# 2013级研究生《信号分析》试题

一、令 $\tilde{\delta}_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，$\tilde{\delta}_\tau(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\tau)$，$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$，

$T/\tau=N$，$N$为大于1的整数，且$\tilde{\delta}_T(t)$、$\tilde{\delta}_\tau(t)$和$f(t)$的傅立叶变换，分别用$\tilde{\Delta}_T(\omega)$、$\tilde{\Delta}_\tau(\omega)$和$F(\omega)$表示，试证明

证明：$\left(F(\omega)\tilde{\Delta}_T(\omega)\right)*\tilde{\Delta}_\tau(\omega)=\left(F(\omega)*\tilde{\Delta}_\tau(\omega)\right)\tilde{\Delta}_T(\omega)$

式中，*表示卷积。

二、设$f(t)\in\Sigma$，$\Sigma$为模拟带限信号空间，假定$n\in\mathbf{Z}$，$T\in\mathbf{R}_+$，$\mathbf{Z}$为整数集，$\mathbf{R}_+$为正实数集。请问：

(1) 在什么条件下，$\{f(t-nT)\}$可以作为$\Sigma$的基集？

(2) 在什么条件下，$f(t-nT)$可以作为$\Sigma$的规范正交基集？并给出之。

三、设$\{\phi_i\}_{i\in\Gamma}$是内积信号$S$的线性子空间$V$的正交规范化基集，对$S$中的任意信号$f$，求其在$V$中的最佳估计$\hat{f}$，并证明$\hat{f}\perp f-\hat{f}$。

四、已知$\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{m\times n}$是列线性无关的$m\times n$（$m>n$）阶实矩阵，$\mathbf{x}$和$\mathbf{b}$分别$n$维列向量和$m$维列向量，试用框架算子理论解释线性方程组$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$的最小二乘解。

五、若$C=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{-1}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega<\infty$，记$W_f(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$，

$W_g(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$。上注标*表示复共轭

试证明，$\forall f,g\in L^2(R)$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(b,a)W_g^*(b,a)\frac{da}{a^2}db=<f,g>$$

式中$<f,g>=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)dt$表示$L^2(R)$空间的内积。

# 四川大学研究生试卷

院（所） 电子信息学院 学号2013222050088 姓名 张世鹏 记分

课程名称 信号分析 教师签名 考试 2014年 1月15日

一、由题知：$(F(w)\cdot\hat{\Delta}_T(w)) * \tilde{\Delta}_\tau(w) = \cancel{F(w)\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(w-nT)}$

$\cancel{=[F(w)\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{T}k)] * [\frac{2\pi}{\tau}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{\tau}l)]}$

$\cancel{=[\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}k)\delta(w-\frac{2\pi}{T}k)] * [\frac{2\pi}{\tau}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{\tau}l)]}$

$\cancel{=\frac{(2\pi)^2}{T\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum F(\frac{2\pi}{T}k)\delta(w-\frac{2\pi}{T}k-\frac{2\pi}{\tau}l)}$

$\cancel{=\frac{2\pi^2}{T\tau}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}k)\delta(w-\frac{2\pi}{T}k)}$

由原式可转化为 $[f(t) * \tilde{\delta}_T(t)]\cdot\tilde{\delta}_\tau(t) = [f(t)\cdot\tilde{\delta}_\tau(t)] * \tilde{\delta}_T(t)$

证明：等式左边为 $f(t) * \tilde{\delta}_T(t) \xrightarrow{F} F(w)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{T}m) = \frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}m)\delta(w-\frac{2\pi}{T}m)$

所以 $(f(t) * \tilde{\delta}_T(t))\tilde{\delta}_\tau(t) \xrightarrow{F} \frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}m)\delta(w-\frac{2\pi}{T}m) * \frac{2\pi}{\tau}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{\tau}r)\cdot\frac{1}{2\pi}$

$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{T}m-\frac{2\pi}{\tau}r)$ ① 又 $\frac{T}{\tau}=N$

所以 ①式$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{T}m-\frac{2\pi}{T}Nr)$

令 $m=p+Nq$，$p=0\sim N-1$，$q$为整数，则

①式$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}p+\frac{2\pi}{T}Nq)\delta(w-\frac{2\pi}{T}p-\frac{2\pi}{T}Nq)$

$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{p=0}^{N-1}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\frac{2\pi}{T}p)\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(w-\frac{2\pi}{T}p)$ ②

