

Лекции по математическому анализу
Лектор: Храбров Александр Игоревич
Автор конспекта: Лапшин Дмитрий

Содержание

1	Множества	2
2	Бинарные отношения	4
3	Вещественные числа	6
4	Верхняя и нижняя граница	8
5	Теорема о вложенных отрезках	9
6	Метрические пространства	9
7	Неравенства Коши-Буняковского и Минковского	10
8	Открытые множества	11
9	Внутренние точки и внутренность множества	11
10	Замкнутые множества	12
11	Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве	14
12	Предельные точки	15
13	Супремум и инфимум замкнутых множеств	16
14	Предел последовательности	16
15	Предельный переход в неравенстве	17
16	Теорема о двух милиционерах	18
17	Предел монотонной последовательности	18
18	Конечное векторное пространство	19
19	Арифметические свойства предела	20
20	Покоординатная сходимость	22
21	Бесконечно малые и большие	22
22	Связь между бесконечно большими и малыми	23
23	Компактность	24

24	Свойства компактного множества	24
25	Теорема о пересечении семейства компактов	25
26	Теорема о вложенных параллелепипедах	25
27	Теорема Гейне-Бореля	26
28	Подпоследовательность	26
29	Секвенциальная компактность	26
30	Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия	27
31	Диаметр множества	27
32	Фундаментальные последовательности	28
33	Полнота компактных метрических пространств	29
34	Верхний и нижний предел	29
35	Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε	30
36	Неравенство Бернулли	31
37	Число e	31
38	Сравнение скорости роста возрастания последовательностей	32
39	Теорема Штольца	32
40	Теорема Штольца	33
41	Пределы функций	34
42	Равносильность определения по Коши и по Гейне	34
43	Свойства функций, имеющих предел	35
44	Арифметические действия с пределами	35
45	Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах	36
46	Левый и правый пределы. Предел монотонной функции	36
47	Критерий Коши для отображений и для функций	36
48	Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа	37
49	Арифметические действия с непрерывными функциями	38
50	Характеристика непрерывности в терминах прообразов	39

1. Множества

Не любая совокупность элементов — множество. Про каждый объект можно сказать, принадлежит ли он множеству ($x \in A$) или нет ($x \notin A$).

Def: Множество A — подмножество B , если все элементы A содержатся и в B .

$$A \subset B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A \ x \in B$$

Def: Множества называются равными, если они содержатся друг в друге.

$$A = B \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge B \subset A$$

Def: Пустое множество — это множество без элементов.

$$\forall x \ x \notin \emptyset$$

Def: 2^A — множество всех подмножеств A .

$$2^A \stackrel{\text{Def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$$

- \mathbb{N} — множество натуральных чисел.
- \mathbb{Z} — множество целых чисел.
- \mathbb{Q} — множество рациональных чисел.
- \mathbb{R} — множества вещественных чисел.
- \mathbb{C} — множества комплексных чисел.

Задание множеств:

- $\{a, b, c\}$
- $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- $\{a_1, a_2, \dots\}$
- $\{x \in A \mid \Phi(x)\}$, $\Phi(x)$ — условие.

Например, $\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ имеет ровно } 2 \text{ натуральных делителя}\}$.

Бывают некорректно заданные „множества“. Например, множество художественных произведений на русском языке — плохо заданное множество. Рассмотрим $\Phi(n)$ — истина, если n нельзя записать в не более чем тридцать слов русского языка. Тогда $\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n)\}$ — не множество. Если бы это было множеством, то в нём есть наименьший элемент, который описывается как „Наименьший элемент множества...“

Def: Пересечение двух множеств — множество, состоящее из всех элементов, находящихся одновременно в обоих множествах.

$$A \cap B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \in B\}$$

Def: Объединение двух множеств — множество, состоящее из элементов обоих множеств.

$$A \cup B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Def: Разность множеств — это множество тех элементов, которые лежат в первом, но не во втором.

$$A \setminus B \stackrel{\text{Def}}{=} \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Def: Симметрическая разность — объединение разностей.

$$A \triangle B \stackrel{\text{Def}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Объединение и пересечение множно записать для многих множеств.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I: x \in A_i\}; \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I x \in A_i\}$$

Свойства операций со множествами:

1. Ассоциативность

$$A \cap B = B \cap A; A \cup B = B \cup A$$

2. Коммутативность

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Рефлексивность

$$A \cap A = A; A \cup A = A$$

4. Дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5. Нейтральный элемент

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

Теорема 1.1. Правила де Моргана. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha); A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$



$$x \in A \setminus \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \forall \alpha \in I x \notin B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

$$x \in A \setminus \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ \neg \forall \alpha \in I x \in B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B_\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \setminus B_\alpha)$$

Теорема 1.2. Обобщение дистрибутивности. $A, B_\alpha, \alpha \in I$. Тогда

$$A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

$$x \in A \cap \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \exists \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha \in I: \begin{cases} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$x \in A \cup \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \in A \\ \forall \alpha \in I: x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow \forall \alpha \in I: \begin{bmatrix} x \in A \\ x \in B_\alpha \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

Def: Упорядоченная пара $\langle a, b \rangle$ или (a, b) — объект

$$(a_1; b_1) = (a_2; b_2) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Def: Упорядоченная n -ка, или кортеж — объект

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i = b_i$$

Def: Декартово произведение множеств — множество кортежей, состоящих из элементов соответствующих множеств.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall i = 1..n: a_i \in A_i$$

2. Бинарные отношения

Def: Отношение на множествах A и B — произвольное подмножество их декартова произведения.

$$a R b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R$$

Def: Область определения отношения

$$\beta_R = \text{dom}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B: (a, b) \in R\}$$

Def: Область значения отношения

$$\rho_R = \text{ran}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in R\}$$

Def: Обратное отношение

$$R^{-1}: \beta_{R^{-1}} = \rho_R; \rho_{R^{-1}} = \beta_R; b R^{-1} a \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} a R b$$

Def: Композиция отношений

$$R_1: A \rightarrow B; R_2: B \rightarrow C$$

$$R_1 \circ R_2 = \{(a, c) \mid a R_1 b \wedge b R_2 c\}$$

Про значок \circ — его использовать не будем

Пример композиции: $<: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

$$< \circ < = \{(a, b) \mid b - a \geq 2\}$$

Def: Функция (отображение) — такое отношение, что первый ключ уникален.

$$f: A \rightarrow B$$

$$a f b_1 \wedge a f b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$$

$$a f b \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} f(a) = b$$

$$A = \beta_f \quad (A — \text{область определения})$$

Def: Свойства отображений:

1. Рефлексивность $a R a$
2. Симметричность $a R b \Leftrightarrow b R a$
3. Транзитивность $a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$
4. Иррефлексивность $\neg a R a$
5. Антисимметричность $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

Примеры:

- $=$: 1, 2, 3, 5
- \equiv_5 : 1, 2, 3
- \leq : 1, 3, 5
- $<$: 3, 4, 5
- \subset : 1, 3, 5

3. Вещественные числа

Def: Множество вещественных чисел можно определить как множество, на котором есть операции $+$ и \times , причём:

1. Коммутативность $\forall a, b \ a + b = b + a; a \times b = b \times a$
2. Ассоциативность $\forall a, b, c \ a + (b + c) = (a + b) + c; a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. Нейтральный элемент $\exists o: \forall a \ a + o = a; \exists e: \forall a \ a \times e = a; o \neq e$
4. Обратный элемент $\forall a \ \exists -a: a + (-a) = o; \forall a \neq o \ \exists a^{-1}: a \times a^{-1} = a$
5. Дистрибутивность $\forall a, b, c \ a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Кроме того, есть отношения \leq (и аналогично $<$, также определены обратные):

1. Рефлексивно
2. Антисимметрично
3. Транзитивно
4. Любые два элемента сравнимы
5. $\forall a, b, c \ a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
6. $\forall a, b \ a > 0 \wedge b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

Также выполнена аксиома полноты: $A, B \subset \mathbb{R}, A \cup B \neq \emptyset, \forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$. Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

REM: На \mathbb{Q} аксиома не выполняется:

