

---

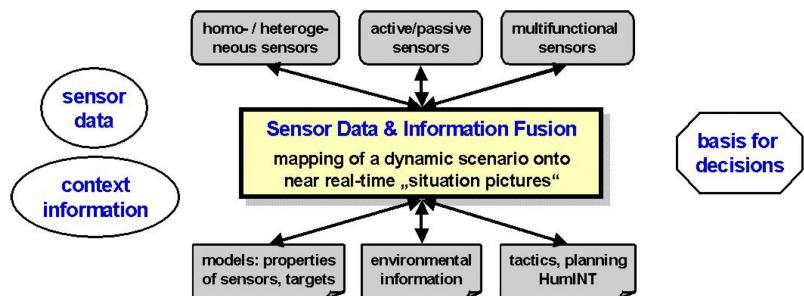


# I. Einführung: Sensordatenfusion

## Definition: Sensordatenfusion

Informationen aus einzelnen Sensoren sind i.d.R.

- ungenau
- unvollständig
- unaufgelöst
- gegensätzlich
- nicht-formalisiertebar
- falsch



Mit Hilfe der Methoden der Sensordatenfusion soll nun aus Informationen aus mehreren oder einzelnen Sensoren und mit Hilfe von Weltwissen ein möglichst genaues Abbild der momentanen Situation geschaffen werden, auf Basis dessen Entscheidungen getroffen werden können

## Methodik der Sensordatenfusion

Statistische Schätztheorie: Objektzustände

Zuordnungsalgorithmen: Zuordnung von Messungen zu Objekten

Optimal Decision Making: Track-Initierung/Tilgung, Klassifikation, Anomaliedetection

Ressourcen-Management: Optimaler Einsatz von Sensormodi, Plattformen, Links

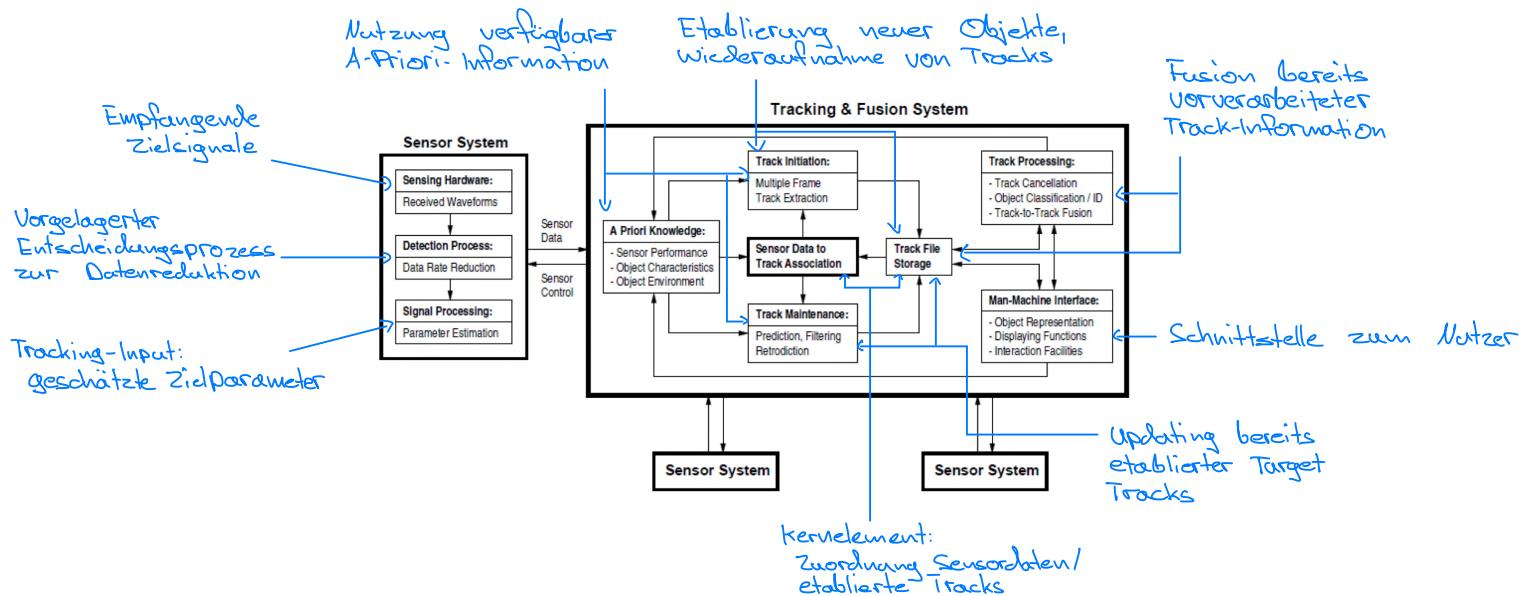
# System der Sensordatenfusion

## Level 0: Subobject data association and estimation

Kombination grundlegende von Daten auf dem Signal Level um Informationen über die Charakteristiken des Ziels zu erhalten.

## Level 1: Object Refinement

Kombination von Sensordaten um Position, Geschwindigkeit, Identität oder weitere Attribute eines Objekts zu schätzen.



## Level 2: Situation Refinement

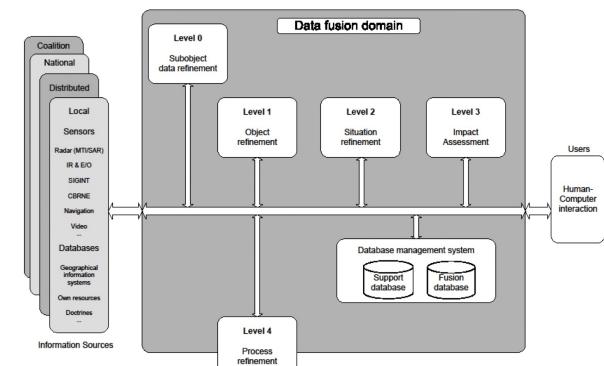
Dynamische Entwicklung von Beziehungen zwischen Objekten und Events im Kontext der Umgebung.

## Level 3: Significance Estimation

Projektion des momentanen Zustands in die Zukunft um über Bedrohungen, freundliche und feindliche Schwächen und mögliche Operationen zu schlussfolgern.

## Level 4: Process Refinement

Meta-Prozess, der den Sensordatenfusions-Prozess überwacht und versucht die Echtzeit-Performance zu optimieren.



## 2. Grundlagen zur Sensordatenfusion

### Beschreibung von Objektzuständen

Objekt Position auf einer Geraden:  $x \in \mathbb{R}$

kinematischer Zustand:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}^\top, \dot{\mathbf{r}}^\top, \ddot{\mathbf{r}}^\top)^\top, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^9$   
position  $\mathbf{r} = (x, y, z)^\top$ , velocity  $\dot{\mathbf{r}}$ , acceleration  $\ddot{\mathbf{r}}$

gemeinsamer Zustand zweier Objekte:  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^\top, \mathbf{x}_2^\top)^\top$

kinematischer Zustand + Objekt Ausdehnung:  $X_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$

kinematischer Zustand + Objekt Klasse:  $X_k = (\mathbf{x}_k, i_k)$

→ werden durch Wahrscheinlichkeitsdichten  
 $p(\mathbf{x}_k | Z^{k-1})$  aus ungenauem Wissen geschätzt

## Grundlagen Wahrscheinlichkeitsdichten

Definition: pdf  $p(\mathbf{x})$ :  $p(\mathbf{x}) \geq 0, \int dx p(\mathbf{x}) = 1$

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte:  $p(x|\mathbf{y}) = \frac{p(x, \mathbf{y})}{p(\mathbf{y})}$

Marginal Dichte:  $p(x) = \int d\mathbf{y} p(x, \mathbf{y}) = \int d\mathbf{y} p(x|\mathbf{y}) p(\mathbf{y})$

Formel von Bayes:  $p(x|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|x)p(x)}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y}|x)p(x)}{\int dx p(\mathbf{y}|x)p(x)}$ :  $p(x|\mathbf{y}) \leftarrow p(\mathbf{y}|x), p(x)$ !

Momente.  $m_n := \mathbb{E}[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n p(x)$

0-tes Moment:  $m_0 = 1$ : Normierung ( $c_0 = 0$ )

1-tes Moment:  $m_1 = c_1 = \mathbb{E}[x]$ : Erwartungswert

2-tes Moment: geht in Varianz ein:  $\mathbb{V}[x] = m_2 - m_1^2 = c_2$

3-te Moment: beschreibt die 'Schiefe' einer WDF  $\leftarrow$  Für Gauß-Dichten gleich Null

## Multivariate Gauß'sche Wahrscheinlichkeitsdichten

Wissen über Objektzustände wird über Gauß-Dichten definiert

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{x}, \mathbf{P}) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi\mathbf{P}|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x})^\top \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x})} \leftarrow q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x})\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x})^\top$$

### Gauß'sche Mischverteilung:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_i p_i \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_i, \mathbf{P}_i) \text{ (weighted sums)}$$

Erwartungswert:  $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbf{x} \mathcal{N}(\mathbf{x}; \mu, \sigma) = \mu$

Varianz:  $\mathbb{V}[\mathbf{x}] = \mathbb{E}[\mathbf{x}^2] - \mathbb{E}[\mathbf{x}]^2 = \sigma^2$

Sicheres Wissen:  $x$ :  $p(x) = \delta(x - y) \stackrel{!}{=} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-y)^2}{\sigma^2}}$

→ Delta-Dirac Funktion hat einen spitzen Peak bei  $x=y$

### Transformierte Zufallsvariable:

$$\begin{aligned} y = t[\mathbf{x}]: \quad p(y) &= \int dx p(y, \mathbf{x}) = \int dx p(y|\mathbf{x}) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \\ &\int dx \delta(y - t[\mathbf{x}]) p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) =: [\mathcal{T} p_{\mathbf{x}}](y) \quad (\mathcal{T}: p_{\mathbf{x}} \mapsto p, \text{"transfer operator"}) \end{aligned}$$

### Affine Transformation von Gauß'schen Zufallsvariablen:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) \xrightarrow{y=t+\mathbf{T}\mathbf{x}} \mathcal{N}(y; t + \mathbf{T}\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{T}^\top)$$

→ Transformiert ZV  $\mathbf{x}$  in eine zweite ZV  $y$  um die Repräsentation des Zustands zu ändern

Charakteristische Funktion:  $\mathbb{E}[e^{izx}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{izx} p(x)$

$p^*(z) := \mathbb{E}[e^{izx}]$  ist die Fourier-Transformation der WDF  $p(x)$

Logarithmus:  $\log \mathbb{E}[e^{izx}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} c_n \quad c_n: \text{"Kummulanten"}$

## Produktformel für Gauß-Dichten:

Die Produktformel wird in den folgenden Filtern verwendet um aus einem Produkt zweier von  $x$  abhängigen Gauß-Dichten ein Produkt aus einer von  $x$  unabhängigen und einer von  $x$  abhängigen Gauß-Dichte zu schaffen. Die Formeln fallen dann im Filter in sich zusammen und lassen sich einfach berechnen.

