Ch. 3 고계 선형상미분방정식

(Higher Order Linear ODEs)

- 2계 선형상미분방정식에 대한 개념과 방법을 고계선형상미분방정식으로 확장

3.1 제차 선형상미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs)

- n계 상미분방정식 : $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$
- n계 선형상미분방정식 : $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x)$
- 표준형(Standard Form) : $y^{(n)}$을 첫 번째 항으로 갖는 식
  - 제차(Homogeneous) : $r(x) = 0$
  - 비제차(Nonhomogeneous) : $r(x) \neq 0$

● 중첩의 원리 또는 선형성의 원리

● 제차 선형상미분방정식에 대한 기본 정리

제차 선형미분방정식에 대해 어떤 열린 구간 I 에서 해들의 합과 상수곱은 다시 구간 I 에서 다시 제차 선형미분방정식의 해가 된다. (이것은 비제차 선형방정식 또는 비선형 방정식에서는 성립하지 않는다.)

● 일반해(General Solution)의 형태 : $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$

● 기저(Basis of Solution) : $y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x)$

● 특수해(Particular Solution) : n개의 상수 $c_1,\ \cdots,\ c_n$에 특정한 값을 부여하면, 구간 I 에서 제차방정식의 특수해(particular solution)를 얻는다.

- 일차독립**(**Linearly Independent**)**

  : $k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$ 일 때 , n개의 함수 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$에 대해 이들 함수가 정의된 어떤 구간에서 방정식이 모두 $k_1 = \cdots = k_n = 0$이 됨을 의미

- 일차종속**(**Linearly Dependent**)**

  : 방정식 $k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$이 구간에서 적어도 하나의 0이 아닌 상수 $k_1, \cdots, k_n$에 대하여도 성립함

- 초기값 문제

  : 제차 선형상미분방정식과 n개의 초기조건으로 구성

- 초기값 문제에 대한 존재성과 유일성 정리

  $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I에서 연속함수이고, x_0가 구간 I 내에 있다면, 초기값 문제는 구간 I에서 유일한 해를 갖는다

● Wronskian 또는 Wronski 행렬식

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

● 해의 일차종속과 일차독립

상미분방정식의 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I 에서 연속이라고 가정하자. 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 n개의 해 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$가 구간 I 에서 일차종속이 되는 필요충분조건은 그들의 Wronskian이 구간 I 내의 어떤 $x = x_0$에서 0이 되는 것이다. 더욱이, $x = x_0$ 에서 $W = 0$이라면, 구간 I 에서 $W \equiv 0$이다. 그러므로, 만약 W 가 0이 아닌 x_1이 구간 I 내에 존재하면, 구간 I 에서 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$는 일차독립이고, 이 해들은 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 해들의 기저를 형성한다.

● 일반해의 존재성

제차 선형상미분방정식의 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I에서 연속이면, 제차 선형상미분방정식은 구간 I에서 일반해를 갖는다.

● 일반해는 모든 해를 포함한다.

제차 선형상미분방정식이 어떤 열린 구간 I 에서 연속인 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ 를 갖는다고 하면, 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 모든 해 $y = Y(x)$는

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

의 형태인데, 여기서 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 는 구간 I에서 제차 선형상미분방정식의 해의 어떤 기저이고, $C_1, \cdots, C_n$는 적당한 상수이다.

3.2 상수계수를 갖는 제차 선형상미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients)

- 상수계수를 갖는 n계 제차 선형상미분방정식 : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$
- 특성방정식 : $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

● 일반해

특성방정식 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$ 이

- 서로 다른 실근

$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 이 서로 다른 것이면, 이에 대응하는 m 개의 일차독립인 해 : $y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ \cdots, \ y_n = e^{\lambda_n x}$

- 단순 복소근

공액쌍($\lambda = \gamma \pm i\omega$)으로 나타남.

이에 대응하는 두 개의 일차독립인 해 : $y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x, \ y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x$

- 다중 실근을 가질 때,

λ 가 m차 실근이면, 이에 대응하는 m 개의 일차독립인 해 : $e^{\lambda x}, \ xe^{\lambda x}, \ x^2 e^{\lambda x}, \cdots, \ x^{m-1}e^{\lambda x}$

- 다중 복소근

$\lambda = \gamma \pm i\omega$ 이 복소이중근이면,

이에 대응하는 일차독립인 해 : $e^{\gamma x}\cos\omega x, \ e^{\gamma x}\sin\omega x, \ xe^{\gamma x}\cos\omega x, \ xe^{\gamma x}\sin\omega x$

3.3 비제차 선형 상미분방정식(Nonhomogeneous Linear ODEs)

- n계 비제차 선형상미분방정식 : $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=r(x), \quad r(x)\neq 0$
- 일반해 : $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

여기서 $y_h=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$는 구간 I에서의 제차 상미분방정식의 일반해이고 y_p는 구간 I에서의 임의의 상수를 포함하지 않는 비제차방정식의 어떤 해이다.

- 특수해 결정
  - 미정계수법
  - 매개변수변환법

$$y_p(x)=y_1(x)\int\frac{W_1(x)}{W(x)}r(x)dx+\cdots+y_n(x)\int\frac{W_n(x)}{W(x)}r(x)dx$$

$W_j\ (j=1,\cdots,n)$는 W의 j번째 열을 열벡터 $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T$로 치환하여 얻는다.

■ Ex. 2 다음 비제차 오일러-코시 방정식을 풀어라.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해

보조방정식 : $m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1,2,3$

일반해 : $y_h = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

Step 2 매개변수변환법에 적용되는 행렬식

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

Step 3 적분

$$y_p = x\int \frac{x}{2} x \ln x dx - x^2 \int x \ln x dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x dx = \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$

$$\therefore \; y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$