四川大学期末考试试题（闭卷）

(2015–2016学年第 1 学期)　　B卷

课程号: **201097050** 课序号: **01, 02** 课程名称: 高等代数-1(双语) 任课教师: 付昌建 张志雄 谭友军 彭雪　　成绩:
适用专业年级: **2015级数学学院各专业** 学生人数: **269** 印题份数: **300**　　学号:　　姓名:

考　生　承　诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：
1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2、不带手机进入考场；
3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注意: 满分100分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中, $\mathbb{F}$表示一个数域, $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维列向量组成的向量空间, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的所有 $m\times n$ 型矩阵组成的集合, A^t 表示 A 的转置, $\det$ 表示行列式.

1. (20分) 解答下列各题.

(1) **(5分)** 举例说明: 存在不满足 **Eisenstein** 判别法的条件、但在有理数域上不可约的 4 次整系数多项式 $f(x)$.

(2) **(5分)** 设 $x_1,\cdots,x_8$ 是方程 $x^8-x-2=0$ 的全部复根. 求 $\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^8$ 的值.

(3) **(5分)** 设 $a\in\mathbb{F}$ 是给定的一个数. 证明: 对任意次数为 $n>0$ 的多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 都存在唯一的 $c_0,c_1,\cdots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}c_i(x-a)^i$.

(4) **(5分)** 设 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ 且 $f(x)$ 的次数 $n\geq 1$. 问 $\{y|y=f(x),x\in\mathbb{F}\}=\mathbb{F}$ 是否成立? 说明理由.

2. (30分) 解答下列各题.

(1) **(10分)** 分别在实数域和复数域上求方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4=1\\x_1-x_2+x_3-x_4=-1\\2x_1+x_2+2x_3+2x_4=4\\x_1-x_2+x_3=1\end{cases}$ 的通解(全部解).

(2) **(5分)** 证明: 对 $\mathbb{F}$ 上的任意 n 阶方阵 A, 都存在 $t\in\mathbb{F}$ 使得齐次线性方程组 $(A+tE_n)X=0$ 只有零解, 其中, E_n 是 n 阶单位阵.

(3) **(5分)** 设$\alpha_1=(1,2,3,4)^t$, $\alpha_2=(2,4,6,9)^t\in\mathbb{F}^4$. 求 $\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{F}^4$ 使得任意 $\beta\in\mathbb{F}^4$ 都可以唯一地由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出.

(4) **(5分)** 设 $\alpha_1=(1,2,3,4)^t$, $\alpha_2=(1,4,9,16)^t$, $\alpha_3=(1,8,27,64)^t\in\mathbb{F}^4$. 设 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$, $\beta_2=2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=8\alpha_1+8\alpha_2+\alpha_3$. 求向量组 β_1,β_2,β_3 的秩和一个极大无关组.

(5) **(5分)** 设 $A=(a_{ij})$ 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆方阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 设 B 是由 A 划去最后一行得到的 $(n-1)\times n$ 型矩阵. 证明: 列向量 $(A_{n1},A_{n2},\cdots,A_{nn})^t$ 构成齐次线性方程组 $BX=0$ 的一个基础解系.

3. (20分) 解答下列各题.

(1) **(10分)** 设 A 是元素全部为 $a\in\mathbb{F}$ 的 n 阶方阵,

(i) 对任意正整数 k, 计算 A^k.

(ii) 对任意 $b\in\mathbb{F}$, 求行列式 $\det(bE_n-A)$, 其中, E_n 是单位阵.

(2) **(10分)** 设 $A\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 满足 $A^2-5A+6E_n=0$, 其中, E_n 是单位阵. 证明 $A-E_n$ 可逆并把 $(A-E_n)^{-1}$ 表示为 A 的多项式.

4. (10分) 用三种不同的方法求矩阵 $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

5. (10分) 任意给定 $0\neq\alpha\in\mathbb{F}^n$. 证明: 对任意 $\beta\in\mathbb{F}^n$, 都存在 $A\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F})$ 使得 $\beta=A\alpha$.

6. (10分) 设 A 是 n 阶可逆的反对称矩阵, α 为 n 维列向量. 求分块矩阵 $\begin{pmatrix}A&\alpha\\\alpha^t&0\end{pmatrix}$ 的秩.

教务处试题编号: