение нормы:  $\|x\|: X \Rightarrow \mathbb{R}$ , обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скалярного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1.  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|$
2.  $\|x\|_\infty = \max_{k=1..d} |x_k|$



$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leq \max_{k=1..d} (|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leq \|x\| + \|y\|$$



- 3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^d |x_k|^p}$$

## 19. Арифметические свойства предела

Пусть есть  $(\mathbb{R}^d, \rho)$  со стандартной метрикой и нормой.

**Утверждение.**  $x_n \in \mathbb{R}^d$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$



$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$



*REM:*  $A \subset \mathbb{R}^d$  ограничено  $\Leftrightarrow \exists M: \forall x \in A \|x\| \leq M$

**Теорема 19.1. Арифметические свойства предела.**  $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, \lim x_n = x_0, \lim y_n = y_0, \lim \lambda = \lambda_0$ .

1.  $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2.  $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3.  $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4.  $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

5.  $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3: \forall n > N_3 |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = \\ &= |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \leq M \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Но тогда

$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4.  $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}); y_n = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)})$  Это докажем позже

5.

$$0 \leq \| \|x_n\| - \|x_0\| \| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$



**Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных.**  $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1.  $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2.  $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3.  $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4.  $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если  $y_n, y_0 \neq 0$ , то  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

► Докажем, что  $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$ .

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n| |y_0|} \Leftrightarrow A$$

$$\exists N_1: \forall n > N_1 |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geq |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|}$$





## 20. Покоординатная сходимость

**Def:**  $\{x_n\}$  — последовательность в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда  $\{x_n\}$  сходится в  $x_0$  покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}: \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

**Теорема 20.1. О сходимости покоординатно.**  $\{x_n\}$  сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.



$$|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})^2} \leq \sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})$$



*Следствие 20.1.1.*  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ . Тогда  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$



$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \rightarrow y_n^{(i)} \\ y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \rightarrow y_0^{(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow \sum_{i=1}^d x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$$



## 21. Бесконечно малые и большие

**Def:**

$$\lim x_n = +\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ |x_n| > E$$

*REM:*

$$\left[ \begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array} \Rightarrow \lim x_n = \infty \right.$$

Также заметим, что обратное неверно ( $x_n = (-1)^n n$ ).

*REM:*  $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$  неограниченна

*REM:* Единственность предела справедлива и расширенная на  $\pm\infty$ .

*REM:* Теорема о двух милиционерах справедлива и для бесконечно больших.

*REM:*  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$1. \pm c + \pm\infty = \pm\infty$$

$$2. \pm c - \pm\infty = \mp\infty$$

$$3. c > 0: \pm\infty \times c = \pm\infty$$

$$4. c < 0: \pm\infty \times c = \mp\infty$$

$$5. c > 0: \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$$

6.  $c < 0: \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$

7.  $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

8.  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

9.  $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$

10.  $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

11.  $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$

12.  $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$

13.  $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

**Def:** Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечен.

**Def:** Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

## 22. Связь между бесконечно большими и малыми

**Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых.** Пусть  $x_n \neq 0$ . Тогда

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists N: \forall n > N |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$

**Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми.** Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}$  — бесконечно малые,  $\{z_n\}$  ограничена. Тогда

1.  $x_n \pm y_n$  — бесконечно малая

2.  $x_n z_n$  — бесконечно малая

**Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.**

1.  $x_n \rightarrow +\infty \wedge y_n$  ограничена снизу  $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$

2.  $x_n \rightarrow -\infty \wedge y_n$  ограничена сверху  $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$

3.  $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$  ограничена  $\Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$

4.  $x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$

5.  $x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \leq a < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow -\infty$

6.  $x_n \rightarrow \infty \wedge |y_n| \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$

7.  $x_n \rightarrow a \neq 0 \wedge y_n \rightarrow 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

8.  $x_n$  ограничена  $\wedge y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$

9.  $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$  ограничена  $\wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \geq a$$

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \leq a$$

## 23. Компактность

**Def:** Множество  $A$  имеет покрытие множествами  $B_\alpha$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ .

**Def:** Множество  $A$  имеет открытое покрытие открытыми множествами  $B_\alpha$ , если  $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$ .

**Def:** Множество  $A$  компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\forall B_\alpha: K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n: K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$$

**Теорема 23.1. Компактность и подпространства.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $K \subset Y \subset X$ . Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

►  $\Rightarrow$ : Пусть  $B_\alpha$  — открытое в  $Y$ , что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в  $Y$  покрытием соответствующими множествами в  $X$ , выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в  $Y$ .

$\Leftarrow$ : Пусть  $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ . Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left( \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве  $Y$ , в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из  $X$ . ◀

REM: Например,  $(0, 1)$  не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left( \frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

## 24. Свойства компактного множества

**Теорема 24.1. Свойства компактного множества.** Если  $K$  компактно, то  $K$  замкнуто и ограничено.

►

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограничено}$$

Возьмём произвольный  $a \notin K$ . Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но  $(r \Leftarrow \min_{i=1}^k \{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\})$

$$\forall i = 1..k \ B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но  $K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$ . Т. о.  $B_r(a) \cap K = \emptyset$ . ◀

**Теорема 24.2. Признак компактного множества.** Замкнутое подмножество компактного компактно.

► Добавим к покрытию подмножества  $X \setminus K_1$ . ◀

## 25. Теорема о пересечении семейства компактов

**Теорема 25.1. Пересечение компактных.** Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

►  $K_0$  — любое из них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^k (X \setminus K_{x_i}) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^k K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

*Следствие 25.1.1.* Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто. ◀

## 26. Теорема о вложенных параллелепипедах

**Def:** Параллелепипедом на  $\mathbb{R}^d$  и  $a, b \in \mathbb{R}^d$  назовём

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i \leq x_i \leq b_i\} \quad (\text{закрытый})$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i < x_i < b_i\} \quad (\text{открытый})$$

**Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах.**  $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$  имеют непустое пересечение.

► Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

## 27. Теорема Гейне-Бореля

**Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля.** Замкнутый куб компактен



$$I = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ 0 \leq x_i \leq a\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобьём куб по какому-то измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покрывает ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрывает куб. ◀

## 28. Подпоследовательность

Def: Подпоследовательность:

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

**Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.**

Подпоследовательность имеет тот же предел.

Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

## 29. Секвенциальная компактность

**Теорема 29.1. Компактность в  $\mathbb{R}^d$ .** Следующее в  $\mathbb{R}^d$  равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограничено
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (*секвенциально компактно*)

► 2  $\Rightarrow$  1: ограничено, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

1  $\Rightarrow$  3: Возьмём последовательность  $\{x_n\} \subset E$  элементов множества  $F$ . Если множество элементов  $E$  конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X \exists r_x > 0: \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} \dot{B}_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^k \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k \{y_i\}$$

Получили, что  $E$  конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$ : Пусть  $K$  не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в  $K$ . Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу  $K$ .

Пусть  $K$  не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1: \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a, x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2: \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

$\vdots$

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса  $R$ . Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho(b, x_{n_k}) > \rho(a, x_{n_k}) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \rightarrow \infty$$

Значит  $K$  ограничено. ◀

*REM:*  $1 \Rightarrow 3$ ;  $3 \Rightarrow 2$ ;  $1 \Rightarrow 2$  справедливы для всех пространств.  $2 \Rightarrow 1$  ломается, например, на  $\mathbb{R}$  с дискретной метрикой.

## 30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

*Следствие 30.0.1.* В  $\mathbb{R}^d$  компактность  $K$  равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

► В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

*Следствие 30.0.2.* Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

► Множество значений ограничено, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

*Следствие 30.0.3.* В любой последовательности в  $\mathbb{R}^d$  есть сходящаяся в  $\bar{R}$  подпоследовательность.

► Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

## 31. Диаметр множества

Def: Диаметр множества:

$$\text{diam } A = \sup \rho(x, y)$$

**Теорема 31.1. Свойства диаметра.**

1.  $\text{diam } E = \text{diam cl } E$

2.  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$  (последовательность вложенных компактов);  $\text{diam } K_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigcap K_i$  — одноточечное



1.

$$E \subset \text{cl } E \Rightarrow \text{diam } E \leq \text{diam cl } E$$

$$d = \text{diam cl } E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0, y_0: \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists x_1 \in E: \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists y_1 \in E: \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geq \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$

Устремив  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\text{diam } E \geq \text{diam cl } E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого  $n$  хотя бы  $\rho(a, b)$ . Противоречие.



## 32. Фундаментальные последовательности

**Def:** Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(n, m) < \varepsilon$$

$$REM: E \Leftarrow \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \text{diam } E \rightarrow 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.



$$\forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > K \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Т.о.

$$\exists n_k > M = \max\{N, K\}: \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$



**Def:** Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

### 33. Полнота компактных метрических пространств

**Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.**

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В  $\mathbb{R}^d$  фундаментальная последовательность всегда сходится.

►  $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

$x_n$  — фундаментальная последовательность в  $\mathbb{R}^d$ .  $E_n \Leftarrow \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$  — ограничено.  $\text{cl } E_n$  — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\text{cl } E_1 \supset \text{cl } E_2 \supset \text{cl } E_3 \supset \dots$$

$$\text{diam cl } E_n = \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.

$$\exists! a: a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl } E_n$$

$$a \in \text{cl } E_n \Rightarrow \forall i > n \ 0 \leq \rho(a, x_i) \leq \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.  $x_n \rightarrow a$ . ◀

*REM:*  $\mathbb{R}^d$  полно.  $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$  не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

**Теорема 33.2. О полноте компактного пространства.** Компактное метрическое пространство полно.

► В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

### 34. Верхний и нижний предел

**Def:** Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k$$

*REM:*  $y_n \Leftarrow \inf_{k > n} x_n, z_n \Leftarrow \sup_{k > n} x_n$ .

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

**Def:**  $a$  — частичный предел последовательности, если  $a$  предел подпоследовательности.

*Лемма 34.1.* Если  $x_n$  монотонно возрастает и неограничена, то  $\lim x_n = +\infty$

**Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов.** У любой последовательности есть верхний и нижний предел в  $\overline{\mathbb{R}}$ , при этом

$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$



►  $y_n \Leftrightarrow \inf_{k>n} x_n$ ,  $z_n \Leftrightarrow \sup_{k>n} x_n$ . Если  $x_n$  ограничено, то и  $y_n$  ограничено. Если  $x_n$  не ограничено снизу, то и  $y_n$  не ограничено снизу. Т.о.  $\lim y_n = \underline{\lim} x_n$ . Аналогично существует верхний предел. ◀

**Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.**

1.  $\limsup$  — наибольший частичный предел.
2.  $\liminf$  — наименьший частичный предел.
3.  $\lim$  существует  $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$



1.  $a = \limsup x_n$ . Покажем, что  $a$  — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geq a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к  $a$ .

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к  $b$ , уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два милиционера



## 35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью $N$ и $\varepsilon$

**Теорема 35.1. Определение верхнего и нижнего предела через  $N$  и  $\varepsilon$ .**

1.

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$a = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \forall N : \exists n > N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$



1. Запишем в терминах  $y_n$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0 \exists N : \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

**Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.**

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \lim a_n \leq \lim b_n \\ \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \end{cases}$$

► Просто сводим к пределам инфимумов.

## 36. Неравенство Бернулли

**Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.**

$$\forall x > -1 \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq 1+nx$$

► Индукция: база очевидна. Пусть  $(1+x)^k \geq 1+kx$ . Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

*Следствие 36.1.1.* Если  $|t| > 1$ , то  $\lim t^n = +\infty$ . Если  $|t| < 1$ , то  $\lim t^n = 0$ .

## 37. Число e

Определим число  $e$ :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что  $x_n \uparrow; y_n \downarrow$ .

►

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \\ y_n < y_{n-1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 - \frac{n}{n^2-1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

Заметим, что при этом  $x_n < y_n$ . Собственно, тогда  $\lim x_n$  существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e$$

Свойства:

1.  $\lim y_n = e$
2.  $x_n < e < y_n$

## 38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

**Теорема 38.1. Предел убывающей по отношению.**  $x_n > 0$ ,  $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ . Тогда  $x_n \rightarrow 0$ .

► С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀

*Следствие 38.1.1.*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$



$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} < 1$$

*Следствие 38.1.2.*

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

*Следствие 38.1.3.*

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$



$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$



## 39. Теорема Штольца

**Теорема 39.1. Теорема Штольца.**  $0 < y_n < y_{n-1}$ ,  $\lim x_n = \lim y_n = 0$ ,  $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Тогда  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ .



1. Пусть  $a = 0$ .

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \left| \sum \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем  $N$ , такое что  $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$ , тогда при  $n$  и  $m > N$

$$< \sum_{k=m+1}^n \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

устремим  $n$  к бесконечности.

$$|x_m| < \varepsilon(y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{ при } m > N$$

2.  $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - ay_n$$



## 40. Теорема Штольца

**Теорема 40.1. Теорема Штольца.**  $0 < y_n < y_{n+1}$ ,  $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ ,  $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$ . Тогда  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ .

►  $a = 0$ :

$$\varepsilon_n \Leftarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^N + \sum_{i=N+1}^n$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leq \sum_{i=N+1}^n |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^n \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^n (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leq \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

$a \in \mathbb{R}$ :  $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$ . Фактом  $x_n \rightarrow \infty$  мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \rightarrow 0$$

$a = +\infty$ : Поменяем местами  $x_n$  и  $y_n$ . Проверим, что  $x_n$  монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$ : Сменим знаки  $x_n$ .



## 41. Пределы функций

**Def:**  $(X, \rho_x)$  и  $(Y, \rho_y)$  — метрические пространства.  $E \subset X$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ .  $f: X \rightarrow Y$ . Тогда говорят, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

если  $b \in Y$  и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

**REM:** Для бесконечности на  $\mathbb{R}$  есть частные случаи.

**Def:** По Гейне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E: x_n \neq a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

## 42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

**Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции.** Определения равносильны.



1. Коши  $\Rightarrow$  Гейне

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

Пусть  $\lim x_n = a$ ,  $x_n \in E$ ,  $x_n \neq a$

По  $\delta$  выберем  $N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$ , тогда  $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

Нашли номер  $N$  при котором  $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

2. Гейне  $\Rightarrow$  Коши

от противного.

По Коши  $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

Выберем последовательность  $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow \lim(f(x_n)) \neq b$$

Противоречие с определением по Гейне

*REM:* В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все  $x_n$  различны. ◀

*REM:* Можно рассматривать лишь такие последовательности, что  $\rho(x_n, a)$  убывает.

### 43. Свойства функций, имеющих предел

*REM:* Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

► Возьмём две сходящиеся последовательности  $x_n$  и  $y_n$ , после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям  $b$  и  $c$ . Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

**Утверждение.** Единственность предела  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка. Тогда предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  единственен.

► Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

**Теорема 43.1. Ограниченность.**  $f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Тогда

$$\exists r > 0: f|_{E \cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

**Теорема 43.2. Уход от нуля.**  $f: E \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \vec{0}$ . Тогда

$$\exists r > 0: \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E \quad f(x) \neq \vec{0}$$

►  $\varepsilon \Leftarrow \rho(x, \vec{0})$  ◀

### 44. Арифметические действия с пределами

**Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции.**  $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка  $E$ .

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$

$$3. \lim x \rightarrow a (f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$$

$$4. \lim x \rightarrow a \|f(x)\| = \|f_0\|$$

$$5. \lim x \rightarrow a \langle f(x), g(x) \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle$$

► Возьмём любые сходящиеся к  $a$  последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

**Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции..**  $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка  $E$ .

$$1. \lim x \rightarrow a (f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$$

$$2. \lim x \rightarrow a (f(x)g(x)) = f_0g_0$$

$$3. \lim x \rightarrow a |f(x)| = |f_0|$$

$$4. \lim x \rightarrow a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$$

► Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

## 45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

**Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве..**  $f, g: E \rightarrow Y$ ,  $a$  предельная точка  $E$ ,  $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leq g(x)$ . Тогда  $f_0 \leq g_0$ .

