四川大学期末考试试题（闭卷） A

(2013–2014学年下期)

课程号: 课序号: **0,1** 课程名称: **高等代数-II** 任课教师: **付昌建 卢明 谭友军 王皓** 成绩:
适用专业年级: **2013级数学学院各专业** 学生人数: **250** 印题份数: **280** 学号: 姓名:

考试须知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》．有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理．

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》，《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》．有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理．

注意：满分100分，按题号把解答写在答题纸上．在以下题目中，$\mathbb{F}$表示一个数域，A^T表示矩阵A的转置．

1. (15分)设V与W分别为数域$\mathbb{F}$上的5维与3维线性空间, $f: V \to W$为线性映射且在V及W的某组基下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) (10分)求核空间$\ker f$及像空间$\operatorname{im} f$的维数;
   (b) (5分)证明:存在V的一组基$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_5$及$W$的一组基$\eta_1, \eta_2, \eta_3$使得$f(\epsilon_1) = \eta_1, f(\epsilon_2) = \eta_2, f(\epsilon_3) = \eta_3$.

2. (15分) 设$A = \begin{pmatrix} 0 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 0 & 0 & 2012 & 2013 \\ 0 & 0 & 0 & 2012 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$.
   (a) (10分)求矩阵A的行列式因子及Jordan标准型J_A;
   (b) (5分)问矩阵方程$X^2 = A, X \in M_4(\mathbb{C})$是否有解, 并说明理由.

3. (15分)设A为3阶实对称矩阵且各行元素之和为4,向量$\alpha_1 = (2, -1, -1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T$为线性方程组$AX = 0$的解.
   (a) (4分)证明向量$(1, 1, 1)^T$是A的特征向量;
   (b) (7分)求正交矩阵P及对角矩阵B使得$P^T AP = B$;
   (c) (4分)求矩阵$(A - 2E_3)^{2014} =?$.

4. (10分) 设V为数域$\mathbb{F}$上的n维线性空间, $f \neq g \in V^*$为V上的非零线性函数.试讨论子空间$\ker f \cap \ker g$的维数的取值并说明理由.

5. (15分) 设$\phi: M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}), \phi(A) = A^T + 2014A, A \in M_n(\mathbb{F})$为线性空间$M_n(\mathbb{F})$上的线性变换.
   (a) (5分)证明ϕ为线性空间的同构映射;
   (b) (10分)求线性变换ϕ的特征多项式并讨论ϕ是否可对角化, 请说明理由.

6. (15分) 设V为实数域$\mathbb{R}$上的$2n$维线性空间, $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{2n}$为$V$的一组基. 设$\mathbb{A}$为$V$上的线性变换且在$\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{2n}$下的矩阵为
$$A = \begin{pmatrix} \alpha\alpha^T - E_n & 0 \\ 0 & (n-1)E_n - \alpha\alpha^T \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \alpha = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^n, n > 1.$$
   (a) (10分)求$\mathbb{A}$的极小多项式及每个特征子空间的维数;
   (b) (5分)设$B = A - (n-1)E_{2n}$, 令
$$W = \{\beta = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{2n})X \in V |\ \text{其中 } X^T BX = 0, X \in \mathbb{R}^{2n}\}.$$
   证明:W为V的子空间且求其维数$\dim_{\mathbb{R}} W$.

7. (15分)设V为n维欧氏空间, $\alpha, \beta \in V$且$\alpha \neq 0$.
   (a) (10分)证明:存在V上的对称线性变换$\mathbb{A}: V \to V$使得$\mathbb{A}(\alpha) = \beta$且1至少为$\mathbb{A}$的$n-2$重特征值;
   (b) (5分)设内积$(\alpha, \beta) > 0$. 证明:存在V上的对称线性变换$\mathbb{B}: V \to V$满足下列条件:
   (1) $\mathbb{B}(\alpha) = \beta$;
   (2) 1至少为$\mathbb{B}$的$n-2$重特征值;
   (3) $\mathbb{B}$在V的任意的标准正交基下的矩阵为正定矩阵.