Ch. 4 연립상미분방정식. 상평면 및 정성법 (Systems of ODEs. Phase Plane. Qualitative Methods)

- 내용 : 행렬과 벡터를 이용한 선형연립방정식의 해법

4.0 행렬과 벡터(Basics of Matrices and Vectors)

- 연립미분방정식(Systems of Differential Equations)

: 두 개 이상의 미지함수를 갖는 두 개 이상의 상미분방정식

Ex.

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,\qquad y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2,$$

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{aligned}$$

- 미분

: 요소(또는 성분)가 변수인 행렬(또는 벡터)의 도함수는 각각의 요소를 미분함.

Ex.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}$$

Ex.

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

● 고유값(Eigenvalue), 고유벡터(Eigenvector)

$\mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor$을 주어진 $n \times n$ 행렬이라 하고, 어떤 벡터 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$에 대하여 식 $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ 가 성립하게 하는 스칼라 λ를 의 **고유값(Eigenvalue)**이라 하며, 이 때의 벡터 $\mathbf{x}$를 λ에 대응하는 **고유벡터(Eigenvector)**라 함.

❖ 임의의 λ에 대하여 영벡터 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 방정식 $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$의 해이다.

❖ $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow$ n개의 미지수 $x_1, \cdots, x_n$(벡터 $\mathbf{x}$의 성분)에 관한 대수적인 1차 연립방정식

❖ 방정식 $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$이 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$인 해를 갖기 위해서는 계수행렬 $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$의 역행렬이 존재하지 않는다. $\quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

Ex. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 이면

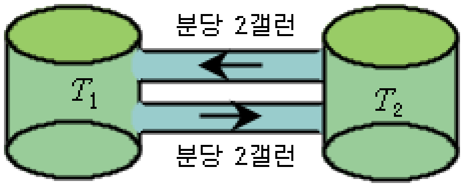
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 특성방정식(Characteristic Equation) : $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$
  - 행렬 $\mathbf{A}$ 의 고유값 : 특성방정식의 해
  - $\mathbf{x}$ 가 행렬 $\mathbf{A}$ 의 고유벡터이면 임의의 스칼라 $k \neq 0$ 에 대하여 $k\mathbf{x}$ 도 고유벡터임

4.1 연립상미분방정식 모델(Systems of ODEs as Models)

■ Ex. 1 2개의 탱크에 관련된 혼합문제(두 개의 1계 미분방정식)

- 탱크 T_1 : 순수한 물 100갤론
- 탱크 T_2 : 순수한 물 100갤론 + 150파운드의 비료
- 액체는 분당 2갤론의 일정한 속도로 두 탱크를 순환하여 골고루 섞여 균질하게 된다.



y_1 : 탱크 T_1 의 비료의 양, y_2 : 탱크 T_2 의 비료의 양

탱크 T_1 의 비료의 양이 적어도 탱크 T_2에 남아 있는 비료의 양의 반이 되기 위해서는 얼마 동안 액체를 순환시켜야 하는가?

Step 1 모델설정

$y_1' =$ 분당 유입량 - 분당 유출량 $= \dfrac{2}{100} y_2 - \dfrac{2}{100} y_1$ (탱크 T_1) $\Rightarrow$ $y_1' = -0.02 y_1 + 0.02 y_2$

$y_2' =$ 분당 유입량 - 분당 유출량 $= \dfrac{2}{100} y_1 - \dfrac{2}{100} y_2$ (탱크 T_2) $\Rightarrow$ $y_2' = 0.02 y_1 - 0.02 y_2$

$$\therefore \ \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$$

Step 2 일반해

Idea : t 에 대한 지수함수로 시도

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}' = \lambda \mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \Rightarrow$$ 행렬 $\mathbf{A}$ 의 고유값과 고유벡터 계산

특성방정식 : $$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -0.02-\lambda & 0.02 \\ 0.02 & -0.02-\lambda \end{vmatrix} = (-0.02-\lambda)^2 - 0.02^2 = \lambda(\lambda + 0.04) = 0$$

$\Rightarrow$ 고유값 : $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0.04$ 고유벡터 : $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

중첩의 원리 적용

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$ (c_1 과 c_1 는 임의의 상수)

Step 3 초기조건 이용

초기조건 : $y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 150$

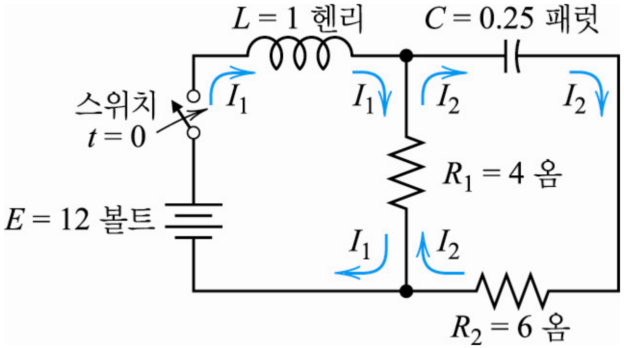
$$\mathbf{y}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = 75, \quad c_2 = -75 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = 75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 75 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-0.04t}$$

