2014级研究生《信号分析》试题

一、令 $\tilde{\delta}_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ ， $\tilde{\delta}_\tau(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\tau)$ ，

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ ，

$T/\tau=N$ ，N 为大于 1 的整数，且 $\tilde{\delta}_T(t)$ 、$\tilde{\delta}_\tau(t)$ 和 $f(t)$ 的傅立叶变换，分别用 $\tilde{\Delta}_T(\omega)$ 、 $\tilde{\Delta}_\tau(\omega)$ 和 $F(\omega)$ 表示，试分析论证 $\left(f(t)\tilde{\delta}_\tau(t)\right)*\tilde{\delta}_T(t)$ 和 $\left(F(\omega)\tilde{\Delta}_T(\omega)\right)*\tilde{\Delta}_\tau(\omega)$ 的关系，这里*表示卷积。

二、 设 $\{\varphi_i(t),i=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ 是 $L^2(R)$ 空间的完备正交规范化正交基集，对于 $f(t)\in L^2(R)$ 和 $g(t)\in L^2(R)$，证明

$$\langle f(t),g(t)\rangle=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\langle f(t),\varphi_i(t)\rangle\langle\varphi_i(t),g(t)\rangle$$

式中 $\langle f(t),g(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g^*(t)dt$，上注标*表示复共轭。

三、已知 $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{m\times n}$ 是列线性无关的 $m\times n$（$m>n$）阶实矩阵，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 分别 n 维列向量和 m 维列向量，试用框架算子理论解释线性方程组的最小二乘解 $\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$ 。提示可以将 $\mathbf{AX}$ 的行 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ 视为内积。

四、设 $\{\phi_i\}_{i\in\Gamma}$ 是内积信号空间 S 的线性子空间 V 的正交规范化基集，对 S 中的任意信号 f，求其在 V 中的最佳估计 $\hat{f}$，并证明 $\hat{f}\perp f-\hat{f}$

五、设 B 是一个带限信号空间，其带宽为 2σ，请给出该信号空间的正交规范基。