四川大学期末考试试题（闭卷）

（2018——2019 学年第 1 学期） A 卷

课程号：201162040 课序号： 课程名称：概率论 任课教师：常寅山，马婷 成绩：

适用专业年级： 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

1. （10 分）将 10 个各异的黑球和 10 个各异的白球随机分成 10 组，每组两个球。求每组恰有一黑一白的概率。

解：这是一古典概型，设 $\Omega=\{20\text{个球分成十组，每组两个}\}$ 为样本点总体，总数 $\Omega^{\#}=\dfrac{20!}{(2!)^{10}}$，事件 $A=\{20\text{个球分成十组，每组恰有一黑一白}\}$，总数 $A^{\#}=(10!)^2$，故

$$P(A)=\frac{A^{\#}}{\Omega^{\#}}=\frac{(10!)^2 2^{10}}{20!}。$$

2. （10 分）

(1) 叙述贝叶斯公式；

(2) 设甲乘汽车、火车的概率分别为 0.6, 0.4，汽车和火车正点到达的概率分别为 0.8, 0.9。现在甲已经正点到达，求甲乘火车的概率。

解：**(1)**设 $\{A_n,n\ge 1\}$ 是完备事件组，B 是任一事件，则对任意的 i

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(B\mid A_i)P(A_i)}{\sum_{n\ge 1}P(B\mid A_n)P(A_n)} \quad (5\text{ 分})$$

(2)设完备事件组 $A_1=\{\text{甲乘汽车}\}$，$A_2=\{\text{甲乘火车}\}$，则由题意知 $P(A_1)=0.6$，

$P(A_2)=0.4$。设事件 $B=\{\text{甲正点到达}\}$，则根据题意有条件概率 $P(B|A_1)=0.8$，$P(B|A_2)=0.9$，所求概率为 $P(A_2|B)$。利用(1)中贝叶斯公式有

$$P(A_2|B)=\frac{0.9\times 0.4}{0.9\times 0.4+0.8\times 0.6}=\frac{3}{7}.\quad (5\text{ 分})$$

3.（20 分）设二维随机向量 (X,Y) 服从圆盘 $D=\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2\le 4\}$ 上的均匀分布。

(1) 求 X 的边际密度函数；

(2) 求 Y 关于 X 的条件密度；

(3) 求 $X+Y$ 的密度函数；

(4) 讨论 X,Y 的相关性与独立性。

解：(1)由 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)=1/4\pi,(x,y)\in D$ (1 分)，故 X 的密度函数 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy=\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{1}{4\pi}dx, x\in[-2,2]$ (3 分) $=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}, x\in[-2,2]$ (1 分)。

(2)给定 $X=x$ 满足 $p_X(x)\neq 0$，则 Y 关于 X 的条件密度 $p(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}$ (2 分)，

从而当 $x\in(-2,2)$ 时，Y 关于 X 的条件密度 $p(y|x)=\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}$，

$y\in[-\sqrt{4-x^2},\sqrt{4-x^2}]$ (3 分)。

(3)设 $Z=X+Y$,利用卷积公式 $p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,z-x)dx$ (1 分)。考虑 $p(x,z-x)\neq 0$ 当且仅当 $x^2+(z-x)^2\le 4$，即 $x\in[\frac{z-\sqrt{8-z^2}}{2},\frac{z+\sqrt{8-z^2}}{2}]$。从而当 $z\in[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ (1 分)时，$p_Z(z)=\int_{-\frac{z-\sqrt{8-z^2}}{2}}^{\frac{z+\sqrt{8-z^2}}{2}}\frac{1}{4\pi}dx$ (2 分) $=\frac{\sqrt{8-z^2}}{4\pi}$ (1 分)。

(4)由(1)类似得到 Y 的密度函数 $p_Y(y)=\frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}, y\in[-2,2]$，$p(x,y)\neq p_X(x)\cdot p_Y(y)$

故X,Y不独立(2 分)。由$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xp_X(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2\pi}dx=0$，$EY=\int_{-\infty}^{\infty}yp_Y(y)dy=0$

$EXY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^2\frac{r\cos\theta r\sin\theta}{4\pi}rdrd\theta=0=EX\cdot EY$ (2 分)，故X,Y不相关(1 分)。

4.（10 分）设二维正态随机向量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$。求$(X+Y)$与$(X-Y)$独立的充要条件。

解：由定义知$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，利用正态分布的线性可加性得知（$X+Y$）与（$X-Y$）均为正态随机变量，故（$X+Y$）与（$X-Y$）独立当且仅当它们不相关，即$E\{(X+Y)(X-Y)\}=E(X+Y)\cdot E(X-Y)$ (3 分)。$E(X+Y)E(X-Y)=\mu_1^2-\mu_2^2$，$E\{(X+Y)(X-Y)\}=EX^2-EY^2={\mu_1}^2+{\sigma_1}^2-{\mu_2}^2-{\sigma_2}^2$ (4 分)，故（$X+Y$）与（$X-Y$）独立的充要条件是$\sigma_1=\sigma_2$ (3 分)。

5.（20 分）如今航空超售是比较常见的现象，现考虑一趟可以乘坐 250 名乘客的航班，假设每名购票乘客独立地选择是否乘坐该航班，且每名购票乘客会来乘坐该航班的概率为 0.95。请根据中心极限定理回答：

