07 年试题：

1、设 $f(t)\xleftrightarrow{FT}F(j\omega)$，$\widetilde{\delta_T}(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，

$\widetilde{\delta_\tau}(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\tau)$，且 $T/\tau=N$ 为大于 1 的整数。

试从频域证明

$\left(f(t)*\widetilde{\delta_T}(t)\right)\widetilde{\delta_\tau}(t)=\left(f(t)*\widetilde{\delta_\tau}(t)\right)\widetilde{\delta_T}(t)$，

并解释其物理意义。

**解**：等式左边

$$f(t)*\widetilde{\delta_T}(t)\leftrightarrow F(j\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m)$$
$$=\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(j\frac{2\pi}{T}m)\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m)$$

所以

$$\left(f(t)*\widetilde{\delta_T}(t)\right)\widetilde{\delta_\tau}(t)$$
$$\leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(j\frac{2\pi}{T}m)\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m)*\frac{2\pi}{\tau}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{\tau}r)\cdot\frac{1}{2\pi}$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(j\frac{2\pi}{T}m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m-\frac{2\pi}{\tau}r)\qquad(1)$$

因为 $\dfrac{T}{\tau}=N$

所以

$$(1)=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(j\frac{2\pi}{T}m)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m-\frac{2\pi}{T}Nr)$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(j\frac{2\pi}{T}m)\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega-\frac{2\pi}{T}m)$$

对 $r$ 而言，$\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m-\frac{2\pi}{T}Nr)$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\tau}$

令 $m=p+Nq$，$p=0\sim N-1$，$q$ 为整数，那么

$$(1)=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{p=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}F(j\frac{2\pi}{T}p+j\frac{2\pi}{T}Nq)\hat{\delta}(\omega-\frac{2\pi}{T}p-\frac{2\pi}{T}Nq)$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{p=0}^{N-1}\widehat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\frac{2\pi}{T}p)\hat{\delta}(\omega-\frac{2\pi}{T}p)(2)$$

等式右边

$$f(t)*\hat{\delta}\tau(t)$$
$$\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\left|F(j\omega)*\frac{2\pi}{\tau}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{\tau}\omega)\right|$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left|F(j\omega)*\frac{2\pi}{\tau}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega)\right|=\frac{1}{\tau}\widehat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\omega)$$

所以

$$\left(f(t)*\widetilde{\delta_\tau}(t)\right)\widetilde{\delta_T}(t)$$
$$\leftrightarrow\frac{1}{\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widehat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\omega)\cdot\frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega)$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\widehat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\omega)\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m)$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widehat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\frac{2\pi}{T}m)\cdot\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}m)\qquad(3)$$

令 $m=k+Nq$，$k=0\sim N-1$，$q$ 为整数，那么

$$(3)=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\frac{2\pi}{T}k+j\frac{2\pi}{T}Nq)\delta(\omega-\frac{2\pi}{T}p-\frac{2\pi}{T}Nq)$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\frac{2\pi}{T}k)\sum_{q=-\infty}^{\infty}\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega-\frac{2\pi}{T}k-\frac{2\pi}{T}Nq)$$
$$=\frac{2\pi}{T\tau}\sum_{k=0}^{N-1}\hat{F}_{\frac{2\pi}{\tau}}(j\frac{2\pi}{T}k)\hat{\delta}_{\frac{2\pi}{\tau}}(\omega-\frac{2\pi}{T}k)\qquad(4)$$

（2）式=（4）式，得证。

物理意义：对一个连续信号，先对其进行周期化再进行采样，与先对其采样再周期化，其频谱结构是一样的。

2、设 $\Sigma$ 为一模拟带限信号空间，假定 $n\in Z$，$T\in R_+$，$Z$ 为整数集，$R_+$ 为正实数集，任意取 $\Sigma$ 中一信号 $f(t)$。试问

a） $f(t-nT)$ 可否作为 $\Sigma$ 的基?

b）在什么条件下，$f(t-nT)$ 可以作为 $\Sigma$ 的规范正交基？并给出之。

（对于 $\forall$ 一个 $f\in\Sigma$ 都可以由 $\Sigma$ 中的一组基 $\left\{f_n\right\}$，$n\in\perp$ 表示出，即 $f=\sum\limits_i a_n f_n$，则称此式为 $\Sigma$ 空间信号的离散表示。若上式表达是唯一的，则 $\left\{f_n\right\}$ 线性无关，称为 $\Sigma$ 空间的一组基）

