2. (1) 设$\{\phi(n-m)\}$为一离散时间信号空间的正交规范基，其中n,m取整数，假定$\phi(n) \xleftrightarrow{FT} \Phi(e^{jw})$，试证明：$\Phi(e^{jw})=1$

(2) 设$\{\phi(t-m)\}$为一连续时间信号空间的正交规范基，其中m取整数，假定$\phi(t) \xleftrightarrow{FT} \Phi(w)$，试证明：

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\Phi(w+2\pi k)|^2=1$

解 (1) ∵$\{\phi(n-m)\}$为离散时间信号空间X的正交规范基，于是$\forall f(n)\in X$，有$f(n)=\sum_m F_m\phi(n-m)$

∵$\{\phi(n-m)\}$为正交规范基，则$F_m=\langle f(n),\phi(n-m)\rangle$

频域分析：∵$\phi(n)\xleftrightarrow{FT}\Phi(e^{jw})$，则$\phi(n-m)\xleftrightarrow{FT}e^{-jwm}\Phi(e^{jw})$，从而有$f(n)$的傅里叶变换为：

$$F(e^{jw})=\sum_m F_m e^{-jwm}\Phi(e^{jw})$$

讨论能量：∵$\{\phi(n-m)\}$是正交规范基，根据帕斯瓦尔定理$\langle f,f\rangle=\|f\|^2=\sum_n|f(n)|^2=\sum_m|F_m|^2$

$$\sum_n|f(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{jw})|^2dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_m F_m e^{-jwm}\Phi(e^{jw})\Big]\Big[\sum_m\sum_i e^{-jwi}\Phi(e^{jw})\Big]^*dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\Phi(e^{jw})|^2\sum_m\sum_i F_mF_i^*e^{-jw(m-i)}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{jw})|^2dw$$

先讨论 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_m\sum_i F_i^* e^{-jw(m-i)}dw=\sum_m|F_m|^2=\sum_n|f(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(e^{jw})|^2dw$

$\Rightarrow|\Phi(e^{jw})|^2=1\Rightarrow\Phi(e^{jw})=1$

(2) ∵$\{\Phi(t-m)\}$为连续时间信号空间X的正交规范基，于是$\forall f(t)\in X$ 有$f(t)=\sum_m F_m\Phi(t-m)$

∵$\{\Phi(t-m)\}$为正交规范基，则$f_m=\langle f(t),\Phi(t-m)\rangle$

频域分析：∵$\Phi(t)\xleftrightarrow{FT}\Phi(w)$，则$\Phi(t-m)\xleftrightarrow{FT}e^{-jwm}\Phi(w)$，从而$f(t)$的傅里叶变换为：

$$F(w)=\sum_m F_m e^{-jwm}\Phi(w)$$

讨论能量：∵$\{\Phi(t-m)\}$是正交规范基，根据帕斯瓦尔定理$\langle f,f\rangle=\|f\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2dw$

$$\text{与之相} \int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\sum_m F_m\Phi(w)\Big]\Big[\sum_i e^{-jwi}\Phi(w)\Big]^*dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(w)|^2\sum_m\sum_i F_mF_i^*e^{-jw(m-i)}dw$$

令$w=v+2\pi q$，其中$v=-\pi,\pi$，q为$-\infty\sim+\infty$.

$$\text{则上式}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}|\Phi(v+2\pi q)|^2\sum_m\sum_i F_mF_i^*e^{-j(m-i)(v+2\pi q)}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\sum_m\sum_i F_mF_i^*e^{-j(m-i)v}dv=\sum_m|F_m|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(w)|^2dw$$

先讨论 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_m\sum_i F_mF_i^*e$

$\Rightarrow\sum_{q=-\infty}^{+\infty}|\Phi(w+2\pi q)|^2=1$ 即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\Phi(w+2\pi k)|^2=1$

5、~~证~~考虑方程 $Ax=b$，其中 $A=(a_{ij})_{n\times m}$ 为 $n\times m$ 阶已知实矩阵，假定 $n\geq m$ 且 A 线性无关，b 为 n 维已知列向量，通常称 $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$ 为方程 $Ax=b$ 的最小二乘法解，式中上标"T"表示转置，试用框架理论推导此解。

解：由题设条件知：$x\in R^m$，$b\in R^n$。令 $\vec{a_i}=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots,a_{im})^T$ $i=1,2,\cdots,n$