(1) 如果该航班售出了 260 张机票，请计算航班座位比实际乘客人数少的概率（计算结果以标准正态分布的分布函数$\Phi(x)$表示）；

(2) 如果要求航班座位比实际乘客人数少的概率不超过 50%，航空公司最多可售出多少张机票。

解：**(1)**设X为实际乘坐该航班的乘客人数，则有$X\sim B(260,0.95)$ (3 分)，且$EX=260\times0.95=247$，$DX=260\times0.95\times0.05=12.35$ (2 分)。由中心极限定理得X近似服从正态分布$N(247,12.35)$ (2 分)。故

$$P(X>250)=1-P(X\le 250)=1-\Phi(3/\sqrt{12.35})\ (3\text{ 分})。$$

(2)设售出n张票，则$X\sim B(n,0.95)$ (2 分)，近似地有$X\sim N(0.95n,0.95\times0.05n)$ (3 分)。为使$P(X>250)=1-P(X\le 250)=1-\Phi(\frac{250-0.95n}{\sqrt{0.95\times0.05n}})\le 50\%$，即

$\Phi(\frac{250-0.95n}{\sqrt{0.95\times0.05n}})\ge 0.5=\Phi(0)$ (3 分)，需$250-0.95n\ge 0$，从而$n\le 263.16$，最多可售 263 张机票(2 分)。

6.（10 分）设

$$\phi(\theta)=\begin{cases}1-|\theta|, & |\theta|<1,\\ 0, & |\theta|\ge 1.\end{cases}$$

(1) 求以$\phi(x)$为密度函数的特征函数；

(2) 运用逆转公式求以$\phi(t)$为特征函数的密度函数。

解：(1) $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\phi(x)dx=\int_{-1}^{1}e^{itx}(1-|x|)dx$ (2 分)$=\int_{-1}^{1}e^{itx}dx+\int_{-1}^{0}xe^{itx}dx-\int_{0}^{1}xe^{itx}dx$。当$t\ne 0$时，$\int_{-1}^{1}e^{itx}dx=\frac{2\sin t}{t}$，利用分部积分公式有：

$$\int_{-1}^{0}xe^{itx}dx=\frac{1}{it}\int_{-1}^{0}xde^{itx}=\frac{xe^{itx}}{it}\bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{it}\int_{-1}^{0}e^{itx}dx=\frac{e^{-it}}{it}-\frac{e^{itx}}{(it)^2}\bigg|_{-1}^{0}=\frac{e^{-it}}{it}+\frac{1-e^{-it}}{t^2},$$

$$\int_{0}^{1}xe^{itx}dx=\frac{1}{it}\int_{0}^{1}xde^{itx}=\frac{xe^{itx}}{it}\bigg|_{0}^{1}-\frac{1}{it}\int_{0}^{1}e^{itx}dx=\frac{e^{it}}{it}-\frac{e^{itx}}{(it)^2}\bigg|_{0}^{1}=\frac{e^{it}}{it}+\frac{e^{it}-1}{t^2}。$$

从而$\varphi(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ \frac{2-2\cos t}{t^2}, & t\ne 0\end{cases}$ (3 分)。

(2)注意到$\int_{-\infty}^{\infty}|\phi(t)|dt=\int_{-1}^{1}(1-|x|)dx<\infty$，故利用逆转公式，相应的密度函数$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\phi(t)dt$ (2 分)，利用(1)中的结果有

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\varphi(-x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}, & x=0\\ \frac{1-\cos x}{\pi x^2}, & x\ne 0\end{cases}$$ (3 分)。

7.（20 分）

(1) 设$X_n \xrightarrow{P} c$，c是一常数，$g(x)$是在$x=c$连续的函数。求证

$$g(X_n) \xrightarrow{P} g(c).$$

(2) 设随机变量列$\{X_n, n\ge 1\}$独立同分布，服从$(0,1)$上的均匀分布，令

$$Z_n = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{1/n}$$

证明$Z_n \xrightarrow{P} C$，这里C是常数，并求C的值。

证明：(1)由$g(x)$在$x=c$连续，知对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-c|\le\delta$时，恒有$|g(x)-g(c)|<\varepsilon$，从而$\{|g(X_n)-g(c)|>\varepsilon, |X_n-c|\le\delta\}=\phi$。因此，对任意$\varepsilon>0$，如上取$\delta$，有$\{|g(X_n)-g(c)|>\varepsilon\}=\{|g(X_n)-g(c)|>\varepsilon, |X_n-c|>\delta\}\subseteq\{|X_n-c|>\delta\}$，利用$X_n \xrightarrow{P} c$，$P\{|g(X_n)-g(c)|>\varepsilon\}\le P\{|X_n-c|>\delta\}\xrightarrow{n\to\infty}0$，得证(10 分)。

(2)考虑到$X_n>0$，取$W_n=\ln Z_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$。由$X_i\sim U(0,1)$知其密度函数$p(x)=1$，$x\in(0,1)$，故随机变量列$\{\ln X_n, n\ge 1\}$独立同分布，且$E(\ln X_i)=\int_0^1 \ln x dx=-1$有限。由大数律知$W_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \xrightarrow{P} E(\ln X_1)=-1$。又知$g(x)=e^x$连续且$Z_n=e^{W_n}$。利用(1)的结果$Z_n \xrightarrow{P} g(-1)=e^{-1}$(10 分)。