Step 4 답

탱크 T_1이 50파운드의 비료를 포함하면, 탱크 T_1이 포함한 비료의 양이 탱크 T_2 가 포함한 비료 양의 반

$$y_1 = 75 - 75e^{-0.04t} = 50 \quad \Rightarrow \quad e^{-0.04t} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad t = \ln 3 / 0.04 = 27.5$$

■ Ex. 2 전기회로망



주어진 전기회로망에서 전류 $I_1(t)$ 와 $I_2(t)$ 를 구하라. 스위치가 닫힌 순간인 $t = 0$ 에 전류와 전하가 모두 0이라 가정한다.

Step 1 **모델설정 :** Kirchhoff의 전압법칙 적용

왼쪽 루프 : $I_1' = -4I_1 + 4I_2 + 12$

오른쪽 루프 : $6I_2 + 4(I_2 - I_1) + 4\int I_2 dt = 0 \;\Rightarrow\; I_2' - 0.4I_1' + 0.4I_2 = 0 \;\Rightarrow\; I_2' = -1.6I_1 + 1.2I_2 + 4.8$

$$\therefore\ \mathbf{J}' = A\mathbf{J} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4.0 & 4.0 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 12.0 \\ 4.8 \end{bmatrix}$$

Step 2 일반해

제차 연립방정식 $\mathbf{J}' = A\mathbf{J}$ 에 $\mathbf{J} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ 를 대입하면 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 이므로 $\mathbf{A}$ 의 고유값과 고유벡터 계산

고유값 $\lambda_1 = -2$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; 고유값 $\lambda_1 = -0.8$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix}$

제차 연립미분방정식의 일반해 : $\mathbf{J}_h = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t}$

비제차 연립미분방정식의 특수해 구하기

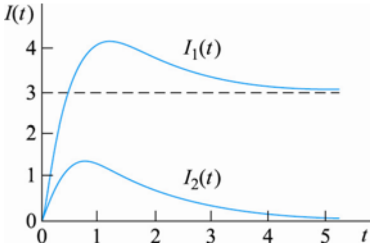
$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 라 하면, $\mathbf{J}_p' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 이므로 $A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$

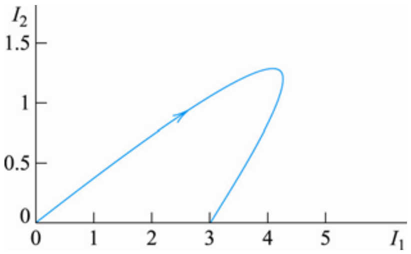
$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} -4.0a_1 + 4.0a_2 + 12.0 = 0 \\ -1.6a_1 + 1.2a_2 + 4.8 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore \mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

일반해 : $\mathbf{J} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} e^{-0.8t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} I_1 = 2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-0.8t} + 3 \\ I_2 = c_1 e^{-2t} + 0.8c_2 e^{-0.8t} \end{matrix}$

초기조건 적용

$$I_1(0)=2c_1+c_2+3=0,\quad I_2(0)=c_1+0.8c_2=0 \;\Rightarrow\; c_1=-4,\quad c_2=5 \;\Rightarrow\; \therefore\; I_1=-8e^{-2t}+5e^{-0.8t}+3,\quad I_2=-4e^{-2t}+4e^{-0.8t}$$





- 그림 79a는 $I_1(t)$ 과 $I_2(t)$의 곡선을 개별적으로 나타낸 것
- 그림 79b는 I_1I_2 −평면에서 하나의 곡선 $[I_1(t), I_2(t)]$ 을 그린 것

  ⇒ t를 매개변수(parameter)로 하는 매개변수표현식
- I_1I_2 −평면을 방정식 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 의 상평면(phase plane) 이라 함
- 상편면에서의 곡선을 궤적(Trajectory)이라 한다.
- 상평면의 궤적이 전체 해집합의 일반적인 양상을 잘 표현할 수 있음

n계 미분방정식의 1계 연립상미분방정식으로의 변환

- n계 상미분방정식 : $y^{(n)} = F\left(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$

- **1**계 연립상미분방정식으로의 변환

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

Ex. 3 용수철에 매달린 물체

앞에서 다룬 용수철에 달린 물체의 자유진동을 모델화하는 문제에 변환방법을 적용

$$my'' + cy' + ky = 0 \xrightarrow{y_1 = y,\ y_2 = y'} \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m}y_1 - \frac{c}{m}y_2 \end{aligned} \xrightarrow{\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow$$

2.4 절의 특성방정식과 일치

4.2 연립상미분방정식에 대한 기본 이론 (Basic Theory of Systems of ODEs)

- 연립상미분방정식

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned} \qquad \xrightarrow{\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}} \qquad \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

- 벡터해(Solution Vector)

: 어떤 구간 $a < t < b$ 에서 연립상미분방정식을 만족하는 미분가능한 n개의 함수들 $y_1 = h_1(t), \quad \cdots, \quad y_n = h_n(t)$의 집합.

