**PROBLEMA DO ISOMORFISMO DOS SUBGRAFOS**

Orientador: Gibson Belarmino.

Aluno: Angelo Thiago, Arthur Franco, João Gabriel de Sá, Luís Eduardo.

2023/2

**SUMÁRIO**

[1 INTRODUÇÃO 1](#_Toc151539326)

[2 PROBLEMA 2](#_Toc151539327)

[3 COMPLEXIDADE E TAXA DE CRESCIMENTO 3](#_Toc151539328)

[4 PROVA 4](#_Toc151539329)

[5 METAHEURÍSTICA 5](#_Toc151539330)

[REFERÊNCIAS 17](#_Toc151539332)

# INTRODUÇÃO

Isomorfismo de subgrafos é um conceito na teoria dos grafos que envolve a comparação estrutural entre dois subgrafos. Para entender isso, primeiro, é importante compreender os termos-chave:

* Grafo: estrutura matemática composta por um conjunto de vértices (pontos) e um conjunto de arestas (linhas) que conectam esses vértices.
* Subgrafo: é um grafo que é obtido a partir de outro grafo removendo-se alguns vértices e arestas, preservando as conexões originais.
* Isomorfismo de grafos: dois grafos são isomorfos se eles podem ser reorganizados de tal forma que os vértices e as arestas correspondentes entre eles são preservados.
* Isomorfismo de subgrafos: determinar se dois subgrafos de grafos diferentes são isomorfos, ou seja, se eles podem ser estruturalmente reorganizados um no outro.

Considere dois grafos G e H:

Neste exemplo, os dois grafos G e H são isomorfos porque podemos associar cada vértice de G a um vértice correspondente em H de forma que as conexões (arestas) sejam mantidas:

# PROBLEMA

Dado dois grafos G e H, o problema do isomorfismo dos subgrafos (PIS) busca determinar se existe um isomorfismo entre H e um subgrafo de G. Em outras palavras, se há uma correspondência biunívoca entre os vértices dos dois subgrafos de forma a preservar as arestas.

Desenho de pessoa com relógio no topo

Descrição gerada automaticamente com confiança baixa

**Figura 1**: Isomorfismo entre os grafos G e H.

H é isomórfico a um subgrafo de G, onde , onde os vértices coloridos de H fazem correspondência aos vértices de mesma cor ao subgrafo de G.

# COMPLEXIDADE E TAXA DE CRESCIMENTO

Segundo Gröger (1992), qualquer problema de isomorfismo de subgrafos tem complexidade de consulta , ou seja, resolver o isomorfismo do subgrafo requer um algoritmo para verificar a presença ou ausência na entrada de arestas diferentes no grafo.

À medida que o tamanho do grafo aumenta, o número mínimo de operações necessárias para resolver o problema do isomorfismo de subgrafos cresce proporcionalmente à raiz quadrada do cubo do tamanho do grafo: . Observe o Quadro 1.

**Quadro 1:** Tamanho do grafo x Número de operações.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 1 | 1 |
| 2 | 2,82 |
| 3 | 5,20 |
| ... |  |
| 10 | 31,62 |
| ... |  |
| 100 | 100 |
| ... |  |
| 1000 | 31.622,78 |

Conforme mostra o Quadro 1, apresentando o tamanho do grafo () e o número correspondente de operações, onde pode-se observar que o aumento no número de operações é mais moderado em comparação com uma taxa de crescimento puramente cúbica. A Figura 2 mostra a relação entre o tamanho do grafo e a quantidade de operações.

Gráfico, Gráfico de linhas

Descrição gerada automaticamente

**Figura 2:** Taxa de crescimento para o PIS.

A notação estabelece um limite inferior para a complexidade do problema. Em outras palavras, mesmo o melhor algoritmo possível para resolver o problema do isomorfismo de subgrafos teria uma complexidade de, no mínimo, . A análise da taxa de crescimento desses algoritmos revela que, à medida que o número de vértices e arestas aumenta, o tempo necessário para resolver o problema cresce de maneira exponencial. Essa característica exponencial é uma das razões pelas quais o problema é considerado NP-completo, onde a prova será apresentada no capítulo 5.

# PROVA

A complexidade computacional do PIS é conhecida por ser NP-completo. Para provar isso, realizamos uma redução de um problema já conhecido como NP-completo (Problema do Clique) para o problema em questão. Sendo considerado um problema clássico dos grafos, o Problema do Clique (PC) é definido como um grafo não direcionado onde busca-se descobri se cada par de vértices está ligado a uma aresta, sendo, assim, chamado de cliques.

