Ch. 2 2계 선형상미분방정식

(Second-Order Linear ODEs)

- 자주 접하게 될 공학문제들의 상당수가 2계 미분방정식으로 표현된다.

  : 기계적 진동 문제, RLC 전기회로, Laplace 방정식, 열전도 방정식, 파동 방정식 등

- 내용 : 2계 선형미분방정식의 해법(제차, 비제차)

2.1 2계 제차 선형상미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs of Second Order)

- **2계 선형상미분방정식** : $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$
- 표준형 (**Standar Form**) : y''을 첫 번째 항으로 갖는 식
  - 제차 (**Homogeneous**) : $r(x)=0$
  - 비제차 (**Nonhomogeneous**) : $r(x)\neq 0$

● **제차 선형상미분방정식** : 중첩의 원리 또는 선형성의 원리

● **제차 선형상미분방정식에 대한 기본 정리**

제차 선형미분방정식에 대해, 어떤 열린구간 I 에서 두 개의 해의 일차결합은 다시 구간 I 에서 다시 제차 선형미분방정식의 해가 된다. 특히, 그러한 방정식에 대해서 해들의 합과 상수곱도 다시 해가 된다.

❖ 단, 이 정리는 비제차 선형방정식 또는 비선형 방정식에서는 성립하지 않는다.

■ Ex.2 비제차 선형상미분방정식 $y''+y=1$ 의 해에 대하여 생각하자.

함수 $y=1+\cos x$ 와 $y=1+\sin x$ 는 위의 방정식의 해이지만, 이들의 합은 해가 아니다.

예를 들어 $2(1+\cos x)$ 나 $5(1+\sin x)$ 도 해가 아니다.

■ Ex.3 비선형상미분방정식 $y''y-xy'=0$ 의 해에 대하여 생각하자.

함수 $y=x^2$ 와 $y=1$ 는 위의 방정식의 해이지만, 이들의 합은 해가 아니다.

예를 들어 $-x^2$ 도 해가 아니다.

초기값 문제

- 초기 조건 (Initial Conditions) : $y(x_0) = K_0, \quad y'(x_0) = K_1$
- 초기값 문제(Initial Value Problems)

  : 제차 선형상미분방정식과 두 개의 초기조건으로 구성

■ Ex.4 다음 방정식의 초기값 문제를 풀어라.

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 3.0, \quad y'(0) = -0.5$$

Step 1 일반해를 구함(Ex.1에 의하여)

일반해 : $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

Step 2 초기조건 적용 : $y(0) = c_1 = 3.0, \quad y'(0) = c_2 = -0.5 \quad (\because\ y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x)$

특수해 : $y = 3.0 \cos x - 0.5 \sin x$

- **일반해(General Solution)** : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

  구간 I에서 비례하지 않는 제차방정식의 해 y_1, y_2와 임의의 상수 c_1, c_2 을 갖는 해이다.

- **특수해(Particular Solution)** : 일반해의 기본형태에서 c_1, c_2에 특정한 값을 지정하면, 구간 I에서 제차방정식의 특수해(particular solution)가 얻어진다.

- **기저(Basis of Solution)** : y_1, y_2 를 구간 I 에서의 제차방정식의 기저(Basis) 또는 기본계 (Fundamental System)이라고 함.

- **일차독립(Linearly Independent)** : 구간I 에서 $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$ 일 때 , $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ 이 된다면 두 함수 와 를 구간 에서 일차 독립(Linearly Independent)이라고 한다.

- **일차종속(Linearly Dependent)** : 적어도 하나가 0이 아닌 상수 k_1, k_2에 대하여 식 $k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0$ 이 성립한다면, 이 함수들을 일차 종속(Linearly Dependent)이라고 부른다

● 차수축소법(Method of Reduction of Order)

: 한 개의 해를 알고 있을 때 1계의 미분방정식으로부터 y_2 를 구할 수 있다.

제차 선형상미분방정식 : $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

$$y=y_2=uy_1 \quad \Rightarrow \quad y'=y_2'=u'y_1+uy_1' \quad \Rightarrow \quad y''=y_2''=u''y_1+2u'y_1'+uy_1''$$

$$\Rightarrow \quad (u''y_1+2u'y_1'+uy_1'')+p(u'y_1+uy_1')+quy_1=0$$ (주어진 미분방정식에 대입)

$$\Rightarrow \quad u''y_1+u'(2y_1'+py_1)+u(y_1''+py_1'+qy_1)=0$$

$$\Rightarrow \quad u''+u'\frac{2y_1'+py_1}{y_1}=0 \quad \because \; y_1''+py_1'+qy_1=0$$

$$U=u', \quad U'=u'' \quad \Rightarrow \quad U'+\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)U=0$$ (변수분리형)

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{U}=-\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|U|=-2\ln|y_1|-\int p\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \; U=\frac{1}{{y_1}^2}e^{-\int p\,dx}, \quad y_2=uy_1=y_1\int U\,dx$$

■ Ex. 7 다음 상미분방정식의 해의 기저를 구하라.

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0$$

첫 번째 해 : $y_1 = x$

차수축소법 적용

$$p=-\frac{x}{x^2-x}=-\frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad U=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p dx}=\frac{1}{x^2}e^{\int \frac{1}{x-1}dx}=\frac{1}{x^2}e^{\ln|x-1|}=\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad y_2=y_1\int U dx = x\int \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}dx = x\left(\ln|x|+\frac{1}{x}\right)=x\ln|x|+1$$

2.2 상수계수를 갖는 제차 선형상미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients)

- 상수계수를 갖는 2계 제차 선형상미분방정식 : $y''+ay'+by=0$
- 특성방정식(Characteristic Equation 또는 보조방정식, Auxiliary Eqaution) : $\lambda^2+a\lambda+b=0$
- 일반해

  특성방정식 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 에서

- **경우 1** $a^2-4b>0$이면 서로 다른 두 실근 λ_1, λ_2 $\Rightarrow$ 일반해 : $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$
- **경우 2** $a^2-4b=0$이라면 실 이중근 $\lambda=-a/2$ $\Rightarrow$ 일반해 : $y=(c_1+c_2x)e^{-ax/2}$
- **경우 3** $a^2-4b<0$이라면 공액복소근 $\lambda=-a/2\pm i\omega$

  $\Rightarrow$ 일반해 : $y=e^{-ax/2}(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$

■ Ex. 5 다음의 초기값 무제를 풀어라.

$$y''+0.4y'+9.04y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=3$$

Step 1 일반해

특성방정식 $\lambda^2+0.4\lambda+9.04=0$의 근이 $\lambda=-0.2\pm 3i$이므로

일반해 : $y=e^{-0.2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$

Step 2 특수해

$y'=-0.2e^{-0.2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-0.2x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)$ 이므로

초기조건을 적용 $\Rightarrow$ $y(0)=A=0,\quad y'(0)=-0.2A+3B=3$ $\Rightarrow$ $A=0,\quad B=1$

특수해 : $y=e^{-0.2x}\sin 3x$

❖ Euler 공식 : $e^{it}=\cos t+i\sin t$

$$\lambda=-a/2\pm i\omega \;\Rightarrow\; e^{\lambda x}=e^{-ax/2}(\cos\omega x\pm i\sin\omega x)$$

2.3 미분연산자(Differential Operators)

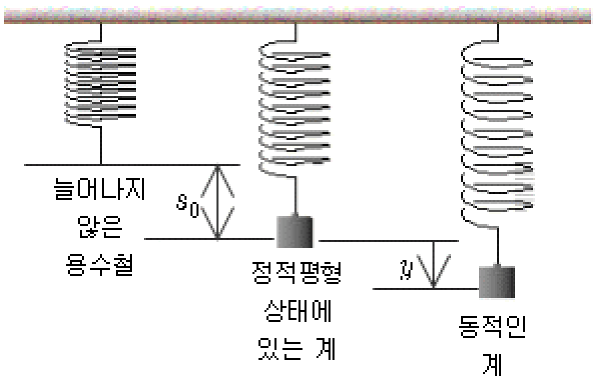
- 연산자(Operators) : 함수를 다른 함수로 변형하는 변환을 의미
- 연산자법(Operational Calculus) : 연산자와 그에 해당하는 기법을 가르친다.
- 미분연산자(Differential Operator) : $Dy = y'$
- 항등연산자(Identity Opterator) : $Iy = y$
- 2계 미분연산자의 도입

$$L = P(D) = D^2 + aD + bI \quad \Rightarrow \quad Ly = P(D)y = y'' + ay' + by$$

2.4 모델화 : 자유진동(질량–용수철 시스템) (Modeling : Free Oscillations(Mass-Spring System))

