1.由于$\gcd(20,16,2016)=4$,所以原方程等价于 $5x+4y=504$,从而 $x=\frac{504-4y}{5}$,从而 x 为正整数当且仅当$y\equiv 1 \pmod 5$且$1\le y\le 126$. 从而解得所有解为$(100-4t,1+5t)$,其中$0\le t\le 24$. $\square$

2.$2016=32\cdot 7\cdot 9$,从而考虑$2x^3+x+6\equiv 0 \pmod{32}$, $2x^3+x+6\equiv 0 \pmod 7$, $2x^3+x+6\equiv 0 \pmod 9$.

第一个方程只有解$x\equiv 10 \pmod{32}$.(首先 x 不为奇数,然后再逐个验证),第二个方程只有解 $x\equiv 3 \pmod 7$,第三个方程有解 $x\equiv 1,3,5 \pmod 9$ 再由中国剩余定理知所有解为$x\equiv 10 \pmod{2016}$,$x\equiv 1578 \pmod{2016}$,$x\equiv 1130 \pmod{2016}$. $\square$

3.首先$\varphi(19)=18=2\cdot 3^2$,首先考虑 2 是否是模 19 的一个原根,只需计算$2^2,2^3,2^6,2^9$模 19 的值(2^9可以用欧拉准则计算).发现均不为 1 从而知 2 为模 19 的一个原根.与18互素的数有$1,5,7,11,13,17$这6个数,从而模19两两不同余的原根有$\{2,2^5,2^7,2^{11},2^{13},2^{17}\}$这六个. $\square$

4.首先$\varphi=\mu*I(n)$,从而$\mu*\mu*\varphi*\varphi=\mu*\mu*\mu*\mu*I(n)*I(n)$. 再由Dirichlet级数与卷积的关系我们有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mu}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$,所以我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu*\mu*\varphi*\varphi}{n^s}=\frac{\zeta^2(s-1)}{\zeta^4(s)}.$$

$\square$

5.(i) 设$a_1,a_2,\cdots,a_m$为这 m 个整数,定义$b_1=a_1,b_2=a_1+a_2,\cdots,b_l=a_1+\cdots+a_l,\cdots,b_m=a_1+\cdots+a_m$.

如果其中一个为 m 的倍数,那么就证完了,否则这 m 个数一定模 m 同余于$\{1,2,\cdots,m-1\}$中的某一个,由抽屉原理,存在b_i,b_j模 m 同余,故而存在若干个,使得它们的和为 m 的倍数.

(ii)当 $m>2$ 时,$\varphi(m)$为偶数,并且设$\{a_1,\cdots,a_{\varphi(m)}\}$为模$m$的简化剩余系中所有元素,则$a_i+a_{\varphi(m)+1-i}=m$,从而$\sum\limits_{i=1}^{\varphi(m)}a_i=\frac{m\varphi(m)}{2}$.故而必然是 m 的倍数. $\square$

6. (i)模 $2p$ 的非负简化剩余系为$\{1,3,5,\cdots,p-2,p+2,\cdots,2p-1\}$.

(ii)模 p 的任何一个简化剩余系都同余于 p 的一个非负简化剩余系. 设 g 为模 p 的一个原根,所以$\left(\frac{g}{p}\right)=-1$,又因为勒让德符号是乘性的.所以$\left(\frac{g^k}{p}\right)=(-1)^k$,

在集合$\{0,1,\cdots,p-1\}$中一半是奇数,一半是偶数,从而模 p 的二次剩余和二次非剩余各占一半. $\square$

7.令$f(t)=1, g(t)=\log^3 t, F(x)=[x]$.

所以

$$\sum_{n\le x}\log^3 n=[x]\log^3 x-\int_1^x [t](\log^3 t)'dt=x\log^3 x-3\int_1^x \log^2 t dt+O(\log^3 x)$$

简单计算可知

$$\sum_{n\le x}\log^3 n=x\log^3 x-3x\log^2 x+6x\log x-6x+O(\log^3 x).$$

$\square$

8.首先$\frac{(mp)!}{k!p^k}=(p-1)!(p+1)\cdots(2p-1)\cdots(tp+1)\cdots(tp+p-1)\cdots(mp-p+1)\cdots(mp+p-1)$. 注意到$(tp+1)\cdots(tp+p-1)\equiv(p-1)!\equiv-1 \pmod p$,从而同余式$\frac{(mp)!}{m!p^m}\equiv(-1)^m \pmod p$成立. $\square$

9.(i)充分性: g 为模 p^2 的原根,所以$g^{p-1}\not\equiv 1 \pmod{p^2}$.又因为 g 为模 p 的原根,所以 $g^{p-1}\equiv 1 \pmod p$,从而必有$v_p(g^{p-1}-1)=1$.