由于 A 线性无关，故 A 的秩为 m，即 A 的行向量组线性相关。∴ $\{\vec{a_i}\}$ 向量组线性相关。

则由 $A\vec{x}=\vec{b}$ 可得：$b_j=\vec{a_j}^T\vec{x}=\langle\vec{x},\vec{a_j}\rangle$，$j=1,\cdots,n$

∴ b_j 已知，a_j 也已知，则问题转化为：已知 $\{\vec{a_j}\}_m$，$\langle\vec{x},\vec{a_j}\rangle$ 求 x。

这就类似于框架理论中求逆~~扰~~的问题，即已知框架 $\{\varphi_n\}_{n\in p}$，$\langle f,\varphi_n\rangle_{n\in p}$，求 f P33

则根据框架理论有：记 U^* 为伴随框架算子，它满足 $\langle U^*x,f\rangle=\langle x,Uf\rangle$，下面讨论 $(U^*U)^{-1}$ 的存在性，这等价于证 U^*U 是单射且为满射 → (框架 $\{\varphi_n\}_{n\in p}$ 线性相关时，框架~~算子~~ U 的所有逆中范数最小的逆为 U 的拟逆，记为 $\tilde{U}^{-1}$，当 $x\in \mathrm{Img}\,U^\perp$ 时有 $\tilde{U}^{-1}x=0$)

对于 $\forall x\in L^2$ 有 $\langle U^*Ux,f\rangle=\langle Ux,Uf\rangle$，特别地，当 $x=f$ 时，有 $\langle U^*Uf,f\rangle=\langle Uf,Uf\rangle$ (当且仅当 $f=0$ 时，$Uf=0$，$U^*Uf=0$) 反之，$U^*Uf=0$ 时，也有 $f=0$，故满足法则 U^*U 的映射为单射且为满射。

构造算子 $\tilde{U}^{-1}=(U^*U)^{-1}U^*$。

则当 $x\in \mathrm{Img}\,U$ 时，$(U^*U)\tilde{U}^{-1}Uf=U^*Uf=U^*Ux \Rightarrow \tilde{U}^{-1}x=f$，$Uf=x$

当 $x\in \mathrm{Img}\,U^\perp$ 时，对于 $Uf\in X$ (X 为希尔伯特空间 故 X 中无相互正交元素) 有 $\langle U^*x,f\rangle=\langle x,Uf\rangle=0 \Rightarrow x\perp Uf$

由 f 的任意性，有 $U^*x=0$。

∴ $(U^*U)\tilde{U}^{-1}x=0$.

综上有 $(U^*U)\tilde{U}^{-1}x=U^*x$，由此有 $\tilde{U}^{-1}=(U^*U)^{-1}U^*$.

此即为所要求的拟逆.

对 $\vec{z}$ 对任意 l 维的向量 $\vec{z}$，$\vec{w}$ 有：$\langle\vec{z},\vec{w}\rangle=\sum_{i=1}^{l} z_iw_i^*=\vec{z}^H\vec{W}^H$ (内积)

而 $\langle A\vec{x},\vec{y}\rangle=\vec{y}^H(A\vec{x})=(A^H\vec{y})^H\vec{x}=\langle\vec{x},A^H\vec{y}\rangle$ ∴ A 与 A^H 互为伴随算子.

对实矩阵而言，$A^H=A^T$。在 $Ax=b$ 无解条件下，设 $Ax=b+e$，则 $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$，易证 $Ax-b=0$，∴ ~~由~~

∴ $Ax=b$ 的最小二乘法解为 $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$

又∵ $\langle f,\varphi_n\rangle=Uf$

∴ $U=[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n]^H$

∴ $A=U$

又∵ $\langle A^*\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle x,\vec{y}A\rangle$

∴ $A\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=A^H\langle x,\vec{y}\rangle$

∴ $A=(A^H)^*$

∴ $x=(A^*A)^{-1}A^*b=(A^HA)^{-1}A^Hb=(A^TA)^{-1}A^Tb$

5. 设定义了内积的信号空间 $X=E\cup S$，且 $E\cap S=\phi$，其中 ϕ 表示空集。通常可以将 E 和 S 分别视为 X 误差子空间和闭线性(信号)子空间。假定通过观测得到 $x_1, x_2\in X$，请确定最佳线性滤波器系数 a_1, a_2，使滤波器的输出 $a_1x_1+a_2x_2$ 与 S 中某个给定的信号 S 的距离最短。

解：令 $x=a_1x_1+a_2x_2=\sum_{i=1}^{2}a_ix_i$，则 $s=x+e$ $\quad\langle e,x\rangle=0$.

