# 四川大学期末考试试题（闭卷）

(2015–2016学年第 2 学期)　　A 卷

课程号: **201098050** 课序号: **01, 02** 课程名称: 高等代数-**2**(双语) 任课教师: 付昌建 谭友军 张志雄　　成绩:
适用专业年级: **2015**级数学学院各专业 学生人数: **269** 印题份数: **300**　　学号:　　姓名:

**考　生　承　诺**

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：
1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2、不带手机进入考场；
3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注意：满分100分，按题号把解答写在答题纸上．在以下题目中，$\mathbb{F}$ 表示一个数域，$\mathbb{R}$ 表示实数域，$\mathbb{C}$ 表示复数域，$M_n(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的所有 $n$ 阶矩阵组成的线性空间，$|A|$ 表示矩阵 $A$ 的行列式，$A^t$ 为矩阵 $A$ 的转置，$tr(A)$ 为矩阵 $A$ 的迹．

**1．(45分)** 解答下列各题，并简要说明理由：

**(1)** **(10分)** 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{F})$．求矩阵 $A$ 的 **Jordan** 标准形 $J_A$ 及可逆矩阵 $P\in M_3(\mathbb{F})$ 使得 $A=PJ_AP^{-1}$．

**(2)** **(10分)** 设 $f(\lambda)=(\lambda-1)^4(\lambda-2)^2, m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)\in\mathbb{C}[\lambda]$．试写出所有的以 $f(\lambda)$ 为特征多项式且以 $m(\lambda)$ 为极小多项式的矩阵的 **Jordan** 阵．

**(3)** **(10分)** 设$V=M_2(\mathbb{R})$，$(-,-)$ 为 $V$ 上的内积，其中 $(A,B)=tr(AB^t), A,B\in V$．记 $U=\{\begin{pmatrix}a&b\\b&0\end{pmatrix}\mid\forall a,b\in\mathbb{R}\}$ 为 $V$ 的子空间．求 $U$ 的正交补 $U^{\perp}$的一个标准正交基及向量 $\begin{pmatrix}2016&0\\6&26\end{pmatrix}$ 在子空间 $U$ 的正交投影．

**(4)** **(10分)** 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$ 的矩阵 $A$ 的特征值的和为 1，$A$ 的所有特征值的乘积为 $-12$．求 $a,b$ 及 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形．

**(5)** **(5分)** 设 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 为对称矩阵且 $|A|\neq 0$．问 $A$ 与 $A^{-1}$ 是否合同？

**2．(15分)** 设 $V$ 为欧氏空间，$\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 为 $V$ 的一个基且其度量矩阵 $G=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$．

**(1)** **(10分)** 求 $V$ 的一个标准正交基（表示为 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 的线性组合）；

**(2)** **(5分)** 设 $\mathbb{A}$ 为 $V$ 上的线性变换且在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 下的矩阵为 $G$．问 $\mathbb{A}$ 是否为 $V$ 上的对称变换，请说明理由．

**3．(10分)** 设 $V$ 为数域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间，$\mathbb{A}$ 为 $V$ 上的线性变换．证明：存在 $V$ 上的线性变换 $\mathbb{B}$ 使得 $\mathbb{B}\circ\mathbb{A}=0$ 且 $V=\operatorname{Im}\mathbb{A}\oplus\operatorname{Im}\mathbb{B}$．

**4．(15分)**设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，$\mathbb{A}:M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$ 为线性变换，其中$\mathbb{A}(X)=AX,\forall X\in M_n(\mathbb{C})$．

**(1)** **(8分)** 证明：线性变换 $\mathbb{A}$ 与矩阵 $A$ 具有相同的特征值(不计重数)；

**(2)** **(7分)** 设 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 为矩阵 $A$ 的一个特征值，记 $V_{\lambda_0,A}$ 表示矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_0$ 的特征子空间，$V_{\lambda_0,\mathbb{A}}$ 为线性变换 $\mathbb{A}$ 的特征值 $\lambda_0$ 的特征子空间．证明：$\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_0,\mathbb{A}}=n\dim_{\mathbb{C}}V_{\lambda_0,A}$；

**5．(15分)** 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 为首一多项式且次数 $n$ 大于 1．

**(1)** **(5分)** 证明：存在矩阵 $A\in M_n(\mathbb{F})$ 使得 $A$ 的特征多项式 $f_A(x)=f(x)$；

**(2)** **(5分)** 证明：若 $f(x)$ 为不可约多项式，则任意以 $f(x)$ 为特征多项式的两个矩阵都相似；

**(3)** **(5分)** 问 $f(x)$ 为不可约多项式是否为上述命题 **(2)** 成立的充要条件？若不是，请问 $f(x)$ 应满足什么条件，请说明理由．