Ch. 1 1계 상미분방정식

(First-Order ODEs)

- 상미분방정식

  : 상미분방정식을 유도, 표준화된 방법으로 방정식을 풀고, 주어진 문제의 견지에서 그래프와 해를 해석

- 내용 : 1계 상미분방정식의 해법

1.1 기본 개념. 모델화(Basic Concepts. Modeling)

● 미분방정식(Differential Equation)

: 미지함수의 도함수(Derivative)를 포함하는 방정식

미분방정식 (Differential Equation)
- 상미분방정식 (Ordinary Differential Equation)
- 편미분방정식 (Partial Differential Equation)

● 상미분방정식(Ordinary Differential Equation)

: 독립변수(Independent Variable)가 1개인 미분방정식

Ex. $y' = \cos x, \quad y'' + 9y = 0, \quad x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2) y^2$

❖ 편미분방정식(Partial Differential Equation)

: 2개 이상의 독립변수와 이들의 편미분성분이 포함된 미분방정식(12장에서 다룸)

Ex. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- 계(Order) : 미분방정식에 포함된 도함수 중 제일 많이 미분된 숫자

Ex. (1) $y' = \cos x, \quad \Rightarrow$ 1계 미분방정식

(2) $y'' + 9y = 0, \quad \Rightarrow$ 2계 미분방정식

(3) $x^2 y''' y' + 2e^x y'' = (x^2 + 2) y^2 \quad \Rightarrow$ 3계 미분방정식

- 1계 상미분방정식(First-order ODE)

: 미지의 함수 (y)와 도함수, 그리고 변수 (x)의 함수들로만 구성됨 (1장)

- 양함수 형태(Explicit Form) : $y' = f(x, y)$
- 음함수 형태(Implicit Form) : $F(x, y, y') = 0$

- 해(Solution) : 도함수가 존재하고 미분방정식을 만족시키는 함수

해 (Solution)

- 일반해(General Solution)
  : 미분방정식을 만족하는 해가 임의의 적분상수 c를 포함
- 특수해(Particular Solution)
  : 적분상수 c가 특정조건에 의하여 특정한 값으로 결정된 경우
- 특이해(Singular Solution)
  : 일반해로 표현불가능한 해

초기값 문제(Initial Value Problems)

: 주어진 초기조건을 이용하여 일반해로부터 특수해를 구함

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

■ Ex.4 다음 방정식의 초기값 문제를 풀어라.

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3y, \quad y(0) = 5.7$$

Step 1 일반해를 구함(Ex.3에 의하여)

일반해 : $y(x) = ce^{3x}$

Step 2 초기조건 적용 : $y(0) = ce^{0} = c = 5.7$

특수해 : $y(x) = 5.7e^{3x}$

모델화(Modeling)

❖ 모델화의 전형적인 단계

1단계 물리적 상황(물리적 시스템)에서 수학적 공식(수학적 모델)을 도출

2단계 수학적 방법에 의한 해

3단계 결과의 물리적 해석

■ Ex. 5 0.5 g(gram)으로 주어진 방사능 물질의 양이 시간이 경과한 후에 얼마나 남아 있겠는가?

물리적 정보. 실험에 의하면 방사능 물질은 매순간에 현재의 양에 비례하는 속도로 분해된다.

Step 1 물리적 과정의 수학적 모델(미분방정식) 설정

분해속도는 현재 양에 비례 : $\dfrac{dy}{dt} \propto y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = ky$

초기조건 : $y(0) = 0.5$

Step 2 수학적 해법

일반해 : $y(x) = ce^{kt}$

초기조건의 적용 : $y(0) = ce^{0} = c = 0.5 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0.5e^{kt}$

결과의 검토 : $\dfrac{dy}{dt} = 0.5ke^{kt} = ky, \quad y(0) = 0.5e^{0} = 0.5$

Step 3 결과의 해석

주어진 초기 양에서 출발하며 k(비례상수, 물질의 종류에 따라 다름)가 음수이기 때문에 시간에 따라 감소한다.