必要性：设 g 模 p^2 的阶为 d ,从而$g^d\equiv 1 \pmod{p^2}$,特别我们还有$g^d\equiv 1 \pmod p$. 由于 g 为模 p 的原根,所以$p-1|d$,另一方面$d|\varphi(p^2)$且因为$v_p(g^{p-1}-1)=1$,所以$d\neq p-1$,从而$d=\varphi(p^2)=p^2-p$.从而 g 为模 p^2 的原根.

(ii)先证 g 也是模 p 的一个原根.设 g 模 p 的阶为 d ,则 $g^d\equiv 1 \pmod p$,从而 $g^d=kp+1$.所以有 $g^{pd}=(kp+1)^p=1+p^2K$.这表明 $g^{pd}\equiv 1 \pmod{p^e}$. 由 g 为模 p^e 的一个原根,所以 $d=p-1$. 故而 g 也是模 p 的原根.由定理5.2.2, g 模 p^k 的阶为 $(p-1)p^{k-1}=\varphi(p^k)$,所以 g 也是模 p^k 的原根,其中 $k\ge 2$. $\square$

10.分两种情况讨论. (i).$p\nmid a+b$,注意到$a^{p^k}\equiv a \pmod p$,所以$a^{p^k}+b^{p^k}\equiv a+b\not\equiv 0 \pmod p$,从而在这种情况下$v_p(a^{p^k}+b^{p^k})=0$.

(ii).$p\mid a+b$,令$b=tp-a$,所以$a^{p^k}+b^{p^k}=a^{p^k}+(tp-a)^{p^k}=\sum_{i=1}^{p^k}\binom{p^k}{i}(tp)^i a^{p^k-i}$. 注意到,里面每个单项的$p$-adic赋值为$v_p((tp)^i)+v_p(\binom{p^k}{i})\ge i+\frac{\sigma(p^k-i)+\sigma(i)-1}{p-1}=i+\frac{(p-1)k+1-1}{p-1}=i+k$,由于$i\ge 1$,从而在这种情况下$v_p(a^{p^k}+b^{p^k})>k$. $\square$

11.设$n = 3^a \prod_{i=0} p_i^{e_i}$,其中$p_i \neq 3$.而$v_p(\binom{3n}{k}) = \frac{\sigma_p(3n-k)+\sigma_p(k)-\sigma_p(3n)}{p-1}$.在$A$中,这些$k$均不被3整除,从而当$p=3$时,$v_3(\binom{3n}{k}) = \frac{\sigma_3(3n-k)+\sigma_3(k)-\sigma_3(3n)}{3-1} = \frac{2a+1)}{2} = a+1$.

当$p \neq 3$时,对任意的p,我们均有$\binom{3n}{p^{v_p(n)}}$在A中,而

$$v_p(\binom{3n}{p^{v_p(n)}}) = \frac{\sigma_p(3n-p^{v_p(n)})+\sigma_p(p^{v_p(n)})-\sigma_p(3n)}{p-1} = 0.$$

所以$\gcd A = 3^{a+1}$. 由于$\gcd(A\cup B) | \gcd A$.所以我们只需对 B 中每个元素计算它们的3-adic赋值.

注意到$\binom{3n+1}{k} = \frac{(3n+1)!}{(3n+1-k)!k!} = \frac{3n+1}{3n+1-k}\binom{3n}{k}$.

又对任意的$k \equiv 2 \pmod 3$,$3n+1, 3n+1-k$均不被3整除,故而$v_3(\binom{3n+1}{k}) = v_3(\binom{3n}{k})$. B 中每个元素计算它们的3-adic赋值也为$a+1$. 所以$\gcd(A\cup B) = 3^{a+1}$. $\square$