**Теорема 45.2. О двух милиционерах.**

## 46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

Def: Пределы слева и справа.  $f: E \cap \mathbb{R} \rightarrow Y$ .

$$\lim_{x \rightarrow a-} = \lim_{x \rightarrow a-0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (-\inf, a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} = \lim_{x \rightarrow a+0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (a, +\inf)}$$

**Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченной функции..**

## 47. Критерий Коши для отображений и для функций

**Теорема 47.1. Критерий Коши.**

$f: E \subset X \rightarrow Y$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ ,  $Y$  — полное

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



1.  $\Rightarrow$  Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2.  $\Leftarrow$

Берем любую последовательность  $x_n \neq a \in E \rightarrow a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$\Rightarrow f(x_n)$  — фундаментальная последовательность точек из  $Y$

$$\Rightarrow \exists \lim(f(x_n)) \text{ полнота } Y$$



## 48. Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа

**Def:** (По Коши)

$$f : E \subset X \rightarrow Y, a \in E$$

$f$  — непрерывно в точке  $a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

**Def:** (По Гейне)

$$\forall \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow a : f(x_n) \rightarrow f(a) \Leftrightarrow f(---)$$

**Def:**

$$f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow Y, a \in E$$

$f$  — непрерывно слева в точке  $a$

$$g = f|_{(-\infty, a] \cap E}, g \text{ — непрерывно в точке } a$$



Def:

$$f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow Y, a \in E$$

$f$  — непрерывно справа в точке  $a$

$$g = f|_{[a, +\infty) \cap E}, g \text{ — непрерывно в точке } a$$

## 49. Арифметические действия с непрерывными функциями

**Теорема 49.1. Арифметические действия с непрерывными функциями.**

$$f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}^d, a \in E, f, g \text{ непрерывны в точке } a$$

Тогда

1.  $f(x) + g(x)$  непрерывно в точке  $a$
2.  $cf(x)$  непрерывно в точке  $a$
3.  $f(x) - g(x)$  непрерывно в точке  $a$
4.  $\|f(x)\|$  непрерывно в точке  $a$
5.  $\langle f(x), g(x) \rangle$  непрерывно в точке  $a$

**Теорема 49.2.**

$$f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f, g \text{ непрерывны в точке } a$$

Тогда

1.  $f(x) + g(x)$  непрерывно в точке  $a$
2.  $f(x)g(x)$  непрерывно в точке  $a$
3.  $f(x) - g(x)$  непрерывно в точке  $a$
4.  $|f(x)|$  непрерывно в точке  $a$
5. Если  $g(a) \neq 0$ , то  $\frac{f(x)}{g(x)}$  непрерывно в точке  $a$

**Теорема 49.3. о стабильном знаке.**

$$f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f \text{ — непрерывно в точке } a \text{ и } f(a) \neq 0$$

Тогда

$$\exists B_\delta(a) \text{ такое что } \forall x \in B_\delta(a) \text{ sign}(f(x)) = \text{sign}(f(a))$$



$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$$



**Теорема 49.4. о непрерывности композиции.**

$$f : E_1 \subset X \rightarrow Y$$

$$g : E_2 \subset Y \rightarrow Z$$

$$f(E_1) \subset E_2, a \in E_2$$

$f$  — непрерывна в точке  $a$

$g$  — непрерывна в точке  $f(a)$

тогда  $g \circ f$  — непрерывно в точке  $a$ .

► Надо проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$

Берем  $\varepsilon$

$$\exists \gamma > 0 \forall y \in B_\gamma(f(a)) \cap E_2 : g(y) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \text{ (по непрерывности } g \text{ в точке } f(a))$$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : f(x) \in B_\gamma(f(a)) \text{ (по непрерывности } f \text{ в точке } a)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$



## 50. Характеристика непрерывности в терминах прообразов

**Теорема 50.1.**

$$f : x \rightarrow y$$

$f$  непрерывно во всех точках  $\Leftrightarrow$  прообраз любого открытого множества открыт.



1.  $\Rightarrow$

$G \subset Y$  (открытое), надо доказать, что  $f^{-1}(G)$  — открытое.

Возьмем  $a \in f^{-1}(G)$  надо доказать, что  $\exists$  шар с центром в точке  $a$  содержащийся в  $f^{-1}(G)$

$$f(a) \in G \text{ — открыто} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

Знаем, что  $f$  непрерывна в точке  $a$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

то есть

$$\forall x \in B_\delta(a), f(x) \in G$$

то есть

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}(G)$$

2.  $\Leftarrow$

Зафиксируем  $a \in X$

Надо доказать, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a), f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

Возьмем  $B_\varepsilon(f(a))$  — открытое множество,  $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$  — открытое  $\Rightarrow$

$\exists B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$



## 51. Непрерывность отображений из метрического пространства в векторное

**Теорема 51.1. ааа.**

$f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}^d, a \in E$

Тогда  $f$  непрерывна в точке  $a \Leftrightarrow$  все координаты функции  $f$  непрерывны в точке  $a$ .



1.  $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

то есть

$$\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

$$|f_i(x) - f_i(a)| \leq \sqrt{((f_1(x) - f_1(a))^2 + (f_2(x) - f_2(a))^2 + \dots)}$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon \Rightarrow f_i \in B_\varepsilon(f_i(a))$$

$$f_i \text{ ---}$$

непрерывна в точке  $a$ .

2.  $\Leftarrow$

Возьмем  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_d\} > 0$

Тогда  $\forall x \in B_\delta(a) \forall i = 1 \dots d |f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$

$$\Rightarrow (f_1(x) - f_1(a))^2 + \dots < d\varepsilon$$

$$\rho(f(x), f(a)) < \sqrt{d}\varepsilon$$



## 52. Непрерывность и компактность

Def:

$$f : E \subset X \rightarrow Y$$

$f$  — ограниченное отображение, если  $f(E)$  — ограничено.

**Теорема 52.1. Непрерывный образ компакта — компакт.**

$$f : X \rightarrow Y, f \text{ — непрерывен на } X, K \subset X, K \text{ — компакт} \Rightarrow f(K) \text{ — компакт}$$

► Пусть  $G_\alpha$  — открытые множества.

$\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset f(K)$  надо выбрать конечное подпокрытие.

Рассмотрим  $f^{-1}(G_\alpha)$  — открытое множество (по непрерывности  $f$ )

$$\bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(G_\alpha) \supset K$$

$\Rightarrow \exists$  конечное подпокрытие.

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i}) \supset K$$

$$\bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \supset f(K) \text{ конечное подпокрытие для } f(K)$$

*Следствие 52.1.1.*

1. Непрерывный образ компакта — компакт.

2. (Теорема Вейерштрасса)

$$f : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывен на } K \Rightarrow f \text{ — ограничена}$$

3.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывен на  $[a, b] \Rightarrow f$  — ограничена

4.  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  — непрерывен на  $K$ ,  $K$  — компакт  $\Rightarrow \exists a, b \in K, \forall x \in K f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

►  $f(K)$  — ограниченное подмножество  $\mathbb{R}$

$$A = \inf f(K)$$

$$B = \sup f(K)$$

$$f(K)$$

$$f(K) \text{ — замкнуто} \Rightarrow A, B \in f(K)$$

5. (теорема Вейерштрасса)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на  $[a, b]$ , тогда она принимает наибольшее и наименьшее значение.

## 53. Теоремы о непрерывности обратного отображения и о непрерывности монотонной функции

**Теорема 53.1.**  $f : K \rightarrow Y$  непрерывно на  $K$  биекция между  $K$  и  $Y$ , тогда  $f^{-1} : Y \rightarrow K$  непрерывно.

► Надо проверить, что для  $f^{-1}$  прообраз открытого множества — открытое. Т.е. надо проверить для  $f$ , что образ открытого — открыто.

Берем  $G \subset K$  — открытое.

$\Rightarrow K \setminus G$  — замкнутое подмножество  $K$ .

$\Rightarrow K \setminus G$  — компакт.

$\Rightarrow f(K \setminus G)$  — компакт  $\Rightarrow$  замкнутое

$\Rightarrow f(G)$  — открыто. ◀

*Следствие 53.1.1.*

1.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  строго монотонно и  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow f^{-1}$  непрерывно на множестве задания.

►  $[a, b] = K$  — компакт.

строго монотонная  $\Rightarrow$  инъекция.

$f$  — биекция между  $[a, b]$  и  $f([a, b])$  ◀

2.  $f : ([a, b], (a, b], [a, b), (a, b)) \rightarrow \mathbb{R}$  строго монотона и непрерывна на нем  $\Rightarrow f^{-1}$  непрерывна на множестве задания.