1.2 $y` = f(x, y)$의 기하학적 의미. 방향장 (Geometric Meaning of $y` = f(x, y)$. Direction Fields)

- 방향장(Direction Fields)

  : 미분방정식이 $y' = f(x, y)$ 같은 양함수 형태로 표시되는 경우

$\Rightarrow$ $f(x_0, y_0)$은 좌표에서의 해곡선 y의 기울기

$\Rightarrow$ 각 좌표의 $f(x_0, y_0)$를 구하고 그 값만큼의 기울기를 가진 작은 선요소(Lineal Element)들을 그래프 상에 표시

$\Rightarrow$ 선요소들의 방향을 따라 선을 그리면 대략적인 해곡 선의 모양을 알 수 있음

$\Rightarrow$ 매우 복잡한 해를 갖거나 양함수 형태의 해가 존재하지 않는 미분방정식에서 대략적인 해곡선의 형태를 판단하는데 사용할 수 있음

1.3 변수분리형 상미분방정식. 모델화(Separable ODEs. Modeling)

● 변수분리형 방정식(Separable Equation)

: 미분방정식의 왼쪽은 y, 오른쪽은 x만으로 구성되도록 조작 가능

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx \quad \left(\because y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

● 변수분리법(Method of Separating Variable)

: 미분방정식의 양변을 x로 적분하면 변수분리한 식의 왼쪽은 y, 오른쪽은 x로

적분한 결과가 나옴

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c \quad \left(\because \frac{dy}{dx}dx = dy\right)$$

❖ 변수분리를 할 경우 양변을 적분하여 쉽게 해를 구할 수 있음.

■ Ex. 1 미분방정식 $y'=1+y^2$을 풀어라.

$$\frac{y'}{1+y^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy/dx}{1+y^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1+y^2}=dx$$ (변수분리형)

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}dy=\int dx+c \quad \Rightarrow \quad \arctan y = x + c$$ (적분)

$$\Rightarrow \quad y=\tan(x+c)$$ (정리)

- 모델화(Modeling, 모형화)

  : 물리적인 시스템 등을 수학적인 모델(함수, 방정식, 미분방정식 등)로 표현하는 것

❖ 이 절에서는 변수분리형 미분방정식으로 표현되는 시스템을 모델화 해 본다.

■ Ex. 3 탱크엔 1000갤론의 물이 담겨져 있고 그 안에 100파운드의 소금이 처음에 놓아 있다. 갤런당 5 파운드의 소금이 용해된 소금물이 분당 10갤런씩 탱크 안으로 흘러 들어오고 혼합용액은 잘 휘저어져 일정하게 유지된다. 그리고 분당 10갤런의 소금물이 흘러나간다. 임의의 시간 t에서 탱크 안에 있는 전체 소금의 양을 구하라.

Step 1 모델화

▶ 소금의 변화량 $(dy/dt = y')$ = 소금의 유입량 - 소금의 유출량

소금의 유입량 = 10 gal/min × 5 lb/gal = 50 lb/min

소금의 유출량 = 10 gal/min × y/1000 lb/gal = y/100 lb/min

$\Rightarrow \quad y' = 50 - \dfrac{y}{100} = \dfrac{1}{100}(5000 - y)$: 소금의 양에 관한 미분방정식

▶ 초기조건 : $y(0) = 100$

Step 2 미분방정식의 일반해를 구함

$$\frac{dy}{y-5000} = -\frac{1}{100}dt \quad (\text{변수분리형}) \quad \Rightarrow \quad \ln|y-5000| = -\frac{1}{100}t + c^* \quad (\text{적분}) \quad \Rightarrow \quad y - 5000 = ce^{-\frac{t}{100}}$$

Step 3 초기조건을 적용하여 특수해를 구함

$$y(0) = 5000 + ce^0 = 5000 + c = 100 \quad \Rightarrow \quad c = -4900 \qquad y = 5000 - 4900e^{-\frac{t}{100}} \qquad (\text{특수해})$$

● **확장방법**(Reduction to Separable Form, 변수분리형 형태로 변환)

: 변수분리를 할 수 없는 미분방정식을 새로운 함수를 도입하여 변수분리가 가능한 형태로 변환함

▶ $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 와 같은 형태의 미분방정식

Ex. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$, $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

이 상태로는 변수분리가 되지 않으므로 다음과 같이 새로운 함수 u를 도입한다.