- 기초적인 역학계인 용수철에 매달린 질량의 운동에 대해 논의한다.
- 계의 모형화(수식화) 및 해를 구하고 운동의 유형에 대해 논의한다.

비감쇠 시스템



역학적 질량 – 용수철 시스템

물리적 법칙

- Newton의 제 2법칙 : 질량 ×가속도 = 힘
- Hook의 법칙 : 용수철에 작용하는 힘은 용수철의 길이의 변화에 비례한다

모델화

- 정적 평형 상태에 있는 시스템

$F_0 = -ks_0 \quad (k : \text{용수철 상수})$

물체의 무게 : $W = mg$

$$F_0 + W = -ks_0 + mg = 0$$

- 동정인 시스템

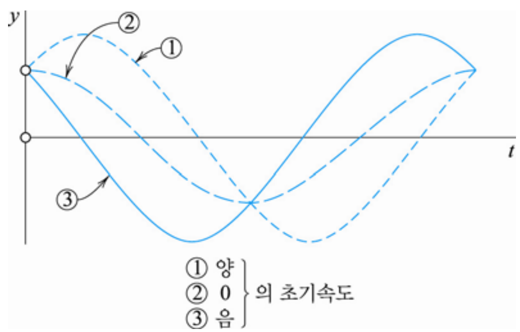
복원력 : $F_1 = -ky$ (Hook의 법칙)

$my'' = F_1$ (Newton의 제 2법칙)

$$my'' + ky = 0$$

조화진동 :

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \delta), \quad \omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$



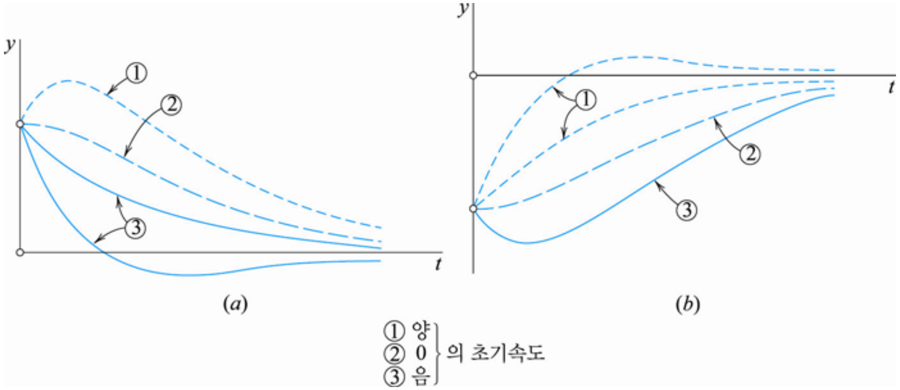
감쇠 시스템

감쇠력 : $F_2 = -cy'$ (c :감쇠 상수(Damping Constant))

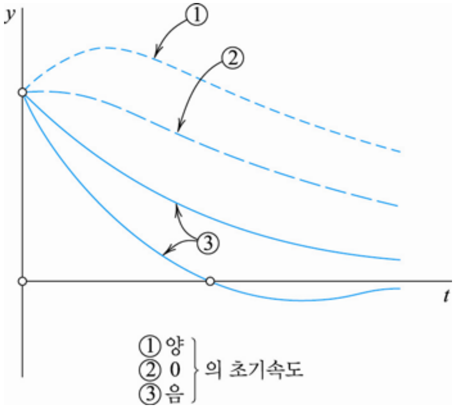
$my'' = F_1 + F_2$ (Newton의 제 2법칙)

$$my'' + cy' + ky = 0$$

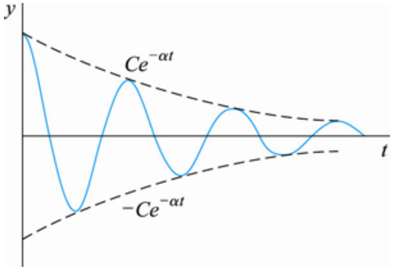
- 과감쇠 $\left(c^2 > 4mk\right)$: $y(t) = c_1 e^{-(\alpha-\beta)t} + c_2 e^{-(\alpha+\beta)t}$, $\alpha = \dfrac{c}{2m}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$