- 초기조건

$$y_1(t_0) = K_1, \quad y_2(t_0) = K_2, \quad \cdots, \quad y_n(t_0) = K_n \longrightarrow \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{bmatrix}$$

존재성과 유일성 정리

연립상미분방정식의 $f_1, \cdots, f_n$ 이 점 $(t_0, K_1, \cdots, K_n)$을 포함하는 공간 내의 어떤 영역 R 에서 연속인 함수이고, 이 영역에서 연속인 편도함수 $\partial f_1/\partial y_1, \cdots, \partial f_1/\partial y_n, \cdots, \partial f_n/\partial y_n$ 를 갖는다고 하자. 그러면 연립상미분방정식은 어떤 구간 $t_0 - \alpha < t < t_0 + \alpha$에서 초기조건을 만족하는 해를 가지며 이 해는 유일하다.

- 선형연립상미분방정식 (Linear System)

$$y_1' = a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t)$$

$$\xrightarrow{\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_2 \end{bmatrix}} \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$$

- 제차 : $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$
- 비제차 : $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$
- 선형인 경우의 존재성과 유일성 정리

선형연립미분방정식의 a_{jk}와 g_j 가 점 $t = t_0$를 포함하는 열린 구간 $\alpha < t < \beta$ 내에서 t 의 연속함수라 하자. 그러면 선형연립미분방정식은 이 구간에서 초기조건을 만족하는 해를 가지며 이 해는 유일하다.

- 중첩의 원리 즉 선형성 원리

$\mathbf{y}^{(1)}$ 과 $\mathbf{y}^{(2)}$ 가 어떤 주어진 구간에서 제차선형연립방정식의 해이면, 그들의 일차 결합 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + c_2\mathbf{y}^{(2)}$ 또한 제차선형연립방정식의 해이다.

- **기저(Basic) 또는 기본계(Fundamental System)**

  : 어떤 구간 J 에서 일차 독립인 n 개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$

- **일반해(General Solution)**

  : 기저들의 일차결합 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$ $(c_1, \cdots, c_n$ 은 임의의 상수 $)$

- 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 에서 모든 $a_{jk}(t)$가 구간 J에서 연속이면, 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$는 에서 해의 기저를 갖는다는 사실을 보일 수 있음.

- 이 경우에 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$는 J 에서 일반해를 가지고, 일반해는 모든 해를 포함.

- **기본행렬(Fundamental Matrix)** : n 개의 해 $\mathbf{y}^{(1)}, \cdots, \mathbf{y}^{(\mathbf{n})}$를 열로 가지는 $n \times n$ 행렬

- Wronskian : 기본행렬 의 행렬식

4.3 상수계수를 갖는 연립방정식. 상평면법 (Constant-Coefficient Systems. Phase Plane Method)

● 상수계수를 갖는 선형연립방정식의 해법

상수계수를 갖는 선형연립방정식 : $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},\ \mathbf{A} = [a_{jk}],\ a_{jk}$ 는 상수

Idea $\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{\lambda t}$ 으로 시도

$\Rightarrow\ \mathbf{y}' = \lambda\mathbf{x}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}e^{\lambda t}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (고유값 문제)로 변환

● 일반해

연립미분방정식의 상수행렬이 n개의 일차 독립인 고유벡터를 갖는다면 이에 대응하는 식 $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t},\ \cdots,\ \mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ 의 해 $\mathbf{y}^{(1)},\ \cdots,\ \mathbf{y}^{(n)}$ 는 연립방정식의 해의 기저를 형성하고, 이에 대응되는 일반해는 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}^{(1)}e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}e^{\lambda_n t}$ 이다.

- 상평면에서의 해의 그래프를 그리는 방법

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \left(\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{matrix} \right) \text{의 일반해 } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

- 성분 $y_1(t)$와 $y_1(t)$를 t −축 위에 두 개의 곡선으로 나타냄.
- 매개변수 t 를 사용한 매개변수표현법(또는, 매개변수방정식)

  : y_1y_2 − 평면에 하나의 곡선으로 나타낼 수 있음.

