四川大学期末考试试题（闭卷）　B

(2013–2014学年下期)

课程号: **201098050** 课序号: **0,1** 课程名称: **高等代数-2** 任课教师: **付昌建 卢明 谭友军 王皓**　　成绩:

适用专业年级: **2013级数学学院各专业** 学生人数: **250** 印题份数: **280**　　学号:　　姓名:

注意: 满分100分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中, $\mathbb{F}$表示一个数域; C^T表示矩阵C的转置.

1. (15分) 设V是$\mathbb{F}$上的一个3维线性空间, α_1, α_2, α_3是V的一个基, $\underline{A}$是V上的一个线性变换, 满足: $\underline{A}\alpha_1 = \alpha_2$, $\underline{A}\alpha_2 = \alpha_3$, $\underline{A}\alpha_3 = \alpha_1$.

(1) (5分) 求$\underline{A}$的全部复特征值.

(2) (5分) 写出$\underline{A}^{100}$在基α_1, α_2, α_3下的矩阵.

(3) (5分) 如果$\mathbb{F}$是复数域, 证明: 存在V的一个基, 使得$\underline{A}$在这个基下的矩阵是对角阵.

2. (20分) 设$\dim V = 5$, $\dim W = 4$, 设线性映射$f:\ V \to W$在V、W的基下的矩阵为$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

(1) (10分) 分别求f的核$\ker f$和像$\operatorname{im} f$的维数.

(2) (5分) 证明: 存在V的基$\alpha_1, \cdots, \alpha_5$和$W$的基$\beta_1, \cdots, \beta_4$使得$f(\alpha_1) = \beta_1$, $f(\alpha_2) = \beta_2$.

(3) (5分) 设$\dim U = 3$且线性映射$g : U \to V$满足g的像$\operatorname{im} g = \ker f$. 证明: g是单射.

3. (20分) 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) (10分) 求A的**Jordan(若当)**标准型J.

(2) (5分) 设$f(x) = |xE - A|$. 写出特征多项式为$f(x)$的所有的互不相似的**Jordan**阵.

(3) (5分) 证明: 在任意数域$\mathbb{F}$上A与$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$都不相似.

4. (15分) 设$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(1) (10分) 设$f(X) = X^T AX$是二次型. 求一个正交变换$X = TY$把$f(X)$化为标准型.

(2) (5分) 在实向量空间$\mathbb{R}^3$上定义$(\ ,\ )$为: $(X, Y) = X^T AY$. 证明: $(\ ,\ )$是$\mathbb{R}^3$上的一个内积.

5. (10分) 设V是$\mathbb{F}$上的线性空间, $V^\star$是V的对偶空间, 设$\underline{A}$是V上的线性变换.

(1) (5分) 对任意$f \in V^\star$, 定义V上的函数$f^\star$为: $f^\star(\alpha) = f(\underline{A}(\alpha))$, 任意$\alpha \in V$. 证明: $f^\star \in V^\star$.

(2) (5分) 证明: 映射$\underline{A}^\star$: $f \mapsto f^\star$是$V^\star$上的线性变换.

6. (10分) 证明如下的子空间的维数公式: 即, 设U, V是W的子空间, 且$U + V$是有限维的, 则 $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

7. (10分) 设A是$\mathbb{F}$上的n阶方阵, $d_1(\lambda)$, $\cdots$, $d_n(\lambda)$是A的不变因子. 证明: A的极小多项式是$d_n(\lambda)$.

教务处试题编号: