Ch. 9 벡터미분법. 기울기, 발산, 회전 (Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl)

- 벡터미분학은 고체역학, 유체의 흐름, 열전도, 정전기학 등에서 유용한 도구.
- 벡터함수와 벡터장이 항공기, 레이저 발생기, 열역학 시스템, 또는 로봇과 같은 시스템의 기본.
- 내용 : 벡터의 기본적인 연산, 벡터미분, 곡선상으로의 응용

9.1 2차 및 3차원 공간에서의 벡터 (Vectors in 2-Space and 3-Space)

- **스칼라(Scalar)** : 적당한 척도를 단위로 하여 그것의 크기에 의하여 결정되는 양

  Ex. 길이, 온도, 전압

- **벡터(Vector)** : 크기와 방향에 의하여 결정되는 양

  Ex. 힘, 속도

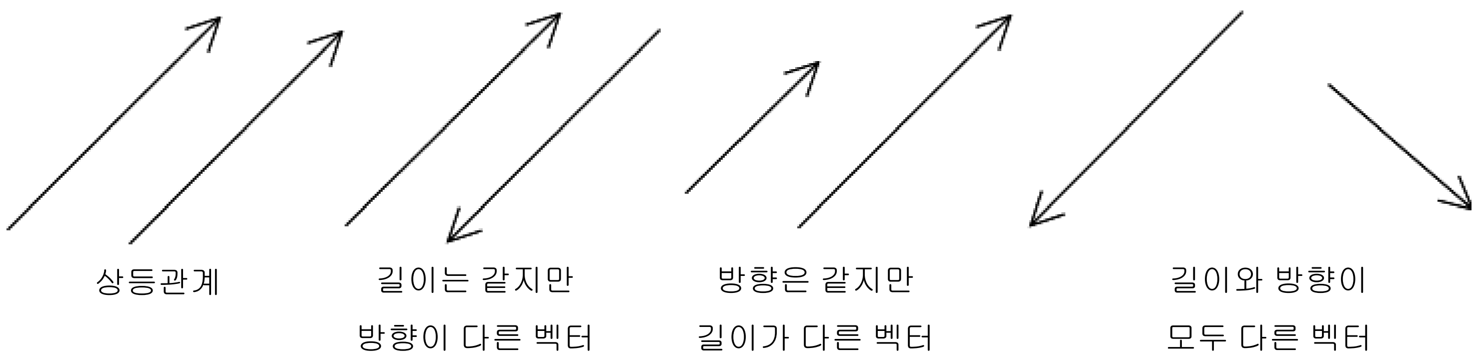
- 벡터의 표시: 방향성분(Directed Line Segment)을 포함하는 화살표로 표기
- $|\mathbf{a}|$:벡터 의 길이(또는 크기) 또는 노름(유클리드 노름)
- 길이가 1인 벡터를 **단위벡터**(Unit Vector)라 함

● 두 벡터의 상등

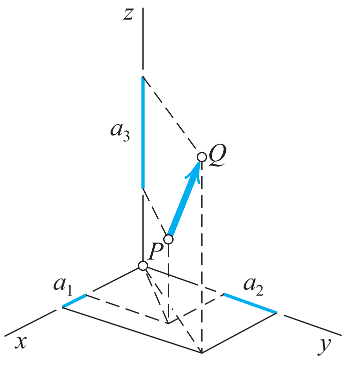
두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$가 같다. $\Rightarrow$ 두 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$의 방향과 길이가 같다.

$\Rightarrow$ 평행이동한 벡터는 본래의 벡터와 상등이다.

● 두 벡터 사이의 관계



● 벡터의 성분



x, y, z 직교좌표계(Cartesian Coordinate System)에서

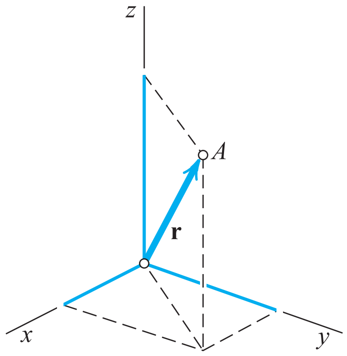
시작점 $P{:}(x_1, y_1, z_1)$와 끝점 $Q{:}(x_2, y_2, z_2)$을 갖는 벡터 **a**의 성분

$\Rightarrow$ 세 개의 좌표상의 차이

$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3]$$

피타고라스의 정리와 성분 $\Rightarrow$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$