**解**：

a）假设 $f(t-nT)$ 可以作为 $\Sigma$ 的一组基，那么 $f(t-nT)$ 应线性无关。记 $f(t-nT)$ 为 $f_n(t-nT)$。

那么 $f=\sum\limits_n a_n f_n(t-nT)$，若这样表达是合理的，那么当已知 $f$ 、$f_n(t-nT)$ 时，应该可以确定系数 $a_n$。而当基元素为有限数目时，可以采用内积计算确定。

$$\left\langle f,\ f_m(t-mT)\right\rangle=\sum_n a_n\left\langle f_n(t-nT),\ f_m(t-nT)\right\rangle$$

即：$\left\langle f,\ f_1(t-T)\right\rangle=\sum\limits_n a_n\left\langle f_n(t-nT),\ f_1(t-T)\right\rangle$

$$\left\langle f,\ f_2(t-2\cdot T)\right\rangle=\sum_n a_n\left\langle f_n(t-nT),\ f_2(t-2\cdot T)\right\rangle$$

$\vdots$

而

$$\langle f, f\rangle=\left\langle \sum_n a_n f_n(t-nT),\sum_m a_m f_m(t-mT)\right\rangle$$

$$=\sum_n\sum_m a_n a_m{}^*\langle f_n(t-nT), f_m(t-mT)\rangle$$

$$=(a_1a_2\cdots a_n)\begin{vmatrix}\langle f_1, f_1\rangle\langle f_2, f_1\rangle\cdots\langle f_m, f_1\rangle\\ \langle f_1, f_2\rangle\langle f_2, f_2\rangle\cdots\langle f_m, f_2\rangle\\ \vdots\\ \langle f_1, f_n\rangle\langle f_2, f_n\rangle\cdots\langle f_m, f_n\rangle\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_m\end{vmatrix}^* \qquad (1)$$

将$\begin{vmatrix}\langle f_1, f_1\rangle\langle f_2, f_1\rangle\cdots\langle f_m, f_1\rangle\\ \langle f_1, f_2\rangle\langle f_2, f_2\rangle\cdots\langle f_m, f_2\rangle\\ \vdots\\ \langle f_1, f_n\rangle\langle f_2, f_n\rangle\cdots\langle f_m, f_n\rangle\end{vmatrix}$简记为$y_f$。

因为$\langle f, f\rangle\geq 0$，而$a_n a_m{}^*>0$，只要$\langle f, f\rangle\neq 0$，那么必有$y_f>0$，即$y_f$为正定矩阵。

把（1）式写成矩阵形式，既有：

$$\begin{vmatrix}\langle f_1, f_1\rangle\\ \langle f_1, f_2\rangle\\ \vdots\\ \langle f_1, f_m\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\langle f_1, f_1\rangle\langle f_2, f_1\rangle\cdots\langle f_m, f_1\rangle\\ \langle f_1, f_2\rangle\langle f_2, f_2\rangle\cdots\langle f_m, f_2\rangle\\ \vdots\\ \langle f_1, f_n\rangle\langle f_2, f_n\rangle\cdots\langle f_m, f_n\rangle\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_m\end{vmatrix}=y_f\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_m\end{vmatrix}$$

因为$\langle f, f_m(t-mT)\rangle\geq 0$，只要$\langle f, f_m(t-mT)\rangle\neq 0$，

那么当$y_f$为正定矩阵时，即可求出$a_n$。

$a_n=y_f{}^{-1}\begin{vmatrix}\langle f_1, f_1\rangle\\ \langle f_1, f_2\rangle\\ \vdots\\ \langle f_1, f_n\rangle\end{vmatrix}$，且$y_f$应为线性无关的矩阵。

由此可知，$f=\sum_n a_n f(t-nT)$这个表达式是唯一的，$f\leftrightarrow a_n$可以看做一对变换对，这时$f(t-nT)$是线性无关的基组。

补充：

若表达式不唯一，即$f$可由基$f(t-nT)$表示出来，但有不同系数$a$，即

$f_1=\sum_n a_n f(t-nT)$，$f_2=\sum_n a_m f(t-nT)$

得：$f_1-f_2=\sum_n f(t-nT)(a_n-a_m)$

必有$a_n=a_m$，否则$f$与$a_n$之间不是一一对应的关系。

若$\langle f, f\rangle=0$，由（1）式知$\langle f, f\rangle=\sum_n a_n a_m{}^* y_f$，那么当$y_f=\langle f_n(t-nT), f_m(t-mT)\rangle$线性无关时，必有$a_n=0$.

