四川大学期末考试试题（闭卷）

(2018–2019学年第 1 学期)　　B卷

课程号: **201097050** 课序号: **01, 02** 课程名称: 高等代数-1(双语) 任课教师: 付昌建 郭兵 谭友军　　　成绩:

适用专业年级: 数学学院2018级各专业 学生人数: **242** 印题份数: **280**　　　学号:　　　　姓名:

考　生　承　诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注意: 满分100分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中, $\mathbb{F}$ 表示一个数域, $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维列向量组成的向量空间, A', $r(A)$, $|A|$, A^* 分别表示 A 的转置、秩、行列式和伴随矩阵, E_n 表示 n 阶单位阵.

1. (25分) 解答下列各题.

   (1) (5分) 设 $f(x)=x^5-5x^3+5x^2-1$. 求 $f(x)$ 在有理数域上的标准分解式和 $(f(x),f'(x))$, 其中, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

   (2) (5分) 证明: 在实数域上存在唯一的次数最低的首一多项式 $g(x)$ 使得 $1+\mathrm{i}$ 是 $g(x)$ 的一个根, 其中, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 是虚数单位.

   (3) (5分) 证明: 两个 $\mathbb{F}$ 上的正次数多项式互素当且仅当它们没有公共的复根.

   (4) (5分) 任意给定 3 个整数 a_1,a_2,a_3. 证明: 三元方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=a_1\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=a_2\\ x_1^3+x_2^3+x_3^3=a_3\end{cases}$ 在复数范围内有解, 且至少有一个 x_i 是实数.

   (5) (5分) 设 p 是大于 2 的素数, $h(x)=x^p+px+1$. 证明: $h(x)$ 在实数域上可约, 但在有理数域上不可约.

2. (30分) 解答下列各题.

   (1) (10分) 在复数域上求 $\begin{cases} -x_2+3x_3+2x_4=0\\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=0\\ 2x_1+6x_2-10x_3-2x_4=0\end{cases}$ 的通解.

   (2) (7分) 设 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 是某个 4 元非齐次线性方程组的解, 且该方程组的系数矩阵的秩为 2. 已知

   $$\eta_1-2\eta_2+\eta_3=(-1,0,2,3)',\quad \eta_4=(1,1,-1,-1)',\quad 3\eta_1-5\eta_2+2\eta_3=(0,2,-3,-1).$$

   求该方程组的通解.

   (3) (6分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 5 阶方阵. 证明: 齐次线性方程组 $(A-A')X=0$ 一定有非零解.

   (4) (7分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 型矩阵. 证明: 对任意 $\beta\in\mathbb{F}^m$, 方程组 $AX=\beta$ 都有解的充要条件是 A 的列向量线性无关.

3. (30分) 解答下列各题.

   (1) (5分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

   (2) (5分) 设 A 是 3 阶方阵且 $|A|=2$. 分别求 $|(A^{-1})^*|$ 和 $|(A^*)^*|$ 的值.

   (3) (10分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 证明: A 满足 $A^2-6A+5E_n=0$ 当且仅当 $r(A-5E_n)+r(A-E_n)=n$.

   (4) (10分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 $m\times n$ 型矩阵. 证明: $r(A)=n$ 当且仅当存在 $\mathbb{F}$ 上的 m 阶可逆阵使得 $PA=\begin{pmatrix} E_n\\ 0\end{pmatrix}$.

4. (10分) 用两种方法证明: 对任意 $n+1$ 个数对 (a_i,b_i), $1\le i\le n+1$, 其中, a_i 互不相同, 存在 $\mathbb{F}$ 上的唯一的次数不超过 n 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i)=b_i$.

5. (5分) （非标准答案题.）请谈谈你对多项式这个概念的认识, 字数不超过 50 字.