

Лекции по алгебре

Лектор: Всемиров Максим Александрович

Содержание

1	Отображения. Композиция отображений.	2
2	Обратимые отображения и их свойства	3
3	Тождественное отображение	4
4	Равносильность инъективности и обратимости слева	4
5	Равносильность сюръективности и обратимости справа	6
6	Инъективное отображение конечного множества на себя является биективным	6
7	Сюръективное отображение конечного множества на себя является биективным	7
8	Бинарные отношения	8
9	Отношение эквивалентности	8
10	Конструкция комплексных чисел, как множества пар.	9
11	Алгебраическая форма записи комплексного числа. Комплексное сопряжение. Свойства комплексного сопряжения.	10
12	Модуль комплексного числа. Мультипликативность модуля. Произведение двух сумм двух квадратов.	11
13	Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи. Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.	11

1. Отображения. Композиция отображений.

Def: A, B — множества. $\Gamma_f \subset A \times B$

Γ — график отображения если выполнены два условия:

1. $\forall a \in A \exists b \in B (a, b) \in \Gamma_f$
2. $\forall a \in A \exists b_1, b_2 \in B (a, b_1) \in \Gamma_f \wedge (a, b_2) \in \Gamma_f \Rightarrow b_1 = b_2$

Def: $A, B, \Gamma_f \subset A \times B$

говорим, что задано отображение f из A в B с графиком Γ_f

$$f : A \rightarrow B$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$(a, b) \in \Gamma_f \Leftrightarrow b = f(a)$$

A — область определения

B — область назначения

$$f : A \rightarrow B$$

$$f_1 : A_1 \rightarrow B_1$$

$$f = f_1 \Leftrightarrow A = A_1, B = B_1, \Gamma_f = \Gamma_{f_1}$$

Def: Композиция отображения

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$\Gamma_{g \circ f}$$

$$(a, c) \in \Gamma_{g \circ f} \Leftrightarrow \exists b \in B (a, b) \in \Gamma_f \wedge (b, c) \in \Gamma_g$$

Область определения $g \circ f$ — область определения f $\text{Dom}(f)$

Область назначения $g \circ f$ — область назначения g $\text{coDom}(f)$

Теорема 1.1. Композиция отображения ассоциативна.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

► Область определения $\text{Dom}(h \circ (g \circ f)) = \text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}(f) = A$

$\text{Dom}((h \circ g) \circ f) = \text{Dom}(f) = A$

Область назначений $\text{Dom}(h \circ (g \circ f)) = \text{coDom}(h) = D$

$$Dom((h \circ g) \circ f) = coDom((h \circ g)) = coDom(h) = D$$

$$\forall a \in A$$

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h(g \circ f(a)) = h(g(f(a)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a)))$$

2. Обратимые отображения и их свойства

$$f : A \rightarrow B$$

$\mathfrak{D}\mathfrak{ef}$: f — обратное справа, если $\exists g : B \rightarrow A$

$$f \circ g = id_B$$

f — обратим слева, если $\exists g : B \rightarrow A$

$$g \circ f = id_A$$

f обратимо, если $\exists g : B \rightarrow A$

$$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B$$

g — отображение, обратное к f . (обозначение f^{-1})

Теорема 2.1.

1. f обратимо $\Leftrightarrow f$ обратимо слева и справа.
2. f обратимо, то обратное отображение единственно.



1. f обратимо $\Rightarrow f$ обратимо слева и справа.

Если у f есть и левый и правый обратный, то они совпадают.

g — правый обратный к f , h — левый.

$$(h \circ f) \circ g = id_A \circ g = g$$

$$h \circ (f \circ g) = h \circ id_B = h$$

$$\Rightarrow g = h$$

2. Пусть f обратимое и g и h — два обратных. В частности g — обратное справа, h — обратное слева.

Теорема 2.2. $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

1. Если f, g обратимы справа, то и $g \circ f$ обратима справа.
2. Если f, g обратимы слева, то и $g \circ f$ обратима слева.
3. Если f, g обратимы, то $g \circ f$ обратима $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



1.

$$\begin{aligned} u : B &\rightarrow A, f \circ u = id_B \\ v : C &\rightarrow B, g \circ v = id_C \\ (g \circ f) \circ (u \circ v) &= g \circ (f \circ (u \circ v)) = \\ &= g \circ ((f \circ u) \circ v) = g \circ (id_B \circ v) = g \circ v = id_C \end{aligned}$$

$u \circ v$ — правый обратный к $g \circ f$

2. аналогично

3.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) = g \circ (id_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = id_C \\ (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1}(g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A \end{aligned}$$

Следствие 2.2.1. Композиция сюръективных — сюръективна.

Композиция инъективных — инъективна.

Композиция биективных — биекция.

Теорема 2.3. $f : A \rightarrow B$ обратима, тогда f^{-1} обратима и $(f^{-1})^{-1} = f$

► $f \circ f^{-1} = id_B$

$f^{-1} \circ f = id_A \Rightarrow f$ — обратное к f^{-1}

В силу единственности обратного $(f^{-1})^{-1} = f$

3. Тождественное отображение

Def: $id_A : A \rightarrow A$

$\forall a \in A, id_A(a) = a$

id_A — тождественное отображение множества A .

Γ_{id_A} = диагональ $A \times A \setminus \{(a, a) | a \in A\}$

Теорема 3.1. $f : A \rightarrow B$

$f \circ id_A = f = id_B \circ f$

►

Области определения и назначения совпадают.

$\forall y \in B, id_B(y) = y$

$a \in A$

$(f \circ id_A)(a) = f(id_A(a)) = f(a)$

$a \in A$

$(id_B \circ f)(a) = id_B(f(a)) = f(a)$

4. Равносильность инъективности и обратимости слева

Def: A, B

$f : A \rightarrow B, \Gamma_f, f$ — инъективное отображение (инъекция).

$\forall a_1, a_2 \in A \exists b(a_1, b) \in \Gamma_f \wedge (a_2, b) \in \Gamma_f \Rightarrow a_1 = a_2$

$\forall a_1, a_2 \in A, f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

$f : A \rightarrow B$ — инъективное отображение.

Def: Отображение f называется сюръективным (сюръекцией «отображение на»)

$$\forall b \in B \exists a \in A (b = f(a))$$

$$f : A \twoheadrightarrow B$$

Def: f называется биективным (или биекцией) если f и сюръективно и инъективное.

$$f : A \xrightarrow{\sim} B$$

$$\{b \in B \mid \exists c \in C b = f(c)\} = f(C) \text{ — образ } C.$$

$$\{a \in A \mid f(a) \in D\} = f^{-1}(D) \text{ — полный прообраз } D.$$

$$f(f^{-1}(D)) \subset D \text{ — но не обязательно совпадает.}$$

f инъективно \Leftrightarrow прообраз любого одноэлементного множества содержит не более одного элемента.

$$f \text{ сюръективно } f(A) = B, f : A \rightarrow B$$

Теорема 4.1. $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$

$$g \circ f = id_A \text{ тогда } f \text{ — инъективно, } g \text{ — сюръективно.}$$



$$1. a_1, a_2 \in A f(a_1) = f(a_2)$$

$$a_1 = a_2$$

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

$$\uparrow$$

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$$

$$\uparrow$$

$$id_A(a_1) = id_A(a_2)$$

$$\uparrow$$

$$a_1 = a_2 \Rightarrow f \text{ — инъективна.}$$

$$2. a \in A$$

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a) = id_A(a) = a$$

$$b = f(a)$$

$$a = g(b)$$

$$\forall a \in A \exists b \in B a = g(b) \Rightarrow g \text{ — сюръективно.}$$

Теорема 4.2. $f : A \rightarrow B (A \neq \emptyset)$

f обратимо слева $\Leftrightarrow f$ — инъективна.



$$\exists g g \circ f = id_A \Rightarrow f \text{ — инъективно.}$$

$$\Leftarrow$$

$$C = f(A)$$

$$h_1 : C \rightarrow A$$

$$(c, a) \in \Gamma_{h_1} \Leftrightarrow (a, c) \in \Gamma_f$$

Почему Γ_{h_1} — график?

$$\forall c \in C \exists a \in A (a, c) \in \Gamma_f$$

$$\forall c \in C \exists a \in A (c, a) \in \Gamma_{h_1}$$

f — инъективно.

$$\forall a_1, a_2 \in A \exists b \in B (a_1, b) \in \Gamma_f \wedge (a_2, b) \in \Gamma_f \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\forall a_1, a_2 \in A \exists b \in C (a_1, b) \in \Gamma_f \wedge (a_2, b) \in \Gamma_f \Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\forall a_1, a_2 \in A \exists b \in C (b, a_1) \in \Gamma_{h_1} \wedge (b, a_2) \in \Gamma_{h_1} \Rightarrow a_1 = a_2$$

$\Rightarrow \Gamma_{h_1}$ — график.

$h : B \rightarrow A$

возьмем какой-то $a \in A$

$$h(b) = \begin{cases} h_1(b), & h_1(b), b \in C \\ a, & b \notin C \end{cases}$$

$x \in A$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h_1(f(x)) = x$$



5. Равносильность сюръективности и обратимости справа

Аксиома выбора

$B \neq \emptyset, b \in B$

$\exists \Phi : B \rightarrow \cup_{b \in B} X_b$

$\forall b \in B \Phi(b) \in X_b$

Теорема 5.1.

f — обратимо справа $\Leftrightarrow f$ — сюръективно.

► \Rightarrow

\Leftarrow

$f : A \rightarrow B$

$\forall b \in B f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset (X_b)$

$g : B \rightarrow \cup_{b \in B} X_b$

$g(b) \in X_b = f^{-1}(\{b\}), f(g(b)) = b$

$f^{-1}(\{b\}) = X_b \subset A \Rightarrow \cup_B X_b \subset A$

$a \in A$

$a \in X_{f(a)}$

$g : B \rightarrow A$

$\forall b \in B f(g(b)) = b$

$\forall b \in B (f \circ g)(b) = b$

$f \circ g = id_B$

f — обратимо справа.

Следствие 5.1.1.

f — обратимо $\Leftrightarrow f$ — биективно.



6. Инъективное отображение конечного множества на себя является биективным

Теорема 6.1. A — конечное множество.

$f : A \rightarrow A$, тогда f — биекция.

► f — сюръекция?

$a_0 = a$

$a_{i+1} = f(a_i)$

$\exists m \neq n a_m = a_n m > n$

Лемма 6.1. $a_{m-n} = a$

► Индукция по n . **База:** $n = 0, a_m = a_0 = a$ **Переход** $n \geq 1$

$$f(a_{m-1}) = a_m = a_n = f(a_{n-1})$$

Так как инъекция $a_{m-1} \leq a_{n-1}$

$$a_{m-n} = a_{(m-1)-(n-1)} = a$$

$$a_{m-n} = a$$

$$m - n \geq 1$$

$$a = a_{m-n} = f(a_{m-n-1})$$

а есть образ $a_{m-n-1} \Rightarrow f$ — сюръекция. ◀ ◀

7. Сюръективное отображение конечного множества на себя является биективным

Теорема 7.1. A — конечное множество. $f : A \rightarrow A$, тогда f — биекция.



$$1. \forall a \exists n_a \{f \circ f \circ \dots \circ f\}(a) = a$$

$$2. \exists n \forall a (f \circ \dots \circ f)(a) = a$$

3. f — инъекция.

$$a_0 = a$$

$$a_i f^{-1}(\{a_i\}) \neq \emptyset$$

$$\exists a_{i+1} \in f^{-1}(\{a_i\})$$

$$\exists m > n a_m = a_n$$

Лемма 7.1. $a_{m-n} = a$

▶ Индукция по n . **База:** $n = 0, a_m = a_0 = a$ **Переход:**

$$a_m = a_n$$

$$f(a_m) = f(a_n)$$

$$a_{m-1} = f(a_m) = f(a_n) = a_{n-1}$$

По индукционному предположению

$$a_{m-n} = a_{(m-1)-(n-1)} = a$$

$$a_{m-n} \in f^{-1}(f^{-1} \dots (\{a\}))$$

$$f(f(\dots f(a_{m-n}))) = a$$

$$f(f(\dots f(a))) = a$$

$$(f \circ f \circ \dots)(a) = a$$

$$\forall a \in A \exists n_a \geq 1 \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n_a}(a) = a$$

$$k \in N \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n_a k}(a) = a$$

(индукция по k)

$$N = \prod_{a \in A} n_a \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_N(a) = a$$

$$a, b \in A$$

$$f(a) = f(b)$$

$$a = \underbrace{(f \circ \dots \circ f \circ f)}_{N-1}(a) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f \circ f)}_{N-1}(b) = b$$



8. Бинарные отношения

Def: На A задано бинарное отношение R , если задано $R \subset A$

$(a, b) \in R$

a и b находятся в отношении с R

aRb

$R = \emptyset$ пустое

$R = A^2$ полное.

Def: $A, R \subset A^2$

1. R рефлексивно, если $\forall a \in A, aRa(a, a) \in R$
2. R антирефлексивно, если $\forall a \in A \neg(aRa)$
3. R симметрично, если $\forall a, b \in A aRb \Rightarrow bRa$
4. R асимметрично, если $\forall a, b \in A aRb \Rightarrow \neg(bRa)$
5. R антисимметрично, если $\forall a, b \in A (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$
6. R транзитивно, если $\forall a, b, c \in A (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

Def: R называется отношением нестрогого частичного порядка, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

Def: R называется отношением строгого частичного порядка, если оно антирефлексивно, транзитивно и асимметрично.

Если на A задано отношение частичного порядка, то A — частично упорядоченное множество.

9. Отношение эквивалентности

Def: R отношение эквивалентности, если оно рефлексивное, симметричное и транзитивное $a \sim b$.

A, R — отношение эквивалентности. $a \in A[a] = \{b \in A | a \sim b\}$ — класс эквивалентности.

Теорема 9.1. $A, \sim a, b \in A$

Тогда либо $[a] \cap [b] = \emptyset$, либо $[a] = [b]$



1. $[a] \cap [b] = \emptyset$ — все доказано.

2. $\exists c \in [a] \cap [b]$
 $[a] = [b]$?

$$\begin{aligned} x \in [a], a \sim x \\ c \in [a], a \sim c \Rightarrow c \sim a \\ c \in [b], b \sim c \\ b \sim c, c \sim a, a \sim x \\ b \sim a, a \sim x \\ b \sim x \Rightarrow x \sim [b] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a] &\subset [b] \\ [b] &\subset [a] \end{aligned}$$

Множество классов эквивалентности называется фактормножеством.

10. Конструкция комплексных чисел, как множества пар.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Operations:

- $+$: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$
 $(a, b) + (c, d) \mapsto (a + c, b + d)$
- $*$: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$
 $(a, b) * (c, d) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$

Теорема 10.1. \mathbb{R}^2 с введёнными операциями является полем.

Def: Это поле называется полем комплексных чисел \mathbb{C} (Complex).

► Упр.

Некоторые заметки:

- $0_c = (0, 0)$
- $-(a, b) = (-a, -b)$
- $(1, 0) * (a, b) = (a, b)$
- $(a, b) \neq 0, (a, b)^{-1} = ?$

$$\begin{aligned} (a, b)^{-1} = (c, d) &\Leftrightarrow (a, b) * (c, d) = (1, 0) \\ &+ \begin{cases} ac - bd = 1 \\ bc + ad = 0 \end{cases} \cdot \begin{matrix} a, & \cdot(-b) \\ b, & \cdot a \end{matrix} \\ &\begin{cases} (a^2 + b^2) \cdot c = a \\ (a^2 + b^2) \cdot d = -b \end{cases} \\ \Rightarrow a &= \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = \frac{-b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Найденные значения корректны, т.к. $(a, b) \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 > 0$

11. Алгебраическая форма записи комплексного числа. Комплексное сопряжение. Свойства комплексного сопряжения.

$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C} : a \mapsto (a, 0)$ - инъективный гомоморфизм колец:

$$\begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) = \varphi(a) * \varphi(b) : (a, 0) * (b, 0) = (ab - 0, 0 + 0) = (ab, 0) \end{cases}$$

$$\mathbb{C} \supseteq \varphi(\mathbb{R}) = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$$

$\varphi(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, поэтому говорят, что $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, имея в виду, что $\varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$

$$i = (0, 1) \Rightarrow i^2 = (-1, 0)$$

Def: $(a, b) = (a, 0) * (1, 0) + (b, 0) * (0, 1) = a + bi$ - алгебраическая запись числа.

a называется вещественной частью комплексного числа ($a = Re(z), z \in \mathbb{C}$)

b называется мнимой частью комплексного числа ($b = Im(z), z \in \mathbb{C}$)

Def: $z \in \mathbb{C}, z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

\bar{z} называется комплексно сопряжённым с z , если $\bar{z} = a - bi$

REM: Сопряжение \equiv симметрия относительно вещественной оси.

