
RO05/A19 - TP
Réservoir

NB: Ce TP est à réaliser par des binômes d'étudiants. Temps nécessaire estimée: 4h par étudiant.

ENNONCE

Soit un réservoir de stockage d'eau dont la capacité est de $c \text{ m}^3$ ($c \in \mathbb{N}^*$). Il est alimenté par une source d'eau potable dont le débit est variable suivant les aléas de la production. A l'instant n , soit Z_n le volume du réservoir en m^3 . Dans l'intervalle de temps $]n, n+1[$, $X_n \text{ m}^3$ d'eau entrent dans le réservoir. Juste avant l'instant $n+1$, $n \geq 0$, un volume d'eau égal à 1 m^3 , quitte le réservoir instantanément à condition qu'il ne soit pas vide. Supposons que X_0, X_1, \dots soit iid à valeurs dans \mathbb{N} et de loi $p = (p_i, i \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que $Z_n, n \geq 0$ est une chaîne de Markov et donner son espace d'état et sa fonction de transition.
2. Soit $c = 10$. Tracer une trajectoire du niveau du réservoir dans l'intervalle de temps $[0, 100]$.
3. Par la suite, tracer 1000 trajectoire dans le même intervalle de temps $[0, 100]$ et estimer le niveau moyen du réservoir. Faire aussi un calcul analytique du niveau moyen et comparer les résultats.
4. Soit T le temps du vidange du réservoir. Calculer et estimer la valeur moyenne de T lorsque le niveau initial est $u = 4$.
5. Calculer la loi stationnaire du niveau Z_n et le niveau moyen d'équilibre du réservoir. Calculer également la variance de ce niveau moyen.