四川大学期末考试试题（闭卷） A

(2013–2014学年上期)

课程号: **201097050** 课序号: **0,1** 课程名称: 高等代数-1 任课教师: 付昌建 卢明 谭友军 王皓 成绩:

适用专业年级: **2013级数学学院各专业** 学生人数: **250** 印题份数: **280** 学号: 姓名:

注意：满分100分，按题号把解答写在答题纸上．在以下题目中，$\mathbb{F}$表示一个数域；$M_{m\times n}(\mathbb{F})$表示$\mathbb{F}$上的$m\times n$阶矩阵全体；$M_n(\mathbb{F})$表示$\mathbb{F}$上的$n$阶方阵全体；$E_n$表示$n$阶单位矩阵;对任意的矩阵$A$，$A^T$表示$A$的转置，$r(A)$表示$A$的秩.

1．(20分) 设$f(x)=x^4+3x^3+4x^2-3x-5, g(x)=x^3+5x^2+11x+10\in\mathbb{F}[x]$.

(1) (10分) 求$f(x),g(x)$的最大公因子$d(x)=(f(x),g(x))$;

(2) (10分) 设$A\in M_n(\mathbb{F})$且满足$d(A)=0$.证明:$A-2E_n$可逆且求其逆(将逆矩阵表示为A的多项式).

2．(20分) 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$,其中$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$分别为$A$的列向量．记$f:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$为相应的线性映射使得$f(\epsilon_1)=\alpha_1, f(\epsilon_2)=\alpha_2,\cdots,f(\epsilon_n)=\alpha_n$，其中$\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$为向量空间$\mathbb{F}^n$的标准单位向量.证明:

(1) (5分) 齐次线性方程组$AX=0$的解集$S=\ker f$;

(2) (10分) 非齐次线性方程组$AX=\beta$有唯一解当且仅当$\beta\in\operatorname{im} f$ 且$\ker f=\{0\}$;

(3) (5分) $r(\ker f)+r(\operatorname{im} f)=n$.

3．(30分)设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}), B\in M_{m\times t}(\mathbb{F})$，称$AX=B$为关于$X\in M_{n\times t}(\mathbb{F})$的矩阵方程.

(1) (10分) 利用线性方程组解的存在定理证明矩阵方程$AX=B$有解当且仅当$r(A)=r([A,B])$;

(2) (10分) 设$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\1&0&-1\\2&1&4\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}3&1\\0&4\\-2&1\end{pmatrix}$,求解矩阵方程$AX=B$;

(3) (10分) 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&4\\1&b\end{pmatrix}$且矩阵方程$AX=B$有解,但矩阵方程$BX=A$无解.试求$a,b$的取值.

4．(20分) 解答下列各题.

(1) (5分) 设$A\in M_{m\times n}(F)$．证明:$r(A)=1$当且仅当存在非零列向量$\alpha\in\mathbb{F}^m,\beta\in\mathbb{F}^n$使得$A=\alpha\beta^T$;

(2) (5分) 设$\alpha,\beta\in\mathbb{F}^n$为非零列向量，$A=\alpha\beta^T$．求次数最低的首项系数为1的多项式$f(x)\in\mathbb{F}[x]$使得$f(A)=0$;

(3) (10分) 设$A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$且$r(A)=r(B)=1$． 设$\alpha_1,\alpha_2$分别为$A,B$的任意的非零列向量,$\beta_1,\beta_2$分别为$A,B$的任意的非零行向量.证明:$r(A+B)=2$当且仅当$\alpha_1,\alpha_2$线性无关且$\beta_1,\beta_2$线性无关.

5．(10分) 设$\alpha\in\mathbb{C}^n$为非零列向量且满足$\alpha^T\alpha=0$．证明:线性方程组$(E_n-\alpha\alpha^T)X=0$只有零解.