Ein nützlicher Nebeneffekt dieser Umformung ist, dass mit der Innovation und ihrer Kovarianz ein Expectation Gate zum exkludieren irrelevanter Messungen aufgezeichnet werden kann. (siehe Kalman Filter)

$$\mathcal{N}(z; Hx, R) \mathcal{N}(x; y, P) = \underbrace{\mathcal{N}(z; Hy, S)}_{\text{independent of } x} \times \begin{cases} \mathcal{N}(x; y + W\nu, P - WSW^T) & \leftarrow \text{Kalman Filter} \\ \mathcal{N}(x; Q^{-1}(P^{-1}x + H^TR^{-1}z), Q) \end{cases}$$

$$\nu = z - Hy, \quad S = HPH^T + R, \quad W = PH^TS^{-1}, \quad Q^{-1} = P^{-1} + H^TR^{-1}H.$$

### Herleitung:

1. Interpretiere  $\mathcal{N}(z; Hx, R) \mathcal{N}(x; y, P)$  als Verbundsdichte  $p(z|x)p(x) = p(z, x)$

$$p(z, x) = (|2\pi R||2\pi P|)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{[(z - Hx)^T R^{-1} (z - Hx) + (x - y)^T P^{-1} (x - y)]}_{=: (*)} \right\}$$

2. Zeige, dass  $p(z, x)$  eine Gauß-Dichte ist:

Idee: Forme (\*) so um, dass der Zustandsvektor  $u = (z, x)^T$  in quadratischer Form auftritt  $(u - v)^T U^{-1} (u - v)$

Wenn  $u, z$  und  $x$  nicht wiederholt im Term vorkommen ist gezeigt, dass  $u$  Gauß'sches verteilt ist mit Erwartungswert  $v$  und Kovarianzmatrix  $U$

Daraus folgt, dass  $p(u) = p(z, x) = p(z|x)p(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

auxilliary quantities:  $A = (I, -H)$ ,  $B = (O, I)$ ,  $u = (z, x)$ ,  $y' = (O, y)^T$

$$\begin{aligned} (*) &= (Au)^T R^{-1} (Au) + (B(u - y'))^T P^{-1} (B(u - y')) \\ &= u^T (A^T R^{-1} A) u + (u - y')^T (B^T P^{-1} B) (u - y') \quad \text{Ausmultiplizieren!} \\ &= u^T \underbrace{(A^T R^{-1} A + B^T P^{-1} B)}_{=: U^{-1}} u - 2u^T \underbrace{(B^T P^{-1} B)y'}_{=: U^{-1}v} + \text{const.} \\ &= u^T U^{-1} u - 2u^T U^{-1} v + v^T U^{-1} v - v^T U^{-1} v + \text{const.} \\ &= (u - v)^T U^{-1} (u - v) + \text{const.'} \quad (\text{completion of the squares}) \end{aligned}$$

### Schur-komplement

Inverse of a partitioned symmetric matrix:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1} C S^{-1} C^T A^{-1} & -A^{-1} C S^{-1} \\ -S^{-1} C^T A^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

with:  $S = B - C^T A^{-1} C$

$$(A - CB^{-1}C^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}C(B - C^T A^{-1}C)^{-1}C^T A^{-1}$$

$$\begin{aligned} U &= [A^T R^{-1} A + B^T P^{-1} B]^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} R^{-1} \\ -H^T R^{-1} \end{pmatrix} (I, -H) + \begin{pmatrix} O \\ P^{-1} \end{pmatrix} (O, I) \right]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} R^{-1} & -R^{-1} H \\ -H^T R^{-1} & H^T R^{-1} H + P^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} R + HPH^T & HP \\ PH^T & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & HP \\ PH^T & P \end{pmatrix} \\ v &= U(B^T P^{-1} B)y' = U \begin{pmatrix} O & O \\ O & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} O \\ P^{-1}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Hy \\ y \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{Schur-komplement} \end{aligned}$$

3. Bilde aus  $p(z, x)$  die Marginal- und konditionaldichte  $p(z)$  und  $p(x|z)$

Idee: Separiere die Integrationsvariable  $z$  in einer quadratischen Form und berechne dann:  $p(z) = \int dx p(z, x)$  und  $p(x|z) = \frac{p(z, x)}{p(z)}$

$$p(z) = \int dx p(z, x) \propto \int dx \exp\left\{-\frac{1}{2} \underbrace{\left[\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Hy \\ y \end{pmatrix}\right]^\top \left(\begin{matrix} S & HP^\top \\ PH^\top & P \end{matrix}\right)^{-1} \left[\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Hy \\ y \end{pmatrix}\right]}_{=: (*)}\right\}$$

$$(*) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}^\top \left(\begin{matrix} R^{-1} & -R^{-1}H \\ -H^\top R^{-1} & H^\top R^{-1}H + P^{-1} \end{matrix}\right) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{mit: } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Hy \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \xi^\top R^{-1} \xi - 2\eta^\top \underbrace{H^\top R^{-1} \xi}_{=: Q^{-1} \gamma} + \eta^\top \underbrace{(H^\top R^{-1} H + P^{-1}) \eta}_{=: Q^{-1}} \\ &= \xi^\top R^{-1} \xi - \gamma^\top Q^{-1} \gamma + (\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma) \quad \text{binomische Formel, quadr. Erg.!} \end{aligned}$$

$$= \xi^\top R^{-1} \xi - \xi^\top (R^{-1} H Q H^\top R^{-1}) \xi + (\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma), \quad \gamma = Q H^\top R^{-1}$$

$$= \xi^\top (R^{-1} - P^{-1} H Q H^\top R^{-1}) \xi + (\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma)$$

$$= \xi^\top (R + P H^\top)^{-1} \xi + (\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma) \quad \text{Inversionslemma!}$$

$$= \xi^\top S^{-1} \xi + (\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma)$$

$$\begin{aligned} p(z): \quad p(\mathbf{z}) &= \int dy p(\mathbf{z}, y) \\ &\propto \exp[-\frac{1}{2}(\xi^\top S^{-1} \xi)] \int dy \exp[-\frac{1}{2}(\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma)] \\ &\propto \exp[-\frac{1}{2}(z - Hy)^\top S^{-1} (z - Hy)] \end{aligned}$$

$$\boxed{p(\mathbf{z}) = \mathcal{N}(z; Hy, P H^\top + R)}$$

also gilt:

$$p(x|z): \quad p(x|z) = \frac{p(z, x)}{p(z)} \propto \exp[-\frac{1}{2}(\eta - \gamma)^\top Q^{-1} (\eta - \gamma)]$$

$$\begin{aligned} Q &= \underbrace{(H^\top R^{-1} H + P^{-1})^{-1}}_{2. \text{ Version!}} = P - P H^\top S^{-1} H P \quad \text{Inversionslemma!} \\ &= \underbrace{P - WSH^\top}_{1. \text{ Version!}} = \underbrace{(I - WH)P}_{3. \text{ Version!}}, \quad \text{mit: } W = P H^\top S^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= Q H^\top R^{-1} \xi = (I - WH) P H^\top R^{-1} (z - Hy) \\ &= (P H^\top R^{-1} - W H P H^\top R^{-1})(z - Hy) \\ &= P H^\top (R^{-1} - S^{-1} (S - R) R^{-1})(z - Hy) = W(z - Hy) \\ &= Q(P^{-1}y + H^\top R^{-1}z) \quad 2. \text{ Version, Inversionslemma!} \end{aligned}$$

$$\boxed{p(x|z) = \mathcal{N}(x; q, Q)}$$

also gilt:

$$q = y + W(z - Hy), \quad Q = Y - WSW^\top$$

4. Die finale Form folgt aus  $p(z, x) = p(z|x)p(x) = p(x|z)p(z) = p(x, z)$

# $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariablen

Gegeben sei eine  $n$ -dimensionale Gauß-verteilte Zufallsvariable  $x$  mit expectation  $E[x] = \bar{x}$  and covariance  $C[x] = P$

Gesucht: Wahrscheinlichkeitsdichte/Verteilung der Zufallsvariable  
 $q = (x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x})$

$\chi^2$ -Verteilung:

$$p(q) = \frac{\frac{n-1}{2} e^{-\frac{q}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}, \quad q \sim \chi_n^2$$

' $\chi^2$  with  $n$  degrees of freedom'

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$$

especially:  $E[q] = n, V[q] = 2n$

$$Q(\lambda|n) = P(q > \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} dq p(q) \rightarrow \text{correlation probability: } P_c = 1 - Q(\lambda|n)$$

Herleitung:

Consider transformed RV  $u = P^{-1/2}(x - \bar{x})$ ! We have:  $p(u) = N(u; 0, I)$

$$\text{obviously: } q = (x - \bar{x})^T P^{-1} (x - \bar{x}) = u^T u = \sum_{i=1}^n u_i^2 \text{ with: } u_i \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \int d\mathbf{x} p(x, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} p(x|\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} p(x|\mathbf{x}) \prod_{i=1}^n p(x_i) \quad \text{insert!} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int dx_1 \dots \int dx_n \delta(x - \sum_{i=1}^n x_i^2) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{polar coordinates!} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int dr \int d\Omega r^{n-1} \delta(x - r^2) e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad \text{angle integration trivial!} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \int dr r^{n-1} \delta(x - r^2) e^{-\frac{1}{2}r^2} \quad \text{substitution: } r = \sqrt{y}, dr = \frac{dy}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int dy y^{\frac{n}{2}-1} \delta(x - y) e^{-\frac{1}{2}y} \quad \text{where: } f(x) = \int dy \delta(x - y) f(y) \end{aligned}$$

$\chi^2$ -table:

$n \setminus Q$	0.99	0.975	0.95	0.90	0.75	0.5	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	5E-3	1E-3
1	2E-4	.001	.003	.016	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	.020	.051	.103	.211	.575	.139	.277	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	.872	1.24	1.64	2.20	3.35	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.1	18.5	20.3	24.3
8	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	17.0	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	22.0	24.7	26.8	31.3
12	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	4.11	5.01	5.90	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	7.01	8.23	9.40	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	8.26	9.60	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
25	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
30	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	29.7	32.4	34.8	37.7	43.0	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	53.5	57.2	60.4	64.2	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149
$G()$	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.675	0	0.675	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09

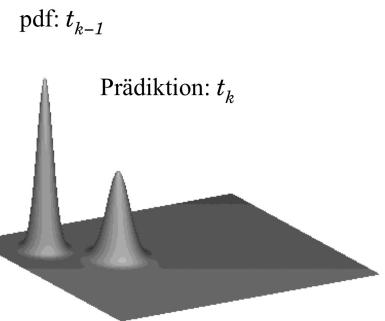
## Idee des Bayes'schen Objekt Trackings

**Prädiktion:** Schätze aus den alten Sensordaten  $\mathcal{Z}^{k-1}$  und dem Wissen über den alten Zustand mit Hilfe eines Dynamik Models den neuen Zustand ohne neues Wissen.