● 위치벡터(**Position Vector**)



직교좌표계에서 점 $A{:}(x, y, z)$의 **위치벡터**(Position Vector) **r**

$\Rightarrow$ 시작점이 원점이고 끝점이 A인 벡터

순서를 갖는 실수로 된 삼중수로서의 벡터

- 고정된 직교좌표가 주어지면 각 벡터는 해당하는 성분으로 된 순서를 갖는 삼중수로 유일하게 결정된다.
- 실수로 이루어진 순서를 갖는 삼중수에 대하여 정확하게 한 개의 벡터가 대응된다.
- 원점은 방향이 없고 길이가 영인 **영벡터**(Zero Vector)에 대응된다.

두 벡터의 합

두 벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$와 $\mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$의 합 $\Rightarrow\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=[a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3]$

스칼라곱(실수에 의한 곱)

임의의 스칼라 c(여기서 c는 실수),벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$에 대하여 스칼라곱

$$\Rightarrow\quad c\mathbf{a}=[ca_1,\ ca_2,\ ca_3]$$

- 벡터합의 기본성질

$(a)\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (교환법칙)

$(b)\quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (결합법칙)

$(c)\quad \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$

$(d)\quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

- 스칼라곱의 기본성질

$(a)\quad c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$

$(b)\quad (c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$

$(c)\quad c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$

$(d)\quad 1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

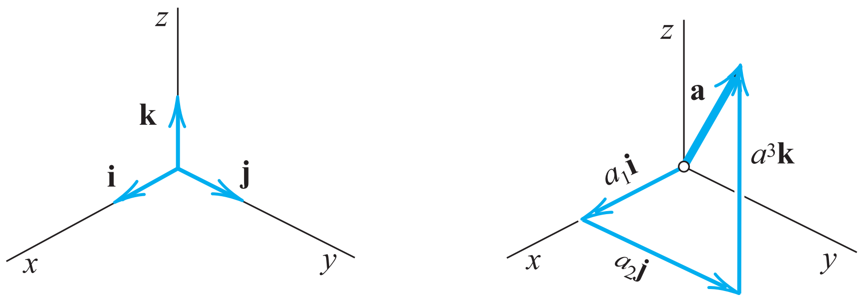
벡터합과 스칼라곱의 기본성질에 의하여

$(a)\quad 0\mathbf{a}=\mathbf{0}$

$(b)\quad (-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$

- 단위벡터 **i, j, k** : 직계좌표계에서 각 축의 양의 방향에 놓인 단위벡터

$$\mathbf{i}=[1,\ 0,\ 0],\ \mathbf{j}=[0,\ 1,\ 0],\ \mathbf{k}=[0,\ 0,\ 1] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$$



- 벡터공간 R^3 $\Rightarrow$ 일차독립인 벡터의 최대수 $=3$ $\Rightarrow$ 3차원

$\Rightarrow$ 일차독립인 세 벡터 $\Rightarrow$ R^3 의 기저 (Basis)

$\Rightarrow$ **i, j, k** : 표준기저(Standard Basis)

9.2 내적(점곱)(Inner Product(Dot Product))

● 벡터의 내적 $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$

: 두 벡터의 **내적**(Inner Product)또는 **점곱**(Dot Product)는 두 벡터의 길이와 두 벡터가 이루는 사잇각의 코사인 값의 곱이다.

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma & (\mathbf{a} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}) \\ 0 & (\mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ 또는 } \mathbf{b} = \mathbf{0}) \end{cases}$$

- 성분에 의한 내적의 표기

$$\mathbf{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b} = [b_1,\ b_2,\ b_3] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0 \quad \Rightarrow$ 벡터 $\mathbf{a}$와 벡터 $\mathbf{b}$는 **직교**(Orthogonal) $\Rightarrow$ $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 직교벡터
- 영벡터는 모든 벡터에 직교

- 직교성

영벡터가 아닌 두 벡터 내적이 영이 될 필요충분조건은 두 벡터가 서로 직교하는 것이다.

