Лекции по математическому анализу
Лектор: Храбров Александр Игоревич
Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

Содержание

1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

$\mathfrak{Def}$: Множество A - подмножество B, если все элементы A содержатся и в B.

$$A \subset B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\ x \in B$$

$\mathfrak{Def}$: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \land B \subset A$$

$\mathfrak{Def}$: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x\ x \notin \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: 2^A — множество всех подмножеств A.

$$2^A \overset{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел.
- $\mathbb{R}$ — множества вещественных чисел.
- $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}, \Phi(x) -$ условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p$ имеет ровно 2 натуральных делителя$\}$.

Бывают некорректно заданные „множества“. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как „Наименьший элемент множества...“

$\mathfrak{Def}$: Пересечение двух множеств — множество, состоящие из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \overset{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \overset{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

$\mathfrak{Def}$: Симметрическя разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \overset{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \colon x \in A_i\}\,;\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I\; x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность
$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$
2. Коммутативность
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
3. Рефлексивность
$$A \cap A = A; A \cup A = A$$
4. Дистрибутивность
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
5. Нейтральный элемент
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема 1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)\,; A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

▶

$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \forall \alpha \in I\; x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I\; \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I\; x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I \colon \begin{cases} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$\blacktriangleleft$

Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$\blacktriangleright$

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I\colon x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I\colon \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x \in A \\ \forall \alpha \in I\ x \in B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall \alpha \in I\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$\blacktriangleleft$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная пара $\langle a, b\rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

$\mathfrak{Def}$: Упорядоченная n-ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n\ a_i = b_i$$

$\mathfrak{Def}$: Декартогого произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n\ a_i \in A_i$$

2. Бинарные отношения

$\mathfrak{Def}$: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a\,R\,b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

$\mathfrak{Def}$: Область определения отношения

$$\beta_R = dom_R = \{a \in A \mid \exists b \in B\colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обсласть значения отношения

$$\rho_R = ran_R = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon (a, b) \in R\}$$

$\mathfrak{Def}$: Обратное отношение

$$R^{-1}\colon \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b\,R^{-1}\,a \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a\,R\,b$$

$\mathfrak{Def}$: Композиция отношений

$$R_1\colon A \to B; R_2\colon B \to C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a,c) \mid a\,R_1\,b \wedge b\,R_2\,c\}$$

Про значок — его использовать не будем

Пример композиции: $<\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$< \circ <= \{(a,b) \mid b - a \geqslant 2\}$$

$\mathfrak{Def}$: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f\colon A \to B$$

$$a\,f\,b_1 \wedge a\,f\,b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a\,f\,b \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A \text{ — область определения})$$

$\mathfrak{Def}$: Свойтва отображеий:

1. Рефлексивность $a\,R\,a$
2. Симметричность $a\,R\,b \Leftrightarrow b\,R\,a$
3. Транзитивность $a\,R\,b \wedge b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c$
4. Иррефлексивность $\neg a\,R\,a$
5. Антисимметричность $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- $\underset{5}{\equiv}$: 1, 2, 3
- $\leqslant$: 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- $\subset$: 1, 3, 5

3. Вещественные числа

$\mathfrak{Def}$: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и $\times$, причём:

1. Коммутативность $\forall a, b\; a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c\; a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o\colon \forall a\; a + o = a; \exists e\colon \forall a\; a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a\; \exists {-a}\colon a + -a = o; \forall a \neq o\; \exists a^{-1} : a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c\; a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения $\leqslant$ (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c\; a \leqslant b => a + c \leqslant b + c$
6. $\forall a, b\; a > 0 \wedge b \geqslant 0 \Rightarrow ab \geqslant 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \cup B \neq \emptyset$, $\forall a \in A\; \forall b \in B\; a \leqslant b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A\; a \leqslant c \wedge \forall b \in B\; c \leqslant b$$

REM: На $\mathbb{Q}$ аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема 3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N} : x < ny$$

▶

$$A \leftrightharpoons \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : u < ny\}; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \leftrightharpoons \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A\; \forall b \in B\; a \leqslant b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A\; a \leqslant c \wedge \forall b \in B\; c \leqslant b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n+1)y \Rightarrow c \in A \text{ — противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geqslant c \Rightarrow y \leqslant 0 \text{ — противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$ ◀

Следствие 3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < \varepsilon$$

▶ Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$ ◀

Следствие 3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$$

▶

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \colon \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z} \colon m \leqslant nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \overset{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant nx\}$$

$$x \geqslant 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{m} \in \mathbb{N} \colon \tilde{m} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{m} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмторим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N} \colon k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M\; m < k \Rightarrow \exists m = \max M \colon m \leqslant nx < m + 1$$

$$m \leqslant nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leqslant x \leqslant \frac{m+1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leqslant x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m+1}{n} < y$$

◀

Следствие 3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < z < y$$

▶

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$x < y \Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2} : z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : x < z < y$$

◀

4. Верхняя и нижняя граница

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$.
$x \in R$ — верхняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \leqslant x$$
$x \in R$ — нижняя граница A, если
$$\forall a \in A : a \geqslant x$$

$\mathfrak{Def}$: A ограничено сверху, если
$$\exists x \in R : x \text{ — верхняя граница} A$$
A ограничено снизу, если
$$\exists x \in R : x \text{ — нижняя граница} A$$
A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A, если x — наименьшая из верхних границ.

$\mathfrak{Def}$: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A, если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:
$$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$
$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.

▶ x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$. ◀

Теорема 4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.
2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.

▶

1. B — множество всех верхних границ A.
$$\forall a \in A \, \forall b \in B \; a \leqslant b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A \; a \leqslant c \wedge \forall b \in B \; c \leqslant b \Rightarrow \exists \sup A = c$$
2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда
$$\inf A = -\sup B$$

◀

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$

Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда
$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A \; a \leqslant b \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A\colon a > b - \varepsilon)$$
2. A ограничено снизу. Тогда
$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A \; a \geqslant c \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A\colon a < c + \varepsilon)$$

▶
$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0 \; b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\forall a \in A \; a \leqslant b \wedge \forall \varepsilon > 0 \, \exists a \in A\colon a > b - \varepsilon)$$

◀

5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{i=1}^{n} : \forall i \in \mathbb{N}\,(a_i <= a_{i+1} \wedge b_i >= b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

▶ $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall i \in \mathbb{N}\; c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i] \neq \emptyset$$

◀

REM: Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[n, +\infty) = \emptyset$$

REM: $\mathbb{R}$. Рассмотрим приблежения $\sqrt{2}$.

6. Метрические пространства

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть множество X и отображение $\rho\colon X \times X \to [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Также пара (X, ρ) называется метричесикм пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$
2. $\rho(x, y) = |x - y|$
3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками
4. Манхеттанская метрика. $\rho\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
5. Расстояния на сфере.
6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O. Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|/$

7. Пространство $\mathbb{R}^n$, метрика

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$\mathfrak{Def}$: Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y, \rho|_{Y\times Y})$ — подпространство X. $Y \subset X$.
$\mathfrak{Def}$: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) < r\}$ — открытый шар.
$\mathfrak{Def}$: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x,a) \leqslant r\}$ — замкнутый шар.
Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1,r_2\}}(a)$
2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

   ▶ Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x,y) > 0$. ◀

7. Неравентсва Коши-Буняковского и Минковского

Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

▶

$$f(t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 = \left(\underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}_{\fallingdotseq A}\right) t^2 - 2\left(\underbrace{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}_{\fallingdotseq C}\right) t + \left(\underbrace{b_1^2 + \dots + b_2^2}_{\fallingdotseq B}\right)$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leqslant 0 \Rightarrow 4\left(C^2 - AB\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow C^2 \leqslant AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.
REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны.
▶

$$a_i = \alpha b_i$$

$\Leftrightarrow$

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень} t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

◀ ◀

Теорема 7.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}$$

▶ Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i^2}_{\fallingdotseq A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} b_i^2}_{\fallingdotseq B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{AB} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{Неравенство Коши-Буняковского}$$

REM: Равентсво в случае, если числа пропорциональны. ◀

8. Открытые множества

$\mathfrak{Def}$: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G \, \exists r > 0\colon B_r(x) \subset G$$

Теорема 8.1. О свойтсвах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — открыты.

2. Объединение открытых открыто.

3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.

4. $B_r(a)$ открыт.

▶

1. Очевидно.

2. $$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0\colon x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n \; x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \, \exists r_k > 0\colon B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k\colon G_r \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k$$

4. $$\forall x \in B_r(a) \, \exists r_x = \frac{1}{2}\left(r - \rho(a, x)\right)$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$

◀

REM:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

9. Внутренние точки и внутренность множества

$\mathfrak{Def}$: $x \in A$ — внутренняя точка A, если $\exists r > 0\colon B_r(x) \in A$

REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x.

$\mathfrak{Def}$: Внутренность множества A:

$$A^0 = \operatorname{int} A \overset{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\operatorname{int} A \subset A$

2. $\operatorname{int} A$ — множество всех внутренних точек.

3. $\operatorname{int} A$ открыто.