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Z}^{k-1}) \xrightarrow{\text{dynamics model}} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1})$$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) &= \int d\mathbf{x}_{k-1} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Z}^{k-1}) \\ &= \int d\mathbf{x}_{k-1} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Z}^{k-1}) \\ &= \int d\mathbf{x}_{k-1} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Z}^{k-1}) \end{aligned}$$

↑                      ↑  
Dynamik        altes Wissen



$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) = \underbrace{\int d\mathbf{x}_{k-1}}_{\text{prediction}} \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{D})}_{\text{dynamics}} \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{x}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})}_{\text{old knowledge}}.$$

→ Ohne neue Sensorinformation, nur durch Prädiktion, wird die Schätzung immer schlechter und die Unsicherheit größer

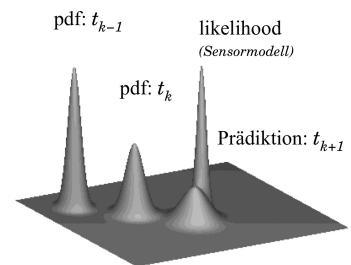
**Filterung:** Verarbeitung neuer Sensoren mit Hilfe eines Sensormodells und Schätzung des neuen Zustands mit Hilfe des neuen Wissens und der Prädiktion

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) \xrightarrow[\text{sensor model}]{\text{sensor data } Z_k} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^k)$$

$$p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}^{k+1}) = \frac{p(z_{k+1} | x_{k+1}) p(x_{k+1} | \mathcal{Z}^k)}{\int d\mathbf{x}_{k+1} p(z_{k+1} | \mathbf{x}_{k+1}) p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}^k)}$$

$$\underbrace{p(\mathbf{x}_{k+1} | \mathcal{Z}^{k+1})}_{\text{new knowledge}} = \frac{\mathcal{N}(z_{k+1}; Hx_{k+1}, R) \mathcal{N}(x_{k+1}; x_{k+1|k}, P_{k+1|k})}{\int d\mathbf{x}_{k+1} \mathcal{N}(z_{k+1}; Hx_{k+1}, R) \underbrace{\mathcal{N}(x_{k+1}; x_{k+1|k}, P_{k+1|k})}_{\text{prediction}}}$$

↑  
Likelihood-Fkt.



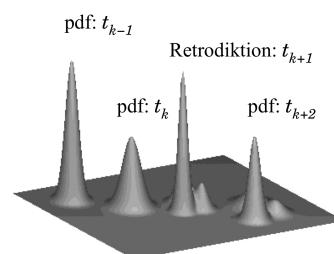
Für mehrere Messungen:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^k) &= p(\mathbf{x}_k | Z_k, m_k, \mathcal{Z}^{k-1}) \\ &= \frac{p(Z_k, m_k | \mathbf{x}_k, \mathcal{Z}^{k-1}) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1})}{\int d\mathbf{x}_k \underbrace{p(Z_k, m_k | \mathbf{x}_k, \mathcal{Z}^{k-1})}_{\text{likelihood function}} \underbrace{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1})}_{\text{prediction}}} \end{aligned}$$

**Retrodiktion:** Verbessere durch neues Wissen das Wissen über alte Zustände und verringere somit die Unsicherheit. Track wird genauer und erlaubt genauere Prädiktion und Filterung

$$p(\mathbf{x}_{l-1} | \mathcal{Z}^k) \xleftarrow[\text{dynamics model}]{\text{filtering output}} p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}^k)$$

$$p(x_l | x_{l+1}, \mathcal{Z}^k) = p(x_l | x_{l+1}, \mathcal{Z}^l) = \frac{p(x_{l+1} | x_l) p(x_l | \mathcal{Z}^l)}{\int d\mathbf{x}_l \underbrace{p(x_{l+1} | x_l)}_{\text{dynamics model}} \underbrace{p(x_l | \mathcal{Z}^l)}_{\text{filtering } t_l}}$$



## Idee des Multi-Hypothesen Trackings

Ein Sensor liefert mehrere Messungen mit unter Falschmessungen. Durch mehrere Hypothesen über den Objektzustand werden verschiedene Gauß-Dichten aufgestellt und als Track verfolgt. Diese werden in eine Mischverteilung zusammengefasst. Die Gewichtung bestimmt dann die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese.  
 → Multi Hypothesen Tracking reflektiert die Mehrdeutigkeit der Daten

### Likelihood für die Messungen:

→ Gibt Aussagekraft der Messungen über Zustand  $x$  an

$$p(z_k, m_k | x_k) = \text{const.} \left( (1 - P_D) \rho_F + P_D \sum_{j=1}^{m_k} \mathcal{N}(z_k^j; Hx_k, R_k^j) \right)$$

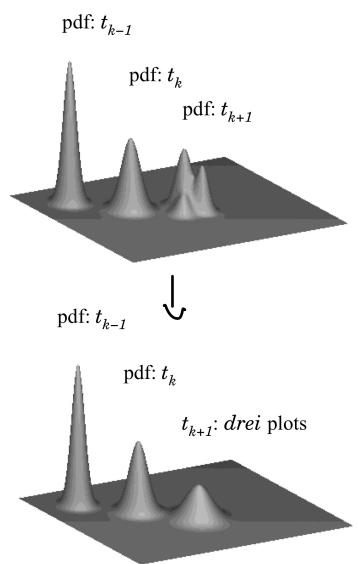
Detectionswahrscheinlichkeit      Falschmessungsdichte

**Prädiktion:**  $p(x_{k-1} | \mathcal{Z}^{k-1}) \xrightarrow[\text{road maps}]{\text{dynamics model}} p(x_k | \mathcal{Z}^{k-1})$

**Filterung:**  $p(x_k | \mathcal{Z}^{k-1}) \xrightarrow[\text{sensor model}]{\text{sensor data } Z_k} p(x_k | \mathcal{Z}^k)$

**Retrodiktion:**  $p(x_{l-1} | \mathcal{Z}^k) \xleftarrow[\text{dynamics model}]{\text{filtering output}} p(x_l | \mathcal{Z}^k)$

→ Tracking-Modell bleibt gleich, hinzu kommt ein Hypothesen-Raum, der zu jeder Hypothese den Vorgänger angibt. Die Wahrscheinlichkeitsdichten für Prädiktion usw. müssen für jede Hypothese separat berechnet werden



### 3. Modellierung von Sensoren und Messungen

#### Beschreibung von Sensormessungen

Einzelne Messung:  $Z^k = \{z_k, Z^{k-1}\}$

Mehrere Messungen:  $Z^k = \{Z_k, m_k, Z_{k-1}, m_{k-1}, \dots, Z_1, m_1\} = \{Z_k, m_k, Z^{k-1}\}$   
mit Satz an Messungen  $Z_l = \{z_l^j\}_{j=1}^{m_l}$

Zeitreihe an Messungen modelliert als Markov-Prozess

$$P(x_k | z^{k-1}, z^{k-2}, \dots, z^0) = P(x_k | z^{k-1})$$

→ Der Zustand hängt alleine vom jetzigen Zustand ab und nicht von der Vergangenheit

Likelihood Funktion:  $p(Z_k, m_k | x_k) \propto \ell(x_k; Z_k, m_k)$

Die Likelihood Funktion gibt an, was die momentane Sensorausgabe  $z_k$  über den Zustand  $x_k$  aussagt. Also ist sie ein Maß des Informationsgehalts der Messung für den momentanen Zustand.

Für einzelne Messung von einem einzelnen Ziel gilt:

$$\ell(x_k; z_k) = \mathcal{N}(z_k; H_k x_k, R_k)$$

## Modell des Messprozesses

**Messung:** Polar Koordinaten  $\rightarrow$  kinematik: kartesische koordinaten

$$\mathbf{z}_k = (z_k^1, \dots, z_k^m) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{x}_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)^\top$$

**Lineare Messung:**  $\mathbf{z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k, \quad p(\mathbf{u}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{u}_k; \mathbf{o}, \mathbf{R}_k)$

**Likelihood-Funktion einer Messung:**  $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)$

$\rightarrow$  Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung "richtig" ist

**Beispiel für eine Sensormessung:**

**Zustand:**  $\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2)^\top$

Sensor misst  $x^1$  Komponente:  $\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Messung des Sensors in Polar Koordinanten:**

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k), \quad h(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_k^1)^2 + (x_k^2)^2} \\ \tan^{-1} x_k^2 / x_k^1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$  nicht-linear

Linearisierung durch Taylorreihen Entwicklung und ignorierte Terme höherer Ordnung

**Fehler der Messung:**

**Messfehler:**  $\mathbf{u}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H} \mathbf{x}_k$

$$\text{Fehlermatrix: } \mathbb{E}[\mathbf{u}_k] = \mathbf{0}, \quad \mathbb{C}[\mathbf{u}_k] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[(u_k^1)^2] & \mathbb{E}[u_k^1 u_k^2] \\ \mathbb{E}[u_k^2 u_k^1] & \mathbb{E}[(u_k^2)^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \mathbb{E}[u_k^1 u_k^2] \\ \mathbb{E}[u_k^2 u_k^1] & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}$$

$$\text{Unkorreliert: } \mathbb{E}[u_k^1 u_k^2] = 0 \Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$S_k$  Sensoren produzieren Messungen für ein Ziel

Modellierung der Messung:  $\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_k^1 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_k^{S_k} \end{pmatrix} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{R}_k = \text{diag}[\mathbf{R}_k^1, \dots, \mathbf{R}_k^{S_k}]$

Fusionierte Messung:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{R}_k \sum_{s=1}^{S_k} (\mathbf{R}_k^s)^{-1} \mathbf{z}_k^s \quad \text{weighted arithmetic mean of measurements}$$

$$\mathbf{R}_k = \left( \sum_{s=1}^{S_k} (\mathbf{R}_k^s)^{-1} \right)^{-1} \quad \text{harmonic mean of measurement covariances}$$

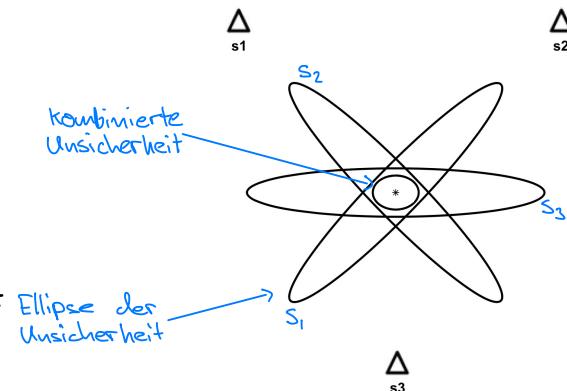
Herleitung:

Annahme:  $\mathbf{H}_k^i = \mathbf{H}_k, i = 1, \dots, S_k \rightarrow$  Alle Sensoren messen die gleichen Parameter

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_k^1, \mathbf{z}_k^2 | \mathbf{x}_k) &= p(\mathbf{z}_k^1 | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{z}_k^2 | \mathbf{x}_k) \quad \text{independent sensors} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^1; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k^1) \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^2; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k^2) \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k; \mathbf{z}_k^1, \mathbf{R}_k^1) \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^2; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k^2) \\ &\propto \mathcal{N}(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k; \underbrace{\mathbf{R}_k (\mathbf{R}_k^{1-1} \mathbf{z}_k^1 + \mathbf{R}_k^{2-1} \mathbf{z}_k^2)}, \underbrace{(\mathbf{R}_k^{1-1} + \mathbf{R}_k^{2-1})^{-1}}_{=\mathbf{R}_k}) \xrightarrow{\text{Produktformel}} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k) \\ \Rightarrow \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k = \mathbf{R}_k (\mathbf{R}_k^{1-1} \mathbf{z}_k^1 + \mathbf{R}_k^{2-1} \mathbf{z}_k^2) \\ \mathbf{R}_k &= (\mathbf{R}_k^{1-1} + \mathbf{R}_k^{2-1})^{-1} \end{aligned}$$

Durch Vollständige Induktion lässt sich zeigen, dass dies auch für  $S_k > 2$  gilt.