Demonstrar a NP-Completude de um problema envolve estabelecer sua inclusão nas categorias NP e NP-Difícil. O problema de Isomorfismo do Subgrafo é um membro da classe NP - A condição para pertencer à classe NP implica a capacidade de verificação em tempo polinomial.

Uma vez que possuímos uma formalização do problema (capítulo 2), é necessário verificar em tempo polinomial se ele constitui uma solução válida para o problema. A verificação envolve a determinação da isomorfia entre G e H:

1. Confirmar a bijectividade do mapeamento; e
2. Garantir que, para cada aresta presente em G, haja uma aresta correspondente em G, com essa verificação sendo conduzida em tempo polinomial.

Um problema é classificado como NP-Difícil se for possível reduzir, em tempo polinomial, qualquer problema NP a ele. No caso do PIS, a tentativa de reduzir o problema do Clique a S em tempo polinomial é realizada para estabelecer a NP-Dificuldade de PIS. Se essa redução for bem-sucedida, PIS é confirmado como NP-Difícil, indicando que todos os problemas NP podem ser reduzidos a PIS em tempo polinomial.

Considere a entrada (G, *k*) para o PC, onde a saída é verdadeira se o grafo G contiver um clique de tamanho *k*, ou seja, se houver um subgrafo de G. Seja G1 um grafo completo de *k* vértices e G2 o grafo G, ambos utilizados como entrada para o PIS, dessa forma:

1. , sendo *n* o número de vértices em G (igual a G2).
2. Se , então, um clique de tamanho k não pode ser um subgrafo de G.

O tempo para criar G1 é , de forma a seguir a etapa 1, onde o número de arestas em um grafo completo de tamanho *k* pode ser formalizado da seguinte forma:

Se o grafo G contiver um clique de tamanho *k*, então G1 é isomórfico a um subgrafo de G2, já que G1 é um subgrafo de G2 e todo grafo é isomórfico a si mesmo. Dessa forma, a resposta para o Problema de Isomorfismo do Subgrafo é afirmativa. Isso implica que, se a decisão sobre a existência do clique for verdadeira, o Problema de Isomorfismo do Subgrafo também será verdadeiro, e vice-versa.

Como exemplo, considere G como um grafo com vértices {A, B, C, D} e arestas {(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (C, D)}. Se o PC para G com *k* = 3 é verdadeiro, então G1, que é um grafo completo de 3 vértices, é isomórfico a um subgrafo de G2, que é G. Essa correspondência indicaria a existência de um clique de tamanho 3 em G, confirmando a veracidade do PC.

Ao demonstrar que o PC pode ser eficientemente reduzido ao PIS para uma instância particular em tempo polinomial, confirmamos a NP-Dificuldade deste último. Com isso, concluímos que o PIC é tanto NP quanto NP-Difícil, consolidando sua NP-Completeza.

# METAHEURÍSTICA

Uma abordagem para resolver o problema do isomorfismo dos subgrafos é a utilização da metaheurística Algoritmos Genéticos (AGs). Uma implementação em Java puro pode ser realizada utilizando estruturas de dados adequadas e operadores genéticos específicos para grafos.

Dado um conjunto de vértices *V* e arestas *E* de dois grafos G e H, será representado um isomorfismo candidato entre G e H através da função que preserva a relação de adjacência entre os vértices. A propriedade de isomorfismo é mantida quando, para cada aresta em *G*, existe uma aresta em *H*. Os operadores genéticos, como crossover e mutação, atuam nessa representação para explorar e combinar isomorfismos de maneira a buscar soluções aproximadas para instâncias amplas do PIS.

A adaptação da metaheurística para o PIS, envolve a representação dos indivíduos (soluções candidatas) como possíveis isomorfismos entre os grafos G e H. Os operadores genéticos devem ser projetados para preservar a propriedade de isomorfismo. A implementação de metaheurísticas, como Algoritmos Genéticos, oferece uma abordagem eficaz para encontrar soluções aproximadas para instâncias grandes deste problema.

# REFERÊNCIAS

ACERVO LIMA. **Prova de que o problema de isomorfismo do subgrafo é NP-completo**. Disponível em: https://acervolima.com/prova-de-que-o-problema-de-isomorfismo-do-subgrafo-e-np-completo/. Acesso em: 16 nov. 2023.

GRÖGER, H. D. On the randomized complexity of monotone graph properties. ***Acta Cybernetica***, v. 10, n. 3, p. 119–127, 1992. Disponível em: https://cyber.bibl.u-szeged.hu/index.php/actcybern/article/view/3400. Acesso em: 16 nov. 2023.