4. A открыто $\Leftrightarrow A = \operatorname{int} A$

5. $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$

6. $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$

7. $\operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A$

10. Замкнутые множества

$\mathfrak{Def}$: Замкнутые множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема 10.1. О свойствах закмнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $\emptyset$ и X — закмнуты.

2. Перечечение замкнутых — замкнуто.

3. Объеднинение конечного числа замкнутых замкнуто.

4. Замкнутый шар замкнут.

▶

1. Очевидно

2. По формулам де Моргана
$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_\alpha)$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению
$$\rho(a, x) > r$$
Покажем, что
$$B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$
Пусть $\exists y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда
$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leqslant r$$
$$y \in B_{\rho(a,x)-r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$
$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

◀

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n};1\right]=(0;1]$$

$\mathfrak{Def}$: $A\subset X$, (X,ρ). Тогда замыкание множества A — перечесение всех замкнутых множеств, содержащих A.

$$\operatorname{cl}A=\bigcap_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}F$$

Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.

$$X\setminus\operatorname{cl}A=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

$$X\setminus\operatorname{int}A=\operatorname{cl}(X\setminus A)$$

▶

$$X\setminus\operatorname{cl}A=X\setminus\bigcap_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}=\bigcup_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}(X\setminus F)$$

$$X\setminus F\text{ открыто}$$

$$X\setminus F\subset X\setminus A$$

То

$$\bigcup_{\substack{F\text{ замкнуто}\\ F\supset A}}(X\setminus F)=\bigcup_{\substack{G\text{ открыто}\\ G\subset X\setminus A}}G=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

Аналогично ◀

Следствие 10.2.1.

$$\operatorname{int}A=\operatorname{cl}(X\setminus A)$$

$$\operatorname{cl}A=\operatorname{int}(X\setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A\subset\operatorname{cl}A$
2. clA замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A=\operatorname{cl}A$
4. $A\subset B\Rightarrow\operatorname{cl}A\subset\operatorname{cl}B$
5. $\operatorname{cl}(A\cup B)=\operatorname{cl}A\cup\operatorname{cl}B$
6. $\operatorname{cl}\operatorname{cl}A=\operatorname{cl}A$

11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема 11.1. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X;\rho)$ — пространство, $(Y;\rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в $X\colon A = G \cap Y$
2. A замкнутыю в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в $X\colon A = F \cap Y$

▶

1. $\Rightarrow$:

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A\, \exists r_x > 0\colon B^Y_{r_x}(x) \subset A$$

$$G \leftrightharpoons \bigcup_{x \in A} B^X_{r_x}(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} \left(B^X_{r_x}(x) \cap Y\right) = \bigcup_{x \in A} B^Y_{r_x}(x) = A$$

$\Leftarrow$:

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0\colon B^X_r(x) \subset G$$

$$B^Y_r(x) = B^X_r(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к доплнениям

◀

Теорема 11.2. О замыканиях. (X, ρ), $A \subset X$

$$x \in \operatorname{cl} A \Leftrightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть $\exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замнкуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\operatorname{cl} A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \operatorname{cl} A$$

$\Leftarrow$: Пусть $x \notin \operatorname{cl} A \Rightarrow \exists F \supset A\colon x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0\colon B_r(x) \cap A = \emptyset$$

◀

Следствие 11.2.1. U открытое $\wedge\, U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \operatorname{cl} A = \emptyset$

▶ Пусть $x \in U \cap \operatorname{cl} A$.

$$x \in \operatorname{cl} A \Rightarrow \forall r > 0\; B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0\colon B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$ ◀

12. Предельные точки

$\mathfrak{Def}$: Проколотая окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

$\mathfrak{Def}$: Точка $x \in X$ предельная у множества A, если

$$\forall r > 0 \, \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$\mathfrak{Def}$: A' — множество предельных точек.
Свойства:

1. $\operatorname{cl} A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   ▶ $\supset$:
$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$
$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$
   Тогда
$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$
   $\subset$: Пусть $x \in (A \cup B)' \land x \notin B'$.
$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 \, B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$
$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0 \colon \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leqslant r_0 \, \dot{B}_r(x) = \emptyset$$
   Тогда
$$\forall r > 0 \, \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$
◀

Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 \, |B_r(x) \cap A| = \infty$$

▶
$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A \colon y_1 \neq x \land y \in B_r(x)$$
Тогда
$$\dot{B}_{\rho(x,y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A \colon y_2 \neq x \land y_2 \neq y_1 \land y \in B_{\rho(x,y_1)}$$
Тогда рассмотрим
$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \colon y_i \neq y_j \land y_i \neq x \land y_i \in A$$
◀