b）假定$f(t-nT)$为$\Sigma$空间的规范正交基，其中$n\in Z$，那么$f(t)\in\Sigma$可表示为：

$f(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m\phi(t-m)$，其中$F_m=\langle f(t), f(t-m)\rangle$

对上式作Fourier 变换有：

$$F(j\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jm\omega}\phi(j\omega)=\phi(j\omega)\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jm\omega}$$

令$\widehat{F}(j\omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jm\omega}$

于是有：$F(j\omega)=\widehat{F}(j\omega)\phi(j\omega)$

$$\|f(t)\|^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f^*(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m\phi(t-m)\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_k^*\phi^*(t-k)dt$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_mF_k^*\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t-m)\phi^*(t-k)dt \qquad (1)$$

$$\because\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t-m)\phi^*(t-k)dt=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$$

所以(1)式$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2$

$$\|f(t)\|^2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(j\omega)\|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{F}(j\omega)\right|^2|\phi(j\omega)|^2d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{(-2l-1)\pi}^{(2l+1)\pi}\left|\widehat{F}(j\omega)\right|^2|\phi(j\omega)|^2d\omega \qquad (2)$$

令$\omega=v+2l\pi$

$$(2)\text{ 式}=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\widehat{F}(jv+j2\pi l)\right|^2|\phi(jv+j2\pi l)|^2dv \quad (3)$$

$$\because\widehat{F}(jv+j2\pi l)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-j(v+2\pi l)m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}F_m e^{-jvm}$$

所以$\left|\widehat{F}(jv+j2\pi l)\right|^2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_mF_k^*e^{-jm(v-k)}$

又$\because\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j(m-k)v}dv=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$

$$\therefore\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\widehat{F}(jv+j2\pi l)\right|^2dv$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F_mF_k^*e^{-jm(v-k)}dv$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2$$

所以(3)式$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|F_m|^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left|\phi\left(jv+j2\pi l\right)\right|^2$

由(1) (3)式得$\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left|\phi\left(jv+j2\pi l\right)\right|^2=1$

3、假定$\{\varphi_n(t),\ n\in Z\}$是信号空间$X$的一组标准正交基，即

$$\langle\varphi_n(t),\ \varphi_m(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(t)\varphi_m^*(t)dt=\delta(n-m)$$

试证明，如果$\varphi_n^*(-t)$=$\varphi_n(t)$，$\varphi_n(t_1+t_2)$=$\varphi_n(t_1)\varphi_n(t_2)$

则对任意$f(t)\in X$，$h(t)\in X$，有

$$f(t)*h(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f(t),\ \varphi_n(t)\rangle\langle h(t),\ \varphi_n(t)\rangle\varphi_n(t)$$

证明：因为$f(t)\in X$，$h(t)\in X$，那么：

$$f(t)=\sum_n F_n\varphi_n(t)\ ,\quad h(t)=\sum_m F_m\varphi_m(t)$$

其中$F_n=\langle f(t),\ \varphi_n(t)\rangle$，$F_m=\langle f(t),\ \varphi_m(t)\rangle$

$$\begin{aligned}&f(t)*h(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n F_n\varphi_n(\tau)\cdot\sum_m F_m\varphi_m(t-\tau)d\tau\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n\sum_m F_nF_m\varphi_n(\tau)\varphi_m(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

由已知条件可知：

$$\varphi_m(t-\tau)=\varphi_m(t)\varphi_m^*(\tau)$$

那么：

$$\begin{aligned}&f(t)*h(t)\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_n\sum_m F_nF_m\varphi_n(\tau)\varphi_m(t)\varphi_m^*(\tau)d\tau\\&=\sum_n\sum_m F_nF_m\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n(\tau)\varphi_m^*(\tau)d\tau\bullet\varphi_m(t)\qquad(1)\end{aligned}$$