- 길이와 각도

- $\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0^\circ \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$
- $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}}}$

내적의 일반적 성질

임의의 벡터 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$와 스칼라(실수) q_1, q_2에 대하여

1. $[q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}] \bullet \mathbf{c} = q_1\mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + q_2\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$ (선형성)

2. $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$ (대칭성)

3. $\begin{cases} \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \geq 0 & \\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 0 & (\mathbf{a} = \mathbf{0}\text{일 때}) \end{cases}$ (양의 성질)

4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$ (분배법칙)

5. $|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ (Schwarz 부등식)

6. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (삼각부등식)

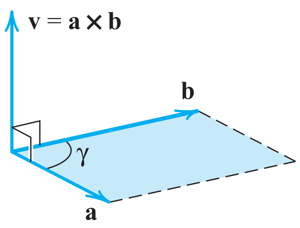
7. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\left(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2\right)$ (평행사변형 등식)

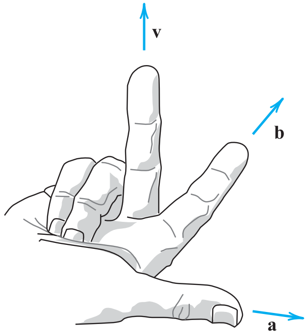
9.3 외적(벡터곱)(Vector Product(Cross Product))

● 벡터의 외적 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 같은 방향 또는 반대 방향이거나, 두 벡터 중 하나가 영벡터 : $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$
- 그 이외의 경우

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{cases} \text{크기 : } |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma \\ \text{방향 : 오른손 법칙에 의하여 결정(} \mathbf{a},\mathbf{b}\text{와 동시에 수직인 벡터)} \end{cases}$$





❖ 성분에 의한 내적의 표기

$$\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3] \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=[a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1]$$

벡터곱의 일반 성질

1. $(l\mathbf{a})\times\mathbf{b} = l(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(l\mathbf{b})$

2. $(a)\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$
   $(b)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (분배법칙을 만족)

3. $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (교환법칙을 만족하지 않고 반교환법칙(Anticommutative)을 만족)

4. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (결합법칙을 만족하지 않음)

● 스칼라 삼중적

세 벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$, $\mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$, $\mathbf{c}=[c_1,\ c_2,\ c_3]$의 스칼라 삼중적(Scalar Triple Product)

$$:\quad (\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

● 삼중적의 성질과 응용

- 내적연산과 외적연산을 서로 바꾸어도 불변이다.

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$$

- 기하학적 해석(Geometric Interpretation)

  절대값 $|(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})|$는 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 의하여 결정되는 평행육면체의 체적이다.

- 일차독립성(Linear Independence)

  R^3공간상의 세 벡터가 일차독립일 필요충분조건은 이 벡터들의 스칼라 삼중적이

  영이 아닌것이다.

9.4 벡터함수와 스칼라함수. 장(Field). 도함수 (Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives)

- 임의의 점 P에서의 **벡터함수**(Vector Function) : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P),\ v_2(P),\ v_3(P)]$
- 임의의 점 P에서의 스칼라함수(Scalar Function) : $f = f(P)$
- 함수의 정의역 ⇒ 공간내의 영역: 3차원 공간, 곡면, 곡선
- **벡터장**(Vector Field) ⇒ 주어진 영역에서의 벡터함수: 곡면, 곡선
- **스칼라장**(Scalar Field) ⇒ 주어진 영역에서의 스칼라함수: 온도장, 기압장
- 벡터함수와 스칼라함수의 기호 표기

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = [v_1(x,\ y,\ z),\ v_2(x,\ y,\ z),\ v_3(x,\ y,\ z)]$$

● 수렴(Convergence)

- 벡터열 $\mathbf{a}_{(n)}$은 수렴(Converge)한다

  : 무한수열 $\mathbf{a}_{(n)}, n = 1, 2, \cdots$에 대하여 한 벡터 $\mathbf{a}$가 존재하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{a}_{(n)} - \mathbf{a}\right| = 0$이 성립할때

  극한벡터(Limit Vector) : $\mathbf{a} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{a}_{(n)}$

- $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t) = \mathbf{l}$ (벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 t가 t_0로 접근할 때 극한 $\mathbf{l}$을 갖는다.)