- 용어정리

- **궤적**(Trajectory, 때로는 **궤도**(Orbit), **경로**(Path) : y_1y_2 − 평면의 곡선
- **상평면**(Phase Plane) : y_1y_2 − 평면
- **상투영**(Phase Portrait) : 상평면을 방정식 $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 의 궤적들로 채워서 얻는다

■ Ex. 1 상평면에서의 궤적(상투영)

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

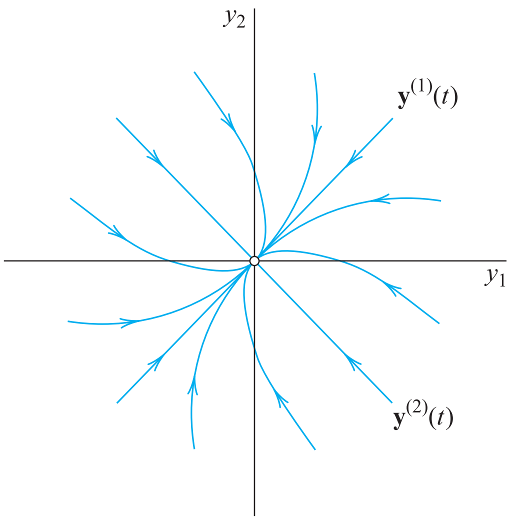
특성방정식

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

고유값 $\lambda_1 = -2$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

고유값 $\lambda_2 = -4$ 일 때, 고유벡터 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

일반해 : $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = c_1 \mathbf{y}^{(1)} + c_2 \mathbf{y}^{(2)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$



- 두 개의 직선궤적은 각각 $c_1 = 0$ 과 $c_2 = 0$ 에 대응하는 것
- 나머지 궤적들은 다르게 선택된 c_1, c_2 의 값에 대응하는 것
- 상투영은 일반적으로 해 전체를 정성적으로 파악하는데 유용

- 연립미분방정식의 **임계점(Critical Point) :** dy_2 / dy_1 이 정의되지 않는 점

Ex. $$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{dy_2 / dt}{dy_1 / dt} = \frac{y_2'}{y_1'} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2}$$

- 점 $P = P_0 : (0,0)$을 제외한 임의의 점 $P : (y_1, y_2)$을 지나는 궤적은 이 점에서 유일 한 접선 방향 dy_2 / dy_1 을 갖게 됨.
- 원점 P_0 에서 dy_2 / dy_1은 $0/0$이 되어 정의되지 않음.

- 임계점의 다섯 가지 유형

  : 임계점은 근방에서 궤적의 모양에 따라 5가지 유형으로 구분.

- 비고유마디점(Improper Node)
- 고유마디점(Proper Node)
- 안장점(Saddle Point)
- 중심점(Center)
- 나선점(Spiral Point)

Ex. 1 비고유마디점

: 두 개의 궤적을 제외한 모든 궤적이 주어진 점에서 같은 접선방향의 극한을 갖는 경우.

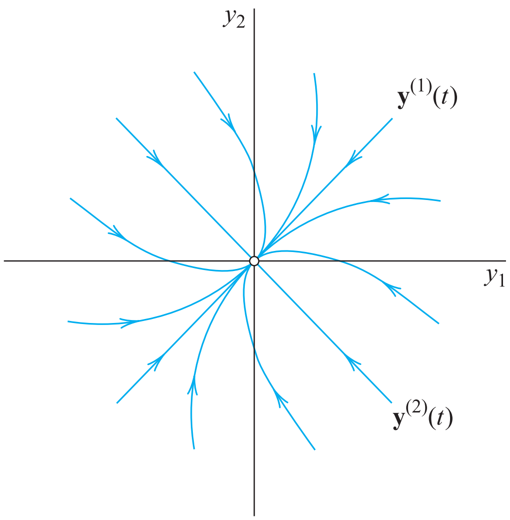
- 예외적인 두 개의 궤적도 주어진 점에서 접선방향의 극한을 갖게 됨
- 극한값은 앞의 극한값과 다르다.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

- 공통인 접선방향이 극한은 고유벡터 $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 임.

(t가 증가할 때 e^{-4t} 가 e^{-2t}보다 훨씬 더 빨리 0에 접근)

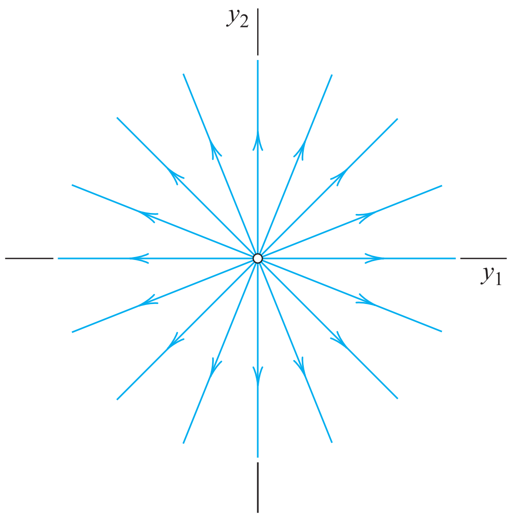
- 예외적인 궤적의 접선방향극한은 $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 임.



Ex. 2 고유마디점

: 모든 궤적이 명확한 접선방향의 극한을 가지고, 또한 임의의 상수가 접선방향의 극한인 궤적이 존재하는 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \left(\text{즉} \quad \begin{array}{l} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_2 \end{array} \right)$$



일반해 :

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = c_1 e^t \\ y_2 = c_2 e^t \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 y_2 = c_2 y_1$$

■ Ex. 3 안장점

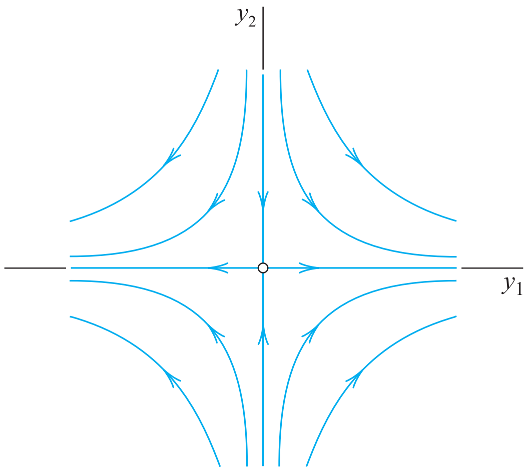
: 두 개의 들어오는 궤적과 두 개의 나아가는 궤적이 존재하고, 나머지 궤적은 주어진 점을 지나지 않고 우회하는 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \left(\text{즉} \quad \begin{matrix} y_1' = y_1 \\ y_2' = -y_2 \end{matrix} \right)$$

일반해 :

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y_1 = c_1 e^{t} \\ y_2 = c_2 e^{-t} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 y_2 = \text{상수}$$

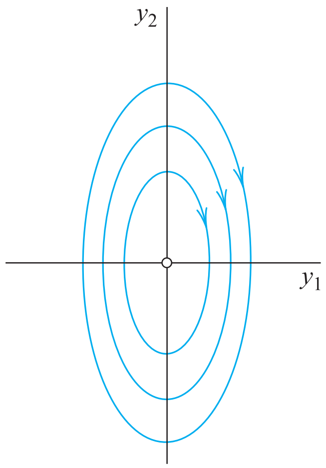


- 두 좌표축과 쌍곡선족(族)이다

Ex. 4 중심점

: 무수히 많은 폐곡선으로 이루어진 궤적으로 둘러싸인 임계점을 말함.

$$\mathbf{y}'=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\mathbf{y},\left(\text{즉}\quad \begin{matrix} y_1'=y_2 \\ y_2'=-4y_1\end{matrix}\right)$$



특성방정식 : $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -4 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

고유값 $\lambda_1=2i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ 2i\end{bmatrix}$;

고유값 $\lambda_1=-2i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\ -2i\end{bmatrix}$

일반해 : $\mathbf{y}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 2i\end{bmatrix}e^{2it}+c_2\begin{bmatrix}1\\ -2i\end{bmatrix}e^{-2it} \Rightarrow \begin{matrix} y_1=c_1e^{2it}+c_2e^{-2it} \\ y_2=2ic_1e^{2it}-2ic_2e^{-2it}\end{matrix}$

궤적그리기

$$y_1'=y_2,\ y_2'=-4y_1 \Rightarrow 4y_1y_1'=-y_2y_2' \Rightarrow 2y_1^{\ 2}+\frac{1}{2}y_2^{\ 2}=\text{상수}$$

■ Ex. 5 나선점

: $t \to \infty$ 를 취할 때, 임계점 근방에서 나선형의 궤적이 임계점으로 향하여 접근하는(혹은 임계점로부터 벗어나 멀어지는) 경우.

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \left(\text{즉} \quad \begin{matrix} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{matrix} \right)$$

특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm i$

고유값 $\lambda_1 = -1 + i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$;

고유값 $\lambda_1 = -1 - i$ 일 때, 고유벡터 $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

일반해 : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(-1+i)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{(-1-i)t}$

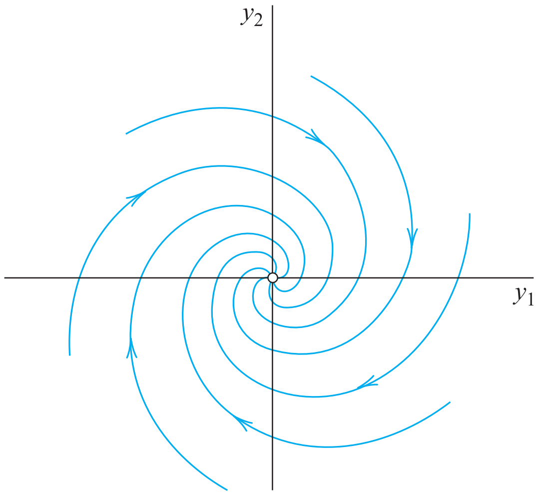
궤적그리기

$$y_1' = -y_1 + y_2,\ \ y_2' = -y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 y_1' + y_2 y_2' = -\left(y_1^2 + y_2^2\right) \xrightarrow[r^2 = y_1^2 + y_2^2]{\text{극좌표 이용}} \frac{1}{2}\left(r^2\right)' = -r^2 \xrightarrow{\left(r^2\right)' = 2rr'} rr' = -r^2$$

변수분리형 해법에 의하여 적분하면

$$\ln r = -t + \tilde{c} \quad \Rightarrow \quad r = ce^{-t}$$



- 고유벡터가 기저를 형성하지 않는 경우. 퇴화마디점**(Degenerate Node)**

- 대칭행렬($a_{kj}=a_{jk}$)이거나 반대칭행렬($a_{kj}=-a_{jk},\ a_{jj}=0$)이면 고유벡터들로 이루어진 기저가 존재한다.

- $n\times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 중복고유값 λ(즉, λ가 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$의 중복근)를 가지고, λ에 대응하는 고유벡터(의 상수배는 같은 것으로 취급하여)가 오직 하나 뿐이라고 가정

  $\Rightarrow$ 우선 하나의 해 $\mathbf{y}^{(1)}=\mathbf{x}e^{\lambda t}$를 얻음.

  $\mathbf{y}^{(1)}$과 일차독립인 두 번째 해 : $\mathbf{y}^{(2)}=\mathbf{x}te^{\lambda t}+\mathbf{u}e^{\lambda t}$

  $$\left(\mathbf{y}^{(2)}\right)'=\mathbf{x}e^{\lambda t}+\lambda\mathbf{x}te^{\lambda t}+\lambda\mathbf{u}e^{\lambda t}=\mathbf{A}\mathbf{x}te^{\lambda t}+\mathbf{A}\mathbf{u}e^{\lambda t} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{x}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{A}\mathbf{u} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}=\mathbf{x}$$

.

Ex. 6 퇴화마디점

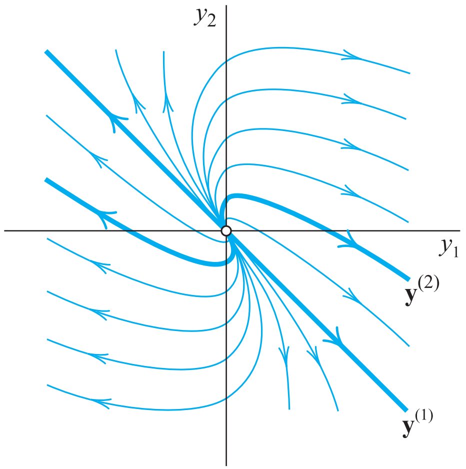
$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

해 구하기

특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t}$

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

일반해 : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{3t}$



그래프 관찰

- $c_1\mathbf{y}^{(1)}$ 의 그래프는 굵게 표시된 직선
- 제4사분면의 반직선은 $c_1 > 0$ 인 경우
- 제2사분면의 반직선은 $c_1 < 0$ 인 경우
- 굵은 곡선의 오른쪽은 $\mathbf{y}^{(2)}$를 왼쪽부분은 $-\mathbf{y}^{(2)}$

4.4 임계점에 대한 판별기준. 안정성 (Criteria for Critical Points. Stability)

- 임계점 유형의 판별기준(Criteria for Types of Critical Points)

행렬 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$의 고유값 λ_1, λ_2

특성방정식 : $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \mathbf{A} = 0$

$p = a_{11} + a_{22}$(고유값의 합), $q = \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$(고유값의 곱), $\Delta = p^2 - 4q$(판별식)

- 마디점 : $q > 0,\ \Delta \geq 0$
- 안장점 : $q < 0$
- 중심점 : $p = 0,\ q > 0$
- 나선점 : $p \neq 0,\ \Delta < 0$

안정성(Stability)

- 임계점의 또 다른 분류방식은 안정성에 의한 것
- 안정성은 물리학에서 처음 생각한 개념으로, 공학이나 응용 등 여러 분야에서 기본적인 개념
- 안정성은 어떤 순간에 물리적 계에 가해진 작은 변화(작은 충격)가 이후의 모든 시간 t에서 계의 움직임에 단지 작은 영향을 미치는 것을 의미한다.

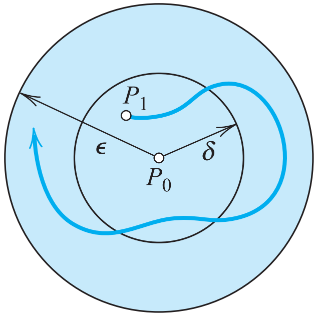
안정적 임계점(Stable Critical point)

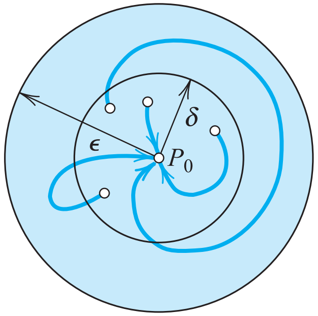
: 어떤 순간 $t = t_0$에서 임계점에 아주 가깝게 접근한 모든 궤적이 이후의 시간에서도 임계점에 아주 가까이 접근한 상태로 남아 있는 경우.