- 임계감쇠 $\left(c^2 = 4mk\right)$: $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}, \quad \alpha = \dfrac{c}{2m}$



- 저감쇠 $\left(c^2 < 4mk\right)$: $y(t) = e^{-\alpha t}\left(A\cos\omega^* t + B\sin\omega^* t\right) = Ce^{-\alpha t}\cos\left(\omega^* t - \delta\right), \quad {\omega_0}^2 = \dfrac{k}{m}$



2.5 오일러-코시 방정식(Euler-Cauchy Equations)

- 오일러-코시 방정식(Euler-Cauchy Equations) : $x^2 y'' + axy' + by = 0$
- 보조방정식 : $m^2 + (a-1)m + b = 0$
- 일반해

보조방정식 $m^2 + (a-1)m + b = 0$에서

- **경우 1** 서로 다른 두 실근 m_1, m_2 $\Rightarrow$ 일반해 : $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$
- **경우 2** 이중근 $m = (1-a)/2$ $\Rightarrow$ 일반해 : $y = (c_1 + c_2 \ln x)x^m$, $m = \frac{1}{2}(1-a)$
- **경우 3** 공액복소근 $m = \mu \pm i\upsilon$ $\Rightarrow$ 일반해 : $y = x^{\mu}[A\cos(\upsilon \ln x) + B\sin(\upsilon \ln x)]$

2.6 해의 존재성과 유일성. Wronskian
(Existence and Uniqueness of Solutions. Wronskian)

- 초기값 문제에 대한 존재성과 유일성 정리

초기값 문제 $y''+p(x)y'+q(x)y=0,\quad y(0)=K_0,\quad y'(0)=K_1$ 에서

$p(x)$ 와 $q(x)$ 가 어떤 열린 구간 I(1.1절 참조)에서 연속함수이고, x_0 가 구간 I 내에

있다면, 초기값 문제는 구간 I에서 유일한 해를 갖는다.

- Wronskian 또는 Wronski 행렬식

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

- 해의 일차종속과 일차독립

상미분방정식이 열린 구간 I에서 연속인 계수 $p(x)$와 $q(x)$를 갖는다고 가정하자. 그러면 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 두 개의 해 y_1, y_2가 구간 I에서 일차종속이 되는 필요충분조건은 그들의 Wronskian이 구간 I내의 어떤 x_0에서 0이 되는 것이다. 더욱이, $x = x_0$에서 $W = 0$이라면, 구간 I에서 $W \equiv 0$이다. 그러므로, 만약 W가 0이 아닌 x_1이 구간 I내에 존재하면, 구간 I에서 y_1, y_2는 일차독립이다.

● 일반해의 존재성

$p(x)$ 와 $q(x)$ 가 어떤 열린 구간 I 에서 연속이면, 제차 선형상미분방정식은 구간 I 에서 일반해를 갖는다.

● 일반해는 모든 해를 포함한다.

제차 선형상미분방정식이 어떤 열린 구간 I에서 연속인 계수 $p(x)$ 와 $q(x)$ 를 갖는다면, 구간 I 에서 제차 선형상미분방정식의 모든 해 $y = Y(x)$ 는

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

의 형태인데, 여기서 y_1, y_2는 구간 I 에서 제차 선형상미분방정식의 해의 어떤 기저를 형성하고, C_1, C_2는 적당한 상수이다.

그러므로, 제차 선형상미분방정식은 특이해(Singular Solution, 즉 일반해로부터 얻을 수 없는 해)를 갖지 않는다.

2.7 비제차 상미분방정식(Nonhomogeneous ODEs)

- 비제차 선형상미분방정식 : $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x), \quad r(x)\neq 0$

- 제차방정식과 비제차방정식의 해 사이의 관계

  - 어떤 열린구간 I 에서 비제차방정식의 두 해의 차는 구간 I 에서 제차방정식의 해이다.

  - 구간 I 에서의 비제차방정식의 해와 구간 I 에서의 제차방정식의 해의 합은 구간 I 에서 비제차방정식의 해이다.

- 일반해 : $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

  여기서 $y_h=c_1y_1+c_2y_2$ 는 구간 I 에서의 제차 상미분방정식의 일반해이고 y_p 는 구간 I 에서의 임의의 상수를 포함하지 않는 비제차방정식의 어떤 해이다.

- 미정계수법(Method of Undetermined Coefficients)
- 표 2.1 미정계수방법

$r(x)$ 의 항	y_p 에 대한 선택
$ke^{\gamma x}$	$Ce^{\gamma x}$
$kx^n \quad (n = 0,\ 1,\ \cdots)$	$K_n x^n + K_{n-1} x^{n-1} + \cdots + K_1 x + K_0$
$k \cos \omega x$	$K \cos \omega x + M \sin \omega x$
$k \sin \omega x$	
$ke^{\alpha x} \cos \omega x$	$e^{\alpha x}\left(K \cos \omega x + M \sin \omega x\right)$
$ke^{\alpha x} \sin \omega x$	

● 미정계수법에 대한 선택규칙

- **기본규칙(Basic Rule)** : 만약 비제차방정식에서 $r(x)$가 미정계수법의 열에 있는 함수 중의 하나라면, 대응하는 함수 y_p를 선택하고, y_p와 그 도함수를 비제차방정식에 도입함으로써 미정계수를 결정한다.

- **변형규칙(Modification Rule) :** 만약 y_p로 선택된 항이 비제차방정식에 대응하는 제차방정식의 해가 된다면, 선택된 y_p에 x(또는 만약 이해가 제차 방정식의 특성 방정식의 이중근에 해당한다면 x^2)를 곱한다.

- **합규칙(Sum Rule) :** 만약 $r(x)$가 첫 번째 열에 있는 함수들의 합이라면,두번째 열의 대응하는 줄에 있는 함수들의 합으로 y_p를 선택한다.

■ Ex. 1 다음의 초기값 문제를 풀어라.

$$y''+y=0.001x^2, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.5$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해

제차 상미분방정식 : $y''+y=0$

일반해 : $y=A\cos x+B\sin x$

Step 2 비제차 상미분방정식의 특수해

$$r(x)=0.001x^2 \quad\Rightarrow\quad y_p=K_2x^2+K_1x+K_0, \quad y_p'=2K_2x+K_1, \quad y_p''=2K_2$$

$$\Rightarrow\quad 2K_2+\left(K_2x^2+K_1x+K_0\right)=0.001x^2$$

$$\Rightarrow\quad K_2=0.001, \quad K_1=0, \quad K_0=-0.002$$

$$\Rightarrow\quad y_p=0.001x^2-0.002$$

$$\Rightarrow\quad y=A\cos x+B\sin x+0.001x^2-0.002$$

Step 3 초기조건 적용

$y'=y_h'+y_p'=-A\sin x+B\cos x+0.02x$ 이므로

$$y(0)=A-0.002=0, \quad y'(0)=B=1.5 \quad\Rightarrow\quad y=0.002\cos x+1.5\sin x+0.001x^2-0.002$$

2.8 모델화 : 강제진동. 공진 (Modeling : Forced Oscillations. Resonance)

- **자유운동**(Free Motion) : 외력이 없는 경우의 운동

  지배방정식 : $my''+cy'+ky=0$

- **강제운동**(Forced Motion) : 외부로부터의 힘이 물체에 작용하는 경우의 운동

  지배방정식 : $my''+cy'+ky=r(t)$

- **입력**이나 **구동력**(Driving Force) : $r(t)$
- **출력** 또는 구동력에 대한 시스템의 **응답**(Response) : $y(t)$

- 주기적인 외력을 포함하는 경우 : $my''+cy'+ky=F_0\cos\omega t$

- 미정계수법에 의한 y_p 결정

$$y_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

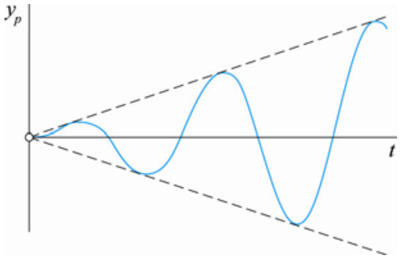
$$a = F_0 \frac{m\left(\omega_0^{\ 2}-\omega^2\right)}{m^2\left(\omega_0^{\ 2}-\omega^2\right)^2+\omega^2c^2}, \quad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2\left(\omega_0^{\ 2}-\omega^2\right)^2+\omega^2c^2}$$

비감쇠 강제진동

$$c = 0 \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)}\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad y = C\cos\left(\omega_0 t - \delta\right) + \frac{F_0}{m\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)}\cos\omega t$$

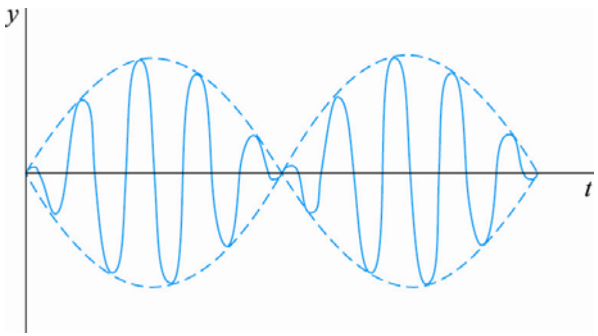
- 이 출력은 두 개의 조화진동의 중첩을 나타낸다.
  - 고유주파수 : $\dfrac{\omega_0}{2\pi}\left[\text{cycles}/\text{sec}\right]$
  - 구동력의 주파수 : $\dfrac{\omega}{2\pi}\left[\text{cycles}/\text{sec}\right]$
- **공진(Resonance)** : 입력주파수와 고유주파수가 정합됨으로써($\omega = \omega_0$) 발생하는 큰 진동의 여기현상

$$y_p = \frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t$$



- 맥놀이(Beats) : 입력주파수와 고유주파수의 차가 적을 때의 강제 비감쇠진동

$$y = \frac{F_0}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right)$$



감쇠강제진동

- **과도해**(Transient Solution) : 비제차 방정식의 일반해(y)
- **정상상태해**(Steady-State Solution) : 비제차 방정식의 특수해(y_p)

❖ 과도해는 정상상태해로 접근한다.

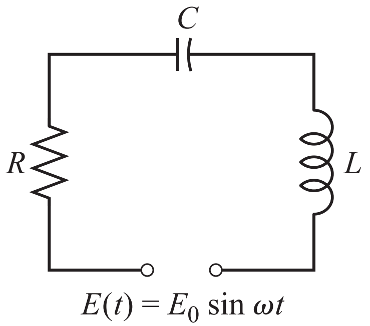
실제적 공진 : 비감쇠의 경우 ω가 ω_0에 접근할 때 y_p 의 진폭이 무한대로 접근하는 반면에, 감쇠의 경우에는 이와 같은 현상은 발생하지 않는다. 이 경우에는 진폭은 항상 유한하나, c에 의존하는 어떤 ω에 대해 최대값을 가질 수 있다.

y_p 의 진폭(ω의 함수로 표현) : $C^*(\omega_{\max}) = \dfrac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^{\,2} - c^2}}$

의미

- $c > 0$일 때 $C^*(\omega_{\max})$는 유한하다는 것을 알 수 있다.
- $c^2 < 2mk$ 일 때 $dC^*(\omega_{\max})/dc < 0$이기 때문에, $C^*(\omega_{\max})$의 값은 c가 감소함에 따라 증가하고 c 가 0에 접근함에 따라 무한대로 접근한다.