等式右边$=f(t)\cdot\tilde{\delta}_\tau(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}F(w) * \frac{2\pi}{\tau}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{\tau}r)$

$=\frac{1}{2\pi}F(w) * \frac{2\pi}{\tau}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(w) = \frac{1}{\tau}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(w)$

$\therefore (f(t)\cdot\tilde{\delta}_\tau(t)) * \tilde{\delta}_T(t) \Rightarrow \frac{1}{\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(w)\cdot\frac{2\pi}{T}\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{T}}(w)$

$=\frac{2\pi}{T\tau}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(w)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{T}m) = \frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\frac{2\pi}{T}m)\delta(w-\frac{2\pi}{T}m)$ ③

令 $m=k+Nq$，$k=0\sim N-1$，$q$为整数，则 ③$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}F(\frac{2\pi}{T}k+\frac{2\pi}{T}Nq)\delta(w-\frac{2\pi}{T}k-\frac{2\pi}{T}Nq)$

$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\frac{2\pi}{T}k)\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(w-\frac{2\pi}{T}k)$ ④



$\cancel{=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\frac{2\pi}{T}k)\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}}$

由③=④可知 $[f(t) * \tilde{S_T}(t)] \cdot \tilde{S_1}(t) = [f(t) \cdot \tilde{S_1}(t)] * \tilde{S_T}(t)$

转化为频域可得 $(F(w) \cdot \hat{S_T}(w)) * \hat{S_1}(w) = (F(w) * \hat{S_1}(w)) \hat{S_T}(w)$

令 $\tilde{\Delta_T}(w) = \tilde{S_T}(w)$ $\tilde{\Delta_1}(w) = \tilde{S_1}(w)$，则可证 $(F(w) \cdot \tilde{\Delta_T}(w)) * \hat{\Delta_1}(w) = [F(w) * \tilde{\Delta_1}(w)] \tilde{\Delta_T}(w)$

二.1.(1) 假设 $f(t-nT)$ 可作为 $\Sigma$ 的一组基，那么 $f(t-nT)$ 线性无关，记 $f(t-nT)$ 为 $f_n(t-nT)$

那么 $f = \sum_n a_n f_n(t-nT)$，则已知 $f$. $f_n(t-nT)$ 时，可以确定系数 $a_n$.

当基元素为有限数目时，可以采用内积计算之.

① $\langle f, f_m(t-mT)\rangle = \sum_n a_n \langle f_n(t-nT), f_m(t-nT)\rangle$ (2)

即 $\langle f, f_1(t-T)\rangle = \sum_n a_n \langle f_n(t-nT), f_1(t-T)\rangle$

$\langle f, f_2(t-2T)\rangle = \sum_n a_n \langle f_n(t-nT), f_2(t-2T)\rangle$

......

而

② $\langle f, f\rangle = \langle \sum_n a_n f(t-nT), \sum_n a_n f_m(t-mT)\rangle = \sum_n \sum_m a_n a_m^* \langle f_n(t-nT), f_m(t-mT)\rangle$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_n)^* \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_2, f_1\rangle & \cdots & \langle f_m, f_1\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle f_1, f_n\rangle & \langle f_2, f_n\rangle & \cdots & \langle f_m, f_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$ (4)

将 $\begin{bmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_2, f_1\rangle & \cdots & \langle f_m, f_1\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle f_1, f_n\rangle & \langle f_2, f_n\rangle & \cdots & \langle f_m, f_n\rangle \end{bmatrix}$ 记为 $\mathcal{Y}f$

因为 $\langle f, f\rangle \geq 0$，而 $a_n a_m^* > 0$，只要 $\langle f, f\rangle \neq 0$，那么必有 $\mathcal{Y}f > 0$，即 $\mathcal{Y}f$ 为正定矩阵.

把(2)式写为矩阵形式，有 $\begin{bmatrix} \langle f, f_1\rangle \\ \langle f, f_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f, f_m\rangle \end{bmatrix} = \mathcal{Y}f \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 因为 $\langle f, f_m(t-mT)\rangle \geq 0$，只要 $\langle f, f_m(t-mT)\rangle \neq 0$，那么当 $\mathcal{Y}f$ 为正定矩阵时，即可求出 $a_n$

$a_n = \mathcal{Y}f^{-1} \begin{bmatrix} \langle f_1, f_1\rangle \\ \langle f_1, f_2\rangle \\ \vdots \\ \langle f_1, f_m\rangle \end{bmatrix}$，且 $\mathcal{Y}f$ 为线性无关矩阵. 由此可知 $f = \sum_n a_n f(t-nT)$ 这个表

达式是唯一的. $f \to a_n$ 可看做一对变换对，这时 $f(t-nT)$ 为线性无关基组.