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = (ux)' = u'x + u$$ (**u**를 도입)

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u'x + u = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$ (변수분리형)

$$\int \frac{1}{f(u)-u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx + c$$ (적분)

■ Ex. 6 $2xyy' = y^2 - x^2$ 을 풀어라.

$$2xyy' = y^2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right)$$ (**2xy**로 나눔)

$$\Rightarrow \quad y = ux, \quad u = \frac{y}{x}, \quad y' = u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

$$u'x = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right) = -\frac{u^2+1}{2u} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}\frac{2u}{u^2+1} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{2u}{u^2+1}du = -\frac{1}{x}dx$$ (변수분리형)

$$\int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{1}{x}dx + c^* \quad \Rightarrow \quad \ln\left|u^2+1\right| = -\ln|x| + c^* = \ln\frac{1}{|x|} + \ln|c| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|, \quad c = e^{c^*}$$ (적분)

$$u^2 + 1 = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{c}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = cx$$

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$$ (정리)

1.4 완전상미분방정식, 적분인자(Exact ODEs,Integrating Factors)

● 완전미분방정식(Exact Differential Equation) : $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy$이 함수 $u(x,y)$에 대하여 미분의 형태 $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$인 경우

즉, $M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

❖ 완전미분방정식이라면,

$du = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = c$이 되어 해를 쉽게 수할 수 있다.

완전미분방정식의 필요충분조건

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \quad \left(\because \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

완전미분방정식의 해법

Case 1) $M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y)$ (x에 대하여 적분)

$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=N(x,y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dk}{dy}$를 구함 $\quad \Rightarrow \quad k(y)$를 구함

Case 2) $N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad u(x,y)=\int N(x,y)dy+l(x)$ (y에 대하여 적분)

$u(x,y)=\int N(x,y)dy+l(x) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}=M(x,y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dl}{dx}$ 를 구함 $\quad \Rightarrow \quad l(x)$를 구함

■ Ex. 1 $\cos(x+y)dx+\left(3y^2+2y+\cos(x+y)\right)dy=0$을 풀어라.

Step 1 완전미분방정식인지 판별

$$M(x,y)=\cos(x+y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=-\sin(x+y)$$

$$N(x,y)=3y^2+2y+\cos(x+y) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x}=-\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$: 완전미분방정식

Step 2 미분방정식의 해를 구함

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+k(y)=\int \cos(x+y)dx+k(y)=\sin(x+y)+k(y)$$

$k(y)$를 구하기 위하여

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos(x+y)=N(x,y)=3y^2+2y \Rightarrow \frac{dk}{dy}=3y^2+2y \Rightarrow k=y^3+y^2+c^*$$

$$\therefore \quad u(x,y)=\sin(x+y)+y^3+y^2=c$$

Step 3 검증

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos(x+y)+\cos(x+y)y'+3y^2y'+2yy'=0 \Rightarrow \cos(x+y)+\left(\cos(x+y)+3y^2 2y\right)y'=0$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x+y)dx+\left(3y^2+2y+\cos(x+y)\right)dy=0$$

● 완전미분방정식 형태로 변환 (Reduction to Exact Form)

: 완전미분방정식이 아닌 방정식에, 어떤 함수 $F(x,y)$를 곱하여 완전미분방정식을 만듦

● 적분인자 (Integrating Factors)

: 완전미분방정식을 만드는 함수 $F(x,y)$

■ Ex. 3 $-ydx+xdy=0$은 완전미분방정식이 아니다.

$$\because \quad M=-y, \quad N=x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-1, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=1 \quad \Rightarrow \quad \text{not exact}$$

미분방정식의 양변에 $1/x^2$(적분인자)을 곱하면 $-\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{1}{x}dy=0$

$$M=-\frac{y}{x^2}, \quad N=\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \text{exact}$$

● 적분인자 $F(x, y)$를 구하는 방법

$$FPdx + FQdy = 0 \quad (\text{완전미분방정식})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}(FP) = \frac{\partial}{\partial x}(FQ) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} P + F\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} P + F\frac{\partial Q}{\partial x}$$

- 완전미분방정식을 만드는 $F(x,y)$를 찾는 것은 매우 어렵다.
- 하나의 변수(x 또는 y)에만 의존하는 적분인자를 구하는 것이 쉽다.

Case 1) x만의 함수인 적분인자 $F(x)$구하는 법

적분인자 F가 x만의 함수이므로 $\frac{\partial F}{\partial x}=F'$, $\frac{\partial F}{\partial y}=0$이다.

$$FP_y = F'Q + FQ_x \quad \Rightarrow \quad \frac{P_y}{Q}=\frac{F'}{F}+\frac{Q_x}{Q} \quad (FQ\text{로 나눔}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

$$R(x)=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=R(x) \quad \Rightarrow \quad \ln|F|=\int R(x)dx \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F(x)=\exp\left(\int R(x)dx\right)$$

Case 2) y만의 함수인 적분인자 $F^*(x)$구하는 법

$F(x)$를 구하는 것과 마찬가지방법으로

$$R^*(y)=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right), \quad F^*(y)=\exp\left(\int R^*(y)dy\right)$$