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}; B = \{r \in \mathbb{Q}_+ \mid r^2 > 2\}; c = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Теорема 3.1. Принцип Архимеда. Пусть $x, y \in \mathbb{R}, y > 0$. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N}: x < ny$$



$$A \Leftrightarrow \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}: u < ny\}; y \in A$$

Пусть $A \neq \mathbb{R}$. Тогда $B \Leftrightarrow \mathbb{R} - A \neq \emptyset$. Рассмотрим $a \in A; b \in B$.

$$b < a \Rightarrow b < a < ny \Rightarrow b \in A \text{ — противоречие}$$

Таким образом

$$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \leq b$$

Тогда

$$\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A \ a \leq c \wedge \forall b \in B \ c \leq b$$

$$c \in A \Rightarrow c + y \in A \Rightarrow c > c + y \Rightarrow y < 0 \text{ — противоречие}$$

Тогда $c \in B$. Пусть $c - y \notin B$, тогда

$$c - y \in A \Rightarrow c - y < ny \Rightarrow c < (n + 1)y \Rightarrow c \in A — \text{противоречие}$$

Значит

$$c - y \in B \Rightarrow c - y \geq c \Rightarrow y \leq 0 — \text{противоречие}$$

Таким образом $A = \mathbb{R}$

Следствие 3.1.1.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$$

► Рассмотрим $x = 1, y = \varepsilon$

Следствие 3.1.2. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$

$$\exists r \in \mathbb{Q}: x < r < y$$

►

$$y - x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < y - x$$

Покажем, что $\exists m \in \mathbb{Z}: m \leq nx < m + 1$. Вообще говоря, $m \stackrel{\text{Def}}{=} \lfloor nx \rfloor$.

$$M \Leftrightarrow \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq nx\}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow M \neq \emptyset$$

$$x < 0 \Rightarrow \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}: \tilde{n} - 1 > n(-x) \Rightarrow -\tilde{n} \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$$

Рассмотрим $y = 1; x = nx; y > 0$. По принципу Архимеда

$$\exists k \in \mathbb{N}: k > nx$$

Тогда

$$\forall m \in M \ m < k \Rightarrow \exists m = \max M: m \leq nx < m + 1$$

$$m \leq nx < m + 1 \Rightarrow \frac{m}{n} \leq x < \frac{m + 1}{n}$$

Осталось проверить $\frac{m+1}{n} < y$.

$$\frac{m}{n} \leq x \wedge \frac{1}{n} < y - x \Rightarrow \frac{m + 1}{n} < y$$

Следствие 3.1.3. $x, y \in \mathbb{R}, x < y$.

$$\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: x < z < y$$

►

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} x < y &\Rightarrow x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: x - \sqrt{2} < r < y - \sqrt{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists z = r + \sqrt{2}: z \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}: x < z < y \end{aligned}$$

4. Верхняя и нижняя граница

Def: $A \subset \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$ — верхняя граница A , если

$$\forall a \in A : a \leq x$$

$x \in \mathbb{R}$ — нижняя граница A , если

$$\forall a \in A : a \geq x$$

Def: A ограничено сверху, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — верхняя граница } A$$

A ограничено снизу, если

$$\exists x \in \mathbb{R} : x \text{ — нижняя граница } A$$

A ограничено, если A ограничено сверху и снизу.

REM: Границ, если они есть, много.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено сверху. x — супремум A , если x — наименьшая из верхних границ.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, A ограничено снизу. x — инфимум A , если x — наибольшая из нижних границ.

Пример:

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$$

$$\sup A = 1, \inf A = 0$$

Утверждение. \mathbb{N} не ограничено сверху.

► x — верхняя граница $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x$.

Теорема 4.1. Существование точной границы. $A \neq \emptyset$.

1. Если A ограничено сверху, то $\exists x = \sup A$.

2. Если A ограничено снизу, то $\exists x = \inf A$.

Эта теорема равносильна аксиоме полноты.



1. B — множество всех верхних границ A .

$$\forall a \in A \forall b \in B : a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : a \leq c \wedge \forall b \in B : c \leq b \Rightarrow \exists \sup A = c$$

2. Рассмотрим $B = \{-a : a \in A\}$. Тогда

$$\inf A = -\sup B$$

REM: Без аксиомы полноты это неверно. Рассмотрим $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}, U = \mathbb{Q}$

Теорема 4.2. Свойство и признак точной границы.

1. A ограничено сверху. Тогда

$$b = \sup A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

2. A ограничено снизу. Тогда

$$c = \inf A \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \geq c \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a < c + \varepsilon)$$



$$b = \sup A \Leftrightarrow (b \text{ — верхняя граница } A \wedge \forall \varepsilon > 0 : b - \varepsilon \text{ — не верхняя граница}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq b \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A : a > b - \varepsilon)$$

5. Теорема о вложенных отрезках

Теорема 5.1. Теорема о вложенных отрезках. Вместе с теоремой Архимеда выводят полноту. $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : \forall i \in \mathbb{N} (a_i \leq a_{i+1} \wedge b_i \geq b_{i+1}) \wedge \forall i, j \in \mathbb{N} a_i < b_j$. Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

► $A = \{a_i\}, B = \{b_i\}$. Тогда по аксиоме полноты

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall i \in \mathbb{N} c \in [a_i, b_i] \Rightarrow c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

REM: Существенна замкнутость отрезков.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$$

REM: Не лучи.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \emptyset$$

REM: \mathbb{R} . Рассмотрим приближения $\sqrt{2}$.

6. Метрические пространства

Def: Пусть есть множество X и отображение $\rho: X \times X \rightarrow [0; +\infty)$. Тогда ρ называется метрикой, если:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Также пара (X, ρ) называется метрическим пространством.

Примеры:

1. Дискретная метрика $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases}$

2. $\rho(x, y) = |x - y|$

3. Евклидовская метрика. ρ — длина отрезка на плоскости между точками

4. Манхеттанская метрика. $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$

5. Расстояния на сфере.

6. Французская железнодорожная метрика. Есть центр — точка O . Тогда для точек на одном луче из O расстояние $\rho(A, B) = |AB|$, иначе $\rho(A, B) = |AO| + |BO|$

7. Пространство \mathbb{R}^n , метрика

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Def: Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда $(Y, \rho|_{Y \times Y})$ — подпространство X . $Y \subset X$.

Def: $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) < r\}$ — открытый шар.

Def: $\bar{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) \leq r\}$ — замкнутый шар.

Свойства:

1. $B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$
2. $x \neq y \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$

► Рассмотрим $r = \frac{1}{3}\rho(x, y) > 0$.

7. Неравенства Коши-Буняковского и Минковского

Теорема 7.1. Неравенство Коши-Буняковского. $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

►

$$f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t - b_k)^2 = \underbrace{\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right)}_{\Leftarrow A} t^2 - 2 \underbrace{\left(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \right)}_{\Leftarrow C} t + \underbrace{\left(b_1^2 + \dots + b_n^2 \right)}_{\Leftarrow B}$$

f имеет не более 1 корня, следовательно

$$(2C)^2 - 4AB \leq 0 \Rightarrow 4(C^2 - AB) \leq 0 \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

Можно считать, что все числа не равны 0 — иначе всё тривиально.

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

►

$$a_i = \alpha b_i$$

\Leftrightarrow

$$C^2 = AB \Leftrightarrow \text{есть корень } t_0 \Leftrightarrow \forall a_k t_0 - b_k = 0$$

Теорема 7.2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2}$$

► Возведём в квадрат

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k a_i^2}_{\Leftarrow A}} + \sqrt{\underbrace{\sum_{i=1}^k b_i^2}_{\Leftarrow B}} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \leq A + 2\sqrt{AB} + B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A + B + 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \Leftrightarrow A + B + 2\sqrt{AB} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sqrt{AB} \Leftarrow$$

\Leftarrow Неравенство Коши-Буняковского

REM: Равенство в случае, если числа пропорциональны.

8. Открытые множества

Def: (X, ρ) — метрическое пространство. $G \subset X$ — открытое множество, если

$$\forall x \in G \exists r > 0: B_r(x) \subset G$$

Теорема 8.1. О свойствах открытых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. \emptyset и X — открыты.
2. Объединение открытых открыто.
3. Пересечение **конечного числа** открытых открыто.
4. $B_r(a)$ открыт.