  $\Leftrightarrow$ t_0부근(t_0는 제외되어도 무방함)에서 정의된 실변수 t의 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$에 대하여

  $\lim_{t\to t_0}\left|\mathbf{v}(t) - \mathbf{l}\right| = 0$이 성립

● 연속성

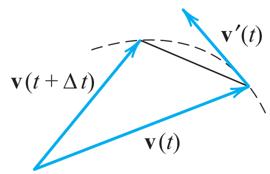
- 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 $t = t_0$에서 연속(Continuous)이다

  $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}(t)$가 t_0부근(t_0자신을 포함하여도 무방함)에서 정의되고 $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0)$을 만족

- $\mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$가 t_0에서 연속 $\Leftrightarrow$ 성분함수 $v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)$가 t_0에서 연속

벡터함수의 도함수

벡터함수 $\mathbf{v}(t)$가 t에서 미분가능(Differentiable) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$ 가 수렴



$\mathbf{v}'(t) = [v_1'(t),\ v_2'(t),\ v_3'(t)] : \mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$의 도함수

벡터미분공식

1. $(c\mathbf{v})' = c\mathbf{v}'$ (c는 상수)

2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$

3. $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}'$

4. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$

5. $(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})' = (\mathbf{u}'\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}'\ \ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}')$

- 벡터함수의 편도함수

$$\mathbf{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_l} = \frac{\partial v_1}{\partial t_l}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_l}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_l}\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{k}$$

9.5 곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림 (Curves. Arc Length. Curvature. Torsion)

- 미분기하학(Differential Geometry) : 공간곡선이나 곡면을 연구하는 학문

  상대성이론, 항곡, 지리학, 측지학, 기존 공학설계 및 컴퓨터를 이용한 설계, 역학 등의 분야에서 중요한 역할을 한다.

- 매개변수표현법(Parametric Representation)

  공간에서 움직이는 물체의 경로인 곡선을 표현

  : $\mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

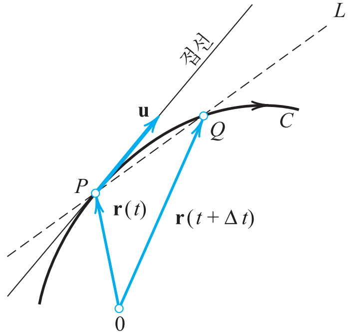
  $\mathbf{r}'(t)$: 공간곡선 상의 임의의 점에서의 접선벡터(Tangent Vector)

곡선의 접선

- 곡선 C위의 한 점 P에서의 **접선(Tangent Line)**

  $\Rightarrow$ 점 P에 근접한곡선 C상의 점 Q에대해 P, Q를 지나는 직선 L의 극한

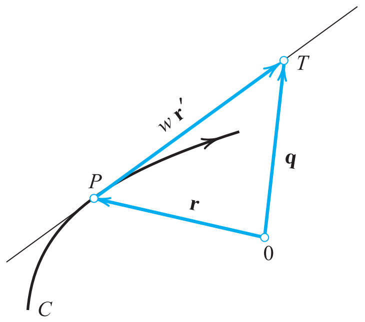
$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)\right]$$



- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(t)$:점 P에서의 곡선C의 접선 벡터

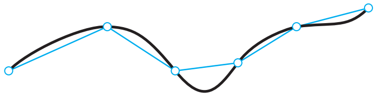
  $\Rightarrow \quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'$:곡선$C$의 단위 접선 벡터

- 점 P에서의 곡선C의 접선 벡터방정식 : $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}'$



● 곡선의 길이

C의 길이 : $l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}' \bullet \mathbf{r}'}\, dt \quad \left(\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \right)$



● 곡선에서의 호의 길이

호의 길이 : $s(t) = \int_a^t \sqrt{\mathbf{r}' \bullet \mathbf{r}'}\, d\tilde{t} \quad \left(\mathbf{r}' = \dfrac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}} \right)$

$$* \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = d\mathbf{r} \bullet d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

* 매개변수로서의 호의 길이

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}' \xrightarrow{\text{변수}\,t\text{ 대신 }s\text{를 사용}} \mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s) : \text{단위벡터}$$

- 역학에서의 곡선. 속도와 가속도
  - $\mathbf{r}(t)$:움직이는 물체의 경로 C
  - $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$: 곡선 C의 접선벡터인 속도벡터(Velocity Vector)
  - $\mathbf{a}(t)=\mathbf{v}'(t)=\mathbf{r}''(t)$: 속도의 도함수인 가속도벡터(Acceleration)
- 접선가속도와 법선가속도 $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{\tan}+\mathbf{a}_{\text{norm}}$
  - 접선가속도 벡터(**Tangential Acceleration Vector**) : 경로와 접선방향 $\mathbf{a}_{\tan}$
  - 법선가속도 벡터(**Normal Acceleration Vector**) : 경로와 수직방향 $\mathbf{a}_{\text{norm}}$

$$* \ \mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt},\quad \mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