→ Durch die Kombination von Messungen mehrerer Sensoren mit verschiedenen Auflösungen in den Raumdimensionen, kann aus mehreren "unsicheren" Messungen eine "sichere" Messung produziert werden



## Umwandlung von Sensordaten

**Messung:** Polar Koordinaten  $\rightarrow$  kinematik: kartesische koordinaten

**Nicht-affine Transformation:**

$$\mathbf{z}_k^p = (r_k, \varphi_k)^\top \quad r, \varphi \text{ independent}$$

$$\text{error covariance matrix: } \mathbf{R}^p = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_k^c = \mathbf{t}[\mathbf{z}_k^p] = r_k \begin{pmatrix} \cos \varphi_k \\ \sin \varphi_k \end{pmatrix}$$

**Affine Transformation**

$$\mathbf{z}_k^p = (r_k, \varphi_k)^\top \quad r, \varphi \text{ independent}$$

$$\text{error covariance matrix: } \mathbf{R}^p = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_k^c = \mathbf{t}[\mathbf{z}_k^p] = r_k \begin{pmatrix} \cos \varphi_k \\ \sin \varphi_k \end{pmatrix} \approx \mathbf{t}[\mathbf{r}_{k|k-1}] + \mathbf{T}(\mathbf{z}_k - \mathbf{r}_{k|k-1})$$

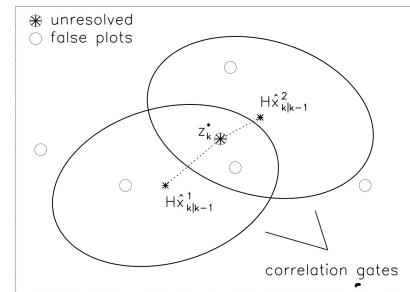
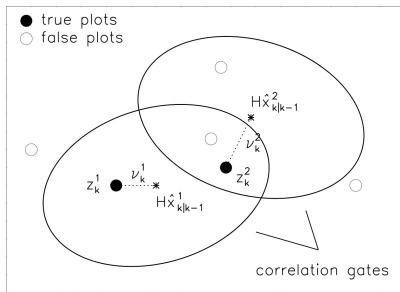
$$\text{mit: } \mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{t}[\mathbf{r}_{k|k-1}]}{\partial \mathbf{r}_{k|k-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{\text{rotation } \mathbf{D}_\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}}_{\text{dilation } \mathbf{S}_r}$$

$\rightarrow$  Taylorreihenentwicklung um  $\mathbf{r}_{k|k-1} = (r_{k|k-1}, \varphi_{k|k-1})^\top$

$$\text{kartesische Fehlerkovarianz: } \mathbf{TRT}^\top = \mathbf{D}_\varphi \mathbf{S}_r \mathbf{R} \mathbf{S}_r \mathbf{D}_\varphi^\top = \mathbf{D}_\varphi \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & (r\sigma_\varphi)^2 \end{pmatrix} \mathbf{D}_\varphi^\top$$

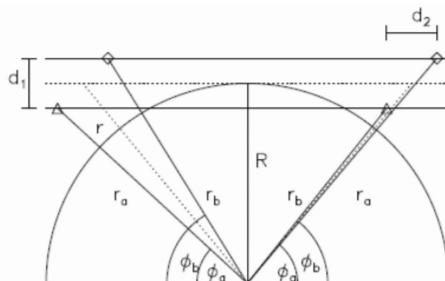
## Unaufgelöste Sensordaten

Beim Verfolgen von mehreren Zielen kann es dazu kommen, dass die Ziele so eng aneinander sind, dass die Expectation Gates sich überschneiden und eine Messung beiden Zielen zuordnen ist. Die Objekte sind dann unauflöst. Dieser Fall muss zusätzlich betrachtet werden, damit nicht der Track eines der Objekte verloren geht.



Messung ist dann das Zentrum zwischen den Objekten das einen Abstand zu den Objekten abhängig von der Auflösung des Sensors hat.

$$\mathbf{H}_g \mathbf{x}_k = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{x}_k^1 + \mathbf{x}_k^2)$$



## Modellierung von Wissen über Messfehler

### Modellierung durch Gauß-Dichten

Empirische Beobachtung:

Messfehler sind oft Gauß-verteilt

Beobachtung Messfehler:

Messfehler kann durch Überlagerung vieler kleiner Effekte erklärt werden. Meistens sind diese voneinander unabhängig und von gleicher Größenordnung.

Begründung:

Idee: Überlegung, was man über die "Überlagerung"/Kombination solcher Effekte bzw. Zufallsvariablen aussagen kann.

Sicheres Wissen:  $p(y|x_1, x_2) = \delta(y - f(x_1, x_2))$        $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Betrachte das Mittel aus  $N$  paarweise unabhängigen Zufallsvariablen mit gleicher, unbekannter Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x)$  mit  $\bar{x} = \mathbb{E}[x]$ ,  $\sigma^2 = \mathbb{V}[x]$

Neue Zufallsvariable:  $y_N = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)$

Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte des Fehlers  $\Delta y_N = y_N - \bar{x}$  für große  $N$ ?

Betrachtung der charakteristischen Funktion:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{iz\Delta y_N}] &= \mathbb{E}[e^{iz(x_1+\dots+x_N-\bar{x})/N}] = \mathbb{E}[e^{iz([x_1-\bar{x}]+\dots+[x_N-\bar{x}])/N}] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[e^{iz(x-\bar{x})/N}]^N}_{\text{unabh. ZVs!}} = \underbrace{\mathbb{E}[1 + \frac{iz}{N}(x-\bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}(x-\bar{x})^2 + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N}_{\text{Taylor-Entw. ('großes' } N\text{)!}} \\ &= [\mathbb{E}[1] + \frac{iz}{N}(\mathbb{E}[x] - \bar{x}) - \frac{z^2}{2N^2}\mathbb{E}[(x-\bar{x})^2] + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N = [1 - \frac{z^2\sigma^2}{2N^2} + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N\end{aligned}$$

mathbb{E}: lineare Operation!

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{iz\Delta y_N}] = [1 - \frac{z^2\sigma^2}{2N^2} + \mathcal{O}(\frac{z^3}{N^3})]^N \approx \exp(-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{N}z^2) \quad \text{wegen: } \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \frac{x}{N})^N = e^{-x}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{N}z^2} \text{ ist die char. Funktion einer Gauß-WDF mit } \mathbb{E}[x] = 0, \mathbb{V}[x] = \frac{\sigma^2}{N}!$$

Mit  $y_N = \Delta y_n + \bar{x}$  folgt:  $p(y_N) = \mathcal{N}(y_N; \bar{x}, \sigma^2/N)$

Also: Für große  $N$  sind die Details der einzelnen WDF unerheblich

Fazit: Der Erwartungswert einer WDF kann durch Mittelung der Messungen geschätzt werden.

Der Schätzer  $\hat{x}_N(x_1, \dots, x_N) = y_N$  konvergiert für große  $N$  gegen den Erwartungswert (biasfrei / erwartungstreu)

Die WDF des Schätzfehlers ist eine Gauß-Dichte mit  $\sigma_{\hat{x}_N} = \sigma_x/\sqrt{N}$

Qualität des Schätzers wächst mit  $N$  proportional zu  $1/\sqrt{N}$

→ Zentraler Grenzwertsatz

⇒ Messfehler und Unsicherheit kann durch Gauß-Dichten modelliert werden auf Grund vieler überlagernder Effekte die den Fehler erzeugen.

## 4. Kalman Filter

Zustand:  $\mathbf{x}_k = (\mathbf{r}_k^\top, \dot{\mathbf{r}}_k^\top, \ddot{\mathbf{r}}_k^\top)^\top$

Initialisierung:  $p(\mathbf{x}_0) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x}_{0|0}, \mathbf{P}_{0|0})$ , initial ignorance:  $\mathbf{P}_{0|0}$  'large'

Prädiktion:  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{x}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) \xrightarrow[\mathbf{F}_{k|k-1}, \mathbf{D}_{k|k-1}]{} \text{dynamics model} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$

Berechnung:

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{x}_{k-1|k-1}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k|k-1}^\top + \mathbf{D}_{k|k-1}$$

→ Folgt direkt aus der Produktformel für Gauß'sche Dichten

Erklärung:

F: Evolution

Deterministische Evolution/Weiterentwicklung eines Zustands in den nächsten Zustand anhand eines Dynamik Models

D: Dynamik / Evolutions Kovarianz Matrix

Beschreibt stochastisch die Dynamik im Szenario und die damit einhergehende zusätzliche Unsicherheit über den prädictierten Zustand

P: Kovarianzmatrix

Beschreibt die Unsicherheit einer Schätzung. Diese wird durch die Evolution und Dynamik erhöht bei der Schätzung, da diese nur ein möglichst genaues (physikalisches) Modell darstellen und viele externe Einflüsse außer Acht lassen.

$\mathbf{x}_{k|k}$ : Neuer Zustand

Der neue Zustand wird ohne neues Wissen mit Hilfe des Dynamik/Evolutionsmodell errechnet

$\mathbf{P}_{k|k-1}$ : Neue Kovarianzmatrix

Die alte Unsicherheit wird ebenfalls durch die Evolution weiterentwickelt. Hinzu kommt die Dynamik, die weitere Unsicherheit propagiert. Durch reine Schätzung des neuen Zustands wird die Kovarianz/Unsicherheit dementsprechend größer.

## Filterung:

$$\mathcal{N}(x_k; x_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \xrightarrow[\text{sensor model: } H_k, R_k]{\text{current measurement } z_k} \mathcal{N}(x_k; x_{k|k}, P_{k|k})$$

## Berechnung:

$$\begin{aligned} x_{k|k} &= x_{k|k-1} + W_{k|k-1} \nu_{k|k-1}, & \nu_{k|k-1} &= z_k - H_k x_{k|k-1} \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - W_{k|k-1} S_{k|k-1} W_{k|k-1}^\top, & S_{k|k-1} &= H_k P_{k|k-1} H_k^\top + R_k \\ W_{k|k-1} &= P_{k|k-1} H_k^\top S_{k|k-1}^{-1} & \text{'KALMAN gain matrix'} \end{aligned}$$

## Erklärung:

### H: Messungstyp

Diese Matrix gibt an, welche Parameter des Zustands vom Sensor gemessen werden und somit in die Filterung mit einfließen

### R: Messfehler

Spiegelt die Eigenschaften des Sensors wider und gibt die Unsicherheit seiner Messung an

### W<sub>k|k-1</sub>: Innovations Vektor

Gibt die Innovation/„Differenz“ der Messung zum prädictierten Zustand an. Dies wird durch eine Zufallsvariable mit Erwartungswert Null dargestellt, die durch die Innovation Kovarianz Matrix charakterisiert wird.

### S<sub>k|k-1</sub>: Innovation Kovarianz Matrix

Gibt die Unsicherheit der Messung an in Abhängigkeit des prädictierten Zustands und seine Unsicherheit  
→ i.d.R wenig Dimensionen

### W<sub>k|k</sub>: Kalman Gain Matrix

Diese Matrix gibt den Informationsgewinn aus der Messung gegenüber dem Informationsgehalt / Unsicherheit des prädictierten Zustands wieder.