Следствие 12.1.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.

$$A \text{ ограниченно сверху и замкнуто} \Rightarrow \sup A \in A$$

$$A \text{ ограниченно снизу и замкнуто} \Rightarrow \inf A \in A$$

▶ $a = \sup A$. Тогда
$$\forall x \in A\; x \leqslant a \wedge \forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A \colon x > a - \varepsilon$$
Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.
$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$

◀

14. Предел последовательности

$\mathfrak{Def}$: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i). Тогда

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant N\; \rho(x^*; x_i) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n\to\infty} x = x$
- $\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема 14.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некотрого элемента
2. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограниченна
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A \colon \lim_{n\to\infty} x_n = x$

▶

1. $\Rightarrow$: Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда
$$\exists r > 0 \colon B_r(x^*) \subset U$$
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant N\; \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N \colon \forall n \geqslant N\; x_n \in U$$
$\Leftarrow$: $U \leftrightharpoons B_\varepsilon(x^*)$.
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n \geqslant N\; x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{\rho(x^*;x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1\, \rho(x^*;x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N_2\colon \forall n \geqslant N_2\, \rho(x^{**};x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1;N_2\} \begin{cases} \rho(x^*;x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**};x_n) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*;x^{**}) \leqslant \rho(x^*;x_n) + \rho(x^{**};x_n) < 2\varepsilon$$

3. $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \exists N\colon \forall n \geqslant N\ \rho(x^*;x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n<N}\{\rho(x^*;x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n\, x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$x_1 \in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x_2 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2};\rho(x;x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$x_3 \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3};\rho(x;x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$
$$\vdots$$
$$x_n \in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n};\rho(x;x_n)\}}(x) \cap A \neq \emptyset$$

Тогда

$$\forall n \geqslant N\ \rho(x;x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

◀

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n.
REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$
REM:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \operatorname{cl} A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x-y|)$.

15. Предельный переход в неравенстве

Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leqslant y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leqslant y$.

▶ Пусть $y < x$; $\varepsilon \leftrightharpoons \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\, |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\, |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geqslant \max\{N_1, N_2\}\, x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

◀

REM: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

REM: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие 15.1.1. $x_n \leqslant b \Rightarrow x \leqslant b$

Следствие 15.1.2. $x_n \geqslant a \Rightarrow x \geqslant a$

Следствие 15.1.3. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

16. Теорема о двух миллиционерах

Теорема 16.1. О двух миллиционерах. Пусть $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

▶ Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1\colon \forall n \geqslant N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2\colon \forall n \geqslant N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\}\colon \forall n \geqslant N\ l - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$ ◀

Следствие 16.1.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leqslant z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие 16.1.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограниченна, то $\lim x_n y_n = 0$.

17. Предел монотонной последовательности

$\mathfrak{Def}$: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \cdots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограниченна тогда и только тогда, когда имеет предел.

▶ $\Leftarrow$: Очевидно.

$\Rightarrow$: Пусть (x_n) возрастает. Она ограниченна, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k\colon x_k > x - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant a$$

Тогда

$$\forall n \geqslant k\ |x_n - a| < \varepsilon$$

◀

18. Конечное векторное пространство

$\mathfrak{Def}$: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

1. Сложение
   (a) Коммутативно
   (b) Ассоциативно
   (c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{d}$
   (d) Существует обратный элемент
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
5. $1x = x$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение векторного пространства —

$$"+": X + X \to X$$

$$"\times": \mathbb{R} \times X \to X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

$\mathfrak{Def}$: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$
2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

$\mathfrak{Def}$: Общее определение скалярного произведения: X — веторное пространство. Задана операция $\langle x, y \rangle\colon X \times X \to \mathbb{R}$ обладающая указынными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

$\mathfrak{Def}$: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

3. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковкского)

4. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)

5. $\|x - z\| \leqslant \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)

6. $\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||$

   ▶ $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geqslant \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geqslant \|x\|$$

   А это неравнство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространтво на $\mathbb{R}^d$.