1. Очевидно.

- 2.

$$x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0: x \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \in \bigcup G_\alpha$$

3. $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$

$$\forall k = 1..n \ x \in G_k \Rightarrow \forall k = 1..n \ \exists r_k > 0: B_{r_k}(x) \in G_k \Rightarrow \exists r = \min r_k: G_r \in \bigcap_{k=1}^n G_k$$

- 4.

$$\forall x \in B_r(a) \exists r_x = \frac{1}{2} (r - \rho(a, x))$$

$$y \in B_{r_x}(x) \Rightarrow \rho(y, x) < r_x \Rightarrow \rho(y, x) + \rho(a, x) < r_x + \rho(a, x) \Rightarrow \rho(y, a) < r$$



REM:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0; 1 + \frac{1}{n}\right) = (0; 1] \text{ — не открытое множество}$$

9. Внутренние точки и внутренность множества

Def: $x \in A$ — внутренняя точка A , если $\exists r > 0: B_r(x) \subset A$

REM: x — внутренняя точка A эквивалентно тому, что в A содержится некое открытое множество, содержащее x .

Def: Внутренность множества A :

$$A^0 = \text{int } A \stackrel{\text{Def}}{=} \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset A}} G$$

Свойства:

1. $\text{int } A \subset A$

2. $\text{int } A$ — множество всех внутренних точек.
3. $\text{int } A$ открыто.
4. A открыто $\Leftrightarrow A = \text{int } A$
5. $A \subset B \Rightarrow \text{int } A \subset \text{int } B$
6. $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$
7. $\text{int int } A = \text{int } A$

10. Замкнутые множества

Def: Замкнутое множество — множество, дополнение которого открыто.

Теорема 10.1. О свойствах замкнутых множеств. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

1. \emptyset и X — замкнуты.
2. Перечисление замкнутых — замкнуто.
3. Объединение конечного числа замкнутых замкнуто.
4. Замкнутый шар замкнут.



1. Очевидно
2. По формулам де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} F_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus F_{\alpha})$$

3. По формуле де Моргана

4. Докажем, что $X \setminus \bar{B}_r(a)$ открыт. Рассмотрим $x \in X \setminus \bar{B}_r(a)$. Тогда по определению

$$\rho(a, x) > r$$

Покажем, что

$$B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset$$

Пусть $\exists y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \cap \bar{B}_r(a)$. Тогда

$$y \in \bar{B}_r(a) \Rightarrow \rho(a, y) \leq r$$

$$y \in B_{\rho(a, x) - r}(x) \Rightarrow \rho(x, y) < \rho(a, x) - r$$

$$\rho(a, x) \leq \rho(a, y) + \rho(x, y) < r + (\rho(a, x) - r) = \rho(a, x) \text{ — противоречие}$$

REM:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}; 1 \right] = (0; 1]$$

Def: $A \subset X, (X, \rho)$. Тогда замыкание множества A — пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A .

$$\text{cl } A = \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F$$

Теорема 10.2. О связи замыкания и внутренности.

$$X \setminus \text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

$$X \setminus \text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\begin{aligned} X \setminus \text{cl } A &= X \setminus \bigcap_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} F = \bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) \\ X \setminus F &\text{ открыто} \\ X \setminus F &\subset X \setminus A \end{aligned}$$

То

$$\bigcup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \supset A}} (X \setminus F) = \bigcup_{\substack{G \text{ открыто} \\ G \subset X \setminus A}} G = \text{int}(X \setminus A)$$

Аналогично

Следствие 10.2.1.

$$\text{int } A = \text{cl}(X \setminus A)$$

$$\text{cl } A = \text{int}(X \setminus A)$$

Свойства замыкания:

1. $A \subset \text{cl } A$
2. $\text{cl } A$ замкнуто.
3. A замкнуто $\Leftrightarrow A = \text{cl } A$
4. $A \subset B \Rightarrow \text{cl } A \subset \text{cl } B$
5. $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl } A \cup \text{cl } B$
6. $\text{cl cl } A = \text{cl } A$

11. Открытые и замкнутые множества в пространстве и подпространстве

Теорема 11.1. Существование открытого/замкнутого надмножества в надпространстве. $(X; \rho)$ — пространство, $(Y; \rho)$ — подпространство.

1. A открыто в $Y \Leftrightarrow \exists G \subset X$ — открытое в X : $A = G \cap Y$
2. A замкнуто в $Y \Leftrightarrow \exists F \subset X$ — замкнутое в X : $A = F \cap Y$



1. \Rightarrow :

$$A \text{ открыто в } Y \Leftrightarrow \forall x \in A \exists r_x > 0: B_{r_x}^Y(x) \subset A$$

$$G \Leftarrow \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^X(x) \text{ — открыто в } X$$

$$G \cap Y = \bigcup_{x \in A} (B_{r_x}^X(x) \cap Y) = \bigcup_{x \in A} B_{r_x}^Y(x) = A$$

\Leftarrow :

$$x \in A \subset G \Rightarrow \exists r > 0: B_r^X(x) \subset G$$

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y \subset G \cap Y = A$$

2. Перейдём к дополнениям

Теорема 11.2. О замыканиях. (X, ρ) , $A \subset X$

$$x \in \text{cl } A \Leftrightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

► \Rightarrow : Пусть $\exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$. Тогда

$$B_r(x) \subset X \setminus A$$

$$X \setminus B_r(x) \text{ замкнуто}$$

$$X \setminus B_r(x) \supset A$$

$$x \notin X \setminus B_r(x)$$

Тогда

$$\text{cl } A \subset X \setminus B_r(x)$$

Но тогда

$$x \notin \text{cl } A$$

\Leftarrow : Пусть $x \notin \text{cl } A \Rightarrow \exists F \supset A: x \notin F \wedge F$ закрыто. Тогда

$$x \in X \setminus F \text{ — открытое} \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \subset X \setminus F \Rightarrow \exists r > 0: B_r(x) \cap A = \emptyset$$

Следствие 11.2.1. U открытое $\wedge U \cap A = \emptyset \Rightarrow U \cap \text{cl } A = \emptyset$

► Пусть $x \in U \cap \text{cl } A$.

$$x \in \text{cl } A \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

$$x \in U \Rightarrow \exists r_0 > 0: B_{r_0} \subset U$$

Но $B_{r_0}(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$

12. Пределные точки

Def: Проколота окрестность точки:

$$\dot{B}_r(x) = B_r(x) \setminus \{x\}$$

Def: Точка $x \in X$ предельная у множества A , если

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$$

Def: A' — множество предельных точек.

Свойства:

1. $\text{cl } A = A \cup A'$
2. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
3. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

► \supset :

$$A \cup B \supset A \Rightarrow (A \cup B)' \supset A'$$

$$A \cup B \supset B \Rightarrow (A \cup B)' \supset B'$$

Тогда

$$(A \cup B)' \supset A' \cup B'$$

\subset : Пусть $x \in (A \cup B)' \wedge x \notin B'$.

$$x \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall r > 0 B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$x \notin B' \Rightarrow \exists r_0 > 0: \dot{B}_{r_0}(x) \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall r \leq r_0 \dot{B}_r(x) = \emptyset$$

Тогда

$$\forall r > 0 \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A'$$

Теорема 12.1. Об окрестности предельной точки.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0 |B_r(x) \cap A| = \infty$$

►

$$x \in A' \Rightarrow \dot{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_1 \in A: y_1 \neq x \wedge y_1 \in B_r(x)$$

Тогда

$$\dot{B}_{\rho(x, y_1)} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists y_2 \in A: y_2 \neq x \wedge y_2 \neq y_1 \wedge y_2 \in B_{\rho(x, y_1)}$$

Тогда рассмотрим

$$\{y_i\}_{i=1}^{\infty}: y_i \neq y_j \wedge y_i \neq x \wedge y_i \in A$$

Следствие 12.1.1. $|A| < \infty \Rightarrow A' = \emptyset$

13. Супремум и инфимум замкнутых множеств

Теорема 13.1. О точной границе замкнутого множества.