►

$$y = f(< a, b >)$$

$$f^{-1} : y \rightarrow \mathbb{R}$$

Надо доказать непрерывность  $\forall c \in y$

Берем  $c \in y \Rightarrow c = f(x_0)$  для некоторого  $x_0 \in < a, b >$

Возьмем  $x_0 \in [\alpha, \beta] \subset < a, b >$

$g = f|_{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  применяем следствие 1.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in B_\delta(c) \cap f([\alpha, \beta]) : g^{-1}(y) \in B_\varepsilon(g^{-1}(c))$

$f : X \rightarrow Y$  непрерывно на  $X$ .

$$\forall a \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

## 54. Равномерная непрерывность на функции. Теорема Кантора

**Def:**  $f : X \rightarrow Y$  равномерно непрерывна, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in X \rho(x, y) < \delta : \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

**Теорема 54.1. Кантора.**

$f : K \rightarrow Y$   $K$  — компакт,  $f$  непрерывен на  $K \Rightarrow f$  равномерно непрерывно.



От противного.

Пусть для некоторого  $\varepsilon > 0$  нет  $\delta > 0$ , т.е не подходит  $\delta = \frac{1}{n}$

$$\exists x_n, \tilde{x}_n \in K \text{ т.ч. } \rho(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{1}{n} \text{ и } \rho(f(x_n), f(\tilde{x}_n)) \geq \varepsilon$$

$x_n, \tilde{x}_n$  последовательность точек из  $K$  извлечем из  $x_n$  сходящуюся подпоследовательность  $x_{n_k}$ ,  
 $x_{n_k} \rightarrow a \in K$

$\tilde{x}_{n_k} \rightarrow a$ , т.к.  $\rho(x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$

$f$  непрерывно в точке  $a$ .

$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_{\varepsilon/2}(f(a))$

Начиная с какого-то  $N$   $x_{n_k}, \tilde{x}_{n_k} \in B_\delta(a)$

$$\Rightarrow f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k}) \in B_\varepsilon(f(a))$$

$$\Rightarrow \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) < \varepsilon \text{ противоречие}$$



*Следствие 54.1.1.* Непрерывное на  $[a, b]$  функция равномерно непрерывна.

## 55. Теорема Больцано-Коши

*Лемма 55.1.* о связности отрезка Пусть  $[a, b] \subset U \cup V$ ,  $U, V$  — открытые и  $U \cap V = \emptyset$  тогда либо  $[a, b] \subset U$ , либо  $[a, b] \subset V$

► Рассмотрим точку  $b$ . Пусть  $b \in V$

$S = [a, b] \cap U$ , пусть  $S \neq \emptyset$

$$b_1 = \sup S$$

Поскольку  $b \in V$  — открытое  $\Rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \subset V$  для некоторого  $\varepsilon \Rightarrow (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \cap S = \emptyset$   
 $\Rightarrow b_1 \leq b - \varepsilon \Rightarrow b_1 < b$

Пусть  $b_1 \in V \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset V$

$(b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \cap S = \emptyset \Rightarrow \sup S \leq b_1 - \varepsilon_1$ . Противоречие.

Тогда  $b_1 \in U \Rightarrow (b_1 - \varepsilon_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset U$

$\delta = \min\{\varepsilon_1, b - b_1\} > 0$

$[b_1, b_1 + \varepsilon_1) \subset S \Rightarrow \sup S \geq b_1 + \delta$  — противоречие.



**Теорема 55.1. Больцано-Коши.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  — непрерывно на  $[a, b]$

$\forall C$  между  $f(a)$  и  $f(b)$   $\exists c \in (a, b) f(c) = C$

► От противного. Пусть  $f(x) \neq C \forall x \in [a, b]$ , тогда  $[a, b] \subset f^{-1}((-\infty, c)) \cup (f^{-1}(C, +\infty))$  —  
открытые и не пересекаются,  $a$  и  $b$  принадлежат разным множествам. Противоречие.



*Следствие 55.1.1.*

1.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и непрерывно на  $[a, b]$ , тогда  $f([a, b])$  — отрезок.

►  $\exists u, v \in [a, b], f(u) \leq f(x) \leq f(v) \forall x \in [a, b] \Rightarrow f([a, b]) \subset [f(u), f(v)]$

По теореме Б-К  $\forall C \in (f(u), f(v)) \exists c \in (u, v)$ , т.ч.  $f(c) = C$  т.е.  $f([a, b]) = [f(u), f(v)]$



2.  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  и непрерывно на  $(a, b)$ , тогда  $f$  принимает все значения из  $(\inf f(x), \sup f(x))$

► Пусть  $C \in (\inf f, \sup f) \Rightarrow \exists u : f(u) < C, \exists v : f(v) > C \Rightarrow C$  лежит между  $f(u)$  и  $f(v)$ , но  $f$  непрерывно на  $[u, v] \Rightarrow$  принимает все промежуточные значения.



## 56. Непрерывность тригонометрических функций

**Теорема 56.1.**

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

*Следствие 56.1.1.*  $\sin$  и  $\cos$  непрерывны.



$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \left| \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq |x-y|$$

*Следствие 56.1.2.*  $\operatorname{tg}$  и  $\operatorname{ctg}$  непрерывны.

*Следствие 56.1.3.*

$$\begin{aligned} \sin &\uparrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos &\downarrow [0, \pi] \\ \operatorname{tg} &\uparrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

**Def:**

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left( \sin \mid_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1} \\ \arccos &= \left( \cos \mid_{[0, \pi]} \right)^{-1} \\ \operatorname{arctg} &= \left( \operatorname{tg} \mid_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1} \end{aligned}$$

**Теорема 56.2.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

►  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ :

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

## 57. Степенная функция

$$x^n \quad x \in [0; +\infty); n \in \mathbb{N}$$

Больше нуля, непрерывна, инфимум 0, супремум бесконечен, строго монотонная.

$$x^{\frac{1}{n}} \text{ обратная}$$

Тоже непрерывна.

$$\begin{aligned} x^{\frac{m}{n}} &= \left( x^{\frac{1}{n}} \right)^m \\ x^{-\frac{m}{n}} &= \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} \end{aligned}$$

**Утверждение.** Определение корректно.  $(x^{\frac{1}{n}})^m = (x^{\frac{1}{nk}})^{mk}$

**Утверждение.** Свойства степени выполняются.

1.  $x^a x^b = x^{a+b}, a, b \in \mathbb{Q}$
2.  $(x^a)^b = x^{ab}$
3.  $x^a y^a = (xy)^a, a \in \mathbb{Q}$
4.  $x^a < y^a$  при  $x < y$
5.  $x^a < x^b$  при  $x > 1$  и  $a < b$  или при  $0 < x < 1$  и  $a > b$

Лемма 57.1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ при } a > 0$$

►  $a \geq 1$ :

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + \varepsilon n > \varepsilon n > \varepsilon N > a$$

$$N > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall n > N \quad (1 + \varepsilon)^n > a \Rightarrow 1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n}} \geq 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

$0 < a < 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

**Теорема 57.1.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ ,  $x_n \in \mathbb{Q}$ ,  $a > 0$ . Тогда последовательность  $a^{x_n}$  имеет предел, зависящий только от  $x$  и  $a$ . ◀

►

$$a^{x_n} - a^{x_m} = a^{x_n} (a^{x_m - x_n} - 1)$$

$$\forall n \quad |x_n| \leq M \Rightarrow a^{x_n} \in [a^{-M}; a^M]$$

Т.о.

$$|a^{x_n} - a^{x_m}| \leq \underbrace{a^M}_{\leq C} (a_{x_n - x_m} - 1) < C\varepsilon$$

По лемме

$$\exists N: \forall k > N \quad |a^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon$$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{N} \rightarrow -\varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a_{x_n - x_m} - 1 < a^{\frac{1}{N}} - 1 < 1 + \varepsilon$$

Т.о. предел существует.

