Ejercicio 1.a):

Se construyen las siguientes matrices:

$$A_1 = X + nI$$
$$A_2 = Y^t Y + 10^{-3} I$$

Donde X es una matriz nxn con entradas reales aleatorias con distribución uniforme en el intervalo [-1,1]. Y es Una matrix 2xn con entradas igualmente aleatorias con distribución aleatoria en el mismo intervalo.

Probaremos: simetría, definida positiva, y dominancia estricta.

***Simetría**: A_1 no es necesariamente simétrica, puesto que las entradas de X son aleatorias y el término nI solo afecta a la diagonal de X, quien no determina la simetría. Veamos un ejemplo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Y esta matriz claramente no es simétrica. Por otro lado, A_2 sí es simétrica, veamos porqué:
Primero vemos que $Y^t Y$ Es claramente simétrica:

$$(Y^t Y)^t = Y^t (Y^t)^t = Y^t Y$$

Lo que implica que es simétrica. Además, La identidad es simétrica, y multiplicar por una constante no altera su simetría. Finalmente, la suma de dos matrices simétricas es simétrica, así que A_2 es simétrica.

□

***Diagonal dominante estricta:** A_1 NO es diagonal dominante estricta, veamos un ejemplo:
si:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Que claramente no es dominante estrica.

A_2 tampoco lo es:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} + 10^{-3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} + 10^{-3} I$$

Y vemos que claramente no es dominante estricta.

□

***Definida positiva:**

Vemos que ambas matrices tienen diagonales positivas, y en el caso de la matrix A_2, también es simétrica. Así que A_2 tiene que ser definida positiva.