若表达式不唯一，即 $f$ 由 $f(t-nT)$ 表示出来，但有不同系数 $a$. 即 $f_1 = \sum_n a_n f(t-nT)$

$f_2 = \sum_n a_m f(t-nT)$ $\Rightarrow f_1 - f_2 = \sum_n f(t-nT)(a_n - a_m)$ 应有 $a_n = a_m$

否则 $a_n$ 与 $f$ 之间无一一对应关系. 若 $\langle f, f\rangle = 0$，由(4)式知 $\langle f, f\rangle = \sum_n a_n a_m^* \mathcal{Y}f$

那当 $\mathcal{Y}f = \langle f_n(t-nT), f_m(t-mT)\rangle$ 线性无关时，必有 $a_n = 0$

(2) 假设定 $f(t-nT)$ 为 $\Sigma$ 空间的标准正交基，$n\in Z$，那么 $f(t)\in\Sigma$ 可表示为，令 $f(t-m)=\phi(t-m)$

$$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m\phi(t-m)\text{，其中 } F_m=\langle f(t),\phi(t-m)\rangle \xrightarrow{F} F(jw)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jmw}\phi(jw)=\phi(jw)\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jmw}\text{，令 }\hat{F}(jw)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jmw}$$

于是有 $F(jw)=\hat{F}(jw)\,\phi(jw)$

$$\|f(t)\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m\phi(t-m)\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k^*\phi_k^*(t-k)dt$$

$$(1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_mF_k^*\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t-m)\phi^*(t-k)dt \quad \because \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t-m)\phi^*(t-k)dt=\begin{cases}1 & m=k\\ 0 & m\neq k\end{cases}$$

$\therefore$ (1)式 $=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2$

又 $$\|f(t)\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(jw)|^2dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{F}(jw)|^2|\phi(jw)|^2dw \quad (2)$$

令 $w=v+2\pi l \qquad v=-\pi,\pi \quad l=-\infty,\infty$

$$(2)\text{式}=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{F}(jv+j2\pi l)|^2|\phi(jv+j2\pi l)|^2dv \qquad (3)$$

$$\because \hat{F}(jv+j2\pi l)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-j(v+2\pi l)m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jvm}$$

$$\therefore |\hat{F}(jv+j2\pi l)|^2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_mF_k^*e^{-jm(v+k)}$$

又 $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j(m+k)v}dv=\begin{cases}1 & k=m\\ 0 & k\neq m\end{cases} \quad \therefore \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\hat{F}(jv+j2\pi l)|^2dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_mF_k^*e^{-jm(v+k)}dv=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2$$

$$\therefore (3)\text{式}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\phi(jv+j2\pi l)|^2$$

由(1)(3)可得 $\sum_{l=-\infty}^{\infty}|\phi(jv+j2\pi l)|^2=1$，即在此条件下 $f(t-nT)$ 作为 $\Sigma$ 的标准正交基集

三、由题知. $$\|f-\sum_{i=1}^{M}c_i\phi_i\|^2=\langle f-\sum_{i=1}^{M}c_i\phi_i,\ f-\sum_{j=1}^{M}c_j\phi_j\rangle$$

$$=\langle f,f\rangle-\sum_{i=1}^{M}c_i^*\langle f,\phi_i\rangle-\sum_{i=1}^{M}c_i\langle f,\phi_i\rangle^*+\sum_{i=1}^{M}|c_i|^2$$ ~~……~~ 因 $\{\phi_i\}$ 为正交基

$$=\langle f,f\rangle+\sum_{i=1}^{M}\{|c_i-\langle f,\phi_i\rangle|^2-|\langle f,\phi_i\rangle|^2\}$$

可得当 $c_i=\langle f,\phi_i\rangle$ 时，$\|f-\sum_{i=1}^{M}c_i\phi_i\|^2$ 最小，为 $\|f-\sum_{i=1}^{M}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\|^2$

$$=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{M}|\langle f,\phi_i\rangle|^2$$

令 $\hat{f}=\sum_{i=1}^{M}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i \qquad \hat{f}$ 为最佳估计

令 $e=f-\hat{f}$，则 $e=f-\hat{f}=f-\sum_{i=1}^{M}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i$