Пусть теперь

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{y_n}$$

Но рассмотрим

$$\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\} \rightarrow x$$

Но тогда  $a^{z_n}$  не имеет предела, что противоречит доказанному выше. ◀

Def:

$$a^x = \lim_{\substack{x_n \rightarrow x \\ x_n \in \mathbb{Q}}} a^{x_n}$$

Свойства степени:

1. Для  $x \in \mathbb{Q}$  корректно.
2.  $x^a x^b = x^{a+b}$
3.  $(x^a)^b = x^{ab}$



$$4. x^a y^a = (xy)^a$$

$$5. x < y \wedge a > 0 \rightarrow x^a < y^a$$



$a_n \rightarrow a > 0 \Rightarrow a_n > 0$  с какого-то места

$$x_n^a < x_n^b \Rightarrow x^a \leq x^b$$

Теперь хотим строгое

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n < 1$$

$$z \Leftrightarrow \frac{x}{y}$$

$$z^{a_n} < 1 \wedge z^{a_n} \downarrow \Rightarrow z_a < 1$$

$$6. x^a < x^b \text{ при } x > 1 \wedge a < b \text{ или } 0 < x < 1 \wedge a > b$$

$$\blacktriangleright x > 1 \wedge a < b:$$

$$a < p < q < b \quad p, q \in Q$$

$$x^{a_n} < x^p < x^q < x^{b_n}$$

$$x^a \leq x^p < x^q \leq x^b$$

Лемма 57.2.

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$$

$$\forall |x| < \frac{1}{N} 1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$

Возьмём  $\delta = \frac{1}{N}$

## 58. Логарифм

**Теорема 58.1.**

$$a > 0 \Rightarrow f(x) \Leftrightarrow a^x \text{ непрерывна}$$

$\blacktriangleright$  Надо доказать, что  $a^{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{x_n}$

$$x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$a^{x_n} - a^{x_0} = a^{x_0} (a^{x_n - x_0} - 1) \rightarrow 0$$

*Следствие 58.1.1.* Есть обратная

$$\log_a x$$

**Теорема 58.2.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

►  $x_n \rightarrow +\infty. [x_n] = k$

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$x_n \rightarrow +\infty. y_n = -x_n$

$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} \rightarrow e$$

А для смеси возьмём две части, в каждой есть хороший номер. ◀

## 59. Следствия

*Следствие 59.0.1.*

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1$

►

$$\lim\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e = 1$$

◀

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

►  $y = a^x - 1 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  (непрерывность  $a^x$ )

$$a^x = y + 1$$

$$x \ln a = \ln(y + 1)$$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{\ln(a)}} = \ln(a) \frac{y}{\ln(1+y)} = \ln(a)$$

◀

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p$

►  $y = (1+x)^p - 1 \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$

$$(1+x)^p = 1+y$$

$$p \ln(1+x) = \ln(1+y)$$

$$\frac{(1+x)^p - 1}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \frac{\ln(1+y)}{p \ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x} p = p$$

◀

## 60. Сравнение функций

**Def:**  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  — предельная точка  $E$ . Если существует такая  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ , что

$$\forall x \in E \quad f(x) = \varphi(x)g(x)$$

и

1.  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 1$ , то  $f \sim g$  при  $x \rightarrow a$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ , то  $f = o(g)$  при  $x \rightarrow a$ .
3.  $\varphi$  ограничена, то  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a$ .
4. Если

$$\forall x \in E \quad |f(x)| \leq c|g(x)|$$

то  $f = O(g)$  на  $E$ .

Свойства:

1.  $\sim$  — отношение эквиваленции.
2.  $f_1 \sim f_2 \wedge g_1 \sim g_2 \Rightarrow f_1 g_1 \sim f_2 g_2$
3.  $f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(f) \Leftrightarrow f = g + o(f)$



$$f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi g, \varphi \rightarrow 1 \Leftrightarrow f = g + (\varphi - 1)g, \varphi - 1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow f = g + o(g)$$



4.  $f \sim g \Rightarrow o(f) = o(g)$
5.  $f \cdot o(g) = o(fg)$

Примеры ( $x \rightarrow 0$ ):

$$\sin x \sim x$$

$$\ln(x+1) \sim x$$

$$a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$$

$$(x+1)^p - 1 \sim px$$

## 61. Производная

**Def:**

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$$

Если существует конечный  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , то он называется производной  $f$  в точке  $x_0$ .  $f'(x_0)$

**Def:**

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$$

$f$  — дифференцируема в точке  $x_0$ , если  $\exists A \in \mathbb{R}$  т.ч.  $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$  при  $x \rightarrow x_0$

**Теорема 61.1.**  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

$f$  — дифф. в точке  $x_0 \Leftrightarrow \exists$  конечная производная  $f'(x_0)$

И в этом случае  $A = f'(x_0)$

►  $f$  — дифф. в точке  $x_0 \Leftrightarrow$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = o(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\exists A \in \mathbb{R} : \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - A \rightarrow 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$$

Def: Дифференциал функции  $f$  в точке  $x_0$  — это отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  умноженное на  $A$ .  $df(x_0)$   
 $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — линейно, если  $T(ax + by) = aT(x) + bT(y)$

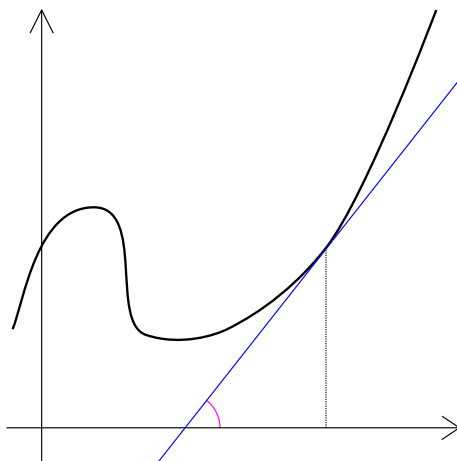
## 62. Геометрический смысл производной

Если рассмотреть график непрерывной функции

$$y = f(x)$$

то в каждой точке  $x_0$ , где функция непрерывна, можно рассмотреть касательную к её графику

$$y = kx + b$$



Давайте посчитаем угловой коэффициент касательной  $k$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Таким образом, производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в соответствующей точке.

## 63. Односторонние производные

*REM:* Бесконечные производные.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm \infty$$

**Def:**

$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  — правая производная.

$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  — левая производная.

*REM:* Если  $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$  существуют и  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ , то существует  $f'(x_0) = f'_+(x_0)$

**Пример:**  $f(x) = |x|$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$f'_+(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

$$f'_-(0) = -1$$

В частности  $f$  не дифф. в точке 0.

## 64. Непрерывность дифференцируемой функции

**Утверждение.**  $f$  — дифф. в точке  $x_0 \Rightarrow f$  — непрерывна в точке  $x_0$

►  $f$  — дифф. в точке  $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (A(x - x_0) + o(x - x_0)) = f(x_0)$$

*REM:* Обратное не верно.

**Примеры**

1.  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \infty$$

$x^{\frac{1}{3}}$  — не дифф. в точке 0, но непрерывна.

2.  $f(x) = x \sin(x), f(0) = 0$ . Непрерывна.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ не существует.}$$

## 65. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями

**Теорема 65.1. Арифметические действия с дифференцируемыми функциями.**

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

$f, g$  — дифф. в точке  $x_0$ , тогда

1.  $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2.  $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3.  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. Если  $g \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$



$$1. (f \pm g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) \pm g(x)) - (f(x_0) \pm g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2.

3.

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

4. Достаточно доказать, что  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \frac{1}{g^2(x)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$



## 66. Производная композиции

**Теорема 66.1. Производная композиции.**  $g$  дифференцируема в  $x_0$ ,  $f$  дифференцируема в  $f(x_0)$ . Тогда  $f \circ g$  дифференцируема, причём

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$



$$(f \circ g)'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(g(x))g'(x)$$



## 67. Теорема о дифференцируемости обратной функции

**Теорема 67.1. Производная обратной функции.**  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}$  — обратная функция.

$f$  — дифф. в точке  $x_0 \in (a, b)$

Тогда  $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$



$$f^{-1} = g$$

$$g(f(x)) = x$$

$$g'(f(x_0))f'(x_0) = 1$$

Нужна дифф. функции  $g$  в точке  $f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \text{ где } \alpha(x) \rightarrow 0$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0))$$

$$g(y) = g(f(x_0)) + A(y - f(x_0)) + \beta(y)(y - f(x_0))$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + A(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x))(f(x) - f(x_0))$$

$$x = x_0 + A(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)) + \beta(f(x))(f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0))$$

$$A = \frac{1}{f'(x_0)}, o = \frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} + \beta(f(x))(f'(x_0) + \alpha(x))$$

$$\beta(f(x)) = -\frac{\alpha(x)}{f'(x_0)} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(x)}$$

$$\beta(y) = -\frac{\alpha(g(y))}{f'(x_0)} \frac{1}{f'(x_0) + \alpha(g(y))}$$

Надо понять, что  $\beta(y) \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow f(x_0)$

Если  $y \rightarrow f(x_0)$ , то  $g(y) \rightarrow g(f(x_0))$

$$\lim_{y \rightarrow f(x_0)} \alpha(g(y)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$



*Следствие 67.1.1.*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

## 68. Производные элементарных функций

$$\begin{aligned}c' &= 0 \\(x^p)' &= px^{p-1} \\(a^x)' &= \ln a a^x \\(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\\sin' x &= \cos x \\\cos' x &= -\sin x \\\operatorname{tg}' x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\\operatorname{ctg}' x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\\operatorname{arctg}' x &= \frac{1}{1+x^2} \\\operatorname{arcsin}' x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^p - x^p}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x^p}{x} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^p - 1}{\frac{h}{x}} \right) = x^{p-1} p \\\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \\\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Лooooooooоол что такое, Таня?

$$\sin x = y$$

$$\operatorname{arcsin}' y = (\sin^{-1} y)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{tg} x = y$$

$$\operatorname{arctg}' y = (\operatorname{tg}^{-1} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$



## 69. Теоремы Ферма и Ролля

**Теорема 69.1. Теорема Ферма.**  $f: \langle a, b \rangle$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  дифференцируема в  $x_0$ ,  $x_0$  — точка экстремума. Тогда

$$f'(x_0) = 0$$

► Пусть  $x > x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$



Пусть  $x < x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Но тогда

$$f'(x_0) = 0$$

**Теорема 69.2. Теорема Ролля.**  $f: [a, b] \in \mathbb{R}$ ,  $f$  непрерывна,  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $f(a) = f(b)$ . Тогда

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

► Если функция константна, то всё доказано. Иначе есть глобальный максимум и минимум, причём они не могут быть оба в концах.

*Следствие 69.2.1.* Между корнями функции есть корень производной.

## 70. Теоремы Лагранжа и Коши

**Теорема 70.1. Теорема Лагранжа.**  $f: [a, b] \in \mathbb{R}$ ,  $f$  непрерывна,  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ .

$$\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

**Теорема 70.2. Теорема Коши.**  $f, g: [a, b] \in \mathbb{R}$ ,  $f$  непрерывна,  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0 \neq g(b) - g(a)$ .

$$\exists c: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

►  $h(x) = f(x) - Kg(x)$ ,  $h(a) = h(b)$ .

$$K = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Тогда

$$\exists c: h'(c) = 0$$

$$h'(c) = 0 \Rightarrow K = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Следствие 70.2.1.*  $f: [a, b] \in \mathbb{R}$ ,  $f$  непрерывна,  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ ,  $|f'(x)| \leq M$ . Тогда

$$\forall x, y \in (a, b) |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

## 71. Следствия теоремы Лагранжа

*Следствие 71.0.2.*

1.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f$  — непрерывна на  $[a, b]$ , дифф. на  $(a, b)$  и  $|f'(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$ , тогда  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \forall x, y \in [a, b]$



$$\begin{aligned} f &: [x, y] \rightarrow \mathbb{R} \\ \Rightarrow \exists c \in (x, y), f(x) - f(y) &= (x - y)f'(c) \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| &= |x - y||f'(c)| \leq M(x - y) \end{aligned}$$



2. При тех же условиях  $f$  равномерно непрерывна на  $(a, b)$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in (a, b), |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

По следствию 1

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{M} \text{ подходит}$$



3.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$  и диф. на  $(a, b)$  и  $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда  $f(x) = \text{const.}$



$$\begin{aligned} [x, x_0] &\subset [a, b] \\ \exists c \in (x, x_0) \subset (a, b), f(x) - f(x_0) &= f'(c)(x - x_0) = 0 \\ \Rightarrow f(x) - f(x_0) &\forall x \in [a, b] \end{aligned}$$



4.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$  и диф. на  $(a, b)$  и  $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда  $f(x)$  монотонно возрастает. А если  $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда  $f(x)$  строго монотонно возрастает.



$$\begin{aligned} x &< y, y \in (a, b) \\ f(y) - f(x) &= (y - x)f'(c) \Rightarrow f(y) > f(x) \end{aligned}$$



5.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$  и диф. на  $(a, b)$  и  $f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда  $f(x)$  монотонно убывает. А если  $f'(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ , тогда  $f(x)$  строго монотонно убывает.

### Теорема 71.1.

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$  и диф. на  $(a, b)$ , тогда  $f(x)$  монотонно возрастает  $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$ .
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  — непрерывна на  $[a, b]$  и диф. на  $(a, b)$ , тогда  $f(x)$  монотонно убывает  $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$ .



Пусть  $x < y$ , тогда  $f(x) < f(y) \Rightarrow \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$



## 72. Теорема Дарбу

**Теорема 72.1. Теорема Дарбу.**  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема на  $[a, b]$ ,  $C \in [f'(a), f'(b)]$ .  
Тогда

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = C$$

► Пусть  $C = 0$ , тогда  $f'(a)$  и  $f'(b)$  разных знаков.

$f$  непрерывна, поэтому функция достигает свои максимум и минимум (по теореме Вейерштрасса).  
Достаточно показать, что один из них достигаются не в конце.

От противного: пусть минимум находится в точке  $a$ , а максимум в точке  $b$ . Тогда

$$\forall x > a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \wedge \forall x < b \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq 0$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'(b) &= \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} f'(a) &\geq 0 \\ f'(b) &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{— противоречие}$$

Таким образом хотя бы один экстремум не в конце, и искомое  $c$  существует.

В общем случае перейдём к

$$g(x) = f(x) - Cx$$

$$g'(x) = f'(x) - C$$



## 73. Правило Лопиталя

**Теорема 73.1. Правило Лопиталя.**  $-\infty < a < b \leq +\infty$   $f$  и  $g$  дифф. на  $(a, b)$

$$g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0(+\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

► Возьмем  $x_n \downarrow a$ ,  $x_n \in (a, b)$ , надо доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = l$$

По теореме Штольца достаточно проверить, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)}$  и что  $g(x_n)$  — монотонна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \rightarrow l$$

$$a < x_{n+1} < c_n < x_n \Rightarrow c_n \rightarrow a$$

Осталось доказать монотонность  $g(x_n)$ .

Заметим, что  $g'$  везде одного знака, иначе по теореме Дарбу была бы точка, где  $g' = 0$ .  $\Rightarrow g(x_n)$  — строго монотонно.



**Примеры**

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \text{ при } p > 0$$



$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(x^p)' = px^{p-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^p)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = 0$$



$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{a^x} = 0 \text{ при } a > 1$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^p)'}{(a^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^{p-1}}{a^x \ln a}$$



$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^{\lim(\ln(x^x))} = 1$$



$$\ln(x^x) = x \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} = 0$$



## 74. Производные высших порядков

**Def:** Производной  $n \geq 2$  порядка функции  $f$  называется производная производной  $n - 1$  порядка.

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$$

**Def:**  $C(E)$ ,  $C[a, b]$ ,  $C(a, b)$  — множество непрерывных на  $E$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b)$  функций. Соответственно,  $C^n(E)$  — множество  $n$  раз дифференцируемых функций.

$$C^\infty(E) = \bigcap_{i=1}^{\infty} C^i(E)$$

**Утверждение.**

$$C^n(E) \supset C^{n+1}(E)$$

**REM:** При том, что множества вложены друг в друга, они не равны.

$$f(x) = x^{n+\frac{1}{3}}$$

Тогда

$$f^{(n)}(x) = \prod_{i=1}^n \left(i + \frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}}$$

Т.о.  $f \in C^n(\mathbb{R})$ , но  $f^{(n)} = C \sqrt[3]{x}$  не дифференцируема в 0, поэтому  $f \notin C^{(n+1)}(\mathbb{R})$

## 75. Арифметические действия с производными высших порядков

**Теорема 75.1.** Арифметические действия с производными высших порядков.

1.