Diese gewichtet dann die Innovation und Innovations Varianz bei der Berechnung des Zustands  $x_{k|k}$  bzw der Kovarianzmatrix  $P_{k|k}$

### X<sub>k|k</sub>: Neuer Zustand

Der prädictierte Zustand wird durch die Innovation gewichtet mit der Kalman Gain Matrix in Richtung der Messung „verschoben“

### P<sub>k|k</sub>: Neue Kovarianzmatrix

Die Kovarianz Matrix / Unsicherheit wird um den Informationsgewinn der Messung verringert.

## Retrodiction:

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{l|k}, \mathbf{P}_{l|k}) \xleftarrow[\text{dynamics model}]{\text{filtering, prediction}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{l+1}; \mathbf{x}_{l+1|k}, \mathbf{P}_{l+1|k})$$

## Berechnung:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{l|k} &= \mathbf{x}_{l|l} + \mathbf{W}_{l|l+1} (\mathbf{x}_{l+1|k} - \mathbf{x}_{l+1|l}), & \mathbf{W}_{l|l+1} = \mathbf{P}_{l|l} \mathbf{F}_{l+1|l}^\top \mathbf{P}_{l+1|l}^{-1} \\ \mathbf{P}_{l|k} &= \mathbf{P}_{l|l} + \mathbf{W}_{l|l+1} (\mathbf{P}_{l+1|k} - \mathbf{P}_{l+1|l}) \mathbf{W}_{l|l+1}^\top\end{aligned}$$

Für Gauß'sche Mischverteilungen

$$p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}^k) = \sum_{H_k} p(\mathbf{x}_l, H_k | \mathcal{Z}_k) = \sum_{H_k \text{ no ambiguities!}} \underbrace{p(\mathbf{x}_l | H_k, \mathcal{Z}^k)}_{\text{filtering!}} \underbrace{p(H_k | \mathcal{Z}^k)}_{\text{filtering!}} \Rightarrow p(\mathbf{x}_l | H_k, \mathcal{Z}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{H_k}(l|k), \mathbf{P}_{H_k}(l|k))$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{H_k}(l|k) &= \mathbf{x}_{H_k}(l|l) + \mathbf{W}_{H_k}(l|k) (\mathbf{x}_{H_k}(l+1|k) - \mathbf{x}_{H_k}(l+1|l)) \\ \mathbf{P}_{H_k}(l|k) &= \mathbf{P}_{H_k}(l|l) + \mathbf{W}_{H_k}(l|k) (\mathbf{P}_{H_k}(l+1|k) - \mathbf{P}_{H_k}(l+1|l)) \mathbf{W}_{H_k}(l|k)^\top\end{aligned}$$

$$\text{gain matrix: } \mathbf{W}_{H_k}(l|k) = \mathbf{P}_{H_k}(l|l) \mathbf{F}_{l+1|l}^\top \mathbf{P}_{H_k}(l+1|l)^{-1}$$

→ Rauch-Tung - Striebel Formel

## Erklärung:

$\mathbf{W}_{l|l+1}$ : Kalman Gain Matrix

Gibt den Informationsgewinn wieder der aus dem Zeitschritt  $l+1$  für den Zeitschritt  $l$  gezogen werden kann in Abhängigkeit von der Unsicherheit die aus der Filterung für den Zeitschritt  $l$  kam.

$\mathbf{x}_{l+1|l}$ : Neuer Zustand

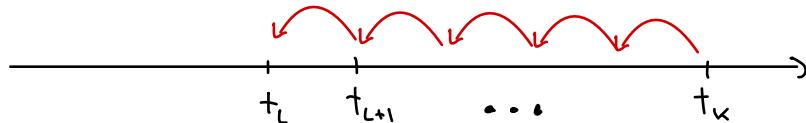
Der neue Zustand wird durch das neue Wissen  $\mathbf{x}_{l+1|l}$  gegenüber  $\mathbf{x}_{l+1|l}$  und dem Informationsgehalt  $\mathbf{W}$  berechnet.

$\mathbf{P}_{l|k}$ : Neue Kovarianzmatrix

Durch das neue Wissen wird die Unsicherheit i.d.R verringert.  $\mathbf{P}_{l+1|k} < \mathbf{P}_{l+1|l}$ , daher wird  $\mathbf{P}_{l|k}$  kleiner

## Ablauf:

Retrodiszierte schrittweise um sichereres Wissen über die Vergangenheit zu erhalten



Herleitung: Continuous Time Retrodiction for  $t_l < t_{l+\theta} < t_{l+1}$  with  $\mathcal{O} < \Theta <$   
Interpoliere zwischen  $p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}^k)$  und  $p(\mathbf{x}_{l+1} | \mathcal{Z}^k)$  mit Hilfe des Evolutions-

Modells:  $p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathcal{Z}^k) = \int d\mathbf{x}_{l+1} p(\mathbf{x}_{l+\theta}, \mathbf{x}_{l+1} | \mathcal{Z}^k) = \int d\mathbf{x}_{l+1} p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathbf{x}_{l+1}, \mathcal{Z}^k) p(\mathbf{x}_{l+1} | \mathcal{Z}^k)$

$$\text{mit: } p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathbf{x}_{l+1}, \mathcal{Z}^k) = p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathbf{x}_{l+1}, \mathcal{Z}^l) = \frac{p(\mathbf{x}_{l+1} | \mathbf{x}_{l+\theta}) p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathcal{Z}^l)}{\int d\mathbf{x}_{l+\theta} p(\mathbf{x}_{l+1} | \mathbf{x}_{l+\theta}) p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathcal{Z}^l)}$$

→ Produktregel

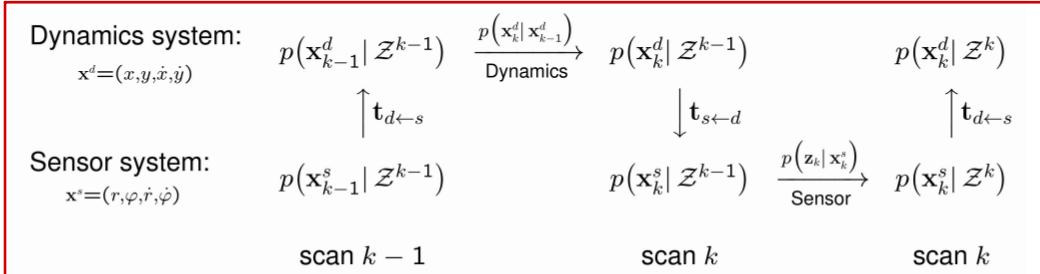
$$p(\mathbf{x}_{l+1} | \mathbf{x}_{l+\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{l+1}; \mathbf{F}_{l+1|l+\theta} \mathbf{x}_{l+\theta}, \mathbf{D}_{l+1|l+\theta})$$

$$p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathcal{Z}^l) = \int d\mathbf{x}_l p(\mathbf{x}_{l+\theta} | \mathbf{x}_l) p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}^l)$$

$$p(\mathbf{x}_{l+1} | \mathcal{Z}^l) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{l+1}; \mathbf{x}_{l+1|l}, \mathbf{P}_{l+1|l})$$

## Extended Kalman Filter

Da viele Sensoren, wie ein Radarsensor, in Polarkoordinaten messen, müssen die Messungen von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten transformiert werden um das Dynamikmodell bzw. Prädiktion berechnen zu können.



### Ablauf:

1. Transformiere in das kartesische Koordinatensystem mit  $t_{d \leftarrow s}$
2. Berechne Prädiktion  $p(\mathbf{x}_k^d | \mathcal{Z}^{k-1})$
3. Transformiere in Polarkoordinaten mit  $t_{s \leftarrow d}$
4. Berechne Filterung der neuen Messung:  $p(\mathbf{x}_k^s | \mathcal{Z}^k)$
5. Transformiere in kartesische Koordinaten für die Prädiktion des nächsten Zeitschritts

### Transformation:

→ Es sollten möglichst lineare Transformationen verwendet werden

⇒ Linearisierung durch Taylorreihen-Entwicklung

### Sensor → Dynamik (Prädiktion):

Nicht Linear:

$$\mathbf{t}_{d \leftarrow s}[\mathbf{x}^s] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Linearisierung:

$$\mathbf{t}_{d \leftarrow s}[\mathbf{x}_k^s] \approx \mathbf{t}_{d \leftarrow s}[\mathbf{x}_{k|k}^s] + \mathbf{T}_{d \leftarrow s}[\mathbf{x}_{k|k}^s] (\mathbf{x}_k^s - \mathbf{x}_{k|k}^s)$$

$$\mathbf{T}_{d \leftarrow s}[\mathbf{x}_{k|k}^s] = \partial \mathbf{t}_{d \leftarrow s}[\mathbf{x}_{k|k}^s] / \partial \mathbf{x}_{k|k}^s \quad \text{← Jacobi-Matrix}$$

### Dynamik → Sensor:

Nicht Linear:

$$\mathbf{t}_{s \leftarrow d}[\mathbf{x}^d] = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan y/x \\ (x\dot{x}+y\dot{y})/\sqrt{x^2+y^2} \\ (x\dot{y}-y\dot{x})/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Linearisierung:

$$\mathbf{t}_{s \leftarrow d}[\mathbf{x}_k^d] \approx \mathbf{t}_{s \leftarrow d}[\mathbf{x}_{k|k-1}^d] + \mathbf{T}_{s \leftarrow d}[\mathbf{x}_{k|k-1}^d] (\mathbf{x}_k^d - \mathbf{x}_{k|k-1}^d)$$

$$\mathbf{T}_{s \leftarrow d}[\mathbf{x}_{k|k-1}^d] = \partial \mathbf{t}_{s \leftarrow d}[\mathbf{x}_{k|k-1}^d] / \partial \mathbf{x}_{k|k-1}^d$$

## Expectation Gate

Durch die Prädiktion können die statistischen Eigenschaften der zu erwartenden Messung bestimmt werden und ein Expectation Gate aufgezeichnet werden.

### Herleitung:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{z}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) &= \int d\mathbf{x}_k p(\mathbf{z}_k, \mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) = \int d\mathbf{x}_k p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) \\ &= \int d\mathbf{x}_k \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \mathbf{R}_k)}_{\text{likelihood: sensor model}} \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})}_{\text{prediction at time } t_k} \\ &= \mathcal{N}(\mathbf{z}_k; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{S}_{k|k-1}) \quad (\text{product formula}) \end{aligned}$$

↗ Innovations Kovarianz aus letztem Zeitschritt

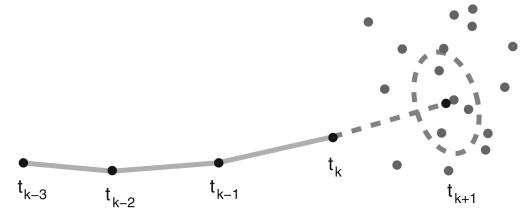
Expectation Gate:  $\nu_{k|k-1}^\top \mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} \nu_{k|k-1} \leq \lambda(P_c)$

Mahalanobis Distanz:  $|\nu_{k|k-1}|^2_{\mathbf{S}_{k|k-1}}$

mit:

innovation:	$\nu_{k k-1} = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k k-1}$ ,
innovation covariance:	$\mathbf{S}_{k k-1} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k k-1} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{R}_k$

(vorheriger Zeitschritt)



$P_c$ : Korrelations Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathbf{z}_k$  im Expectation Gate liegt

$\lambda(P_c)$ : Gating Parameter (Look-Up-table  $\chi^2$ ) siehe Abschnitt über  $\chi^2$ -Verteilungen  
 → Repräsentiert einen Wert ab dem  $P_c$  so klein ist, dass die Messung nicht betrachtet wird.

## Piecewise Constant White Acceleration Model

Ein Modell, welches in der Filterung verwendet wird um ein physikalisches Modell für die Bewegung eines Objekts zu liefern. Dabei nutzt es die physikalischen Zusammenhänge von Position und Geschwindigkeit mit einer konstanten Beschleunigung zu jedem Zeitschritt.

**Annahme:** Beschleunigung  $a_k$  ist konstant während  $\Delta T_k = t_k - t_{k-1}$

**Zustand:**  $x_k = (r_k^\top, \dot{r}_k^\top)^\top$

$$\text{Evolution F: } F_{k|k-1} = \begin{pmatrix} I & \Delta T_k I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

**Dynamik D:**

$$D_{k|k-1} = \Sigma_k^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \Delta T_k^4 I & \frac{1}{2} \Delta T_k^3 I \\ \frac{1}{2} \Delta T_k^3 I & \Delta T_k^2 I \end{pmatrix}$$

**Zustand:**  $x_k = (r_k^\top, \dot{r}_k^\top, \ddot{r}_k^\top)^\top$

$$\text{Evolution F: } F_{k|k-1} = \begin{pmatrix} I & \Delta T_k I & \frac{1}{2} \Delta T_k^2 I \\ 0 & I & \Delta T_k I \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

**Dynamik D:**

$$D_{k|k-1} = \Sigma_k^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \Delta T_k^4 I & \frac{1}{2} \Delta T_k^3 I & \frac{1}{2} \Delta T_k^2 I \\ \frac{1}{2} \Delta T_k^3 I & \Delta T_k^2 I & \Delta T_k I \\ \frac{1}{2} \Delta T_k^2 I & \Delta T_k I & I \end{pmatrix}$$

## 5. PDAF Filter

Der PDAF Filter ist formal analog zum Kalman Filter, nutzt jedoch im Filterungsschritt eine kombinierte Innovation aus allen Messung in den Expectation Gates. Dadurch geht die Multimodalität verloren und der Filter ist nicht linear:

**Prädiktion:**  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})$

**Berechnung:**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{x}_{k-1|k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_{k|k-1} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k|k-1}^\top + \mathbf{D}_{k|k-1}\end{aligned}$$

→ exakt wie beim Kalman Filter

**Filterung:**  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^k) \approx \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^j, \mathbf{P}_{k|k}^j) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$

**Berechnung:**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k \boldsymbol{\nu}_k \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} - (1-p_k^0) \mathbf{W}_k \mathbf{S} \mathbf{W}_k^\top \\ &\quad + \mathbf{W}_k \left\{ \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j \boldsymbol{\nu}_k^j \boldsymbol{\nu}_k^{j\top} - \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^\top \right\} \mathbf{W}_k^\top\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_k &= \left[ \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j \boldsymbol{\nu}_k^j \right], \quad \boldsymbol{\nu}_k^j = \mathbf{z}_k^j - \mathbf{H} \mathbf{x}_{k|k-1} \\ \mathbf{W}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_k^{-1}, \quad \mathbf{S}_k = \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^\top + \mathbf{R}_k \\ p_k^j &= p_k^{j*} / \sum_j p_k^{j*}, \quad p_k^{j*} = \left\{ \frac{(1-P_D) \rho_F}{\sqrt{|2\pi \mathbf{S}_{H_k}|}} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}_{H_k}^\top \mathbf{S}_{H_k} \boldsymbol{\nu}_{H_k}} \right\}\end{aligned}$$

kombinierte Innovation  
Kalman Gain Matrix  
Gewichtsfaktoren  
Gewichtung der einzelnen  
Messungen bzw. ihre Innovation  
nach ihrer Relevanz für den  
prädizierten Zustand  
→ Wahrscheinlichkeit, Messung  
gehört zum Objekt und die  
anderen sind Falschmeldungen

### Herkunft:

Approximation von  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^k) \approx \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^j, \mathbf{P}_{k|k}^j)$  durch Moment Matching:

→ Approximation einer Mischdichte durch eine Gaußdichte  
durch Approximation des 1. und 2. Moments

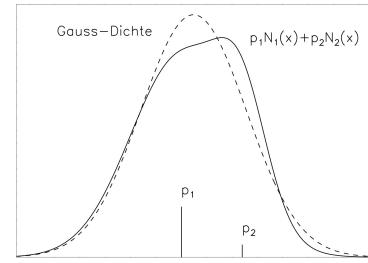
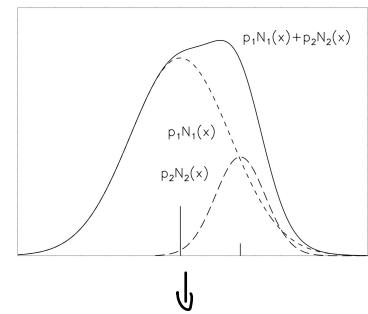
$$\sum_{j=1}^{m_k} p_k^j \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^j, \mathbf{P}_{k|k}^j) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$$

mit:  $\mathbf{x}_{k|k} = \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j \mathbf{x}_{k|k}^j$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j (\mathbf{P}_{k|k}^j + (\mathbf{x}_{k|k}^j - \mathbf{x}_{k|k})(\mathbf{x}_{k|k}^j - \mathbf{x}_{k|k})^\top)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k} &= \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j \mathbf{x}_{k|k}^j \\ &= p_k^0 \mathbf{x}_{k|k-1} + \sum_{j=1}^{m_k} p_k^j (\mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k \boldsymbol{\nu}_k^j) = \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k \boldsymbol{\nu}_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{k|k} &= \sum_{j=0}^{m_k} p_k^j (\mathbf{P}_{k|k}^j + (\mathbf{x}_{k|k}^j - \mathbf{x}_{k|k})(\mathbf{x}_{k|k}^j - \mathbf{x}_{k|k})^\top) \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \sum_{j=1}^{m_k} p_k^j \mathbf{W}_k \mathbf{S}_k \mathbf{W}_k^\top + \sum_{j=1}^{m_k} p_k^j \mathbf{W}_k (\boldsymbol{\nu}_k^j - \boldsymbol{\nu}_k)(\boldsymbol{\nu}_k^j - \boldsymbol{\nu}_k)^\top \mathbf{W}_k^\top \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - (1-p_k^0) \mathbf{W}_k \mathbf{S}_k \mathbf{W}_k^\top + \mathbf{W}_k \left[ \sum_{j=1}^{m_k} p_k^j \boldsymbol{\nu}_k^j \boldsymbol{\nu}_k^{j\top} - \boldsymbol{\nu}_k \boldsymbol{\nu}_k^\top \right] \mathbf{W}_k^\top\end{aligned}$$



**Retrodiction:**

$$\mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{l|k}, \mathbf{P}_{l|k}) \xleftarrow[\text{dynamics model}]{\text{filtering, prediction}} \mathcal{N}(\mathbf{x}_{l+1}; \mathbf{x}_{l+1|k}, \mathbf{P}_{l+1|k})$$

→ analog zur Retrodiction im Kalman Filter

**Berechnung:**

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{l|k} &= \mathbf{x}_{l|l} + \mathbf{W}_{l|l+1} (\mathbf{x}_{l+1|k} - \mathbf{x}_{l+1|l}), & \mathbf{W}_{l|l+1} = \mathbf{P}_{l|l} \mathbf{F}_{l+1|l}^\top \mathbf{P}_{l+1|l}^{-1} \\ \mathbf{P}_{l|k} &= \mathbf{P}_{l|l} + \mathbf{W}_{l|l+1} (\mathbf{P}_{l+1|k} - \mathbf{P}_{l+1|l}) \mathbf{W}_{l|l+1}^\top\end{aligned}$$

Für Gauß'sche Mischverteilungen

$$p(\mathbf{x}_l | \mathcal{Z}^k) = \sum_{H_k} p(\mathbf{x}_l, H_k | \mathcal{Z}_k) = \sum_{H_k} \underbrace{p(\mathbf{x}_l | H_k, \mathcal{Z}^k)}_{\text{no ambiguities!}} \underbrace{p(H_k | \mathcal{Z}^k)}_{\text{filtering!}} \Rightarrow p(\mathbf{x}_l | H_k, \mathcal{Z}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{H_k}(l|k), \mathbf{P}_{H_k}(l|k))$$

$$\mathbf{x}_{H_k(l|k)} = \mathbf{x}_{H_k(l|l)} + \mathbf{W}_{H_k(l|k)} (\mathbf{x}_{H_k(l+1|k)} - \mathbf{x}_{H_k(l+1|l)})$$

$$\mathbf{P}_{H_k(l|k)} = \mathbf{P}_{H_k(l|l)} + \mathbf{W}_{H_k(l|k)} (\mathbf{P}_{H_k(l+1|k)} - \mathbf{P}_{H_k(l+1|l)}) \mathbf{W}_{H_k(l|k)}^\top$$

$$\text{gain matrix: } \mathbf{W}_{H_k(l|k)} = \mathbf{P}_{H_k(l|l)} \mathbf{F}_{l+1|l}^\top \mathbf{P}_{H_k(l+1|l)}^{-1}$$

→ Rauch-Tung - Striebel Formel

## 6. Detektionsprozess

**Detektor:** Erhält ein Signal und entscheidet über die Existenz eines Objekts

### Modellierung:

**Detection eines Objekts:** ' $D$ ': detector detects an object

**Fehler 1. Art:**  $P_I = P(\neg 'D' | D)$

→ Wahrscheinlichkeit, dass ein Objekt existiert, jedoch nicht detektiert wird

**Existenz eines Objekts:**  $D$ : object actually existent

**Fehler 2. Art:**  $P_{II} = P('D' | \neg D)$

→ Wahrscheinlichkeit, dass kein Objekt existiert, jedoch eins detektiert wird

**Detektionswahrscheinlichkeit:**  $P_D = 1 - P_I$

**Falschalarm Wahrscheinlichkeit:**  $P_F = P_{II}$

### Detektor Design:

**Performanz Maß:**  $P_D = P('D' | D)$

→ Maximiere  $P_D$  bei gegebenem  $P_F$

### Modellierung Falschmessung

**Verteilung der Anzahl:**  $p_F(n)$

**Poisson-Verteilung:**  $p_F(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}$

mit expectation:  $\mathbb{E}[n] = \bar{n}$ , variance:  $\mathbb{V}[n] = \bar{n}$

$$\bar{n} = \rho_F |\text{FoV}|$$

$$\nwarrow P_{II}$$

**Verteilung im Raum:**  $p(z_1^f, \dots, z_n^f | \text{FoV})$

**Uniforme Verteilung:**  $p(z_i^f | \text{FoV}) = |\text{FoV}|^{-1}$

→ Annahme: Falschmessungen sind paarweise unabhängig

### Aussagegehalt der Messung $Z_k = \{z_k^1, \dots, z_k^{n_k}\}$

**Likelihood-Funktion:**

$$p(Z_k, n_k | \mathbf{x}_k) \propto (1 - P_D) \rho_F + P_D \sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}(z_k^j; \mathbf{Hx}_k, \mathbf{R})$$

Wahrscheinlichkeit,  
dass alle Messungen  
falsch sind

Detektions-  
wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit einer  
Messung ist richtig

## 7. Multi-Hypothesen Modell

Auf Grund der Mehrdeutigkeit von Sensordaten sind viele Interpretationen/Hypothesen möglich. Anstatt nur eine Hypothese zu verfolgen können stattdessen mehrere Hypothesen verfolgt werden, die durch eine Likelihood Funktion bewertet werden. Daraus folgen Hypothesentümme, bei denen aus einer Hypothese immer (Folge-)Hypothesen folgen, was zu einem schnell wachsenden Baum resultiert.