$\mathfrak{Def}$: Общее определение нормы: $\|x\| \colon X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скаляроного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{d} |x_k|$

2. $\|x\|_\infty = \max\limits_{k=1..d} |x_k|$

   ▶

$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leqslant \max_{k=1..d}(|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

◀

3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p}$$

19. Арифметические свойства предела

Пусть есть $(\mathbb{R}^d, \rho)$ со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$$

▶

$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$

◀

REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограниченно $\Leftrightarrow \exists M \colon \forall x \in A\ \|x\| \leqslant M$

Теорема 19.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim x_n = x_0$, $\lim y_n = y_0$, $\lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim\langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle$

5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$

▶

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\colon \forall n > N_1\ \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\colon \forall n > N_2\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_3\colon \forall n > N_3\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.
$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.
$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| =$$
$$= |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \leqslant M\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\|$$

Но тогда
$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\right); y_n = \left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)}\right)$ Это докажем позже

5.
$$0 \leqslant |\|x_n\| - \|x_0\|| \leqslant \|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$$

◀

Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim |x_n| = |x_0|$
5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

▶ Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.
$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \leftrightharpoons A$$
$$\exists N_1\colon \forall n > N_1\ |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geqslant |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда
$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2}|y_0|}$$

◀

20. Покоординатная сходимость

$\mathfrak{Def}$: $\{x_n\}$ — последовательность в $\mathbb{R}^d$. Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}\colon \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема 20.1. О сходимости покоординатно. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.

▶

$$\left|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{d}\left(x_n^{(i)} - x_0^{(i)}\right)$$

◀

Следствие 20.1.1. $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$

▶

$$\left.\begin{aligned} x_n \to x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \to y_n^{(i)} \\ y_n \to y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \to y_0^{(i)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{d} x_n^{(i)} y_n^{(i)} \to \sum_{i=1}^{d} x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$$

◀

21. Бесконечно малые и большие

$\mathfrak{Def}$:

$$\lim x_n = +\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E\ \exists N\colon \forall n > N\ |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{aligned} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{aligned}\right. \Rightarrow \lim x_n = \infty$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единтсвенность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух миллиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$
2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$
3. $c > 0\colon\ \pm\infty \times c = \pm\infty$
4. $c < 0\colon\ \pm\infty \times c = \mp\infty$
5. $c > 0\colon\ \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$

6. $c < 0$: $\frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$
7. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$
8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
9. $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$
10. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
11. $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$
12. $\pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$
13. $\pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$

$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечнен.
$\mathfrak{Def}$: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

22. Связь между бесконечно большими и малыми

Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

▶

$$x_n \to \infty \Leftrightarrow \forall E > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N \colon \forall n > N\ |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

◀

Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограниченна. Тогда

1. $x_n \pm y_n$ — бесконечно малая
2. $x_n z_n$ — бесконечно малая

Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

1. $x_n \to +\infty \land y_n$ ограниченна снизу $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
2. $x_n \to -\infty \land y_n$ ограниченна сверху $\Rightarrow x_n + y_n \to -\infty$
3. $x_n \to \infty \land y_n$ ограниченна $\Rightarrow x_n + y_n \to +\infty$
4. $x_n \to \pm\infty \land y_n \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to +\infty$
5. $x_n \to \pm\infty \land y_n \leqslant a < 0 \Rightarrow x_n y_n \to -\infty$
6. $x_n \to \infty \land |y_n| \geqslant a > 0 \Rightarrow x_n y_n \to \infty$
7. $x_n \to a \neq 0 \land y_n \to 0 \land y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$
8. x_n ограниченна $\land\, y_n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to 0$

9. $x_n \to \infty \wedge y_n$ ограниченна $\wedge\, y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \geqslant a$$
$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0\colon \exists N\colon \forall n > N\ x_n \leqslant a$$

23. Компактность

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет покрытие множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α, если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

$\mathfrak{Def}$: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подкокрытие.

$$\forall B_\alpha\colon K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha\ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\colon K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$$

Теорема 23.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

▶ $\Rightarrow$: Пусть B_α — открытое в Y, что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соотвествующими множествами в X, выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y.

$\Leftarrow$: Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y, в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X. ◀

REM: Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

24. Свойства компактного множества

Теорема 24.1. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограниченно.

▶

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограниченно}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \leftrightharpoons \min_{i=1}^{k} \left\{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\right\})$

$$\forall i = 1..k\ B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема 24.2. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

▶ Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

25. Теорема о пересечение семейства компактов

Теорема 25.1. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

▶ K_0 — любое их них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(X \setminus K_{x_i}\right) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^{k} K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

◀

Следствие 25.1.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто.

$\mathfrak{Def}$: Параллелепипедом на $\mathbb{R}^d$ и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (закрытый)}$$

$$(a, b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\right\} \text{ (открытый)}$$

Теорема 25.2. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \ldots$ имеют непустое пересечение.

▶ Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

26. Теорема Гейне-Бореля

Теорема 26.1. Теорема Гейне-Бореля. Замкнутый куб компактен

▶

$$I = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d\, 0 \leqslant x_i \leqslant a\right\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобъём куб по кажому измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покроет ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрыл куб. ◀