$$(\alpha x f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

2. Правило Лейбница

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$$

► Метод математической индукции: база  $n = 1$  уже доказана. Докажем переход

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= \left( \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)} \right)' = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f^{(i)} g^{(n-i+1)}) = \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i+1)} g^{(n-i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right) f^{(i+1)} g^{(n-i)} + f g^{(n+1)} + f^{(n+1)} g = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f^{(i)} g^{(n+1-i)} \end{aligned}$$

## 76. Формула Тейлора

**Теорема 76.1.** Формула Тейлора.

$$T(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

►

$$T(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

$$((x - x_0)^k)^{(m)} = \begin{cases} 0 & k < m \\ m! & k = m \\ k(k-1)(k-2) \cdots (k-m+1)(x - x_0)^{k-m} & k > m \end{cases}$$

$$T(x)^{(m)} = \sum_{k=m}^n a_k k(k-1)(k-2)(k-3) \cdots (k-i+1)(x - x_0)^{k-m}$$

$$T(x_0)^{(m)} = a_m m!$$

$$a_m = \frac{T^{(m)}(x_0)}{m!}$$

Def:  $f$  дифференцируема  $n$  раз в точке  $x_0$ . Тогда многочленом Тейлора функции  $f$  в точке  $x_0$  есть

$$T_{n,x_0} f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Def: Формула Тейлора:

$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + R_{n,x_0}f(x)$$

Лемма 76.1.  $g$  дифференцируема  $n$  раз в  $x_0$ .  $g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n)}(x_0) = 0$ . Тогда

$$g(x) = o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)}$$

$g^{(n-1)}$  дифференцируема в  $x_0$ , а значит

$$g^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = o(x - x_0)$$

Т.о.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = 0$$

Тогда

$$g(x) = o((x - x_0)^n)$$



## 77. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 77.1. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано.  $f$  дифференцируема  $n$  раз в  $x_0$ .

$$f(x) = T_{n,k}f(x) + o((x - x_0)^n) \quad x \rightarrow x_0$$



$$g(x) = f(x) - T_{n,k}f(x)$$

$$\forall k \leq n \quad g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - (T_{n,k}f)^{(k)}(x_0) = 0$$

Пользуемся леммой.

Следствие 77.1.1.

$$\exists! P \in \mathbb{R}[x]: f(x) = P(x) + o((x - x_0)^k) \quad x \rightarrow x_0$$

►  $x \rightarrow x_0$ :

$$T_{n,x_0}f(x) + o((x - x_0)^n) = f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$

$$q(x) \triangleq T_{n,x_0}f(x) - P(x) = o((x - x_0)^k)$$

$$q(x_0) = 0$$

$q \in \mathbb{R}[x]$

$$q(x) = (x - x_0)q_1(x)$$

$$q_1(x) = o((x - x_0)^{n-1})$$

$$q_1(x_0) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
q_n(x_0) &= o(1) \\
q_n &\equiv 0 \\
q &\equiv 0 \\
P &\equiv T_{n,x_0}f
\end{aligned}$$



## 78. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа

**Теорема 78.1. Формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.**  $f$  дифференцируема  $n/ + 1/$  раз в  $x_0$ ,  $f^{(n)}$  непрерывна на  $[x, x_0]$ .

$$\exists c \in (x, x_0): f(x) = T_{n,x_0}f(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

*REM:* Теорема Лагранжа — частный случай для  $n = 0$ .

$$\exists c \in (x, x_0): f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$



$$f(x) = T_{n,x_0}f(x) + M \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Надо доказать, что в форме

$$\exists c \in (x, x_0): M = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

$$g(t) \Leftarrow f(t) - T_{n,x_0}f(t) - M(t-x_0)^{n+1}$$

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) - (T_{n,x_0})^{(k)}(t) - M(n+1)(n+2)(n+3) \cdots (n-k+2)(t-x_0)^{n-k+1}$$

$$g^{(k)}(x_0) = 0$$

Тогда у функции  $g$  первые  $n$  производных равны нулю, а также  $g(x) = 0$ , значит

$$g(x_0) = g(x) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_1 \in (x, x_0): g'(x_1) = 0$$

$$g'(x_0) = g'(x_1) = 0$$

По теореме Ролля

$$\exists x_2 \in (x, x_1): g'(x_2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\exists x_{n+1} \in (x, x_0): g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$$

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M(n+1)!$$

$$c = x_{n+1}$$

Следствие 78.1.1.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n+1$  раз дифференцируема на  $[a, b]$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ . ◀

$$|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = O((x-x_0)^n)$$

▶

$$\exists c \in (x, x_0): |f(x) - T_{n,x_0}f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$$

Следствие 78.1.2.  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n+1$  раз дифференцируема на  $[a, b]$ ,  $x_0 \in (a, b)$ , for all  $n$   $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ . ◀

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n,x_0} = f(x)$$

▶

$$|f(x) - T_{n,x_0}f(x)| \leq \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

◀

## 79. Формула Тейлора для некоторых функций

$x_0 = 0$ :

$$\begin{array}{llll} e^x = 1 & +x + \frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} & +\dots + o(x^n) \\ e^x = 1 & +x + \frac{x^2}{2!} & +\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} & +\dots + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sin x = 0 & +x + 0 & -\frac{x^3}{3!} + 0 & +\dots + o(x^{2n+1}) \\ \cos x = 1 & +0 + \frac{x^2}{2!} & +0 - \frac{x^4}{4!} & +\dots + o(x^{2n+1}) \\ \ln(x+1) = 0 & +x - \frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} & +\dots + o(x^n) \\ (x+1)^p = 1 & +px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 & +\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}x^4 & +\dots + o(x^n) \end{array}$$

## 80. Следствия формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа

Def:  $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum i = 0^n a_n$$

Следствие 80.0.3.  $\forall x \text{ in } \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

## 81. Иррациональность числа $e$

**Теорема 81.1. Иррациональность  $e$ .**

$$e \notin \mathbb{Q}$$



$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$2 < e < 3$$

Пусть  $e = \frac{m}{n}$

$$e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1 \frac{3!}{+} \dots + \frac{e^c}{(n+1)!} = \frac{m}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + 1 \frac{3!}{+} \dots\right)}_{\in \mathbb{N}} + \frac{e^c}{n+1} = \underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^c}{n+1} \in \mathbb{N}$$

$$0 < c < 1 \Rightarrow 1 < e^c < 3$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1} < 1$$

Т.о.  $e \neq \frac{m}{n}$



## 82. Локальные максимумы и минимумы

## 83. Экстремумы функции

**Def:**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ .  $x_0$  — точка строгого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) > f(x_0)$$

$x_0$  — точка нестрогого локального минимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) \geq f(x_0)$$

$x_0$  — точка строгого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} f(x) < f(x_0)$$

$x_0$  — точка нестрогого локального максимума, если

$$\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) \leq f(x_0)$$

Точка локального максимума или минимума также называется точкой локального экстремума.

**Теорема 83.1. Необходимое условие экстремума.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  дифференцируема в  $x_0$ .

$$x_0 \text{ — экстремум} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

► Сузим до окрестности, там по теореме Ферма всё работает. ◀

REM: Обратное неверно, смотри  $f(x) = x^3$ .

## 84. Достаточные условия экстремума

**Теорема 84.1. Достаточное условие экстремума.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  непрерывна на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $f$  дифференцируема на  $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ . Тогда

- $f'((x_0 - \delta, x_0)) > 0 \wedge f'((x_0, x_0 + \delta)) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка максимума}$
- $f'((x_0 - \delta, x_0)) < 0 \wedge f'((x_0, x_0 + \delta)) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка минимума}$



$$\begin{aligned} f'((x_0 - \delta, x_0)) > 0 &\Rightarrow f \text{ возрастает на } (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0 - \delta, x_0)) \\ f'((x_0, x_0 + \delta)) < 0 &\Rightarrow f \text{ убывает на } (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) > f((x_0, x_0 + \delta)) \end{aligned}$$



**Теорема 84.2. Достаточное условие экстремума через вторую производную.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  дважды дифференцируема в  $x_0$  и  $f'(x_0) = 0$ . Тогда

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка максимума}$
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка минимума}$

**Теорема 84.3. Достаточное условие экстремума через  $n$ -ую производную.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f$  дифференцируема  $n$  раз в  $x_0$  и  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ . Тогда

- $2 \mid n \wedge f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка максимума}$
- $2 \mid n \wedge f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ — точка минимума}$
- $2 \nmid n \wedge f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ — не экстремум}$



$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) = (x - x_0)^n \left( \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right)$$

$2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) - f(x_0) > 0$   
 $2 \div n \wedge f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) f(x) - f(x_0) < 0$   
 $2 \nmid n \wedge f^{(n)}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon) \text{sign}(f(x) - f(x_0)) = \text{sign}(x - x_0)$  ◀

## 85. Выпуклость

**Def:**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ .

$f$  выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$f$  строго выпукла вниз, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$f$  выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$f$  строго выпукла вверх, если

$$\forall x, y \in \langle a, b \rangle : x \neq y \quad \forall \lambda \in (0, 1) f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Абсолютно эквивалентная запись, геом. смысл... 0,0301 10.12

*REM:* Сумма выпуклых и выпуклая, умноженная на положительную, выпуклы.