从而 $$\langle e,\hat{f}\rangle=\langle f-\hat{f},\hat{f}\rangle=\langle f-\sum_{i=1}^{M}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i,\ \sum_{j=1}^{M}\langle f,\phi_j\rangle\phi_j\rangle$$

$$=\sum_{j=1}^{M}\langle f,\phi_j\rangle^*\langle f,\phi_j\rangle-\sum_{i=1}^{M}\langle f,\phi_i\rangle\sum_{j=1}^{M}\langle f,\phi_j\rangle^*\langle\phi_i,\phi_j\rangle$$

当且仅当 $i=j$ 时，$\sum_{i=1}^{M}\langle f,\phi_i\rangle\sum_{j=1}^{M}\langle f,\phi_j\rangle^*\langle\phi_i,\phi_j\rangle$ 不为0，所以有

$= \sum_{i=1}^{m} |\langle f, \phi_i\rangle|^2 - \sum_{i=1}^{m} |\langle f,\phi_i\rangle|^2 = 0 \Rightarrow \langle e, \hat{f}\rangle = 0$ 即 $\hat{f} \perp f-\hat{f}$

四，由题知 $A_{m\times n}$ $x_{n\times 1}$ $b_{m\times 1}$

则设 $A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$ $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots a_{in})^T$ $b_j = \langle x, a_j\rangle$ $j = 1 \sim m$

则 $b^H = x^H A^H \Rightarrow x^H A^H A x = b^H b = \sum_{i=1}^{m} |\langle x_i, a_i\rangle|^2$

令 $x^H A^H A x = x^H U^H \Sigma U x = W^H \Sigma W$ （令 $W = Ux$）

则 $\lambda_{max} \cdot W^H W \geq b^H b$ $\lambda_{min} W^H W \leq b^H b$

$\lambda_{max}$ $\lambda_{min}$ 为对角阵 $\Sigma$ 的特征值.

即 $\lambda_{min} W^H W \leq b^H b = \sum |\langle x_i, a_i\rangle|^2 \leq \lambda_{max} W^H W$

又 $W^H W = x^H U^H U x = x^H x = \|x\|^2$ $U^{-1} = U^H$

$\lambda_{min} \|x\|^2 \leq \sum |\langle x, a_i\rangle|^2 \leq \lambda_{max} \|x\|^2$

即 $\{a_i\}$ 为空间的一个框架，且 $Ax = b$

对框架知，存在拟逆 $\hat{U}^{-1} = (U^* U)^{-1} U^*$，类比于此拟逆，可有

$x = (A^H A)^{-1} A^H b$. 此为线性方程组的最小二乘解.

五，证明：$W_f(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = f(b) * \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{-b}{a}\right)$

$\xrightarrow{F} \sqrt{a}\hat{f}(w)\hat{\psi}^*(-aw) = \sqrt{a}\hat{f}(w)\hat{\psi}^*(aw)$

同理 $W_g(b,a) \xrightarrow{F} \sqrt{a}\hat{g}(w)\hat{\psi}^*(aw)$

$\therefore \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_f(b,a) W_g^*(b,a) \frac{da}{a^2} db = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\sqrt{a}\hat{\psi}(aw) e^{jwb} \cdot$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\hat{g}(w)\sqrt{a}\hat{\psi}(aw) e^{-jbw}] dw \cdot \frac{da}{a^2} \cdot db$

$= \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{jwb} dw \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}^*(w) e^{-jwb} dw ] db \cdot \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\psi}^*(aw)\hat{\psi}(aw)\, da}{a}$

$= \int_{-\infty}^{\infty} f(b) g^*(b) db \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(aw)|^2}{aw} d(aw)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw} = \int_{-\infty}^{\infty} f(b) g^*(b) db$ ①

又 $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt$ ②

综合 ① ② 知 $\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_f(b,a) W_g^*(b,a) \frac{da}{a^2} db = \langle f, g\rangle \quad \forall f, g$

$\cdots ds = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(s\omega)}{s\omega}\omega\, ds = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(s\omega)}{s\omega} d(s\omega)$.

