Ejercicio 2.a):

Vamos a calcular la serie de Taylor centrada en 1 para la siguiente función:

$$f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

Para ello, primero consideramos la serie de Taylor del exponencial:

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$e^t=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

Y manipulamos:

dividiendo entre t (para t ≠ 0):

$$\frac{e^t}{t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n!)}$$

Integrando entre 1 y x:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}dt=\int_1^x \frac{1}{t}dt+\int_1^x \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n!}dt$$

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}dt=\ln(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n!)}(x-1)$$

Así, tenemos la serie de Taylor para la función dada. Ahora, el polinomio de Taylor con grado 2, quedaría:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}dt=\ln(x)+\frac{1}{1(1)!}(x-1)+\frac{1}{4(1)!}(x^2-1)$$

$$\int_1^x \frac{e^t}{t}dt=\ln(x)-5/4+x+(1/4)x^2$$