■ Ex. 5 정리 1 또는 2를 이용하여 다음의 미분방정식의 적분인자를 찾고 초기값 문제를 풀어라.

$$\left(e^{x+y} + ye^{y}\right)dx + \left(xe^{y} - 1\right)dy = 0, \quad y(0) = -1$$

Step 1 완전미분방정식인지 판별

$$P(x,y) = e^{x+y} + ye^{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^{x+y} + e^{y} + ye^{y}$$

$$Q(x,y) = xe^{y} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$: 완전미분방정식이 아님

Step 2 적분인자 구하기

$$R = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{xe^{y} - 1}\left(e^{x+y} + e^{y} + ye^{y} - e^{y}\right) = \frac{1}{xe^{y} - 1}\left(e^{x+y} + ye^{y}\right) \quad \Rightarrow$$ 적용불가능

$$R^{*} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{e^{x+y} + ye^{y}}\left(e^{y} - e^{x+y} - e^{y} - ye^{y}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad F^{*}(y) = e^{-y}$$

$$\therefore \quad \left(e^{x} + y\right)dx + \left(x - e^{-y}\right)dy = 0$$

검증 $$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x} + y\right) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - e^{-y}\right) \quad \Rightarrow$$ 완전미분방정식

Step 3 일반해 구하기

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y \quad \Rightarrow \quad u = \int \left(e^x + y\right) dx = e^x + xy + k(y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + k'(y) = x - e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k'(y) = -e^{-y} \quad \Rightarrow \quad k(y) = e^{-y}$$

일반해 : $u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = c$

Step 4 특수해 구하기

초기조건 적용 $y(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad u(0,-1) = e^0 + 0 + e = 3.72$

특수해 : $u(x, y) = e^x + xy + e^{-y} = 3.72$

1.5 선형상미분방정식. Bernoulli 방정식. 인구 동력학
(Linear ODEs. Bernoulli Eqaution. Population Dynamics)

- 미분방정식 (ODEs)
  - 선형 미분방정식 (Linear ODEs)
    - 제차 선형 미분방정식 (Homogeneous Linear ODEs)
    - 비제차 선형미분방정식 (Nonhomogeneous Linear ODEs)
  - 비선형 미분방정식 (Nonlinear ODEs)

● 선형미분방정식(Linear Differential Equation)

: 방정식내에서 미지의 함수 y와 그의 도함수의 관계가 선형인 미분방정식

Ex. $y'+p(x)y=r(x)$: 선형미분방정식

$y'+p(x)y=r(x)y^2$: 비선형미분방정식

• 표준형(**StandardForm**) : $y'+p(x)y=r(x)$

입력(**Input**): $r(x)$

출력(**Output**): $y(x)$

● 제차 (Homogeneous), 비제차 (Nonhomogeneous) 미분방정식

$y'+p(x)y=0 \quad \Rightarrow$ 1계 제차 선형미분방정식

$y'+p(x)y=r(x)\neq 0 \quad \Rightarrow$ 1계 비제차 선형미분방정식

● 제차 미분방정식의 해법(변수분리형)

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + c^* \quad \Rightarrow \quad y = ce^{-\int p(x)dx}$$

- 비제차 미분방정식의 해법(완전미분방정식의 해법 응용)

$$y'+p(x)y=r(x) \quad \Rightarrow \quad (py-r)dx+dy=0$$

$$P=py-r, \quad Q=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}=p\neq 0=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow$$ 완전미분방정식이 아님

- 적분인자 구하기

$$R=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{dF}{dx}=p \quad \Rightarrow \quad \therefore\ F=e^{\int pdx}$$

- 적분인자 곱하여 해 구하기

$$e^{\int pdx}(py-r)dx+e^{\int pdx}dy=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{\int pdx} \quad \Rightarrow \quad u=ye^{\int pdx}+l(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=pye^{\int pdx}+l'(x)=e^{\int pdx}(py-r)$$

$$\Rightarrow \quad l'(x)=-re^{\int pdx} \quad \Rightarrow \quad l(x)=-\int re^{\int pdx}dx+c \quad \Rightarrow \quad u=ye^{\int pdx}-\int re^{\int pdx}dx=c$$

$$\Rightarrow \quad ye^{\int pdx}=\int re^{\int pdx}dx+c \quad \Rightarrow \quad \therefore\ y=e^{-\int pdx}\left[\int re^{\int pdx}dx+c\right]$$

■ Ex. 1 다음의 선형상미분방정식을 풀어라.