$\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}$는 $\mathbf{u}(s)$에 수직 $\Rightarrow$ $\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$: 법선가속도벡터, $\mathbf{u}(s)\dfrac{d^2s}{dt^2}$: 접선가속도벡터

$$* \ \mathbf{a}_{\tan}=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\mathbf{v},\quad \mathbf{a}_{\text{norm}}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\tan}$$

● 곡선의 곡률과 비틀림

- $\mathbf{r}(s)$로 표현되는 곡선 C의 P점에서의 **곡률**(Curvature) $\kappa(s)$

  : P점에서의 단위접선벡터 $\mathbf{u}(s)$의 변화율

  $$\kappa(s)=|\mathbf{u}'(s)|=|\mathbf{r}''(s)| \quad \left({}'= d/ds\right)$$

- C상의 P점에서의 **비틀림**(Torsion) $\tau(s)$

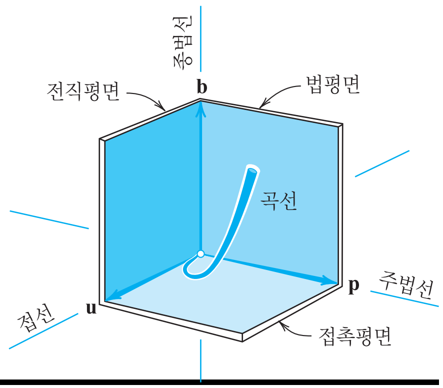
  : 접촉평면(Osculating Plane)(벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{u}'$에 의해 구성된 평면)의 C상의 P점에서의 변화율

  P점에서 곡선C가 평면에서의 이탈정도

  $$|\tau(s)|=|\mathbf{b}'(s)|,\ \tau(s)=-\mathbf{p}(s)\bullet\mathbf{b}'(s)$$

  $\mathbf{p}=\left(1/\kappa\right)\mathbf{u}'$: 단위주법선벡터(Unit Principal Normal Vector)

  $\mathbf{b}=\mathbf{u}\times\left(1/\kappa\right)\mathbf{u}'=\mathbf{u}\times\mathbf{p}\mathbf{b}'$: 단위종법선벡터(Unit Binormal Vector)

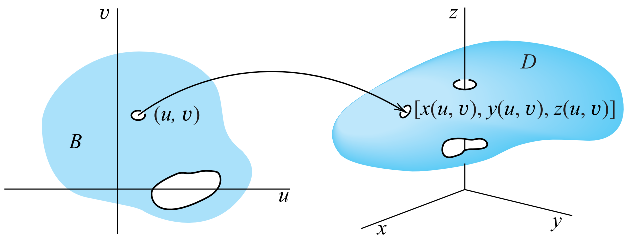


9.6 미적분학의 복습 : 다변수함수 (Calculus Review : Functions of Several Variables)

- 연쇄법칙

$$w = f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



평균값의 정리(Mean Value Theorem)

함수 $f(x,y,z)$가 xyz공간 내의 정의역 D에서 연속이고, 연속인 1차 편도함수를갖는다.

두 점 $P_0:(x_0,y_0,z_0)$, $P:(x_0+h,y_0+k,z_0+l)$이 D에 속해 있고, 이 두 점을 연결한 선분

P_0P 또한 D에 속해 있다. 그러면 선분 P_0P상에 임의의 점에서 편미분값들은

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)-f(x_0,y_0,z_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}$$

을 만족한다.

9.7 스칼라장의 기울기. 방향도함수 (Gradient of a Scalar Field. Directional Derivative)

- 기울기(Gradient)

: $f(x, y, z)$의 x, y, z각 방향으로의 길이(거리)에 대한 변화율(기울기)의 벡터합

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

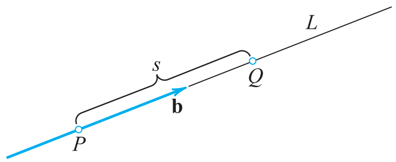
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

방향도함수

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

: 공간상의 P점에서의 벡터 $\mathbf{b}$방향으로의 함수 $f(x, y, z)$의 방향도함수

s는 P와 Q사이의 거리, Q는 $\mathbf{b}$방향으로의 직선 C의 경로



직선 L : $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{b}$ $(|\mathbf{b}| = 1,$ $\mathbf{p}_0$는 P의 위치$)$

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dx} x' + \frac{df}{dy} y' + \frac{df}{dz} z' = \mathbf{b} \bullet \operatorname{grad} f$$

$$* \;\; D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \bullet \operatorname{grad} f$$