**Mehrdeutige Sensordaten ( $P_D < 1, \rho_F > 0$ )**

Satz an Sensordaten:  $Z_k = \{z_k^j\}_{j=1}^{n_k}$

**Mögliche Interpretation:**

$n_k + 1$  mögliche Interpretationen:

$E_0$ : Objekt wurde nicht detektiert,  $n_x$  Falschmessungen

$E_j, j=1..n_x$ : Objekt wurde detektiert in Messung  $z_j$ , rest sind Falschmessungen

**Likelihood Funktion über die Interpretationen:**

$$p(Z_k, n_k | x_k) \propto (1 - P_D) \rho_F + P_D \sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}(z_k^j; Hx_k, R)$$

→ Aussagekraft der Messungen über den Zustand  $x$

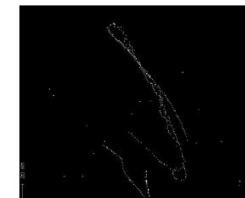
**Multi-Hypothesen für mehrere Ziele**

Mit Hilfe eines Resolutionsmodell wird zusätzlich der Fall betrachtet, dass zwei Ziele zu eng aneinander liegen und so durch die Auflösung des Sensors als eine Messung erfasst werden. So wird verhindert, dass der Track eines Ziels verloren wird oder eine hohe Unsicherheit propagiert wird.

**Hypothesen:**  $\ell(Z_k, n_k | x_k) = \sum E_k \ell(Z_k, n_k, E_k | x_k)$

$E_k^{ii}$ : Objekte sind nicht aufgelöst und werden in Messung  $z_k$  als Gruppe detektiert

$$\ell(Z_k, n_k, E_k^{ii} | x_k) = \text{const.} \times \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} z_k^i \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} H_k^g \\ H_u \end{pmatrix} x_k, \begin{pmatrix} R_k^g & O \\ O & R_u \end{pmatrix}\right)$$



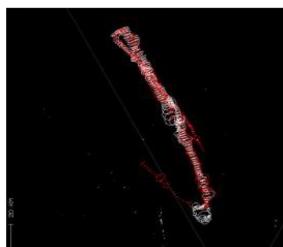
radar raw data

$E_k^{00}$ : Objekt sind weder aufgelöst noch detektiert

$$\ell(Z_k, n_k, E_k^{00} | x_k) = \text{const.} \times \mathcal{N}(O; H(x_k^1 - x_k^2), R_u)$$



no resolution model



with resolution model

$E_k^{ij}$ : Objekt sind aufgelöst und in  $z_k^i, z_k^j$  detektiert

$$\ell(Z_k, n_k | E_k^{ij}, x_k) = \text{const.} \times [1 - P_u(x_k)] \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} z_k^i \\ z_k^j \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} H_k \\ H_k \end{pmatrix} x_k, \begin{pmatrix} R_k & O \\ O & R_k \end{pmatrix}\right)$$

# Multi-Hypothesen Tracking für wohl-separierte Ziele

**Prädiktion:**

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^{k-1}, h_1) = \sum_{H_{k-1}} p(\mathbf{x}_k | H_{k-1}, \mathcal{Z}^{k-1}, h_1) p(H_{k-1} | \mathcal{Z}^{k-1}, h_1)$$

**Filterung:**

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Z}^k) = \sum_{H_k} p_{H_k} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{H_k}, \mathbf{P}_{H_k})$$

$\mathbf{x}_{H_k}$ ,  $\mathbf{P}_{H_k}$ : update by KALMAN iteration!

$$p_{H_k} = \frac{p_{H_k}^*}{\sum_{H_k} p_{H_k}^*}, \quad p_{H_k}^* = p_{H_{k-1}} \left\{ \begin{array}{l} (1 - P_D) \rho_F \\ P_D \mathcal{N}(\boldsymbol{\nu}_{H_k}, \mathbf{S}_{H_k}) \end{array} \right.$$

→ gewichtete Gauß-Mischverteilung über alle Hypothesen

**Retrodiktions:**

$$p(\mathbf{x}_l | H_k, \mathcal{Z}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{H_k}(l|\textcolor{red}{k}), \mathbf{P}_{H_k}(l|\textcolor{red}{k})) \approx \mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{H_k}(l|\textcolor{red}{l}), \mathbf{P}_{H_k}(l|\textcolor{red}{l}))$$

$$p(\mathbf{x}_l | H_k, \mathcal{Z}^k) \approx \sum_{H_l} p_{H_l}^* \mathcal{N}(\mathbf{x}_l; \mathbf{x}_{H_k}(l|l), \mathbf{P}_{H_k}(l|l))$$

**Neue Gewichte:**

$$p_{H_k}^* = p_{H_k}, \quad p_{H_l}^* = \sum p_{H_{l+1}}^* \quad \leftarrow \text{Summe über die Gewichte aller Kinder}$$

- Starke Kinder stärken schwache Eltern
- Schwache Kinder schwächen starke Eltern
- Wenn alle Kinder sterben, sterben auch die Eltern

## Multi-Hypothesen Tracking (für zwei Ziele)

Likelihood Funktion:

$$\ell(\mathbf{x}_k^{1:n}; Z_k) \propto \sum_{i=1}^5 \ell_i(\mathbf{x}_k^{1:2}; Z_k), \quad Z_k = \{\mathbf{z}_k^j\}_{j=1}^{m_k}$$

Grundhypothesen

Hypothese 1: Beide Objekte sind aufgelöst, aber nicht detektiert

$$\ell_1(\mathbf{x}_k^{1:2}; Z_k) = \rho_F^2 (1 - P_D)^2 (1 - P_u(\mathbf{x}_k^{1:2}))$$

Hypothese 2: Beide Objekte sind weder aufgelöst noch detektiert

$$\ell_2(\mathbf{x}_k^{1:2}; Z_k) = \rho_F (1 - P_D^u) P_u(\mathbf{x}_k^{1:2})$$

Hypothese 3: Die Objekte sind als Gruppe aufgelöst

$$\ell_3(\mathbf{x}_k^{1:2}; Z_k) = \rho_F P_D^u P_u(\mathbf{x}_k^{1:2}) \sum_{j=1}^{m_k} \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^j; \mathbf{H}_g \mathbf{x}_k^{1:2}, \mathbf{R}_g)$$

Hypothese 4: Die Objekte sind auflösbar, jedoch wird nur eins detektiert

$$\begin{aligned} \ell_4(\mathbf{x}_k^{1:2}; Z_k) &= \rho_F P_D (1 - P_D) \times (1 - P_u(\mathbf{x}_k^{1:2})) \sum_{j=1}^{m_k} \lambda_4(\mathbf{z}_k^j; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{1:2}, \mathbf{R}_k^j) \\ \lambda_4(\mathbf{z}_k^j; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{1:2}, \mathbf{R}_k^j) &= \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^j; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^1, \mathbf{R}_k^j) + \mathcal{N}(\mathbf{z}_k^j; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^2, \mathbf{R}_k^j) \end{aligned}$$

Hypothese 5: Die Objekte sind aufgelöst und werden beide detektiert

$$\ell_5(\mathbf{x}_k^{1:2}; Z_k) = P_D^2 (1 - P_u(\mathbf{x}_k)) \times \sum_{i=1}^{m_k-1} \sum_{j=1}^{m_k-i} \lambda_5(\mathbf{x}_k^{1:2}; \mathbf{z}_k^{ij}, \mathbf{R}_k^{ij})$$

$$\lambda_5(\mathbf{x}_k^{1:2}; \mathbf{z}_k^{ij}, \mathbf{R}_k^{ij}) = \mathcal{SN}(\mathbf{z}_k^{ij}; \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^{1:2}, \mathbf{R}_k^{ij})$$

$$\text{symmetrizing operator: } \mathcal{S}f(\mathbf{x}_{1:n}) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\mathbf{x}_{\sigma(1:n)})$$

## Growing Memory Disaster

Aus  $N$  Hypothesen und  $m$  Messungen folgen  $N^{m+1}$  Folgehypothesen.  
Dies führt zu einem exponentiell wachsenden Speicher- und Rechenbedarf.

### Mono-Hypothesen Lösung:

→ Erzwinge eine einzelne Hypothese in jedem Zeitschritt

**Gating:** Schließe Daten aus die zu weit vom prädictierten Zustand entfernt sind und wahrscheinlich nicht zum Objekt gehört.

$$\|\nu_{k|k-1}^i\| > \lambda$$

→ Kalman Filter

→ Einfach, aber  $\lambda$  muss präzise gewählt werden

### Erzwingen einer eindeutigen Interpretation:

Nutze die Messung mit der kleinsten statistischen Distanz.

$$\min_i \|\nu_{k|k-1}^i\|$$

→ Nearest-Neighbor Filter

→ Arbeitet nur mit einer Hypothese, die jedoch bedacht gewählt werden muss

### Global Climbing:

Verschmelze alle Hypothesen

→ PDAF-, JPDAF-Filter

→ Berücksichtigt alle Daten und ist adaptiv, reduziert jedoch die Anwendbarkeit

### Adaptive Lösung:

→ Reduziere die Hypothesen auf wenige (wahrscheinliche) Hypothesen um so eine qualitative Repräsentation aller Hypothesen zu schaffen

**Individual Gating:** Vollführe Gating um wenige Hypothesen von irrelevanten Daten zu entfernen

→ Vor dem Weiterführen von Hypothesen

→ Kalman Filter

**Pruning:** Schneide Hypothesen oder Hypothesenbaum mit kleinem Gewicht  $p_{H_k}$  ab (unwahrscheinliche Hypothesen)

→ Vor dem Filterungsschritt

→ Nearest Neighbor Filter

**Local Combining:** Verschmelze ähnliche Hypothesen

→ Nach der Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichten

→ PDAF Filter

## Successive local combining

Approximation von Summen über ähnliche Hypothesen durch Moment Matching:

$$\sum_{H_k \in \mathcal{H}^{k*}} p_{H_k} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{H_k}, \mathbf{P}_{H_k}) \approx p_{H_k^*} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{H_k^*}, \mathbf{P}_{H_k^*})$$

→ produziere eine effektive Hypothese  $H_k^*$

Ahnlichkeitsmaß:  $d(H_1, H_2) = (\mathbf{x}_{H_1} - \mathbf{x}_{H_2})^\top (\mathbf{P}_{H_1} + \mathbf{P}_{H_2})^{-1} (\mathbf{x}_{H_1} - \mathbf{x}_{H_2})$

Hypothesen sind ähnlich gdw:  $d(H_1, H_2) < \mu$

Ablauf:

1. Suche sukzessive Hypothese mit höchstem Gewicht
2. Verschmelze Hypothese mit ähnlichen Hypothesen  $(\bar{H}_1, H) \succ \bar{H}_1^*$

## 8. Track Extraction

Das Ziel der Track Extraction ist es aus einer Zeitreihe an Messungen eine Trajektorie zu extrahieren entlang der sich das Objekt bewegt. Dazu muss zuerst der Track initialisiert werden, also eine Messung gefunden werden, die zum Objekt gehört. Es müssen also nicht nur einzelne Messungen detektiert werden, sondern auch Zusammenhänge in der Zeitreihe hergestellt werden.