$$y' - y = e^{2x}$$

$$p = -1, \quad r = e^{2x}, \quad h = \int p\,dx = -x$$

$$\Rightarrow \quad \therefore\ y = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right] = e^{x}\left[\int e^{-x} e^{2x}\,dx + c\right] = e^{x}\left[e^{x} + c\right] = e^{2x} + ce^{x}$$

- Bernoulli Equation : $y'+p(x)y=g(x)y^a$
  - $a=0$ or 1이면 선형
  - $a\neq 0$ and 1이면 비선형

- 비선형 Bernoulli 방정식인 경우 : 선형미분방정식으로 변환가능

$$y'+p(x)y=g(x)y^a \quad \Rightarrow \quad y'=g(x)y^a-p(x)y$$

$u=y^{1-a}$ 로 치환

$$\Rightarrow \quad u'=(1-a)y^{-a}y'=(1-a)y^{-a}\left(gy^a-py\right)=(1-a)(g-py^{1-a})=(1-a)(g-pu)$$

$$\Rightarrow \quad u'+(1-a)pu=(1-a)g$$: **u**에 관한 선형미분방정식

■ Ex. 4 논리적 방정식(**Logistic Equation**)

논리적 방정식(또는 Verhulst 방정식)으로 알려진 Bernoulli 방정식을 풀어라.

$$y' = Ay - By^2$$

$$y' = Ay - By^2 \quad \Rightarrow \quad y' - Ay = -By^2$$

$a = 2 \quad \Rightarrow \quad u = y^{-1}$ 로 치환

$$\Rightarrow \quad u' = -y^{-2}y' = -y^{-2}\left(Ay - By^2\right) = -Ay^{-1} + B = -Au + B$$

$\Rightarrow \quad u' + Au = B$ (u에 관한 선형미분방정식)

$$p = A, \quad r = B \quad \Rightarrow \quad h = \int p\,dx = Ax$$

$$\Rightarrow \quad u = e^{-h}\left[\int e^{h} r\,dx + c\right] = e^{-Ax}\left[\frac{B}{A}e^{Ax} + c\right] = ce^{-Ax} + \frac{B}{A}$$

$\Rightarrow \quad \therefore\ y = \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\left(B/A + ce^{-Ax}\right)}$ (**Verhulst**방정식의 해)

1.6 직교궤적(Orthogonal Trajectories)

- **직교궤적**(Orthogonal Trajectory): 주어진 곡선에 직교하는 곡선
- 곡선 $y = g(x)$에 수직하게 교차하는 직교궤적 구하기

• 1단계 주어진 곡선을 해곡선으로 하는 미분방정식을 구한다.

$$y' = f(x, y)$$

• 2단계 직교궤적의 미분방정식은

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

• 3단계 직교궤적의 미분방정식의 해를 구한다.

1.7 해의 존재성과 유일성(Existence and Uniqueness of Solutions)

- 초기값 문제의 특수해가 항상 존재하는 것도 아니다.

Ex. $|y'|+|y|=0,\quad y(0)=1$ $\Rightarrow$ 만족하는 해가 없다.

$y'=2x,\quad y(0)=1$ $\Rightarrow$ 만족하는 해가 하나 있다. $\Rightarrow$ $y=x^2+1$

$xy'=y-1,\quad y(0)=1$ $\Rightarrow$ 만족하는 해가 무수히 많다. $\Rightarrow$ $y=1+cx$

- **존재성의 문제**

  어떤 조건하에서 초기값 문제가 적어도 하나의 해를 갖는가?

- **유일성의 문제**

  어떤 조건하에서 주어진 초기값 문제가 많아야 한 개의 해를 갖는가?

존재정리

초기값 문제 $y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$에서

$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$로 정의되는 사각형내의 모든 점 (x, y)에서

- $f(x, y)$ 가 연속이고
- $|f(x, y)| \le K$ (발산하지 않음) 이면

$\Rightarrow$ $\therefore$ 최소한 하나 이상의 해를 갖는다.

● 유일성정리

초기값 문제 $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ 에서

$|x - x_0| < a, \quad |y - y_0| < b$로 정의되는 사각형내의 모든 점 (x, y)에서

- $f(x, y), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}$가 연속이고
- $|f| \le K, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$ (발산하지 않음) 이면

$\Rightarrow \quad \therefore$ 최대 하나의 해를 갖는다. 해의 존재성 정리와 연결하여

생각하면 이 초기값 문제는 정확하게 하나의 해를 갖게 된다.