- 기울기의 특성. 최대증가

$f(P) = f(x, y, z)$: 연속인 1계 편도함수를 갖는 스칼라함수

$\Rightarrow$ grad f 가 존재. 크기와 방향은 공간에서 좌표계의 선택과는 무관

점 P에서 grad $f(P) \neq 0$ $\Rightarrow$ grad f 가 점 P에서 f의 최대증가 방향

- 곡면의 법선벡터로서의 기울기

$f(x, y, z) = c =$ 상수 $\Rightarrow$ 공간상에서 임의의 곡면 S를 표시

S상의 점 P에서 grad $f(P) \neq 0$ $\Rightarrow$ grad f 가 점 P에서의 S의 법선벡터

곡면의 법선벡터로서의 기울기

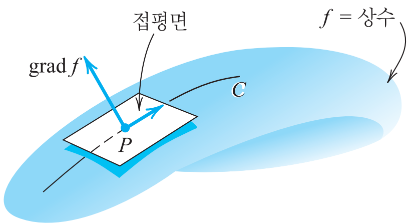
- f 의 **등위곡면**(Level Surface): $f(x, y, z) = c =$ 상수로 표현된 곡면 S
- 점 P에서 S의 **접평면**(Tandgent Plane)

  : S상의 임의의 점 P에서 P를 지나는 모든 곡선의 접선벡터들
- P에서 S의 곡면법선(Surface Normal) : P에서 S의 접평면에 수직인 직선
- 곡면의 **법선벡터**(Surgace Normal Vector) : 곡면법선과 평행한 벡터

$$\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = \text{grad } f \bullet \mathbf{r}' = 0$$

$\Rightarrow$ grad f 는 접평면상의 모든 벡터와 수직이며,

P에서 곡면 S의 법선벡터이다.



- 스칼라장의 기울기인 벡터장(퍼텐셜)

$f(P)$를 $\mathbf{v}(P)$의 퍼텐셜함수(Potential) : $\mathbf{v}(P) = \text{grad } f(P)$

$\mathbf{v}(P)$와 이에 해당되는 벡터장을 **보전적**(Conservative)이라 한다.

- 인력장. 라플라스 방정식

점 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$와 , $P : (x, y, z)$에 위치한 두 입자 사이의 인력은 (Newton의 만유인력법칙에 의하여)

$$\mathbf{p} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = -c\left[\frac{x-x_0}{r^3}, \frac{y-y_0}{r^3}, \frac{z-z_0}{r^3}\right]$$

로 표현되며, 퍼텐셜은 $f(x, y, z) = c/r$ 이다. 여기서 $r(>0)$은 두 점 P_0와 P 사이의 거리이다.

따라서 $\mathbf{p} = \text{grad } f = \text{grad}(c/r)$ 이 성립되며, 여기서 퍼텐셜 f 는다음과 같은 라플라스 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

9.8 벡터장의 발산(Divergence of a Vector Field)

- 발산(Divergence)

$\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

$\mathbf{v}$의 발산(Divergence) 또는 $\mathbf{v}$로 정의된 벡터장의 발산 : $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$

- 발산의 불변성

$\operatorname{div}\mathbf{v}$ 의 값은 좌표계의 선택에 상관없이 공간내의 $\mathbf{v}$ 상의 점에 따른다.

$x^*,\ y^*,\ z^*$에 대응하는 $\mathbf{v}$ 의 성분이 $v_1^*,\ v_2^*, v_3^*$이면 $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \dfrac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$

- $f(x, y, z)$: 두 번 미분가능한 스칼라함수

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right] \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

9.9 벡터장의 회전(Curl of a Vector Field)

- 회전(Curl)

$\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

$\mathbf{v}$의 회전(Curl) 즉, $\mathbf{v}$로 주어진 벡터장의 회전

$$: \ \operatorname{curl}\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

- 회전체와 회전

강체 회전에 대한 벡터장의 회전은 회전축 방향과 같은 방향을 가지며, 그 크기는 각속력의 두 배가 된다.

기울기, 발산, 회전

- 기울기장(Gradient Field)은 **비회전**(Irrotational)이다. 즉, $\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\, f) = \mathbf{0}$
- 벡터함수의 회전에 대한 발산도 영벡터가 된다. $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\mathbf{v}) = 0$

회전의 불변성

$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}$는 벡터이며 방향과 크기는 공간에서 직교좌표계의 선택과 무관하다.