又因为$\{\varphi_n(t),\ n\in Z\}$是$X$的一组标准正交基

所以$(1)=\sum_n\sum_m F_nF_m\delta(n-m)\varphi_m(t)$

当$n=m$时，上式

$$\begin{aligned}&=\sum_n F_nF_n\varphi_n(t)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f(t),\ \varphi_n(t)\rangle\langle h(t),\ \varphi_n(t)\rangle\varphi_n(t)\qquad n,m\in(-\infty,+\infty)\end{aligned}$$

4、设$\phi_m(t)$，（$m\in\Gamma$为整数集合）是信号空间$X$的框架，即对$\forall f(t)\in X$，有

$$A\|f(t)\|^2\le\sum_{m\in\Gamma}\left|\langle f(t),\ \phi_n(t)\rangle\right|^2\le B\|f(t)\|^2\ ,\quad 0<A\le B$$

假定存在$\varphi_m(t)$，（$m\in\Gamma$）使得

$$\langle\phi_m(t),\ \varphi_k(t)\rangle=\begin{cases}a_m,\ m=k\\0,\ m\ne k\end{cases},a_m\ne0$$，试证明$\phi_n(t)$（$n\in\Gamma$）线性无关，且$A\le1\le B$

（1）假设$\phi_m(t)$（$m\in\Gamma$）线性相关，则存在一组不全为0的数$x_m$使等式$x_m\phi_m(t)=0$成立，从而

$$\left\langle\sum_m x_m\phi_m(t),\ \varphi_k(t)\right\rangle=\sum_m x_m\langle\phi_m(t),\ \varphi_k(t)\rangle=x_ka_k=0$$

因为$a_k\ne0$，只有$x_k=0$，这与原假设矛盾，故而$\phi_m(t)$（$m\in\Gamma$）是线性无关的。

（2）假设基是规范的，即$\|\varphi_k(t)\|^2=1$，且$a_m=1$。

令$f(t)=\varphi_k(t)$代入

$$A\|f(t)\|^2\le\sum_{m\in\Gamma}\left|\langle f(t),\ \phi_n(t)\rangle\right|^2\le B\|f(t)\|^2$$

有$A\|\varphi_k(t)\|^2\le\sum_{m\in\Gamma}\left|\langle\varphi_k(t),\ \phi_n(t)\rangle\right|^2\le B\|\varphi_k(t)\|^2$

$\Rightarrow A\le1\le B$

5、题设有错。

6、令$\psi$是实偶函数的小波，且有$C=\int_0^{\infty}\omega^{-1}\hat{\psi}(\omega)d\omega<\infty$，证明：对任意的$f(t)\in L^2(R)$，有$f(t)=\frac{1}{C}\int_0^{\infty}W_f(t,a)\frac{da}{a^{\frac{3}{2}}}$

证明：假设等式成立，即$f(t)=\frac{1}{C}\int_0^{\infty}W_f(t,a)\frac{da}{a^{\frac{3}{2}}}$

则$W_f(t,a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*(\frac{\tau-t}{a})d\tau=f(t)*\psi^*(-\frac{t}{a})$

所以$W_f(t,a)\leftrightarrow\sqrt{a}\hat{f}(j\omega)\cdot\hat{\psi}^*(a\omega)$

所以

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{C}\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\sqrt{a}\hat{\psi}^*(a\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot\frac{da}{a^{\frac{3}{2}}}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot\frac{1}{C}\int_0^{\infty}\frac{\hat{\psi}^*(a\omega)}{a}da\qquad(1)\end{aligned}$$

因为$\psi$是实偶小波，所以$\psi^*(a\omega)=\hat{\psi}(a\omega)$

$$\int_0^{\infty}\frac{\psi^*(a\omega)}{a}da=\int_0^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(a\omega)}{a}da$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(a\omega)}{a\omega}\cdot\omega\cdot da=\int_0^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(a\omega)}{a\omega}d(a\omega)$$

令 $a\omega=\lambda$，上式 $=\int_0^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\lambda}d(\lambda)$

所以(1)式

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega\cdot\frac{\int_0^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\lambda}d\lambda}{\int_0^{\infty}\frac{\widehat{\psi}(\omega)}{\omega}d\omega}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{j\omega t}d\omega=f(t)$$

7、若 $C=\int_0^{\infty}\omega^{-1}\widehat{\psi}(\omega)d\omega<\infty$，记

$$W_f(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*(\frac{t-b}{a})dt$$

$$W_g(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*(\frac{t-b}{a})dt$$

试证明 $\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(b,a)W_g^*(b,a)\frac{da}{a^2}db=\langle f,g\rangle$ 对所有 $f,g\in L^2(R)$ 成立。

