Matemáticas Discretas
TC1003

Inducción Matemática: Sucesiones y Sumatorias

Departamento de Matemáticas / Centro de Sistema Inteligentes

ITESM

Imagine que una persona decide contar sus ancestros.

Sucesiones: Idea

Imagine que una persona decide contar sus ancestros. Él tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, dieciseis bisabuelos, y así sucesivamente. Estos números podrían escribirse en una lista ordenada:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

El símbolo "$\ldots$" se llama puntos suspensivos y son una abreviatura para "y así sucesivamente". Para expresar el patrón de los números, suponga que cada uno etiqutado por un entero indicando su posición en el renglón:

Posición en el renglón	1	2	3	4	5	6	7	...
Número de ancestros	2	4	8	16	32	64	128	...

Definición

Una sucesión es una lista ordenada de elementos:

$$\boxed{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n}$$

Cada elemento a_k (léase “a sub k”) se llama término. La letra k en a_k se conoce como subíndice o índice. m es el subíndice del término inicial. n es el súbíndice del término final.

Sucesión infinita: definición

Definición

Una sucesión infinita es un conjunto ordenados de elementos que se pueden describir mediante una lista:

$$\boxed{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots}$$

Una fórmula explícita o fórmula general para una sucesión es una fórmula en función de k que evaluada en k da el término a_k.

Ejemplo

Determine los 5 primeros términos de la sucesión definida por la fórmula:

$$a_n = 3\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, \text{ para } n \geq 4$$

Solución

- Para $n = 4$: $a_4 = 3\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 3\lfloor 1.33 \rfloor = 3 \cdot 1 = 3 = a_4$.
- Para $n = 5$: $a_5 = 3\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 3\lfloor 1.66 \rfloor = 3 \cdot 1 = 3 = a_5$.
- Para $n = 6$: $a_6 = 3\lfloor \frac{6}{3} \rfloor = 3\lfloor 2 \rfloor = 3 \cdot 2 = 6 = a_6$.
- Para $n = 7$: $a_7 = 3\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 3\lfloor 2.33 \rfloor = 3 \cdot 2 = 6 = a_7$.
- Para $n = 7$: $a_8 = 3\lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 3\lfloor 2.66 \rfloor = 3 \cdot 2 = 6 = a_8$.

Ejemplo

Determine los 5 primeros términos de la sucesión definida por la fórmula:

$$a_n = \lfloor \log_2(n) \rfloor, \text{ para } n \geq 3$$

Solución

- Para $n = 3$: $a_3 = \lfloor \log_2(3) \rfloor = \lfloor 1.58\ldots \rfloor = 1$
- Para $n = 4$: $a_4 = \lfloor \log_2(4) \rfloor = \lfloor 2.0 \rfloor = 2$
- Para $n = 6$: $a_5 = \lfloor \log_2(5) \rfloor = \lfloor 2.32\ldots \rfloor = 2$
- Para $n = 7$: $a_6 = \lfloor \log_2(6) \rfloor = \lfloor 2.58\ldots \rfloor = 2$
- Para $n = 7$: $a_7 = \lfloor \log_2(7) \rfloor = \lfloor 2.80\ldots \rfloor = 2$

Ejemplo

Determine en orden la fórmula general de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dados los términos iniciales:

a) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, -\frac{6}{7}, \ldots$

b) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, \frac{5}{243}, \frac{6}{729}, \ldots$

c) $-6, 6, -6, 6, -6, 6, \ldots$

Ubicándola en la lista

1. $a_n = \frac{n}{3^n}$
2. $a_n = 6 \times (-1)^n \; a_1 = -6, a_2 = +6, a_3 = -6$
3. $a_n = 3\,(-1)^n\,(-1+n)$
4. $a_n = (-1)^{(1+n)}\,\frac{n}{1+n}$

Notación de Suma

La notación:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k}$$

representa la suma desarrollada

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

Notación introducida en 1772 por el matemático francés J. L. Lagrange. En la notación de sumatoria, k se llama índice, m se llama el índice inferior de la suma, n se llama el índice superior de la suma.

Notación del Producto

La notación:

$$\boxed{\prod_{k=m}^{n} a_k}$$

representa la producto desarrollada

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n$$

En la notación de producto, k se llama índice, m se llama el índice inferior del producto, n se llama el índice superior del producto.

Ejemplo

Determine en orden la evaluación de cada fórmula:

1. $\prod_{n=1}^{3} n^2$
2. $\sum_{n=1}^{4} n\,(1+n)$
3. $\sum_{n=-1}^{0} 2^n\,(3+n)$

Solución

- $\boxed{1.} = (1^2)_{n=1} \cdot (2^2)_{n=2} \cdot (3^2)_{n=3} = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36$
- $\boxed{2.} = 1 \cdot (1+0)_{n=1} + 2 \cdot (1+2)_{n=2} + 3 \cdot (1+3)_{n=3} + 4 \cdot (1+4)_{n=4} = 1 + 6 + 12 + 20 = 39$
- $\boxed{3.} = (2^{-1}\,(3+-1))_{n=-1} + (2^0\,(3+0))_{n=0} = 1 + 6 = 7$

Ejemplo

Indique en orden la versión compacta de cada desarrollo:

a) $1 - r + r^2 - r^3 + r^4$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3$

c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$

dentro de la lista:

1. $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i r^i$
2. $\sum_{n=1}^{k} n^3$
3. $\sum_{i=3}^{n} i$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^2$
5. $\sum_{n=1}^{k} n^2$

Ejemplo

Indique en orden la versión desarrollada de cada forma compacta:

a) $\prod_{n=1}^{4}(n^3 - 1)$

b) $\prod_{n=2}^{4}(n^2 - 1)$

c) $\prod_{n=1}^{4}(1 - t^4)$

dentro de la lista:

1. $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1)$
2. $1 + 2 + 3 + \ldots + n$
3. $(1 - t) \cdot (1 - t^2) \cdot (1 - t^3) \cdot (1 - t^4)$
4. $(1 - t^2) \cdot (1 - t^3) \cdot (1 - t^4)$
5. $(1^3 - 1) \cdot (2^3 - 1) \cdot (3^3 - 1) \cdot (4^3 - 1)$

Propiedades de las Sumatorias

Si $a_m, a_{m+1}, \ldots$ y $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots$ son sucesiones de números reales y c es un número real cualquiera entonces para enteros $n \geq m$ se cumple:

$$\boxed{\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)}$$

$$\boxed{c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c\, a_k}$$

$$\boxed{\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right) = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)}$$

Ejemplo de *corrimiento de índice*

Ejemplo

Indique a cuáles sumatorias es equivalente la siquiente:

$$\sum_{n=1}^{12} (2 + 5\,n)$$

dentro de la lista:

1. $\sum_{j=11}^{22} (-48 + 5\,j)$
2. $\sum_{i=-4}^{7} (27 + 5\,i)$
3. $\sum_{n=6}^{17} (-23 + 5\,n)$
4. $\sum_{k=-9}^{2} (52 + 5\,k)$
5. $\sum_{m=12}^{23} (-53 + 5\,m)$

Queremos que

$$\sum_{n=1}^{12}(2+5n) = \sum_{j=11}^{\cdots}\cdots$$

Por tanto $n-1=0=j-11$. Si despejamos n de esto, se tiene que el cambio de variable está dado por $n=j-10$. Por otro lado, el límite superior se obtiene para $n=12$, así el límite superior de la segunda sumatoria se obtiene para $12=j-10$, es decir para $j=22$:

$$\sum_{n=1}^{12}(2+5n) = \sum_{j=11}^{22}(2+5(j-10)) = \sum_{j=11}^{22}(-48+5j)$$

Ejemplo

Determine en orden los valores de A, B y C para que

$$\sum_{k=0}^{A} (C + B\,k)$$

se igual a la suma :

$$-2\sum_{j=3}^{12} (3 - 5\,j) + \sum_{j=-3}^{6} (4 + j)$$

Queremos que la primera sumatoria inicie en 0:

$$\sum_{j=3}^{12} (3 - 5\,j) = \sum_{k=0}^{\cdots} \cdots$$

Por tanto, $j - 3 = 0 = k - 0$ da: $j = k + 3$ y límite superior $j = 12 = k + 3 \rightarrow k = 9$:

$$\sum_{j=3}^{12} (3 - 5\,j) = \sum_{k=0}^{9} (3 - 5(k + 3)) = \sum_{k=0}^{9} (-12 - 5k)$$

Queremos que la segunda sumatoria inicie en 0:

$$\sum_{j=-3}^{6}(4+j)=\sum_{k=0}^{\cdots}\cdots$$

Por tanto, $j-(-3)=0=k-0$ da: $j=k-3$ y límite superior $j=6=k-3\rightarrow k=9$:

$$\sum_{j=-3}^{6}(4+j)=\sum_{k=0}^{9}(4+(k-3))=\sum_{k=0}^{9}(1+k)$$

$$
\begin{aligned}
-2 \cdot \sum_{j=3}^{12} (3 - 5\,j) + \sum_{j=-3}^{6} (4 + j) &= -2 \cdot \sum_{k=0}^{9}(-12 - 5k) + \sum_{k=0}^{9}(1 + k) \\
&= \sum_{k=0}^{9}(-2(-12) + (-2)(-5)\,k) + \sum_{k=0}^{9}(1 + k) \\
&= \sum_{k=0}^{9}(24 + 10\,k) + \sum_{k=0}^{9}(1 + k) \\
&= \sum_{k=0}^{9} (24 + 10\,k + 1 + k) \\
&= \sum_{k=0}^{9} (25 + 11\,k)
\end{aligned}
$$

Por tanto,la respuesta tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{A} (C + B\,k)$$

para $A = 9$, $B = 11$ y $C = 25$.