2.9 모델화 : 전기회로(Modeling : Electric Circuits)



< 저항, 유도기, 축전기를 이용한 RLC 회로 >

명 칭	심 볼	기 호	단 위	전압강하
음의 저항기		R 음의 저항	옴 (Ω)	RI
인덕터		L 인덕턴스	헨리 (H)	$L\,\dfrac{dI}{dt}$
커패시터		C 커패시턴스	패럿 (F)	Q/C

< RLC 회로의 각 구성요소를 통한 전압강하 >

- Kirchhoff의 **전압법칙**(KVL): 폐루프 위에 부여된 전압(기전력)은 루프의 다른 요소들 양단의 전압 강하의 합과 같다.

- 전압법칙을 적용한 모델화

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{C}\int I dt=E(t) \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E'(t)$$

- $E(t)=E_0\sin\omega t$ 형태의 기전력 : $L\dfrac{d^2I}{dt^2}+R\dfrac{dI}{dt}+\dfrac{1}{C}I=E_0\omega\cos\omega t$

$$I_p=a\cos\omega t+b\sin\omega t=I_0\sin(\omega t-\theta)$$

$$a=\frac{-E_0S}{R^2+S^2},\quad b=\frac{-E_0R}{R^2+S^2},\qquad I_0=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+S^2}},\quad \tan\theta=-\frac{a}{b}=\frac{S}{R}$$

  - 리액턴스(Reactance) : $S=\omega L-\dfrac{1}{\omega C}$

  - 임피던스(Impedance) : $\sqrt{R^2+S^2}=\dfrac{E_0}{I_0}$

전기량과 역학량의 상사성

- 완전히 다른 물리적 시스템이나 서로 다른 시스템이 같은 수학적인 모델을 가질 수 있다.
- 상사성의 실제적 중요성 : 전기회로를 조립하기 쉽고, 전기적인 양은 기계적인 것에 비하여 훨씬 빠르고 정확하게 측정될 수 있다.

전기 시스템	역학 시스템
인덕턴스 L	질량 m
저항 R	감쇠계수 c
커패시턴스의 역수 $1/C$	용수철 상수 k
기전력의 미분값 $E_0 \omega \cos \omega t$	구동력 $F_0 \cos \omega t$
전류 $I(t)$	변위 $y(t)$

< 전기량과 역학량의 상사성 >

2.10 매개변수의 변환에 의한 풀이 (Solution by Variation of Parameters)

- 매개변수 변환법(Method of Variation of Parameter)
  - 매개변수 변환법은 단지 특별한 우변을 가지는 상계수 방정식에만 적용된다.
  - 일반적이나 복잡하다.
  - 어떤 구간 I 에서 연속인 임의의 변수 $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$을 갖는 미분방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ 에 적용된다
  - 반드시 표준형으로 쓰여진 미분방정식에 적용한다. 만약 방정식이 $f(x)y''$ 으로 시작한다면 $f(x)$ 로 나누어라.

- 공식 : $y_p(x)=-y_1\int\frac{y_2 r}{W}dx+y_2\int\frac{y_1 r}{W}dx$

■ Ex. 1 다음의 비제차 상미분방정식을 풀어라.

$$y''+y=\sec x$$

제차 상미분방정식의 해의 기저 : $y_1=\cos x,\quad y_2=\sin x$

Wronskian : $W(y_1,y_2)=\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)=1$

매개변수변환법 적용

$$y_p=-\cos x\int \sin x\sec x dx+\sin x\int \cos x\sec x dx=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$$

일반해 : $y=y_h+y_p=(c_1+\ln|\cos x|)\cos x+(c_2+x)\sin x$

방법상의 아이디어

- 제차상미분방정식의 일반해 : $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- 비제차상미분방정식의 특수해 : $y_p = u(x) y_1 + v(x) y_2$

$\Rightarrow$ 주어진 비제차상미분방정식에 대입

- 조건 : $u' y_1 + v' y_2 = 0$
- 정리하여 얻어진 식 : $u' y_1' + v' y_2' = r(x)$

$$\Rightarrow \quad u' = -\frac{y_2 r}{W}, \quad v' = \frac{y_1 r}{W} \quad \Rightarrow \quad u = -\int \frac{y_2 r}{W} dx, \quad v = \int \frac{y_1 r}{W} dx$$