A ограничено сверху и замкнуто $\Rightarrow \sup A \in A$

A ограничено снизу и замкнуто $\Rightarrow \inf A \in A$

► $a = \sup A$. Тогда

$$\forall x \in A \ x \leq a \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A: x > a - \varepsilon$$

Пусть $a \notin A$. Рассмотрим $\dot{B}_r(a) = (a - r, a + r) \setminus \{a\}$.

$$\dot{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A$$



14. Предел последовательности

Def: Пусть есть пространство (X, ρ) и последовательность (x_i) . Тогда

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} x^* \in X \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

Примеры:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x = x$
- $\mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

REM: Определение зависит от метрического пространства, в котором мы находимся. Последнего предела на $(0; +\infty)$ нет. А на метрике

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

предел есть только у стационарных последовательностей.

Теорема 14.1. Свойства предела.

1. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow$ каждая окрестность x^* содержит всю последовательность с некоторого элемента
2. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow x^* = x^{**}$
3. $\exists x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow (x_n)$ ограничена
4. $x \in A' \Rightarrow \exists (x_n) \subset A: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$



1. \Rightarrow : Пусть $x^* \in U$ — открытое множество. Тогда

$$\exists r > 0: B_r(x^*) \subset U$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U$$

$$\Leftarrow: U \ni B_\varepsilon(x^*).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n \geq N \ x_n \in U \Rightarrow x_* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

2. Пусть $\varepsilon \Leftarrow \frac{\rho(x^*; x^{**})}{2} > 0$

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_1: \forall n \geq N_1 \rho(x^*; x_n) < \varepsilon$$

$$x^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N_2: \forall n \geq N_2 \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall n \geq \max\{N_1; N_2\} \left\{ \begin{array}{l} \rho(x^*; x_n) < \varepsilon \\ \rho(x^{**}; x_n) < \varepsilon \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\varepsilon = \rho(x^*; x^{**}) \leq \rho(x^*; x_n) + \rho(x^{**}; x_n) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

3. $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \exists N: \forall n \geq N \rho(x^*; x_n) < 1$. Рассмотрим

$$R = 1 + \max_{n < N} \{\rho(x^*; x_n)\}$$

Тогда

$$\forall n \ x_n \in B_R(x^*)$$

4. $x \in A'$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} x_1 &\in \dot{B}_1(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_2 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{2}; \rho(x; x_1)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ x_3 &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{3}; \rho(x; x_2)\}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ &\vdots \\ x_n &\in \dot{B}_{\min\{\frac{1}{n}; \rho(x; x_{n-1})\}}(x) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

Тогда

$$\forall n \geq N \ \rho(x; x_n) < \frac{1}{N} \Rightarrow x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

REM: В пункте 4 можно выбрать различные x_n .

REM: Если x_n — различные и x^* — их предел, то $x^* \in \{x_n\}'$

REM:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \wedge x_n \in A \Rightarrow x \in \text{cl } A$$

Далее будем работать с $(\mathbb{R}; |x - y|)$.

15. Предельный переход в неравенстве

Теорема 15.1. Предельный переход в неравенстве. Пусть $x_n, y_n \in \mathbb{R}; x = \lim x_n; y = \lim y_n; x_n \leq y_n$ (или $x_n < y_n$). Тогда $x \leq y$.

► Пусть $y < x; \varepsilon \Leftarrow \frac{x-y}{2}$. Тогда

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 |x - x_n| < \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 |y - y_n| < \varepsilon$$

Тогда

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} x_n > x - \varepsilon = y + \varepsilon > y_n$$

РЕМ: Понятно, что можно потребовать отношение между последовательностями только с некоторого номера.

РЕМ: Строгие неравенства не сохраняются.

Следствие 15.1.1. $x_n \leq b \Rightarrow x \leq b$

Следствие 15.1.2. $x_n \geq a \Rightarrow x \geq a$

Следствие 15.1.3. $x_n \in [a; b] \Rightarrow x \in [a; b]$

16. Теорема о двух милиционерах

Теорема 16.1. О двух милиционерах. Пусть $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = l$. Тогда $\lim y_n = l$.

► Выберем $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 x_n > l - \varepsilon$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 z_n < l + \varepsilon$$

Тогда

$$\exists N = \max\{N_1, N_2\}: \forall n \geq N l - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \varepsilon$$

Тогда $\lim y_n = l$

Следствие 16.1.1. $\lim z_n = 0 \wedge |y_n| \leq z_n \Rightarrow \lim y_n = 0$

Следствие 16.1.2. Если $\lim x_n = 0$, а y_n ограничена, то $\lim x_n y_n = 0$.

17. Предел монотонной последовательности

Def: (x_n) нестрого монотонно возрастает, если

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

(x_n) строго монотонно возрастает, если

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots$$

(x_n) нестрого монотонно убывает, если

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$$

(x_n) строго монотонно убывает, если

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots$$

Теорема 17.1. Теорема Вейерштрасса. Монотонная последовательность ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

► \Leftarrow : Очевидно.

\Rightarrow : Пусть (x_n) возрастает. Она ограничена, значит есть супремум. Докажем, что это и есть предел. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$a = \sup\{x_n\} \Rightarrow \exists x_k: x_k > a - \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < x_k \leq x_{k+1} \leq \dots \leq a$$

Тогда

$$\forall n \geq k |x_n - a| < \varepsilon$$

18. Конечное векторное пространство

Def: Вектор — кортеж $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Операция сложения

$$+ : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_d + y_d)$$

и умножения

$$\times : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_d)$$

1. Сложение

(a) Коммутативно

(b) Ассоциативно

(c) Существует ноль $\vec{0} = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_d$

(d) Существует обратный элемент

2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

3. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

4. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

5. $1x = x$

Def: Общее определение векторного пространства —

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\times : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

Обладает свойствами 1-4 и $1X = X$

Def: Скалярное произведение векторов (евклидово):

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

Свойства:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Def: Общее определение скалярного произведения: X — векторное пространство. Задана операция $\langle x, y \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ обладающая указанными свойствами. Например, если приписать в определение положительную константу — ничего не поменяется.

Def: (Евклидова) норма:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

1. $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (нер-во Коши–Вуняковского)
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (нер-во треугольника)
5. $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ (нер-во Минковского)
6. $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$

► $\|x - y\| = \|y - x\|$. Таким образом достаточно показать, что

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \Leftarrow \|x - y\| + \|y\| \geq \|x\|$$

А это неравенство треугольника. ◀

7. $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика. Это ровно евклидово пространство на \mathbb{R}^d .

Def: Общее определение нормы: $\|x\|: X \Rightarrow \mathbb{R}$, обладает свойствами 1, 2 и 4. Свойство 3 касается скалярного произведения, которого может и не быть.

Примеры:

1. $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|$
2. $\|x\|_\infty = \max_{k=1..d} |x_k|$



$$\|x + y\| = \max_{k=1..d} |x_k + y_k| \leq \max_{k=1..d} (|x_k| + |y_k|) = |x_{k_0}| + |y_{k_0}| \leq \|x\| + \|y\|$$



- 3.

$$\|x\|_d = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^d |x_k|^p}$$

19. Арифметические свойства предела

Пусть есть (\mathbb{R}^d, ρ) со стандартной метрикой и нормой.

Утверждение. $x_n \in \mathbb{R}^d$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$$



$$\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \|x_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$$



REM: $A \subset \mathbb{R}^d$ ограничено $\Leftrightarrow \exists M: \forall x \in A \|x\| \leq M$

Теорема 19.1. Арифметические свойства предела. $x_n, y_n \in \mathbb{R}^d, \lambda \in \mathbb{R}, \lim x_n = x_0, \lim y_n = y_0, \lim \lambda = \lambda_0$.

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$
2. $\lim(\lambda x_n) = \lambda_0 x_0$
3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$
4. $\lim \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle$

5. $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \|x_n - x_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \|y_n - y_0\| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3: \forall n > N_3 |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$$

1.