*Лемма 85.1.* О трёх хордах.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$  — выпуклая,  $u < v < w$ ,  $u, v, w \in \langle a, b \rangle$ . Тогда

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}$$



$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \Leftrightarrow (w - u)(f(v) - f(u)) \leq (v - u)(f(w) - f(u)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (w - u)f(v) - (w - u)f(u) \leq (v - u)f(w) - (v - u)f(u) \Leftrightarrow (w - u)f(v) \leq (v - u)f(w) + (w - v)f(u)$$



## 86. Непрерывность и дифференцируемость выпуклой функции

**Теорема 86.1.** Монотонность производной выпуклой функции.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow R$  — выпуклая. Тогда

$$\forall x \in (a, b) \quad f'_-(x) \leq f'_+(x)$$

►  $u_1 < u_2 < x < v$

$$\frac{f(x) - f(u_1)}{x - u_1} \leq \frac{f(x) - f(u_2)}{x - u_2} \leq \frac{f(x) - f(v)}{x - v}$$

Тогда  $\frac{f(x) - f(u)}{x - u}$  растёт и ограничено, т.е. предел  $f'_-(x)$  существует. Аналогично существует  $f'_+(x)$ , она убывает. Как видно, они в правильном порядке. ◀

**Теорема 86.2.** Свойство и признак выпуклости.  $f$  — выпуклая на  $\langle a, b \rangle$  тогда и только тогда, когда

$$\forall x, x_0 \in \langle a, b \rangle \quad f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

► ⇒:

$x > x_0, y \in (x_0, x)$

$$\frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} \leq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

$x_0 - x > 0$

$$f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x_0) - f(x)$$

Аналогично  $x < x_0, y \in (x, x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0}$$

⇐:

$u < v < w$

$$\forall x \quad f(x) \geq f(v) + (x - v)f'(v)$$

$$f(u) \geq f(v) + (u - v)f'(v)$$

$$f(w) \geq f(v) + (w - v)f'(v)$$

Сложим с правильными коэффициентами:

$$(w - v)f(u) \geq (w - v)f(v) + (w - v)(u - v)f'(v)$$

$$(v - u)f(w) \geq (v - u)f(v) + (w - v)(v - u)f'(v)$$

$$(w - v)f(u) + (v - u)f(w) \geq (w - u)f(v)$$



## 87. Критерии выпуклости в терминах первой и второй производных

**Теорема 87.1. Критерий выпуклости.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ .

$f$  (строго) выпукла  $\Leftrightarrow f'$  (строго) возрастает

► ⇒:  $x_1 < x_2$

$$f(x) \geq f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

$$f(x) \geq f(x_2) + (x - x_2)f'(x_2)$$

Подставим

$$f(x_2) \geq f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + (x_1 - x_2)f'(x_2)$$

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

La: Нужно проверить, что

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} \leq \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

По теореме Лагранжа, есть точки  $\xi < \eta$

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = f'(\xi) \leq f'(\eta) = \frac{f(v) - f(w)}{v - w}$$

**Теорема 87.2. Критерий выпуклости через вторую производную.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  дважды дифференцируема на  $(a, b)$ .

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' > 0$$

► Смотрим на теоремы о монотонности.

## 88. Неравенство Йенсена

**Теорема 88.1. Неравенство Йенсена.**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла.

$$\forall \{x_i\}_{i=1}^n \subset \langle a, b \rangle \forall \{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0, 1]: \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

► Метод математической индукции. Теорема при  $n = 2$  совпадает с определением выпуклости.

$$\begin{aligned} f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}_{\Leftarrow y} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) &= f((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \geq \\ &\geq (1 - \lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = (1 - \lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

## 89. Неопределённый интеграл

**Def:**  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Функция  $F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  называется первообразной  $f$ , если

$$F' = f$$

Не для всех  $f$  существует  $F$ . Например,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

► Пусть есть  $F' = f$ . Тогда по теореме Дарбу

$$\forall a, b \in (-1, 1), c \in (F'(a), F'(b)) \exists c \in (a, b): F'(c) = C$$

**Теорема 89.1. О существовании первообразной.** Для любой непрерывной  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  есть первообразная  $F$ . Докажем в следующем семестре. ◀

**Теорема 89.2.**  $f, F: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F$  — первообразная. Тогда

1.  $F + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) — также первообразная.
2.  $\Phi$  — первообразная  $\iff \Phi = F + c$ .



$$(F + c)' = F' + 0 = f$$

Рассмотрим  $G = \Phi - F$ . Она дифференцируема и

$$G' = (\Phi - F)' = \Phi' - F' = f - f = 0$$

Но тогда

$$G = \text{const}$$

**Def:** Неопределённым интегралом функции  $f$  называется множество её первообразных. ◀

$$\int f(x) dx$$

Пока стоит воспринимать все символы интеграла как некоторые «скобки».

Если есть некоторая первообразная  $F$ , то

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Тот же смысл имеют записи

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\int f dx = F + c$$

Для того, чтобы найти неопределённый интеграл, достаточно найти какую-то первообразную, а для проверки первообразной достаточно взять от неё производную.

## 90. Таблица интегралов

Таблица интегралов:

$$\begin{aligned}\int 0 dx &= c \\ \int x^p dx &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + c \\ \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c \\ \int \cos x dx &= \sin x + c \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \operatorname{tg} x + c \\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} &= -\operatorname{ctg} x + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + c \\ \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arccos x + c \\ \int \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + c\end{aligned}$$

**Def:** Пусть  $A, B$  — множества. Тогда

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$$

**Теорема 90.1. Об арифметических операциях с интегралами.**

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

$\alpha \neq 0$

$$\int \alpha f dx = \alpha \int f dx$$

*REM:* Именно из-за того, что константы в записи нет, мы исключаем ноль.

►  $F, G$  — первообразные соответственно  $f, g$ .

$$\int f dx = \{F + c_1\}$$

$$\int g dx = \{G + c_2\}$$

$$\int f dx \pm \int g dx = \{F + c_1\} \pm \{G + c_2\} = \{F + G + c_3\} =$$

$$(F + G)' = f + g$$

$$= \int (f + g) dx$$

$$\alpha \int f dx = \alpha \{F + c_1\} = \{\alpha F + c_2\} =$$

$$(\alpha F)' = \alpha f$$

$$= \int \alpha f dx$$

## 91. Замена переменной

**Теорема 91.1.** Замена переменной в неопределённом интеграле.  $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна,  $\varphi: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$  непрерывно дифференцируема.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$$

$$(F(\varphi(t)) + c)' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Следствие 91.1.1.

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + c$$

Примеры:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$f = x^2, \varphi = \ln x$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int (\ln x)^2 (\ln x)' dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$$a > 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\frac{1}{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \end{aligned}$$

$$f = \frac{1}{x^2 + 1}$$



## 92. Интегрирование по частям

**Теорема 92.1. Интегрирование по частям.**  $f, g$  — дифференцируемые,  $f'g$  — интегрируемая.

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx$$

►  $\Phi$  — первообразная  $f'g$ .

$$(fg - \Phi + c)' = fg' + f'g - f'g = fg'$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Есть термин «берущиеся» интегралы. Это интегралы, выражаемые через элементарные функции. Их, вообще говоря, мало. К ним относятся рациональные функции (отношение многочленов), произведение тригонометрических функций,  $x\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . Не берутся, например,

$$\int e^{x^2} dx$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\int \frac{dx}{\ln x}$$