证明：由题意知：$W_f(b,a)\leftrightarrow\sqrt{a}\hat{f}(\omega)\widehat{\psi}^*(a\omega)$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(b,a)W_g^*(b,a)\frac{da}{a^2}db$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{f}(\omega)\sqrt{a}\hat{\psi}^*(a\omega)e^{j\omega b}\right]d\omega\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{g}^*(\omega)\sqrt{a}\hat{\psi}(a\omega)e^{-j\omega b}\right]d\omega\cdot\frac{da}{a^2}\bullet db$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{j\omega b}d\omega\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}^*(\omega)e^{-j\omega b}d\omega\right]db\bullet\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}^*(a\omega)\hat{\psi}(a\omega)da$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(b)g^*(b)db\bullet\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2da}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{\psi}(a\omega)\right|^2da}$$

$$=\langle f,g\rangle$$

## 08 年试题：

1、FT、DTFT、DFS 的关系：

解：FT、DTFT 之间的关系

直接作 $f(t)\bullet\tilde{\delta}_\tau(t)$ 的傅里叶变换得：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m\tau)\bullet\delta(t-m\tau)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m\tau)e^{-j\omega m\tau}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)e^{-jm\tau}$$

$$=F(e^{j\omega})$$

所以：$F(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(j\omega-j\frac{2\pi}{T}m)$

FT、DFS 之间的关系

1) FT、DFS 形状相同；2) FT 幅度是 DFS 的(2π/N)倍。

3) FT 是周期性的、移位单位冲击函数的加权和。

4) DFS 是周期序列。两者周期相同。

$$T\tilde{f}_N(n\tau)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{F}_N(j\frac{2\pi}{T}k)$$

2、同 07 年的第二题。

3、类似于 07 年的第三题。

假定 Z 为整数集，$\{\varphi_m(n),\ n\in Z,\ m\in Z\}$、$\{\phi_m(n),\ n\in Z,\ m\in Z\}$ 分别是信号空间 $X$ 的两组基，且互为正交，即 $\langle\phi_k(n),\ \varphi_m(n)\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_k(n)\varphi_m^*(n)=\delta(k-m)$，这里 $\delta(n)$ 表示离散冲击信号，上述符号*表示复共轭。试证明：

（1）对任意 $f(n)\in X,\ h(n)\in X$，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)h^*(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\langle f(n),\ \varphi_m(n)\rangle\langle h(n),\ \phi_m(n)\rangle^*$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\langle f(n),\ \phi_m(n)\rangle\langle h(n),\ \varphi m(n)\rangle^*$$

（2）如果 $\varphi_m^*(-n)=\varphi_n(n),\ \varphi_m(n_1+n_2)=\varphi_m(n_1)\varphi_n(n_2)$

则对任意 $f(n)\in X,\ h(n)\in X$，有

$$f(n)*h(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle f(n),\ \varphi_k(n)\rangle\langle h(n),\ \varphi_k(n)\rangle\varphi_k(t)$$

这里，*表示卷积。

证明：

由题意知，$\varphi_m(n)$ 与 $\phi_m(n)$ 互为对偶基。

（1）因为 $f(n)\in X,\ h(n)\in X$

$$f=\sum_i\langle f,\varphi_i\rangle\phi_i \text{ 或 } f=\sum_i\langle f,\phi_i\rangle\varphi_i$$

$$h=\sum_i\langle h,\varphi_i\rangle\phi_i \text{ 或 } h=\sum_i\langle h,\phi_i\rangle\varphi_i$$

那么：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)h^*(n)=\langle f,\ h\rangle$$

$$=\left\langle \sum_i \langle f,\ \varphi_i\rangle \phi_i, \sum_j \langle h,\ \phi_j\rangle \varphi_j \right\rangle$$

$$=\sum_i\sum_j \langle f,\ \varphi_i\rangle \langle h,\ \phi_j\rangle^* \langle \phi_i,\ \varphi_j\rangle$$

$$=\sum_i\sum_j \langle f,\ \varphi_i\rangle \langle h,\ \phi_j\rangle^* \delta(i-j)$$

$$=\sum_i \langle f,\ \varphi_i\rangle \langle h,\ \phi_i\rangle^*$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f(n),\ \varphi_m(n)\rangle \langle h(n),\ \phi_m(n)\rangle^*$$