$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \varepsilon \\ \|y_n - y_0\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|x_n + y_n - x_0 - y_0\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0\| + \|\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| = \\ &= |\lambda_n| \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \leq M \|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \|x_0\| \end{aligned}$$

Но тогда

$$\forall n > \max N_1, N_3 \begin{cases} \|x_n - x_0\| < \frac{\varepsilon}{M} \\ |\lambda_n - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{\|x_0\|} \end{cases} \Rightarrow \|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| < \varepsilon$$

3. Следствие 1 и 2

4. $x_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}); y_n = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(d)})$ Это докажем позже

5.

$$0 \leq \|x_n\| - \|x_0\| \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| - \|x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$$

Теорема 19.2. Свойства предела на вещественных. $x_n, y_n \in \mathbb{R}; \lim x_n = x_0; \lim y_n = y_0$

1. $\lim(x_n + y_n) = x_0 + y_0$

2. $\lim x_n y_n = x_0 y_0$

3. $\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0$

4. $\lim |x_n| = |x_0|$

5. Если $y_n, y_0 \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_0}{y_0}$

► Докажем, что $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$.

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n| |y_0|} \Leftrightarrow A$$

$$\exists N_1: \forall n > N_1 |y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2} \Rightarrow |y_n| \geq |y_0| - |y_0 - y_n| > |y_0| - \frac{|y_0|}{2} = \frac{|y_0|}{2}$$

Тогда

$$A < \frac{|y_n - y_0|}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|} < \frac{\frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}}{\frac{|y_0|}{2} |y_0|}$$

20. Покоординатная сходимость

Def: $\{x_n\}$ — последовательность в \mathbb{R}^d . Тогда $\{x_n\}$ сходится в x_0 покоординатно, если

$$x_n = \{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(d)}\}: \lim x_n^{(i)} = x_0^i$$

Теорема 20.1. О сходимости покоординатно. $\{x_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность сходится покоординатно.



$$|x_n^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})^2} \leq \sum_{i=1}^d (x_n^{(i)} - x_0^{(i)})$$



Следствие 20.1.1. $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$. Тогда $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$



$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_n^{(i)} \rightarrow y_n^{(i)} \\ y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow y_n^{(i)} \rightarrow y_0^{(i)} \end{array} \right\} \Rightarrow x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow x_0^{(i)} y_0^{(i)}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^d x_n^{(i)} y_n^{(i)} \rightarrow \sum_{i=1}^d x_0^{(i)} y_0^{(i)} \Leftrightarrow \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x_0, y_0 \rangle$$



21. Бесконечно малые и большие

Def:

$$\lim x_n = +\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n > E$$

$$\lim x_n = -\infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ x_n < E$$

$$\lim x_n = \infty \stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \forall E \exists N: \forall n > N \ |x_n| > E$$

REM:

$$\left[\begin{array}{l} \lim x_n = +\infty \\ \lim x_n = -\infty \end{array} \Rightarrow \lim x_n = \infty \right.$$

Также заметим, что обратное неверно ($x_n = (-1)^n n$).

REM: $\lim x_n = \infty \Rightarrow x_n$ неограниченна

REM: Единственность предела справедлива и расширенная на $\pm\infty$.

REM: Теорема о двух милиционерах справедлива и для бесконечно больших.

REM: $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

1. $\pm c + \pm\infty = \pm\infty$

2. $\pm c - \pm\infty = \mp\infty$

3. $c > 0: \pm\infty \times c = \pm\infty$

4. $c < 0: \pm\infty \times c = \mp\infty$

5. $c > 0: \frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty$

$$6. c < 0: \frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty$$

$$7. \frac{c}{\pm\infty} = 0$$

$$8. (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$9. (+\infty) - (-\infty) = +\infty$$

$$10. (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$11. (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$12. \pm\infty \times (+\infty) = \pm\infty$$

$$13. \pm\infty \times (-\infty) = \mp\infty$$

Def: Последовательность называют бесконечно большой, если её предел бесконечен.

Def: Последовательность называют бесконечно малой, если её предел равен нулю.

22. Связь между бесконечно большими и малыми

Теорема 22.1. О связи бесконечно больших и малых. Пусть $x_n \neq 0$. Тогда

$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



$$x_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall E > 0 \exists N: \forall n > N |x_n| > E \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$$



Теорема 22.2. Об арифметических действиях с бесконечно малыми. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ — бесконечно малые, $\{z_n\}$ ограничена. Тогда

$$1. x_n \pm y_n \text{ — бесконечно малая}$$

$$2. x_n z_n \text{ — бесконечно малая}$$

Теорема 22.3. Об арифметических действиях с бесконечно большими.

$$1. x_n \rightarrow +\infty \wedge y_n \text{ ограничена снизу} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$$

$$2. x_n \rightarrow -\infty \wedge y_n \text{ ограничена сверху} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow -\infty$$

$$3. x_n \rightarrow \infty \wedge y_n \text{ ограничена} \Rightarrow x_n + y_n \rightarrow +\infty$$

$$4. x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow +\infty$$

$$5. x_n \rightarrow \pm\infty \wedge y_n \leq a < 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow -\infty$$

$$6. x_n \rightarrow \infty \wedge |y_n| \geq a > 0 \Rightarrow x_n y_n \rightarrow \infty$$

$$7. x_n \rightarrow a \neq 0 \wedge y_n \rightarrow 0 \wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$$

$$8. x_n \text{ ограничена} \wedge y_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

9. $x_n \rightarrow \infty \wedge y_n$ ограничена $\wedge y_n \neq 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \infty$

REM:

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l > 0 \Rightarrow \exists a > 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \geq a$$

$$\lim x_n = l \in \bar{\mathbb{R}} \wedge l < 0 \Rightarrow \exists a < 0: \exists N: \forall n > N \ x_n \leq a$$

23. Компактность

Def: Множество A имеет покрытие множествами B_α , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Def: Множество A имеет открытое покрытие открытыми множествами B_α , если $A \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

Def: Множество A компактно, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

$$\forall B_\alpha: K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n: K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$$

Теорема 23.1. Компактность и подпространства. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $K \subset Y \subset X$. Тогда

$$K \text{ компактно в } (X, \rho) \Leftrightarrow K \text{ компактно в } (Y, \rho)$$

► \Rightarrow : Пусть B_α — открытое в Y , что

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (G_\alpha \cap Y) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

Тогда можно заменить покрытие в Y покрытием соответствующими множествами в X , выбрать конечное подпокрытие, а потом перейти обратно в Y .

\Leftarrow : Пусть $K = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда

$$K = K \cap Y \subset \left(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \right) \cap Y = \bigcup_{\alpha \in I} (G_\alpha \cap Y)$$

Получим покрытие в пространстве Y , в нём есть конечное подпокрытие. Выберем соответствующие шарики из X . ◀

REM: Например, $(0, 1)$ не компактно. Например, из

$$\bigcup_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{i}, 1 \right)$$

не выбрать.

24. Свойства компактного множества

Теорема 24.1. Свойства компактного множества. Если K компактно, то K замкнуто и ограничено.

►

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x) \Rightarrow K \subset B_R(x) \Leftrightarrow K \text{ ограничено}$$

Возьмём произвольный $a \notin K$. Тогда

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{1}{2}\rho(a,x)}(x) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$$

Но $(r \Leftarrow \min_{i=1}^k \{\frac{1}{2}\rho(a, x_i)\})$

$$\forall i = 1..k \ B_r(a) \cap B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset \Rightarrow B_r(a) \cap \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i) = \emptyset$$

Но $K \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\frac{1}{2}\rho(a,x_i)}(x_i)$. Т. о. $B_r(a) \cap K = \emptyset$. ◀

Теорема 24.2. Признак компактного множества. Замкнутое подмножество компактного компактно.

► Добавим к покрытию подмножества $X \setminus K_1$. ◀

25. Теорема о пересечении семейства компактов

Теорема 25.1. Пересечение компактных. Дан набор компактных множеств, любое конечное пересечение которых не пусто. Тогда их пересечение не пусто.

► K_0 — любое из них. Пусть пересечение всех пусто.

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = \emptyset$$

Тогда

$$\bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus K_\alpha) \supset K_0$$

Но тогда можно выбрать конечное покрытие. Тогда

$$\bigcup_{i=1}^k (X \setminus K_{x_i}) \supset K_0$$

Но тогда

$$\bigcap_{i=0}^k K_{x_i} = \emptyset \quad \text{противоречие}$$

Следствие 25.1.1. Пусть есть цепочка вложенных непустых компактных. Тогда их пересечение не пусто. ◀

26. Теорема о вложенных параллелепипедах

Def: Параллелепипедом на \mathbb{R}^d и $a, b \in \mathbb{R}^d$ назовём

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i \leq x_i \leq b_i\} \quad (\text{закрытый})$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ a_i < x_i < b_i\} \quad (\text{открытый})$$

Теорема 26.1. О вложенных параллелепипедах. $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$ имеют непустое пересечение.

► Применим теорему о вложенных отрезках по каждой координате. ◀

27. Теорема Гейне-Бореля

Теорема 27.1. Теорема Гейне-Бореля. Замкнутый куб компактен



$$I = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i = 1..d \ 0 \leq x_i \leq a\}$$

Рассмотрим произвольное покрытие. Пусть из него нельзя выбрать конечное подпокрытие. Тогда разобьём куб по какому-то измерению пополам. Хотя бы один из результирующих не покрываем. Повторим процесс до бесконечности. У них есть точка в пересечении. Но она тогда есть покрывающее её множество. Оно открыто, а значит оно покрывает ещё и некоторый хвост подкубов. Ну а тогда возьмём его и все вышестоящие покрытия. Результат конечен и покрывает куб. ◀

28. Подпоследовательность

Def: Подпоследовательность:

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}; n_i \uparrow$$

Теорема 28.1. Предел подпоследовательности.

Подпоследовательность имеет тот же предел.

Объединение 2 подпоследовательностей с общим пределом имеет тот же предел.

29. Секвенциальная компактность

Теорема 29.1. Компактность в \mathbb{R}^d . Следующее в \mathbb{R}^d равносильно:

1. Компактно
2. Замкнуто и ограничено
3. Для любой последовательности в множестве можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества (секвенциально компактно)

► $2 \Rightarrow 1$: ограничено, значит можно его ограничить кубом, значит оно подмножество компактного и закрыто, значит компактно.

$1 \Rightarrow 3$: Возьмём последовательность $\{x_n\} \subset E$ элементов множества F . Если множество элементов E конечно, то какой-то элемент повторился бесконечно. Возьмём новую стационарную последовательность ровно из этого элемента, имеющую предел. Если же оно бесконечно, докажем, что у него есть предельная точка.

Пусть ни одна точка не предельна. Значит

$$\forall x \in X \exists r_x > 0: \dot{B}_{r_x}(x) \cap F = \emptyset$$

Но тогда возьмём покрытие

$$\bigcup_{x \in X} \dot{B}_{r_x}(x)$$

В нём есть конечное подпокрытие. Возьмём его

$$\bigcup_{i=1}^k \dot{B}_{r_{y_i}} \supset K \supset E$$

Но также

$$\bigcup \dot{B}_{r_{y_i}} \cap E = \emptyset$$

Значит

$$E \subset \bigcup_{i=1}^k \{y_i\}$$

Получили, что E конечное.

Таким образом предельная точка существует, а значит можно выбрать подпоследовательность можно.

$3 \Rightarrow 2$: Пусть K не замкнуто. Возьмём предельную точку, которой нет в K . Значит есть последовательность, сходящаяся к ней. Из неё нельзя выбрать подпоследовательность, сходящуюся к элементу K .

Пусть K не ограничено. Значит есть точка, не лежащая в данном шарике.

$$K \not\subset B_1(a) \Rightarrow \exists x_1: \rho(x_1, a) > 1$$

$$K \not\subset B_{\rho(a, x_1)+1}(a) \Rightarrow \exists x_2: \rho(x_2, a) > \rho(x_1, a) + 1$$

\vdots

Рассмотрим сходящуюся подпоследовательность. Она ограничена шариком радиуса R . Но

$$\rho(a, x_n) > \rho(a, x_{n-1}) + 1 > \dots > n$$

$$R > \rho(b, x_{n_k}) > \rho(a, x_{n_k}) + \rho(a, b) > n_k + \rho(a, b) \rightarrow \infty$$

Значит K ограничено. ◀

РЕМ: $1 \Rightarrow 3$; $3 \Rightarrow 2$; $1 \Rightarrow 2$ справедливы для всех пространств. $2 \Rightarrow 1$ ломается, например, на \mathbb{R} с дискретной метрикой.

30. Теорема Больцано-Вейерштрасса и другие следствия

Следствие 30.0.1. В \mathbb{R}^d компактность K равносильна наличию предельной точки для любого подмножества.

► В одну сторону просто по теореме. Обратно: возьмём часть доказательства, объясняющее взятие подпоследовательности. ◀

Следствие 30.0.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Из любой ограниченной последовательности в \mathbb{R}^d можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

► Множество значений ограничено, значит его замыкание компактно, значит в компактном есть сходящаяся подпоследовательность. ◀

Следствие 30.0.3. В любой последовательности в \mathbb{R}^d есть сходящаяся в \bar{R} подпоследовательность.

► Если ограничена, то см. предыдущее. Иначе она стремится к бесконечности. Тогда выберем бесконечную подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности. В ней бесконечное число положительных или бесконечное число отрицательных. ◀

31. Диаметр множества

Def: Диаметр множества:

$$\text{diam } A = \sup \rho(x, y)$$

Теорема 31.1. Свойства диаметра.

1. $\text{diam } E = \text{diam cl } E$

2. $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \dots$ (последовательность вложенных компактов); $\text{diam } K_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigcap K_i$ — одноточечное



1.

$$E \subset \text{cl } E \Rightarrow \text{diam } E \leq \text{diam cl } E$$

$$d = \text{diam cl } E = \sup \rho(x, y)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0, y_0: \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$x_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists x_1 \in E: \rho(x_0, x_1) < \varepsilon$$

$$y_0 \in \text{cl } E \Rightarrow \exists y_1 \in E: \rho(y_0, y_1) < \varepsilon$$

Тогда

$$\rho(x_1, y_1) + 2\varepsilon > \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y_1) + \rho(y_1, y_0) \geq \rho(x_0, y_0) > d - \varepsilon$$

$$\rho(x_1, y_1) > \rho(x_0, y_0) - 3\varepsilon$$

Устремив $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$\text{diam } E \geq \text{diam cl } E$$

2. Пусть в пересечение лежат две точки, но тогда диаметр для любого n хотя бы $\rho(a, b)$. Противоречие.



32. Фундаментальные последовательности

Def: Последовательность называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(n, m) < \varepsilon$$

REM: $E \Leftarrow \{x_i\}_{i=n}^{\infty}$

$$\{x_n\} \text{ фундаментальная} \Leftrightarrow \text{diam } E \rightarrow 0$$

Свойства фундаментальных последовательностей:

1. Ограничена

2. Если есть сходящаяся подпоследовательность, то она сходится.



$$\forall \varepsilon > 0 \exists K: \forall k > K \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > K \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Т.о.

$$\exists n_k > M = \max\{N, K\}: \forall n > n_k \rho(x_n, a) \leq \rho(x_{n_k}, a) + \rho(x_{n_k}, x_k) < 2\varepsilon$$



Def: Пространство называют полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

33. Полнота компактных метрических пространств

Теорема 33.1. О сходимости фундаментальных последовательностей.

1. Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.
2. В \mathbb{R}^d фундаментальная последовательность всегда сходится.

► $\lim x_n = a$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \begin{matrix} \forall n > N \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \forall m > N \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{matrix} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n, m > N \rho(x_m, x_n) < 2\varepsilon$$

x_n — фундаментальная последовательность в \mathbb{R}^d . $E_n \Leftarrow \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ — ограничено. $\text{cl } E_n$ — ещё и замкнуто. Т.е. компактно.

$$\text{cl } E_1 \supset \text{cl } E_2 \supset \text{cl } E_3 \supset \dots$$

$$\text{diam cl } E_n = \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о.

$$\exists! a: a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{cl } E_n$$

$$a \in \text{cl } E_n \Rightarrow \forall i > n \ 0 \leq \rho(a, x_i) \leq \text{diam } E_n \rightarrow 0$$

Т.о. $x_n \rightarrow a$. ◀

REM: \mathbb{R}^d полно. $\langle \mathbb{Q}, \rho \rangle$ не полно. Пространство с дискретной метрикой полно.

Теорема 33.2. О полноте компактного пространства. Компактное метрическое пространство полно.

► В компакте у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность. А значит любая фундаментальная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность. А значит она сама сходится. А значит пространство полно. ◀

34. Верхний и нижний предел

Def: Верхний и нижний предел

$$\liminf x_n = \underline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf_{k > n} x_k$$

$$\limsup x_n = \overline{\lim} x_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{k > n} x_k$$

REM: $y_n \Leftarrow \inf_{k > n} x_n, z_n \Leftarrow \sup_{k > n} x_n$.

$$y_n < x_n < z_n$$

$$y_n \nearrow; z_n \searrow$$

Def: a — частичный предел последовательности, если a предел подпоследовательности.

Лемма 34.1. Если x_n монотонно возрастает и неограничена, то $\lim x_n = +\infty$

Теорема 34.1. Существование верхнего и нижнего пределов. У любой последовательности есть верхний и нижний предел в $\bar{\mathbb{R}}$, при этом

$$\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$$

► $y_n \Leftrightarrow \inf_{k>n} x_n$, $z_n \Leftrightarrow \sup_{k>n} x_n$. Если x_n ограничено, то и y_n ограничено. Если x_n не ограничено снизу, то и y_n не ограничено снизу. Т.о. $\lim y_n = \underline{\lim} x_n$. Аналогично существует верхний предел. ◀

Теорема 34.2. Верхний и нижний предел и частичные пределы.

1. \limsup — наибольший частичный предел.
2. \liminf — наименьший частичный предел.
3. \lim существует $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$



1. $a = \limsup x_n$. Покажем, что a — частичный предел.

$$z_n \searrow \Rightarrow \sup_{k>n} x_k \geq a$$

Выберем

$$x_{k_m} : x_{k_m} > a - \frac{1}{m}; k_{m+1} > k_m$$

Оно стремится к a .

Пусть есть больший частичный предел. Но тогда с какого-то места последовательность, сходящаяся к b , уйдёт выше супремума, что плохо.

2. Аналогично
3. Два милиционера



35. Характеристика верхних и нижних пределов с помощью N и ε

Теорема 35.1. Определение верхнего и нижнего предела через N и ε .

1.

$$a = \underline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \forall N: \exists n > N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

2.

$$a = \overline{\lim} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \forall N: \exists n > N x_n > a - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N x_n < a + \varepsilon \end{cases}$$



1. Запишем в терминах y_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \inf_{n>N} > a - \varepsilon; \forall \varepsilon > 0 \exists N: \inf_{n>N} < a + \varepsilon$$

Уже видно, что эти условия и задают предел.

2. Аналогично.

Теорема 35.2. О предельном переходе в неравенстве.

$$a_n \leq b_n \Rightarrow \begin{cases} \lim a_n \leq \lim b_n \\ \overline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} b_n \end{cases}$$

► Просто сводим к пределам инфимумов.

36. Неравенство Бернулли

Теорема 36.1. Неравенство Бернулли.

$$\forall x > -1 \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq 1+nx$$

► Индукция: база очевидна. Пусть $(1+x)^k \geq 1+kx$. Тогда

$$(1+x)^{k+1} = \underbrace{(1+x)^k(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$$

Следствие 36.1.1. Если $|t| > 1$, то $\lim t^n = +\infty$. Если $|t| < 1$, то $\lim t^n = 0$.

37. Число e

Определим число e :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Покажем, что $x_n \uparrow; y_n \downarrow$.

►

$$\begin{aligned} x_n < x_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{n}{n^2+2n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \\ y_n < y_{n-1} &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} < \frac{n^n}{(n-1)^n} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \frac{n^{2n}}{(n-1)^n(n+1)^n} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{n}{n^2-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

Заметим, что при этом $x_n < y_n$. Собственно, тогда $\lim x_n$ существует.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{?}{=} e$$

Свойства:

1. $\lim y_n = e$
2. $x_n < e < y_n$

38. Сравнение скорости роста возрастания последовательностей

Теорема 38.1. Предел убывающей по отношению. $x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. Тогда $x_n \rightarrow 0$.

► С какого-то места отношение довольно мало (меньше 1). ◀

Следствие 38.1.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

►

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} < 1$$

◀

Следствие 38.1.2.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0$$

Следствие 38.1.3.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0$$

►

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

◀

39. Теорема Штольца

Теорема 39.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n-1}$, $\lim x_n = \lim y_n = 0$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

►

1. Пусть $a = 0$.

$$\varepsilon_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow 0$$

$$x_n - x_m = \sum_{k=m+1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^n \varepsilon_k (y_k - y_{k-1})$$

$$|x_n - x_m| = \left| \sum \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |\varepsilon_k| (y_{k-1} - y_k)$$

Выберем N , такое что $\forall k > N |\varepsilon_k| < \varepsilon$, тогда при n и $m > N$

$$< \sum_{k=m+1}^n \varepsilon(y_{k-1} - y_k) = \varepsilon \sum_{k=m+1}^n (y_{k-1} - y_k) = \varepsilon(y_m - y_n)$$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon |y_n - y_m|$$

устремим n к бесконечности.

$$|x_m| < \varepsilon(y_m)$$

$$\frac{x_m}{y_m} < \varepsilon \text{ при } m > N$$

2. $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{x}_n = x_n - ay_n$$



40. Теорема Штольца

Теорема 40.1. Теорема Штольца. $0 < y_n < y_{n+1}$, $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, $\lim \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} = a \in \bar{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

► $a = 0$:

$$\varepsilon_n \Leftarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}$$

$$x_n = x_1 + \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}) = x_1 + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i (y_i - y_{i-1})$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} =$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |\varepsilon_n| < \varepsilon$$

$$= \frac{x_1}{y_n} + \sum_{i=2}^N + \sum_{i=N+1}^n$$

$$\left| \sum_{i=N+1}^n \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \right| \leq \sum_{i=N+1}^n |\varepsilon_i| \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} < \sum_{i=N+1}^n \varepsilon \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{y_n} \sum_{i=N+1}^n (y_i - y_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{y_n} (y_n - y_N) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \frac{y_i - y_{i-1}}{y_n} \leq \frac{1}{y_n} \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_n} < \varepsilon$$

Т.о.

$$\left| \frac{x_n}{y_n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 0$$

$a \in \mathbb{R}$: $\tilde{x}_n = x_n - ay_n$. Фактом $x_n \rightarrow \infty$ мы не пользовались.

$$\frac{\tilde{x}_n - \tilde{x}_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{(x_n - ay_n) - (x_{n-1} - ay_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - a \rightarrow 0$$

$a = +\infty$: Поменяем местами x_n и y_n . Проверим, что x_n монотонно растёт и не ноль.

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty \Rightarrow \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > 1x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1} > 0$$

$a = -\infty$: Сменим знаки x_n .



41. Пределы функций

Def: (X, ρ_x) и (Y, ρ_y) — метрические пространства. $E \subset X$, a — предельная точка E . $f: X \rightarrow Y$. Тогда говорят, что

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

если $b \in Y$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

или, что то же самое

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x (x \neq a \wedge \rho(x, a) < \delta) \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon$$

REM: Для бесконечности на \mathbb{R} есть частные случаи.

Def: По Гейне,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E: x_n \neq a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

42. Равносильность определения по Коши и по Гейне

Теорема 42.1. Равносильность определений предела функции. Определения равносильны.



1. Коши \Rightarrow Гейне

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$$

Пусть $\lim x_n = a$, $x_n \in E$, $x_n \neq a$

По δ выберем $N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$, тогда $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$

Нашли номер N при котором $f(x_n) \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow \lim f(x_n) = b$

2. Гейне \Rightarrow Коши

от противного.

По Коши $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b)$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0: \exists x \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \notin B_\varepsilon(b)$$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

Выберем последовательность $\{x_n\}$

$$x_n \in \dot{B}_{\frac{1}{n}}(a)$$

$$\rho(f(x_n), b) \geq \varepsilon \Rightarrow \lim(f(x_n)) \neq b$$

Противоречие с определением по Гейне

REM: В определение по Гейне можно рассматривать только те последовательности, в которых все x_n различны. ◀

REM: Можно рассматривать лишь такие последовательности, что $\rho(x_n, a)$ убывает.

43. Свойства функций, имеющих предел

REM: Если в определении по Гейне все пределы существуют, то они будут равны.

► Возьмём две сходящиеся последовательности x_n и y_n , после применения функций стремящиеся к каким-то разным значениям b и c . Но тогда у последовательности

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$$

сходящейся к той же точке, будет предел. Но тогда у подпоследовательностей одинаковые пределы. ◀

Утверждение. Единственность предела $f: E \subset X \rightarrow Y$, a — предельная точка. Тогда предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ единственен.

► Пусть есть два различных предела. Тогда из определения по Коши с какого-то расстояния весь хвост должен быть ближе к одному пределу, чем к другому. ◀

Теорема 43.1. Ограниченность. $f: E \subset X \rightarrow Y$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда

$$\exists r > 0: f|_{E \cap B_r(x)} \text{ ограничена}$$

Теорема 43.2. Уход от нуля. $f: E \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq \vec{0}$. Тогда

$$\exists r > 0: \forall x \in \dot{B}_r(a) \cap E \quad f(x) \neq \vec{0}$$

► $\varepsilon \Leftarrow \rho(x, \vec{0})$ ◀

44. Арифметические действия с пределами

Теорема 44.1. Арифметические свойства предела функции.. $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка E .

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = f_0 + g_0$

2. $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda(x)g(x)) = \lambda_0 g_0$

$$3. \lim x \rightarrow a (f(x) - g(x)) = f_0 - g_0$$

$$4. \lim x \rightarrow a \|f(x)\| = \|f_0\|$$

$$5. \lim x \rightarrow a \langle f(x), g(x) \rangle = \langle f_0, g_0 \rangle$$

► Возьмём любые сходящиеся к a последовательности. Для них будет справедлива теорема об арифметических действиях с пределами последовательности. ◀

Теорема 44.2. Арифметические свойства предела функции.. $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка E .

$$1. \lim x \rightarrow a (f(x) \pm g(x)) = f_0 \pm g_0$$

$$2. \lim x \rightarrow a (f(x)g(x)) = f_0g_0$$

$$3. \lim x \rightarrow a |f(x)| = |f_0|$$

$$4. \lim x \rightarrow a \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0}{g_0}$$

► Аналогично. ◀

REM: Арифметические свойства расширяются на бесконечности.

45. Теорема о предельном переходе в неравенствах. Теорема о двух милиционерах

Теорема 45.1. Предельный переход в неравенстве.. $f, g: E \rightarrow Y$, a предельная точка E , $\forall x \in E \setminus \{a\} f(x) \leq g(x)$. Тогда $f_0 \leq g_0$.

Теорема 45.2. О двух милиционерах.

46. Левый и правый пределы. Предел монотонной функции

Def: Пределы слева и справа. $f: E \cap \mathbb{R} \rightarrow Y$.

$$\lim_{x \rightarrow a-} = \lim_{x \rightarrow a-0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (-\inf, a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} = \lim_{x \rightarrow a+0} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} f|_{E \cap (a, +\inf)}$$

Теорема 46.1. Существование предела возрастающей и ограниченной функции..

47. Критерий Коши для отображений и для функций

Теорема 47.1. Критерий Коши.

$f: E \subset X \rightarrow Y$, a — предельная точка E , Y — полное

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \dot{B}_\delta(a) \cap E \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$



1. \Rightarrow Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$$\forall x \in \dot{B}_\delta(a) \forall y \in \dot{B}_\delta(a)$$

$$f(x) \in B_\varepsilon(b), f(y) \in B_\varepsilon(b)$$

$$\rho(f(x), b) < \varepsilon, \rho(f(y), b) < \varepsilon \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), b) + \rho(f(y), b) < 2\varepsilon$$

2. \Leftarrow

Берем любую последовательность $x_n \neq a \in E \rightarrow a$

$$\exists N \forall n > N x_n \in B_\delta(a)$$

$$\Rightarrow x_n \in \dot{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\rho(f(x_n), f(x_m)) \forall n, m > N$$

$\Rightarrow f(x_n)$ — фундаментальная последовательность точек из Y

$$\Rightarrow \exists \lim(f(x_n)) \text{ полнота } Y$$



48. Непрерывные отображения. Непрерывность слева и справа

Def: (По Коши)

$$f : E \subset X \rightarrow Y, a \in E$$

f — непрерывно в точке a , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$

Def: (По Гейне)

$$\forall \{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow a : f(x_n) \rightarrow f(a) \Leftrightarrow f(---)$$

Def:

$$f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow Y, a \in E$$

f — непрерывно слева в точке a

$$g = f|_{(-\infty, a] \cap E}, g \text{ — непрерывно в точке } a$$

Def:

$$f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow Y, a \in E$$

f — непрерывно справа в точке a

$$g = f|_{[a, +\infty) \cap E}, g \text{ — непрерывно в точке } a$$

49. Арифметические действия с непрерывными функциями

Теорема 49.1. Арифметические действия с непрерывными функциями.

$$f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}^d, a \in E, f, g \text{ непрерывны в точке } a$$

Тогда

1. $f(x) + g(x)$ непрерывно в точке a
2. $cf(x)$ непрерывно в точке a
3. $f(x) - g(x)$ непрерывно в точке a
4. $\|f(x)\|$ непрерывно в точке a
5. $\langle f(x), g(x) \rangle$ непрерывно в точке a

Теорема 49.2. .

$$f, g : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f, g \text{ непрерывны в точке } a$$

Тогда

1. $f(x) + g(x)$ непрерывно в точке a
2. $f(x)g(x)$ непрерывно в точке a
3. $f(x) - g(x)$ непрерывно в точке a
4. $|f(x)|$ непрерывно в точке a
5. Если $g(a) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывно в точке a

Теорема 49.3. о стабильном знаке.

$$f : E \subset X \rightarrow \mathbb{R}, a \in E, f \text{ — непрерывно в точке } a \text{ и } f(a) \neq 0$$

Тогда

$$\exists B_\delta(a) \text{ такое что } \forall x \in B_\delta(a) \text{ sign}(f(x)) = \text{sign}(f(a))$$



$$\varepsilon = \frac{|f(a)|}{2}$$



Теорема 49.4. о непрерывности композиции.

$$f : E_1 \subset X \rightarrow Y$$

$$g : E_2 \subset Y \rightarrow Z$$

$$f(E_1) \subset E_2, a \in E_2$$

f — непрерывна в точке a

g — непрерывна в точке $f(a)$

тогда $g \circ f$ — непрерывно в точке a .

► Надо проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$

Берем ε

$$\exists \gamma > 0 \forall y \in B_\gamma(f(a)) \cap E_2 : g(y) \in B_\varepsilon(g(f(a))) \text{ (по непрерывности } g \text{ в точке } f(a))$$

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \cap E_1 : f(x) \in B_\gamma(f(a)) \text{ (по непрерывности } f \text{ в точке } a)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) \in B_\varepsilon(g(f(a)))$$



50. Характеристика непрерывности в терминах прообразов

Теорема 50.1. .

$$f : x \rightarrow y$$

f непрерывно во всех точках \Leftrightarrow прообраз любого открытого множества открыт.



1. \Rightarrow

$G \subset Y$ (открытое), надо доказать, что $f^{-1}(G)$ — открытое.

Возьмем $a \in f^{-1}(G)$ надо доказать, что \exists шар с центром в точке a содержащийся в $f^{-1}(G)$

$$f(a) \in G \text{ — открыто} \Rightarrow \exists B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

Знаем, что f непрерывна в точке a

$$\exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) : f(x) \in B_\varepsilon(f(a)) \subset G$$

то есть

$$\forall x \in B_\delta(a), f(x) \in G$$

то есть

$$B_\delta(a) \subset f^{-1}(G)$$

2. \Leftarrow

Зафиксируем $a \in x$

Надо доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a), f(x) \in B_{\varepsilon}(f(a))$

Возьмем $B_\varepsilon(f(a))$ — открытое множество, $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ — открытое \Rightarrow

$\exists B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a))) \Rightarrow f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$

