四川大学期末考试试题（闭卷）答案

（2019——2020 学年第 1 学期）　B 卷

课程号：201162040　课序号：01、02 课程名称：概率论　任课教师：常寅山、彭雪　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：320　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

1. (10 分) 在一次有n个人参加的晚会中，每个人带了一件礼物.假定礼物都不相同.晚会期间，每个人从n件礼物中随机抽取一件礼物.问没有人抽到自己带来的礼物的概率.（提示：利用容斥原理或加法公式）

解：设A_i是第i个人抽到自己礼物的概率。(2 分）则，$P(A_i)=\frac{1}{n}$。对于$i<j$，$P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)}$。类似的，对于$i_1<i_2<\cdots<i_k$，$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$。(3 分）根据容斥原理，$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)=n\times\frac{1}{n}-\frac{n(n-1)}{2!}\times\frac{1}{n(n-1)}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n!}{n!}\times\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$。(4 分）所以，$P(\text{没有人抽到自己礼物})=1-P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$。(1 分)

2. (15 分)一道选择题有m个备选答案, 其中只有一个答案是正确的。某考生知道答案的概率为p。如果他不知道答案则随机选一个。请计算:

(1) 该考生考试答对的概率是多少?
(2) 已知该考生考试答对该题目, 则他的确知道答案的概率是多少?

解: 设A表示考生知道答案, B表示答对.

(1) $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$ (4 分) $=p+\frac{(1-p)1}{m}=\frac{1}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)p.$ (3 分)

(2) $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$ (5 分) $=\frac{p}{\frac{1}{m}+\left(1-\frac{1}{m}\right)p}$ (3 分)

3. (20 分)设X和Y独立且都服从参数为1的指数分布。求证$\frac{X}{Y}$和$X+Y$独立.

解: 由题意，(X,Y)的密度函数为$\rho(x,y)=e^{-x-y},x,y>0$。（2 分）做变换$u=\frac{x}{y},v=x+y$。（3 分）则，$x=\frac{uv}{u+1},y=\frac{v}{u+1}$。（3 分）$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1}\\ -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1}\end{vmatrix}=\frac{v}{(u+1)^2}$。（3 分）

所以，$\left(\frac{X}{Y},X+Y\right)$的密度函数$p(u,v)=\rho\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J|=\frac{1}{(u+1)^2}\cdot ve^{-v},u>0,v>0$。（3 分）所以，$\frac{X}{Y}$的边际密度函数$p_1(u)=\int p(u,v)dv=\frac{1}{(u+1)^2},u>0$。（2 分）$X+Y$的边际密度函数$p_2(v)=\int p(u,v)du=ve^{-v},v>0$。（2 分）由于$p(u,v)=p_1(u)p_2(v)$，所以，$\frac{X}{Y}$和$X+Y$独立。（2 分）

4. (10 分) 举例说明三个事件A,B,C两两独立，但A,B,C不相互独立.

解：将一个正四面体染色。第一面染红色，第二面染白色，第三面染黑色，第四面染上红色、白色和黑色。随机的掷这个正四面体，用A表示红色朝下，用B表示白色朝下，用C表示黑色朝下。（5 分）

那么，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,

$P(AB)=P(BC)=P(AC)=P(ABC)=P\big(\text{第四个面朝下}\big)=\frac{1}{4}$。（5 分）

5. (10 分)已知一个商店有前后两个门, 顾客是从前门进还是后门进相互独立. 设从 0 时刻开始等待ξ时间后有一位顾客从前门进入商店, 同时, 从 0 时刻开始等待η时间后有一位顾客从后门进入商店. 设$\xi\sim Exp(\lambda),\eta\sim Exp(\mu)$(指数分布). 请计算: 从 0 时刻开始, 商店等待第一位客人到达的时间T服从的分布. (请写出分布的名字和参数以及推导过程)

解: 有题意, $T=\xi\wedge\eta$. (4 分)

所以, $F_T(t)=P(\xi\wedge\eta\le t)=1-P(\xi\wedge\eta>t)=1-P(\xi>t,\eta>t)=1-P(\xi>t)P(\eta>t)=1-e^{-(\lambda+\mu)t},t>0$. (4 分). 所以, $T\sim Exp\,(\lambda+\mu)$. (2 分)

6. (10分)求证:当$\xi\sim P(\lambda_1),\eta\sim P(\lambda_2)$(泊松分布),且$\xi$和$\eta$相互独立时,有 $\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$.

证: 法一: 特征函数法:

因为$f_\xi(t)=e^{\lambda_1(e^{it}-1)},f_\eta(t)=e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$ (4 分) 并且ξ和η相互独立.