令 $s\omega=\lambda$，上式 $=\int_0^{\infty}\frac{\hat{\varphi}(\lambda)}{\lambda}d\lambda$

故①式 $=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot\frac{\int_0^{\infty}\frac{\hat{\varphi}(\lambda)}{\lambda}d\lambda}{\int_0^{\infty}\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\omega}d\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega=f(t)$

1. ∵ $\{\phi_i\}$ 和 $\{\theta_i\}$ 为信号空间 $X$ 的对偶基，则对 $\forall f,g\in X$ 有:

$f=\sum_i\langle f,\phi_i\rangle\theta_i=\sum_i\langle f,\theta_i\rangle\phi_i$

$g=\sum_i\langle g,\phi_i\rangle\theta_i=\sum_i\langle g,\theta_i\rangle\phi_i$

$\langle f,g\rangle=\langle\sum_i\langle f,\phi_i\rangle\theta_i,g\rangle=\sum_i\langle f,\phi_i\rangle\langle\theta_i,g\rangle=\sum_i\langle f,\phi_i\rangle\langle g,\theta_i\rangle^*$

2. (1). ∵ $\{\phi(n-m)\}$ 为离散时间信号空间 $X$ 的标准正交基.

则 $\forall f(n)\in X$ 有: $f(n)=\sum_i F_i\phi(n-i)$

式中 $F_i=\langle f(n),\phi(n-i)\rangle$

假定 $\phi(n)\xleftrightarrow{F}\Phi(e^{j\omega})$，则 $\phi(n-i)\xleftrightarrow{F}e^{-ji\omega}\Phi(e^{j\omega})$，从而有 $f(n)$ 的傅里叶变换为:

$$F(e^{j\omega})=\sum_i F_i e^{-ji\omega}\Phi(e^{j\omega})$$

则 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\omega})|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi(e^{j\omega})|^2\sum_i\sum_l F_iF_l^*e^{-j(i-l)\omega}d\omega=\sum_i|F_i|^2|\Phi(e^{j\omega})|^2$

而 $\sum_i|F_i|^2=\langle\sum_i f(n)\phi^*(n-i),\sum_i f(m)\phi^*(n-i)\rangle=\sum_i\sum_m f(n)f^*(m)\langle\phi^*(n-i),\phi^*(n-m)\rangle=\sum_m|f(m)|^2$

据帕斯瓦尔定理有: $\sum_n|f(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(e^{j\omega})|^2d\omega$

$\therefore\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(e^{j\omega})|^2d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{j\omega})|^2d\omega\,|\Phi(e^{j\omega})|^2$

$\Rightarrow|\Phi(e^{j\omega})|^2=1\ \Rightarrow\ \Phi(e^{j\omega})=1$

$\therefore \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|F(e^{\ldots}$

$\Rightarrow |\Phi(e^{iw})|^2 = 1 \Rightarrow \Phi(e^{iw}) = 1$

$\ldots 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$$\ldots \frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi}{N\tau}(q+Nr)\right)\delta\left(w-\frac{2\pi}{N\tau}(q+Nr)-\frac{2\pi}{\tau}k\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi}{N\tau}q+\frac{2\pi}{\tau}r\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(w-\frac{2\pi}{N\tau}q-\frac{2\pi}{\tau}r-\frac{2\pi}{\tau}k\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi}{N\tau}q+\frac{2\pi}{\tau}r\right)\tilde{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(w-\frac{2\pi}{N\tau}q-\frac{2\pi}{\tau}r\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{2\pi}{N\tau}q+\frac{2\pi}{\tau}r\right)\tilde{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(w-\frac{2\pi}{N\tau}q\right)$$

$$=\frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\tilde{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(w-\frac{2\pi}{T}q\right)$$

综上，$[f(t)*\tilde{\delta}_T(t)]\tilde{\delta}_\tau(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\tilde{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(w-\frac{2\pi}{T}q\right)$ ②

对②式右端进行傅里叶反变换有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\tau T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\tilde{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(w-\frac{2\pi}{T}q\right)e^{jwt}\,dw$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{q=0}^{N-1}F_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\tau}\tilde{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(w-\frac{2\pi}{T}q\right)e^{jwt}\,dw=\frac{1}{T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\tilde{\delta}_\tau(t)\,e^{j\frac{2\pi}{T}qt}$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\tilde{\delta}_\tau(t)\,e^{j\frac{2\pi}{T}qt}=\frac{1}{T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\tau)\,e^{j\frac{2\pi}{T}qt}\right]$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{q=0}^{N-1}\tilde{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\tau)\,e^{j\frac{2\pi}{T}q\tau m}=\frac{1}{T}\sum_{q=0}^{N-1}F_{\frac{2\pi}{\tau}}\left(\frac{2\pi}{T}q\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\tau)\,e^{j\frac{2\pi}{N}qm}$$ ③