$\langle s,x\rangle=\langle s,\sum_{i=1}^{2}a_ix_i\rangle=\sum_{i=1}^{2}a_i\langle s,x_i\rangle=\langle x+e,x\rangle=\langle x,x\rangle=\langle\sum_{i=1}^{2}a_ix_i,\sum_{j=1}^{2}a_jx_j\rangle$

令 $r_{sx}=(\langle s,x_1\rangle,\langle s,x_2\rangle)^T$，记 $R_{xx}=\{R_{ij}\}_{2\times2}=\{\langle x_i,x_j\rangle\}$

则 $\langle s,x\rangle=\sum_{i=1}^{2}a_i^*\langle s,x_i\rangle=\alpha^H r_{sx}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_ia_j^*\langle x_i,x_j\rangle=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_ia_j^*\langle x_i,x_j\rangle=\sum_{j=1}^{2}a_j^*\langle\sum_{i=1}^{2}a_ix_i,x_j\rangle$

$$=\alpha^H\begin{bmatrix}\langle\sum_{i=1}^{2}a_ix_i,x_1\rangle\\ \langle\sum_{i=1}^{2}a_ix_i,x_2\rangle\end{bmatrix}=\alpha^H\begin{bmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_2,x_1\rangle\\ \langle x_1,x_2\rangle & \langle x_2,x_2\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\alpha^H R_{xx}^{T}\alpha=\alpha^H R_{xx}\alpha\ (R_{xx}=R_{xx}^{H})$$

$\Sigma=\mathrm{diag}\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$，其中 $\sigma_i>0$，$i=1,2$.

埃尔米特矩阵：$A^H=A$，$R_{xx}=U\Sigma U^H$，其中 U 为酉矩阵，即 $U^H=U^{-1}$

将 $R_{xx}=U\Sigma U^H$ 代入 $\alpha^H R_{xx}\alpha=\alpha^H r_{sx}$，并令 $\beta=U^H\alpha$，$\alpha=U\beta$，$\alpha^H=\beta^H U^H$

可以得到 $\alpha^H U\Sigma U^H\alpha=\beta^H\Sigma\beta=\beta^H U^H r_{sx}=\alpha^H r_{sx}$

令 $r=U^H r_{sx}=(\lambda_1,\lambda_2)^T$

则 $\beta^H\Sigma\beta=\sum_{i=1}^{2}\sigma_i|\beta_i|^2=\boxed{\sum_{i=1}^{2}\beta_i^*\beta_i\sigma_i=\sum_{i=1}^{2}\beta_i^*\lambda_i}=\sum_{i=1}^{2}\beta_i^*\begin{bmatrix}\sigma_1 & \\ & \sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\sum_{i=1}^{2}(\beta_i^*\lambda_i-\sigma_i|\beta_i|^2)=0\Rightarrow\beta_i=\frac{\lambda_i}{\sigma_i}$

$\Rightarrow\beta=\Sigma^{-1}U^H r_{sx}\Rightarrow\alpha=U\beta=U\cdot\Sigma^{-1}\cdot U^H\cdot r_{sx}=R_{xx}^{-1}\cdot r_{sx}$

$$\Rightarrow\alpha=R_{xx}^{-1}\cdot r_{sx}=\begin{bmatrix}\langle x_1,x_1\rangle & \langle x_2,x_1\rangle\\ \langle x_1,x_2\rangle & \langle x_2,x_2\rangle\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\langle s,x_1\rangle\\ \langle s,x_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\langle x_2,x_2\rangle & -\langle x_2,x_1\rangle\\ -\langle x_1,x_2\rangle & \langle x_1,x_1\rangle\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle s,x_1\rangle\\ \langle s,x_2\rangle\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\langle s,x_1\rangle\langle x_2,x_2\rangle-\langle s,x_2\rangle\langle x_2,x_1\rangle\\ \langle s,x_2\rangle\langle x_1,x_1\rangle-\langle s,x_1\rangle\langle x_1,x_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\|x_2\|^2\langle s,x_1\rangle-\langle s,x_2\rangle\langle x_2,x_1\rangle\\ \|x_1\|^2\langle s,x_2\rangle-\langle s,x_1\rangle\langle x_1,x_2\rangle\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_1=\|x_2\|^2\langle s,x_1\rangle-\langle s,x_2\rangle\langle x_2,x_1\rangle$