所以, $f_{\xi+\eta}(t)=f_\xi(t)f_\eta(t)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$ (4 分). 所以, $\xi+\eta\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$. (2 分)

法二:

$$P(\xi+\eta=m)=\sum_{k=0}^{m}P(\xi+\eta=m,\xi=k)=\sum_{k=0}^{m}P(\eta=m-k)P(\xi=k)\ (5\text{ 分})$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda_2}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{m-k}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!}(\lambda_1+\lambda_2)^m.(5\text{ 分})$$

7. (10 分)设事件A和B正相关（即示性函数I_A和I_B作为随机变量, 其相关系数非负）。设$P(A)=P(B)$.又存在$\delta\in(0,1)$，使得$P(A\cup B)\geq 1-\delta$.已知事实：对示性函数，有$I_{A\cap B}=I_AI_B$. 求证：
   (1) (6 分) $\bar{A}$和 $\bar{B}$正相关，
   (2) (4 分)$P(A)=P(B)\geq 1-\sqrt{\delta}$.

   证：（1）A和B正相关等价于$P(AB)\geq P(A)P(B)$。（3 分）
   所以，$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)\geq 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)=\big(1-P(A)\big)\big(1-P(B)\big)=P(\bar{A})P(\bar{B})$。所以，$\bar{A}$和$\bar{B}$正相关。（3 分）

   （2）$P(A\cup B)\geq 1-\delta$。那么，$P(\bar{A})P(\bar{B})\leq P(\bar{A}\bar{B})\leq\delta$。（2 分）由于$P(A)=P(B)$，所以，$P(\bar{A})=P(\bar{B})\leq\sqrt{\delta}$。所以，$P(A)=P(B)\geq 1-\sqrt{\delta}$。（2 分）

8. (7 分) 用林德贝格-莱维(Lindeberg-Levy)中心极限定理证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=\frac{1}{2}.$$

   证：设$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$,独立同分布于参数为 1 的泊松分布。则

$$S_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\sim P(n),ES_n=n,DS_n=n,(3\text{ 分})$$

所以，由中心极限定理知，有$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right)=\Phi(0)=\frac{1}{2}$,(2 分)

又因为 $P\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0\right)=P(S_n\leq n)=\sum_{k=0}^{n}P(S_n=k)=\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}$，(2 分), 所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=\frac{1}{2}$

9. (8 分)商店推出n种不同的优惠券，设优惠券总数很多，保证客户需求. 一人每次可抽取一张优惠券，且抽取到每种优惠券的可能性相同. 设每次抽取的结果相互独立. 设τ_k^n表示某人抽取第τ_k^n次优惠券时，恰好抽到第k种不同的优惠券. 令$T_n=\tau_n^n$,则T_n表

示集齐所有n种优惠券所需抽取的次数. 令$X_{n,k}=\tau_k^n-\tau_{k-1}^n$，则$X_{n,k}$表示在已经集齐$k-1$种优惠券后得到一种新的优惠券所需抽取的次数，约定$\tau_0^n=0$. 已知 $X_{n,k}$与$X_{n,j}, 0\le j\le k-1$独立.

(1) (5 分)当m是正整数时，请计算$P\left(X_{n,k}=m\right)$，从而，判断$X_{n,k}$服从什么分布(请写出分布名称和其中参数.)

(2) (3 分)求证：当$n\to\infty$时，$\frac{T_n}{n\ln n}$依概率收敛到 1.

解 ：（1） $P\left(X_{n,k}=m\right)=\left(1-\frac{n-(k-1)}{n}\right)^{m-1}\left(\frac{n-(k-1)}{n}\right)=\left(\frac{k-1}{n}\right)^{m-1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$, (3 分)

所以，$X_{n,k}$服从参数为$(1-\frac{k-1}{n})$的几何分布. (2 分)

（2） 因为$ET_n=E\tau_n^n=EX_{n,1}+EX_{n,2}+\cdots+EX_{n,n}=n\sum_{i=1}^n\frac{1}{i}\sim n\ln n$

$$D(T_n)=DX_{n,1}+DX_{n,2}+\cdots+DX_{n,n}\le\sum_{i=1}^n EX_{n,i}^2\le n^2\sum_{i=1}^n\frac{1}{i^2}\le cn^2$$

所以，$P\left(\left|\frac{T_n-ET_n}{n\ln n}\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D(T_n)}{\varepsilon^2n^2(\ln n)^2}\le\frac{c}{\varepsilon^2(\ln n)^2}\to 0, (n\to\infty)$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ET_n}{n\ln n}=1$,所以，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{ET_n}{n\ln n}-1\right|\ge\varepsilon\right)=0$.