四川大学期末考试试题（闭卷）答案

（2019——2020 学年第 1 学期）　A 卷

课程号：201162040　课序号：01、02 课程名称：概率论　任课教师：常寅山、彭雪　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：320　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

1. (10 分)设对事件$A_i, i \geq 1,$满足$P(A_i) = 1,$求证: $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1.$
   证明：因为对 $i \geq 1, P(\bar{A_i}) = 0,$ 所以，$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(\bar{A_i}) = 0.$ 所以，$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A_i}) = 0.$ (5 分) 所以，$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A_i}) = 1.$ (5 分)

2. (10 分)波利亚坛子模型: 坛子中有r只红球和g只绿球，随机取出一只观察颜色，把原球放回，并加进与抽出球同色的球$c \geq 0$只，再摸第二次，共摸了2次. 求其中有1次摸到绿球的概率.
   解: 用A表示第一次摸得红球，用B表示第二次摸得红球。则所求为
   $P(A\bar{B} \cup B\bar{A}) = P(A\bar{B}) + P(B\bar{A})$。（3 分）根据模型的定义和条件概率公式，$P(B\bar{A}) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{g}{g+r} \times \frac{r}{g+r+c} = \frac{gr}{(g+r)(g+r+c)}$。（3 分）类似的，$P(A\bar{B}) = \frac{gr}{(g+r)(g+r+c)}$。（3 分）所以，所求概率为$\frac{2gr}{(g+r)(g+r+c)}$。（1 分）

3. (10 分)设U服从$(0,1)$上的均匀分布，令$V = U.$请问：(U, V)是二维连续型随机向量么？试说明理由.
   解: (U, V)不是二维连续型随机向量.（4 分）假设(U, V)是二元连续型随机向量，那么，它有密度函数$p(u, v)$. (2 分)则，

$$1 = P(U = V) = \iint_{\{u=v\}} p(u, v) du dv = 0. (4\text{ 分})$$

   所以，由矛盾知(U, V)不是二维连续型随机向量.

4. (20 分)设二维随机变量(ξ, η)的联合密度函数为:

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

   (1) 请判断: ξ与 η是否不相关?

(2) 求边际密度函数$p_\xi(x)$和$p_\eta(y)$, 并判断ξ与 η是否独立?

解: (1) $E\xi\eta=\int_{\mathbb{R}^2}xyp(x,y)dxdy=\iint_{|y|<x,0<x<1}xydxdy=0$(2 分)

$$E\xi=\int_{\mathbb{R}^2}xp(x,y)dxdy=\iint_{|y|<x,0<x<1}xdxdy=\frac{2}{3},$$

$$E\eta=\int_{\mathbb{R}^2}yp(x,y)dxdy=\iint_{|y|<x,0<x<1}ydxdy=0.\left(4\text{ 分}\right)$$

所以, $cov\ (\xi,\eta)=E\xi\eta-E\xi E\eta=0$(2 分).所以, ξ与 η不相关. (2 分)

(2) $p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\begin{cases}2x,0<x<1,\\ \quad 0,\text{其他}\end{cases}\left(2\text{ 分}\right),$

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\begin{cases}1-y,\ \ 0<y<1\\ 1+y,-1<y\le 0\\ \quad\ 0,\textit{其他}\end{cases},(4\text{ 分})$$

所以, $p_\xi(x)p_\eta(y)\neq p(x,y)$, 所以, ξ,η不独立. (4 分)

5. (10 分)设随机变量$X_1,X_2,\dots,X_n$独立同分布, 都服从标准正态分布$N(0,1)$.设$a_i,b_i,i=1,2,\dots,n$都是实数. 令

$$U=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\,,V=\sum_{j=1}^{n}b_jX_j.$$

求证: U和V相互独立当且仅当$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$.

证: 因为U和V的线性组合是$X_1,X_2,\dots,X_n$的线性组合. 所以, U和V的线性组合仍然服从正态分布。 所以, (U,V)服从二维正态分布. (3 分)

另一方面, $cov\ (U,V)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_jcov\left(X_i,X_j\right)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ (2 分).

所以, U和V相互独立当且仅当U和V不相关当且仅当 $cov(U,V)=0$ 当且仅当$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0$. (5 分)

6. (10 分)设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 分钟，且各件产品的组装时间相互独立. 请用中心极限定理计算：保证至少有 95%的可能性，问 16 个小时内最多可以组装多少件产品？(注意：指数分布的单位是“分钟”．且 $\Phi(1.64)=0.94950, \Phi(1.65)=0.95053$)

解：设可以组装k件产品．设X_i表示组装第i件产品所需的时间.

则 $X_i \sim Exp\,(\lambda)$. 所以，$EX_i = 10 = \frac{1}{\lambda}, D(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 100$. (2 分)

所以，由中心极限定理知，近似有 $\sum_{i=1}^{k} X_i \sim N(10k, 100k)$

所以，$0.95 \le P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \le 16\times 60\right) = \Phi(\frac{16\times 60-10k}{\sqrt{100k}})$ (4 分).

所以，$\frac{16\times 60-10k}{\sqrt{100k}} \ge 1.65$ (2 分), 即$k \le 81$. (2 分)

7. (12 分)设X服从二项分布$B(n,p)$. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$独立同分布，而且$P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = a$. 假设$\{\xi_n\}_{n\ge 1}$和$X$独立. 令$Y = \sum_{i=1}^{X} \xi_i$.

(1) （5 分）求证：在$X=m$的条件下，当$k = 0,1,2,\dots,m$时，

$$P(Y=k|X=m) = C_m^k a^k (1-a)^{m-k}, \text{即}Y\text{的条件分布是}B(m,a).$$

(2) （7 分）求证: Y服从二项分布$B(n,pa)$。

证: (1) $P(Y=k|X=m) = \frac{P(Y=k,X=m)}{P(X=m)} = \frac{P(\sum_{i=1}^{X}\xi_i=k,X=m)}{P(X=m)} = \frac{P(\sum_{i=1}^{m}\xi_i=k,X=m)}{P(X=m)}$ (2 分)

$= \frac{P(\sum_{i=1}^{m}\xi_i=k)P(X=m)}{P(X=m)}$ (2 分) $= P(\sum_{i=1}^{m}\xi_i = k) = C_m^k a^k (1-a)^{m-k}$, (1 分).

第(2)题：

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{m=k}^{n} P(Y=k|X=m)P(X=m)\ (3\text{分}) \\
&= \sum_{m=k}^{n} C_m^k a^k (1-a)^{m-k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k p^k \sum_{m=k}^{n} \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} (1-a)^{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-m} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k p^k [(1-a)p + (1-p)]^{n-k} = C_n^k (ap)^k (1-ap)^{n-k}\ (4\text{分})
\end{aligned}$$

8. (10 分) 设一列随机变量$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$满足对任意正整数$n$，$X_n$取值 1 和 0, 且

$$P(X_n = 1) = (1-p)^{n-1}p, 0 < p < 1,$$

求证：当$n \to \infty$时，X_n几乎处处收敛于 0.

证:

因为$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n=1)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p=1<\infty$, 所以, 由Borel-Cantelli 引理知

$$P(\limsup_{n\longrightarrow\infty}\{X_n=1\})=0.(5分)$$

所以, $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{X_n=0\})=1$. (3分) 所以, 令$\Omega_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{X_n=0\}$ 有 $P(\Omega_0)=1$且对任意$\omega\in\Omega$, 存在$k(\omega)$, 当$n\geq k(\omega)$时, 有$X_n(\omega)=0$, 即

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} X_n(\omega)=0.(2分)$$

9. (8 分)设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$是同分布的随机变量序列.但是，它们并不独立.假设对于任意$|i-j|\geq 2$，我们有X_i和X_j独立.并且假设$E(X_1^2)<\infty$.

求证: $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$依概率收敛到EX_1

证: $X_1,X_3,\cdots$两两独立，所以两两不相关。（2 分）由切比雪夫大数定律，$\frac{\sum_{i=1,\ldots,n;i是奇数}X_i}{n}$依概率收敛于$\frac{1}{2}EX_1$。（2 分）类似的，$\frac{\sum_{i=1,\ldots,n;i是偶数}X_i}{n}$依概率收敛于$\frac{1}{2}EX_1$。（2 分）所以，两者之和$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$依概率收敛于$EX_1$。（2 分）