$a_2=\|x_1\|^2\langle s,x_2\rangle-\langle s,x_1\rangle\langle x_1,x_2\rangle$

如果 $\{a_n\}$ 为正交规范基：$a_1=\langle s,x_1\rangle$，$a_2=\langle s,x_2\rangle$

如果 $\{a_n\}$ 不为正交规范基：$a_1=\|x_2\|^2\langle s,x_1\rangle-\langle s,x_2\rangle\langle x_2,x_1\rangle$

$a_2=\|x_1\|^2\langle s,x_2\rangle-\langle s,x_1\rangle\langle x_1,x_2\rangle$

3. 若$\{\phi_i\}$和$\{\theta_i\}$是信号空间X的对偶基，也就是$\langle \phi_i, \theta_j \rangle = \delta(i-j)$，这里$\delta(n)$表示单位离散冲击信号，试证明：$X$中的任意信号$f$和$g$，有$\langle f, g\rangle = \sum_i \langle f, \phi_i\rangle \langle g, \theta_i\rangle^*$，这里上注标$*$标识复共轭

解：∵$\{\theta_i\}$和$\{\phi_i\}$互为对偶基，则对于$\forall f \in X$，f可唯一表示为：~~$f=\sum_i$~~ $f=\sum_i F_i \theta_i$

由唯一性可以将f和F_i视为一对变换对，记作$f \leftrightarrow F$，其中反变换为$f = \sum_i F_i \theta_i$

又∵$\{\phi_i\}$和$\{\theta_i\}$互为对偶基，则正变换为$F_i = \langle f, \phi_i\rangle$，则：$f = \sum_i \langle f, \phi_i\rangle \theta_i$

$$\langle f, g\rangle = \langle \sum_i \langle f, \phi_i\rangle \theta_i, \sum_j \langle g, \theta_j\rangle \phi_j \rangle = \sum_i\sum_j \langle f, \phi_i\rangle \langle g, \theta_j\rangle^* \langle \theta_i, \phi_j\rangle$$

由于$\{\theta_i\}$和$\{\phi_j\}$互为对偶基，即$\langle \phi_i, \theta_j\rangle = \delta(i-j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

则上式：$\langle f, g\rangle = \sum_j\sum_i \langle f, \phi_i\rangle \langle g, \theta_j\rangle^* \langle \phi_j, \theta_i\rangle^* = \sum_i \langle f, \phi_i\rangle \langle g, \theta_i\rangle^*$

综上所述，X中任意信号f和g，有$\langle f, g\rangle = \sum_i \langle f, \phi_i\rangle \langle g, \theta_i\rangle^*$

6. 若ψ是实偶函数，且$C = \int_0^\infty \omega^{-1} \hat{\psi}(\omega) d\omega < \infty$，请证明：对$\forall f(t) \in L^2(R) = \{f(t) \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\}$有

$f(t) = \frac{1}{C}\int_0^\infty Wf(t,s)\frac{ds}{s^{3/2}}$ 其中 $Wf(u,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{s}}\psi(\frac{t-u}{s})dt$，$\psi(t) \xleftrightarrow{FT} \hat{\psi}(\omega)$.

证明：假设等式成立，即$f(t) = \frac{1}{C}\int_0^\infty wf(t,s)\frac{ds}{s^{3/2}}$，则$Wf(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{1}{\sqrt{s}}\psi^*(\frac{\tau - t}{s})d\tau = f(t) * \psi^*(-\frac{t}{s})$

故 $Wf(t,s) \longleftrightarrow \sqrt{s}\hat{f}(\omega)\cdot\hat{\psi}^*(s\omega)$

所以 $f(t) = \frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\sqrt{s}\hat{\psi}^*(s\omega)e^{j\omega t}d\omega\frac{ds}{s^{3/2}}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot\frac{1}{C}\int_0^\infty \frac{\hat{\psi}^*(s\omega)}{s}ds$

∵ψ是实偶小波，∴$\hat{\psi}^*(s\omega) = \hat{\psi}(s\omega)$

$$\int_0^\infty \frac{\hat{\psi}^*(s\omega)}{s}ds = \int_0^\infty \frac{\hat{\psi}(s\omega)}{s}ds = \int_0^\infty \omega\frac{\hat{\psi}(s\omega)}{s\omega}ds = \int_0^\infty \frac{\hat{\psi}(s\omega)}{s\omega}d(s\omega)$$

$\underline{\underline{令 s\omega = \lambda}} \int_0^\infty \frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda}d\lambda$

故 $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot\frac{1}{C}\int_0^\infty\frac{\hat{\psi}^*(s\omega)}{s}ds = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\frac{\int_0^\infty\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda}d\lambda}{\int_0^\infty\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\omega}d\omega}$

$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$.