**Aufgabe:** start: data sets  $Z_k = \{z_k^j\}_{j=1}^{m_k}$  (sensor performance:  $P_D, \rho_F, R$ )  
goal: Detect a target trajectory in a time series:  $\mathcal{Z}^k = \{Z_i\}_{i=1}^k$ !

**Annahme:** 1. Die Ziele im FOV sind wohl-separierbar  
2. Die Sensordaten zum Scan  $i$  werden gleichzeitig aufgenommen

**Entscheidung zu jedem Scan:**

**Hypothese  $h_1$ :** Der Scan beinhaltet eine Messung vom Ziel

**Hypothese  $h_0$ :** Es gibt kein Ziel im FOV, alle Messungen sind falsch

**Statistische Entscheidungsfehler:**

$$P_1 = \text{Prob}(\text{accept } h_1 | h_1) \quad \text{analogous to the sensors' } P_D$$

$$P_0 = \text{Prob}(\text{accept } h_1 | h_0) \quad \text{analogous to the sensors' } P_F$$

$P_1$ : Sollte nah an 1 sein um korrekte Zieltracks zu extrahieren

$P_0$ : Sollte möglichst klein sein um falsch Tracks auszuschließen

### Sequential Likelihood Ratio Test

Eine praktische Methode um sequentiell zu entscheiden bei gegebenen  $P_0$  und  $P_1$ , ob sich eine Messung des Ziels im FOV befindet und der Track weitergeführt werden kann. Die nötigen Berechnungen sind dabei ein Nebenprodukt des Bayes'schen Tracking

→ Der Test hat die minimale Entscheidungsdauer für gegebene  $P_0, P_1$ .

→ Die Dauer wird von  $P_0$  und  $P_1$  beeinflusst

**Likelihood Ratio:**  $LR(k) = p(\mathcal{Z}^k | h_1) / p(\mathcal{Z}^k | h_0) \quad \frac{p(h_1 | \mathcal{Z}^k)}{p(h_0 | \mathcal{Z}^k)} = \frac{p(\mathcal{Z}^k | h_1)}{p(\mathcal{Z}^k | h_0)} \frac{p(h_1)}{p(h_0)}$

**Entscheidung:** Starte mit Zeitfenster  $k=1$

$LR(k) < A$ : Akzeptiere  $h_0$  (kein Ziel)

$LR(k) > B$ : Akzeptiere  $h_1$  (Ziel)

$A < LR(k) < B$ : Entscheidung kann nicht getroffen werden, warte auf neue Daten und fahre mit  $LR(k+1)$  fort.

**Threshold A, B:**  $A \approx \frac{1 - P_1}{1 - P_0}$  and  $B \approx \frac{P_1}{P_0}$

## Iterative Berechnung:

**initiation:**  $k = 0, j_0 = 0, \lambda_{j_0} = 1$

**recursion:**  $LR(k+1) = \sum_{j_{k+1}} \lambda_{j_{k+1}} = \sum_{j_{k+1}=0}^{m_{k+1}} \sum_{j_k} \lambda_{j_{k+1}j_k} \lambda_{j_k}$

**with:**  $\lambda_{j_{k+1}j_k} = \begin{cases} 1 - P_D & \text{for } j_{k+1} = 0 \\ \frac{P_D}{\rho_F} \mathcal{N}(\nu_{j_{k+1}j_k}, S_{j_{k+1}j_k}) & \text{for } j_{k+1} \neq 0 \end{cases}$

**innovation:**  $\nu_{j_{k+1}j_k} = z_{j_{k+1}} - H_{j_{k+1}}x_{j_k}$   
**innov. cov.:**  $S_{j_{k+1}j_k} = H_{j_{k+1}}P_{j_{k+1}|k}H_{j_{k+1}}^\top + R_{j_{k+1}}$

**state update:**  $x_{j_{k+1}|k} = F_{j_{k+1}}x_{j_k}$   
**covariances:**  $P_{j_{k+1}|k} = F_{j_{k+1}}P_{j_k}F_{j_{k+1}}^\top + D_{j_{k+1}}$

← Nebenprodukt des Bayes'schen Trackings

## Herleitung:

$$LR(k) = \frac{p(\mathcal{Z}^k|h_1)}{p(\mathcal{Z}^k|h_0)} = \frac{\int d\mathbf{x}_k p(Z_k, m_k, \mathbf{x}_k, \mathcal{Z}^{k-1}|h_1)}{p(Z_k, m_k, \mathcal{Z}^{k-1}|h_0)} = \frac{\int d\mathbf{x}_k p(Z_k, m_k|\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) p(\mathcal{Z}^{k-1}|h_1)}{|\text{FoV}|^{-m_k} p_F(m_k) p(\mathcal{Z}^{k-1}|h_0)}$$

$$= \frac{\int d\mathbf{x}_k p(Z_k, m_k|\mathbf{x}_k, h_1) p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1)}{|\text{FoV}|^{-m_k} p_F(m_k)} LR(k-1)$$

$$p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) = \sum_{H_{k-1}} p(\mathbf{x}_k|H_{k-1}\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) p(H_{k-1}|\mathcal{Z}^{k-1}, h_1) \quad \text{The standard MHT prediction!}$$

$$p(Z_k, m_k|\mathbf{x}_k, h_1) = \sum_{E_k} p(Z_k, E_k|\mathbf{x}_k, h_1) \quad \text{The standard MHT likelihood function!}$$

## Sequential Track Extraction

Der LR-Test wird genutzt um zu entscheiden, ob sich ein Track im FoV befindet. Dabei wird  $LR(k)$  aus einer steigenden Anzahl von Summanden (Sub-Tracks) berechnet

Sub-Track:  $\{\lambda_{j_k}, x_{j_k}, P_{j_k}\}$

## Growing Memory Problem:

Es können die gleichen Approximationen verwendet werden, solange diese  $LR(k)$  signifikant ändern:

*individual gating:* Exclude data not likely to be associated.

*pruning:* Kill sub-tracks contributing marginally to the test function.

*local combining:* Merge similar sub tracks:

$$\{\lambda_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{P}_i\}_i \rightarrow \{\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{P}\} \quad \text{with: } \lambda = \sum_i \lambda_i,$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\lambda} \sum_i \lambda_i [\mathbf{P}_i + (\mathbf{x}_i - \mathbf{x})(\dots)^\top].$$

## Track Extraction in $t_k$ : $h_1$ wurde akzeptiert

Nun wird ein Filter initialisiert um den Track zu verfolgen:

Normalize coefficients  $\lambda_{j_k}$ :  $p_{j_k} = \frac{\lambda_{j_k}}{\sum_{j_k} \lambda_{j_k}}!$

$$(\lambda_{j_k}, x_{j_k}, P_{j_k}) \rightarrow p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Z}^k) = \sum_{j_k} p_{j_k} \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{j_k}, \mathbf{P}_{j_k})$$

Der LR-Test überwacht weiter den Track:

Setze  $LR(0) = 1$

*track confirmation:*  $LR(k) > \frac{P_1}{P_0}$ : reset  $LR(0) = 1$ !

*track deletion:*  $LR(k) < \frac{1-P_1}{1-P_0}$ ; ev. track re-initiation

## 9. Bewertung von Filtern

Die Ergebnisse eines Filters müssen für die Anwendung auf ihre Glaubwürdigkeit hin bewertet werden. Eine Möglichkeit ist das Filter auf die Konsistenz mit der realen Welt hin zu überprüfen. Gibt die Präzision/Sicherheit des Zustands erzeugt durch den Filter die reale Welt wieder.

### Definition: Konsistenz

Ein Filter ist **konsistent**, wenn für den Fehler vom realen Zustand gilt:

Fehler:  $\Delta x_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$

$$\mathbb{E}[\Delta x_{k|k}] = 0 \quad \leftarrow \text{Im Mittel ist der "gefilterte" Zustand richtig}$$

$$\mathbb{E}[\Delta x_{k|k} \Delta x_{k|k}^\top] = P_{k|k} \quad \leftarrow \text{Erwartete Abweichung ist die Kovarianzmatrix der Schätzung}$$

Normalized Estimation Error Squared (NEES):

$$\epsilon(k) = \Delta x_{k|k}^\top P_{k|k}^{-1} \Delta x_{k|k}$$

Normalized Innovation Squared (NIS):

$$\epsilon_\nu(k) = \nu_{k|k-1}^\top S_{k|k-1}^{-1} \nu_{k|k-1}$$

$$\nu_{k|k-1} = z_k - H_{k|k-1} x_{k|k-1}, \quad S_{k|k-1} = H_{k|k-1} P_{k|k-1} H_{k|k-1}^\top + R_{k|k-1}$$

Konsistent gdw.

NEES and NIS are  $\chi^2$ -RVs

$$\mathbb{E}[\epsilon(k)] = \underset{7}{n_x}, \quad \mathbb{E}[\epsilon_\nu(k)] = \underset{1}{n_z}$$

Dimension Zustand

Dimension Messung

### Test:

1. Simuliere  $N$  zufällig, unabhängige Zeitreihen  $z_k = h(x_k) + u_k$
2. Berechne NEES:  $\epsilon^i(k), i = 1, \dots, N$   
 $\bar{\epsilon}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon^i(k)$
3. Entscheide über Konsistenz mit Signifikanz  $\alpha$ :

Akzeptanzintervall:  $P(\bar{\epsilon}(k) \in [r_1, r_2] | \text{konsist.}) = 1 - \alpha$

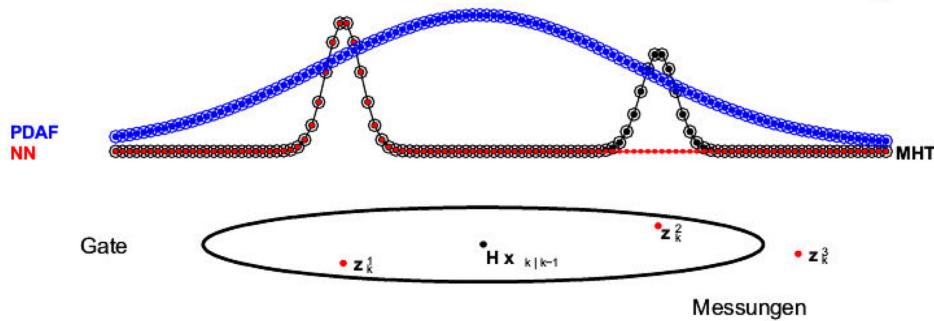
$$r_1 = \chi_{N n_z}^2 (\alpha/2)/N, r_2 = \chi_{N n_z}^2 (1 - \alpha/2)/N$$

Akzeptierbar, wenn  $\bar{\epsilon}(k) \in [r_1, r_2]$

+ i.d.R 5%

## Vergleich der gefilterten Zustände

### Mono-Hypothese:



### Multi-Hypothese:

