四川大学期末考试试题（闭卷） A

(2014–2015学年上期)

课程号: **201097050** 课序号: **0,1** 课程名称: 高等代数-1 任课教师: 付昌建 王浩 谭友军 甘慧灵 成绩:

适用专业年级: **2014级数学学院各专业** 学生人数: **300** 印题份数: **320** 学号: 姓名:

考试须知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》．有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理.

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》，《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》．有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理.

注意：满分100分，按题号把解答写在答题纸上．在以下题目中，$\mathbb{F}$表示一个数域.

1. (本题满分20分)解答下列各题:

   (1) (10分) 写出一个次数最低的首项系数为1的有理多项式使得$1+\sqrt{2}$为其复根, 并说明理由;

   (2) (6分)设$f(x)=x^{2014}+x^{2013}+\cdots+x+1$为有理多项式. 证明:$f(x)$在有理数域$\mathbb{Q}$上可约;

   (3) (4分)设$a_1,\cdots,a_{2014}$为(2)中多项式$f(x)$的复根,试求$\prod_{i=1}^{2014}(a_i-1)=?$

2. (本题满分30分)解答下列各题：

   (1) (10分) 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-7x-3\in\mathbb{F}[x]$. 试求$f(A)$并将$A^{-1}$表示为$A$的多项式.

   (2) (8分) 设$A\in M_3(\mathbb{F})$. 已知A的伴随矩阵$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 求矩阵$A$及其逆$A^{-1}$.

   (3) (8分) 设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{F})$. 求数域$\mathbb{F}$上的所有的与$A$乘法交换的矩阵;

   (4) (4分) 在(3)的基础上证明:对任意与A乘法交换的矩阵B,存在多项式$f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 使得$f(A)=B$.

3. (本题满分20分) 设$\alpha_1=(1,-1,0,4)'$, $\alpha_2=(0,3,7,2)'$, $\alpha_3=(3,0,7,14)'$, $\alpha_4=(1,-1,0,4)'\in\mathbb{F}^4$.

   (1) (12分)求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩及一个极大无关子组并将其余向量表示为此极大无关子组的线性组合;

   (2) (4分)设非齐次线性方程组$AX=\beta$有无穷多解且其任意解都可以表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合, 试问系数矩阵$A$的秩$r(A)$的取值范围, 并说明理由;

   (3) (4分)在(2)的基础上假设α_1为$AX=\beta$的一个解. 证明: 存在$r\in\mathbb{F}$使得$AX=\beta$的解集恰为

   $$\{k\alpha_1+l\alpha_2 \mid k-rl=1,\ 其中\ k,l\in\mathbb{F}\}.$$

4. (本题满分10分)设A为数域$\mathbb{F}$上的$m\times n$阶矩阵, B为数域$\mathbb{F}$上的$n\times m$阶矩阵, $m\le n$. 若AB为可逆矩阵, 求BA的秩, 并说明理由.

5. (本题满分10分)设$\eta_1,\cdots,\eta_r$为齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系, γ_0为非齐次线性方程组$AX=\beta$的一个解. 令$B=(A,\beta)$, 利用$\gamma_0,\eta_1,\cdots,\eta_r$求线性方程组$BY=0$的一个基础解系并说明理由.

6. (本题满分10分) 设A为数域$\mathbb{F}$上的n阶方阵, $p(x)$为数域$\mathbb{F}$上的次数大于1的不可约多项式且满足$p(A)=0$. 证明: 对任意的$a\in\mathbb{F}$, $|A-aE_n|\neq 0$;