불안정적 임계점(Unstable Critical point) : 안정적이 아닌 임계점

안정적 흡인 임계점(Stable and Attractive Critical point)

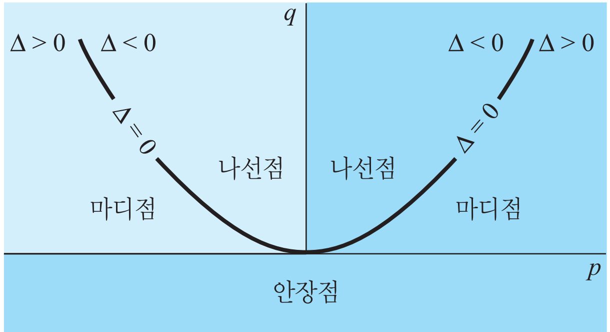
: 안정적 임계점이고 임계점 근처 원판 내부의 한 점을 지나는 모든 궤적이 $t \to \infty$를 취할 때 임계점에 가까이 접근하는 경우





임계점에 대한 안정성 판별기준

- 안정적 흡인 임계점 : $p < 0,\ q > 0$
- 안정적 임계점 : $p \leq 0,\ q > 0$
- 불안정적 임계점 : $p > 0$ 또는 $q < 0$



4.5 비선형연립방정식에 대한 정성법 (Qualitative Methods for Nonlinear Systems)

정성법(Qualitative Method)

- 방정식의 해를 실제로 구하지 않으면서 해에 대한 정석적인 정보를 얻는 방법
- 연립방정식의 해를 해석적으로 구하기 어렵거나 불가능한 경우에 매우 유용한 방법
- 상평면법을 선형연립방정식으로부터 비선형연립방정식으로 확장

비선형 연립방정식

비선형연립방정식의 선형화

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \longrightarrow \quad \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

따라서 $\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$

따라서

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + h_1(y_1, y_2)$$
$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + h_2(y_1, y_2)$$

- 선형화

비선형 연립방정식의 f_1과 f_2가 임계점 P_0근방에서 연속이고 또한 연속인 도함수를

가지며, $\det \mathbf{A} \neq 0$이면, 비선형연립방정식의 임계점에 대한 유형및 안정성은 선형화를

통해 얻어진 선형연립방정식

$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$ 따라서 $\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned}$

의 유형 및 안정성과 같다.

■ Ex. 1 자유비감쇠진자. 선형화

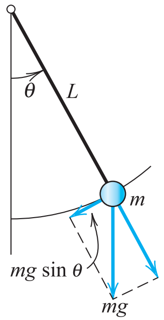
질량 m인 물체(추)와 길이 L인 막대로 구성된 진자를 보여준다. 임계점들의 위치와 유형을 결정하라. 막대의 질량과 공기의 저항은 무시할 수 있다고 가정한다.

Step 1 수학적 모델 설정. θ : 평형위치로부터 반시계방향으로 측정된 변위각

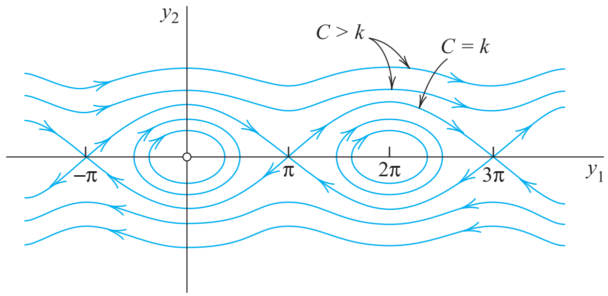
추의 무게 : mg → 추의 운동곡선의 접선방향으로 복원력 : $mg\sin\theta$

*Newton*의 제2법칙 적용 : 복원력은 가속력 $mL\theta''$과 평형

$$\therefore\ mL\theta'' + mg\sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta'' + k\sin\theta = 0 \quad \left(k = \frac{g}{L}\right)$$



(a) 진자



(b) 상평면에서 식 (4)의 해곡선 $y_2(y_1)$

Step 2 임계점 $(0,0)$, $(\pm 2\pi,0)$, $(\pm 4\pi,0)$, $\cdots$, 선형화.

$$\theta'' + k\sin\theta = 0 \xrightarrow{y_1=\theta,\ y_2=\theta' \text{ 로 치환}} \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -k\sin y_1 \end{aligned}$$

$y_2 = 0,\ \sin y_1 = 0 \ \rightarrow$ 임계점 : $(n\pi, 0)$, $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$

임계점 $(0,0)$을 고려

Maclaurin 급수 $\sin y_1 = y_1 - \frac{1}{6}y_1^3 + - \cdots \approx y_1$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y}, \quad \text{따라서} \quad \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -ky_1 \end{aligned}$$

$p = a_{11} + a_{22} = 0,\ q = \det\mathbf{A} = k = \frac{g}{L},\quad \Delta = p^2 - 4q = -4k \quad \Rightarrow$ 임계점 유형 : 안정한 중심

Step 3 임계점 $(\pm\pi,0)$, $(\pm 3\pi,0)$, $(\pm 5\pi,0)$, $\cdots$, 선형화.

임계점 $(\pi,0)$을 고려

$$\theta'' + k\sin\theta = 0 \xrightarrow[\sin\theta = \sin(y_1+\pi) = -\sin y_1 = -y_1 + \frac{1}{6}y_1^3 - + \cdots \approx -y_1]{y_1=\theta-\pi,\ y_2=(\theta-\pi)'=\theta' \text{ 로 치환}} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{bmatrix}\mathbf{y}$$

$p = 0,\ q = -k(<0),\quad \Delta = p^2 - 4q = 4k \quad \Rightarrow$ 임계점 유형 : 안장점(불안정한)

- 상평면에서 **1**계방정식으로의 변환

$$F(y, y', y'') = 0 \xrightarrow[y'' = y_2' = \frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} = \frac{dy_2}{dy_1}y_2]{y = y_1,\ y' = y_2\text{로 치환}} F\left(y_1, y_2, \frac{dy_2}{dy_1}y_2\right) = 0$$

4.6 비제차 선형연립방정식 (Nonhomogeneous Linear Systems of ODEs)

- 비제차 선형연립미분방정식(Nonhomogeneous of Linear Systems) : $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{g}, \quad \mathbf{g}\neq\mathbf{0}$

  $\mathbf{g}(t)$와 행렬 $\mathbf{A}(t)$의 모든 성분은 $t-$축의 어떤 구간 J에서 연속이라고 가정

  일반해 : $\mathbf{y}=\mathbf{y}^{(h)}+\mathbf{y}^{(p)}$

- $\mathbf{y}^{(h)}$: 제차방정식 $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}$ 의 일반해
- $\mathbf{y}^{(p)}$: 비제차방정식의 특수해(임의의 상수를 포함하지 않는해)

- 특수해 $\mathbf{y}^{(p)}$를 구하는 방법
- 미정계수법(Method of Undetermined Coefficients)
- 매개변수변환법(Method of the Variation of Parameter)

- **미정계수법** : 벡터 $\mathbf{g}$의 성분이 t의 거듭제곱, 지수함수, 사인함수와 코사인함수 등으로 이루어져 있을 때 적합.

■ Ex. 1 비제차 선형연립방정식의 일반해를 구하라.

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

제차연립방정식의 일반해 : $\mathbf{y}^{(h)} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$

미정계수법에 의하여 비제차연립방정식의 특수해 구하기

$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{v}e^{-2t}$ 라 하면 $\left(\mathbf{y}^{(p)}\right)' = \mathbf{u}e^{-2t} - 2\mathbf{u}te^{-2t} - 2\mathbf{v}e^{-2t} = \mathbf{A}\mathbf{u}te^{-2t} + \mathbf{A}\mathbf{v}e^{-2t} + \mathbf{g}$

te^{-2t} 항의 계수 : $-2\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(a$: 임의의 상수$)$

e^{-2t}항의 계수 : $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = -2,\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k \\ k+4 \end{bmatrix}$ $(k = 0$ 으로 선택 $)$

일반해 : $\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

- 매개변수변환법

: $t-$ 축의 어떤 구간 J 상에서 제차연립미분방정식의 일반해

$\mathbf{y}^{(h)} = c_1\mathbf{y}^{(1)} + \cdots + c_n\mathbf{y}^{(n)}$ 를 이미 알고 있을 때, 이 일반해를 이용하여 방정식의 한 특수해를 찾아내는 방법

제차연립방정식의 일반해 : $\mathbf{y}^{(h)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c} \quad (\therefore\ \mathbf{Y}' = \mathbf{A}\mathbf{Y})$

비제차연립방정식의 특수해를 $\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{u}(t)$ 라 하자.

$$\left(\mathbf{y}^{(p)}\right)' = \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}'\mathbf{u} + \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{Y}\mathbf{u} + \mathbf{g}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{Y}\mathbf{u}' = \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tilde{t})\mathbf{g}(\tilde{t})\,d\tilde{t}$$

■ Ex. 2 예제 1을 매개변수변환법을 이용하여 풀어라.

$$\mathbf{y}^{(h)} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c}$$

$$\mathbf{Y}^{-1} = \frac{1}{-2e^{-6t}} \begin{bmatrix} -e^{-4t} & -e^{-4t} \\ -e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{g} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t} \\ e^{4t} & -e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6e^{-2t} \\ 2e^{-2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -8e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \int_0^t \begin{bmatrix} -2 \\ -4e^{2\tilde{t}} \end{bmatrix} d\tilde{t} = \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^{(p)} = \mathbf{Y}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-4t} \\ e^{-2t} & -e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2t \\ -2e^{2t} + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2te^{-2t} - 2e^{-2t} + 2e^{-4t} \\ -2te^{-2t} + 2e^{-2t} - 2e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t - 2 \\ -2t + 2 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

$$\therefore\ y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^{-2t} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$