Рисунок1.

Свойства:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- 3'. $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$ (По индукции из св-ва 3.)
4. $\overline{z_1 * z_2} = \bar{z}_1 * \bar{z}_2$
- 4'. $\overline{z_1 * z_2 * \dots * z_n} = \bar{z}_1 * \bar{z}_2 * \dots * \bar{z}_n$ (По индукции из св-ва 4.)
5. $f \in \mathbb{R}[x] f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ Тогда: $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$
6.
 - $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$
 - $z * \bar{z} \in \mathbb{R}, z * \bar{z} \geq 0$
 - $z * \bar{z} \Leftrightarrow z = 0$

Два последних пункта следуют из того, что $z * \bar{z} = a^2 + b^2$

► Только 5 свойство: $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ $\overline{f(z)} = \overline{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \dots + \bar{a}_n\bar{z}^n = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot \bar{z} + \dots + \bar{a}_n \cdot \bar{z}^n = a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_n\bar{z}^n = f(\bar{z})$ ◀

$\bar{\bar{z}}$ (Сопряжение): $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ - гомоморфизм из \mathbb{C} в \mathbb{C} :

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \end{cases}$$

$\bar{\bar{z}} = id \Rightarrow$ сопряжение - нетождественный изоморфизм из \mathbb{C} на себя(автоморфизм).

Def: Автоморфизм - изоморфизм поля с самим собой.

7. $z \neq 0, z \cdot \bar{z} = |z|^2, |z| \neq 0$ (т.к. $z \neq 0$)

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}}$$

PS: определение и проч. про модуль в следующем вопросе.

12. Модуль комплексного числа. Мультипликативность модуля. Произведение двух сумм двух квадратов.

$z \in \mathbb{C}$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Def: $\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ - модуль z .

Свойство: $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$



$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$



REM: Для $\mathbb{Z}[a, b, c, d]$ (кольцо многочленов) тоже верно.

Напоминание: φ - мультипликативна $\Leftrightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. \Rightarrow Модуль мультипликативен.

Вопрос: при каких $k \exists c_i : (a_1^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + \dots + b_k^2) = (c_1^2 + \dots + c_k^2)$, где c_i - полиномы от a_j и b_l .

Ответ: Только для $k = 1, 2, 4, 8$.

$k = 1$: мультипликативность $|\mathbb{R}|$

$k = 2$: мультипликативность $|\mathbb{C}|$

$k = 4$: мультипликативность модуля кватернионов

$k = 8$: мультипликативность модуля октав

13. Аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи. Арифметические операции над комплексными числами в тригонометрической форме.

Рисунок2.

$z \in \mathbb{C}, z = a + bi \Rightarrow (a, b)$ - координата в декартовой системе координат.

В полярной системе координат два других параметра: r - радиус вектор, φ - угол.

$$\begin{cases} a = r \cos(\varphi) \\ b = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

Пары (r, φ) и $(r, \varphi + 2\pi k)$ определяют одну и ту же точку на комплексной плоскости.

Def: φ - аргумент $z(\arg z)$

Для любого вещественного числа $\arg = 0$.

$\mathbb{R}, \sim: \varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Упр.: Доказать, что \sim отношение эквивалентности.

Def: $[\varphi] = \{\varphi + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ $\text{Arg } z = [\varphi] \Leftrightarrow \arg z = \varphi$

Пусть $z = a + bi, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\arg z = ?$:

$$1. \ a > 0$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi, \ \varphi \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \operatorname{arg} z = \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$$

$$2. \ a < 0$$

$$\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2) \Rightarrow \operatorname{arg} z = \pi + \operatorname{arctg}(\frac{b}{a})$$

$$3. \ a = 0, b > 0$$

$$\operatorname{arg} z = \pi/2$$

$$4. \ a = 0, b < 0$$

$$\operatorname{arg} z = -\pi/2$$

Def: Тригонометрическая форма записи числа

$z = a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r - модуль ($r \geq 0$), а φ - аргумент комплексного числа.

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

Свойство: $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Тогда:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$ z_1 z_2 = r_1 r_2 = z_1 z_2 , \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$
--