把 $f=\sum_i \langle f,\phi_i\rangle \varphi_i$ 和 $h=\sum_i \langle h,\varphi_i\rangle \phi_i$ 代入上式同理可得：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)h^*(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \langle f(n),\ \phi_m(n)\rangle \langle h(n),\ \varphi m(n)\rangle^*$$

（2）

$$f(n)*h(n)$$

$$=\sum_m f(m)h(t-m)$$

$$=\sum_m \left[\sum_k \langle f(n),\ \varphi_k(n)\rangle \phi_k(m)\right]\left[\sum_l \langle h(n),\ \phi_l(n)\rangle \varphi_l(n-m)\right]$$

$$=\sum_k\sum_l \langle f(n),\ \varphi_k(n)\rangle \langle h(n),\ \phi_l(n)\rangle \sum_m \phi_k(m)\varphi_l(n-m) \quad (1)$$

由已知条件可知：$\varphi_l(n-m)=\varphi_l(n)\varphi_m{}^*(m)$

那么：(1)式

$$=\sum_k\sum_l \langle f(n),\ \varphi_k(n)\rangle \langle h(n),\ \phi_l(n)\rangle \sum_m \phi_k(m)\varphi_l{}^*(m)\varphi_l(n)$$

$$=\sum_k\sum_l \langle f(n),\ \varphi_k(n)\rangle \langle h(n),\ \phi_l(n)\rangle \delta(k-l)\varphi_l(n)$$

$$=\sum_k\sum_l \langle f(n),\ \varphi_k(n)\rangle \langle h(n),\ \phi_k(n)\rangle \varphi_k(n)$$

4、设 $X_1$ 是 $X$ 的子空间，信号 $\phi_m(t)$，（$m\in\Gamma$ 为整数集合）是信号空间 $X$ 的标准正交基，即 $\langle \phi_m(t),\ \varphi_k(t)\rangle=\begin{cases}1, & m=k\\ 0, & m\neq k\end{cases}$，假定 $f(t)\in X$，但 $f(t)\notin X_1$，请在 $X_1$ 中确定 $f(t)$ 的一个最佳逼近，并说明理由。

解：设信号 $x(t)$ 是信号空间 $X_1$ 中的任一信号，$x(t)=\sum_i a_i\phi_i(t)$，则题设问题转化为 $d(f(t),\ x(t))$ 最小问题。

$$d^2(f,\ x)=\|f-x\|^2=\langle f-x,\ f-x\rangle$$

$$=\langle f,\ f\rangle-\langle f,\ x\rangle-\langle x,\ f\rangle+\langle x,\ x\rangle$$

$$=\|f\|^2-\left\langle f,\sum_i a_i\phi_i(t)\right\rangle-\left\langle \sum_i a_i\phi_i(t),\ f\right\rangle+\left\langle \sum_i a_i\phi_i(t),\sum_i a_i\phi_i(t)\right\rangle$$

$$=\|f\|^2-\sum_i a_i{}^*\langle f,\ \phi_i(t)\rangle-\sum_i a_i\langle \phi_i(t),\ f\rangle$$

$$+\sum_i\sum_j a_i a_j{}^*\langle \phi_i(t),\ \phi_j(t)\rangle$$

$$=\|f\|^2+\sum_i\left[-a_i{}^*\langle f,\ \phi_i(t)\rangle-a_i\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^*+\|a\|^2\right]$$

$$=\|f\|^2+\sum_i\left[\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2-a_i{}^*\langle f,\ \phi_i(t)\rangle-a_i\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^*+\|a\|^2\right]$$

$$-\sum_i\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2$$

$$=\|f\|^2+\sum_i\left(\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2-a_i\right)^2-\sum_i\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2$$

欲使 $d^2(f,\ x)$ 达到最小，需 $\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2-a_i=0$，即 $a_i=\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2$，最小值为 $\|f\|^2-\sum_i\langle f,\ \phi_i(t)\rangle^2$

故当 $\hat{x}(t)=\sum_i a_i\phi_i(t)=\sum_i\langle f,\ \phi_i(t)\rangle\phi_i(t)$ 时，$\hat{x}(t)$ 是对 $f(t)$ 的一个最佳逼近。

5、题设有错。