# 四川大学期末考试试题（闭卷）  A

(2014–2015学年春)

课程号: **201098050** 课序号: **01, 02** 课程名称: **高等代数-2 (双语)** 任课教师: **付昌建 王浩 谭友军 甘惠灵**  成绩:
适用专业年级: **2014级数学学院各专业** 学生人数: **300** 印题份数: **320**  学号:  姓名:



**注意：满分100分, 按题号把解答写在答题纸上, 写在试题纸上的解答不得分. 在以下题目中, $\mathbb{F}$表示一个数域, $M_n(\mathbb{F})$表示$\mathbb{F}$上的所有$n\times n$型矩阵组成的线性空间, $\mathbb{Q}$表示有理数域, $\mathbb{R}$表示实数域, $\mathbb{C}$表示复数域, $A^T$表示矩阵$A$的转置.**

1. (55分) 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2014 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. 设$\mathbb{A}: M_2(\mathbb{C})\to M_2(\mathbb{C}), X\mapsto AX-XA, X\in M_2(\mathbb{C})$为$M_2(\mathbb{C})$上的线性变换. 解答下列各题并说明理由:
   (1) (15分)求线性变换$\mathbb{A}$的核空间$\ker\mathbb{A}$及像空间$\mathrm{Im}\,\mathbb{A}$的一个基及维数;
   (2) (10分)求线性变换$\mathbb{A}$的特征多项式$f_{\mathbb{A}}(\lambda)$及最小多项式$m_{\mathbb{A}}(\lambda)$;
   (3) (15分)求线性变换$\mathbb{A}$的行列式因子、不变因子及其Jordan标准形;
   (4) (5分)求$M_2(\mathbb{C})$的一个子空间$U$使得$U+\ker\mathbb{A}=U\oplus\ker\mathbb{A}=M_2(\mathbb{C})$;
   (5) (5分)问是否存在线性变换$\mathbb{A}$的不变子空间$W$使得$W+\ker\mathbb{A}=W\oplus\ker\mathbb{A}=M_2(\mathbb{C})$;
   (6) (5分)令$f(x_1,x_2)=X^TAX$, 其中$X=(x_1,x_2)^T$. 求正交替换将实二次型$f(x_1,x_2)$化为标准形.
2. (10分) 设$\alpha=(1,1,1,1)^T, \beta=(1,0,0,1)^T\in\mathbb{R}^4$. 设$U$为由$\alpha$与$\beta$生成的欧氏空间$\mathbb{R}^4$(其内积为标准内积)的子空间.
   (1) (5分)求$U$在$\mathbb{R}^4$中的正交补空间$U^\perp$的一个标准正交基;
   (2) (5分)求向量$\gamma=(1,2,3,5)^T$在$U$上的正交投影.
3. (10分) 设$A_1,A_2\in M_n(\mathbb{F}), B_1,B_2\in M_m(\mathbb{F})$.
   (1) (5分)证明: 若矩阵$A_1$与$A_2$相似且$B_1$与$B_2$相似, 则矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似;
   (2) (5分)若矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$相似且矩阵$A_1$与$A_2$相似, 问矩阵$B_1$与$B_2$是否相似, 请说明理由.
4. (10分) 设$A=A^T\in M_n(\mathbb{Q})$. 证明: 矩阵$A$为正定矩阵当且仅当对任意的非零向量$\alpha\in\mathbb{Q}^n$, $\alpha^TA\alpha>0$.
5. (15分)设$f(x)\in\mathbb{Q}[x]$在$\mathbb{Q}$上不可约且$\deg f(x)=n$, 其中$n>1$. 设$A\in M_n(\mathbb{Q})$满足$f(A)$=0.
   (1) (5分)问矩阵$A$在数域$\mathbb{Q}$上是否可对角化, 请说明理由;
   (2) (5分)记$V:=\{B\mid B=h(A),\ h(x)\in\mathbb{Q}[x]\}$为所有能表示为矩阵$A$的多项式的矩阵构成的$M_n(\mathbb{Q})$的子空间. 试求子空间$V$的维数.
   (3) (5分)设$C(A):=\{X\in M_n(\mathbb{Q})\mid XA=AX\}$为所有与矩阵$A$乘法交换的矩阵构成的$M_n(\mathbb{Q})$的子空间. 试求子空间$C(A)$的维数.