四川大学期末考试试题（闭卷）

（2018——2019 学年第 1 学期） B 卷

课程号：201162040 课序号： 课程名称：概率论 任课教师：常寅山，马婷 成绩：

适用专业年级： 学生人数： 印题份数： 学号： 姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

1. (10 分) 袋中装有m只正品1元硬币，n只次品1元硬币(次品硬币的两面均印有花；而正品硬币一面是汉字，一面是花)。在袋中任取一只，将它投掷r次，已知每次都得到花，问这只硬币是正品的概率为多少？

解： 设事件$A=\{$硬币是正品$\}$，事件$B=\{$将一枚硬币掷r次，每次都出花$\}$，则所求为$P(A|B)$。(2 分) 根据题设，$P(A)=\frac{m}{m+n}$，$P(B|A)=2^{-r}$，$P(B|\bar{A})=1$。(3 分) 由贝叶斯公式，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}(4\text{ 分})=\frac{m}{m+2^r n}$。(1 分)

2. (10 分) 一袋中装有$N-1$只黑球及1只白球，每次从袋中随机地摸出一球，并换入一只黑球，这样继续下去，问第k次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解： 设$A=\{$第k次摸到黑球$\}$，则 $\bar{A}=\{$第k次摸到白球$\}$。因为袋中只有一只白球，而每次摸出白球总是换入黑球，故为了第k次能摸到白球，则前面的

$k-1$次一定不能摸到白球，从而等价于下列事件：在前$k-1$次摸球时都摸出黑球，第k次摸出白球。(4 分)这一事件的概率为

$P(\bar{A})=\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}$。(4 分)

故所求概率为$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N}$。(2 分)

3. (10 分) 设A,B,C三个事件相互独立，求证$A\cup B$，$A-B$均与C独立。

证明：

$P\big((A\cup B)C\big)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=P(C)\big(P(A)+P(B)-P(AB)\big)=P(C)P(A\cup B)$。(5 分)

$P\big((A-B)C\big)=P(AC-ABC)=P(AC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)=P(C)\big(P(A)-P(AB)\big)=P(C)P(A-B)$。（5 分）

4. (10 分) 假设X和Y都是$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量，假设$A\in\mathcal{F}$。定义

$$Z(\omega)=\begin{cases}X(\omega),\omega\in A，\\ Y(\omega),\omega\in\bar{A}。\end{cases}$$

证明：Z是一个随机变量。

证明：因为对任何实数x，$\{Z\le x\}=(A\cap\{X\le x\})\cup(\bar{A}\cap\{Y\le x\})$。(4 分)由于$X,Y$是随机变量，所以$\{X\le x\},\{Y\le x\}\in\mathcal{F}$。(2 分)而事件域对事件的逆，事件的有限交和有限并封闭。所以对于任何实数x，$\{Z\le x\}\in\mathcal{F}$。所以，Z是一个随机变量。(4 分)

5. (20 分) 假设随机变量X服从一元正态分布$N(\mu,\sigma^2)$。令$Y=e^X$。求：(1) Y的密度函数；(2) Y的中位数；(3) Y的期望；(4) Y的方差。

解：

(1) $P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)$(1 分) $=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\ln y}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$。(1 分) 在上述积分中做换元$t=e^x$，得到$P(Y\le y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^y\frac{1}{t}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$。(2 分) 所以，$Y$的密度函数$\rho(y)=1_{y>0}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\frac{1}{y}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$。

(2) 求y使得$P(Y\le y)=\frac{1}{2}$。(1 分) 注意到$P(Y\le y)=P(X\le \ln y)$。(1 分)而X的中位数为μ。故，$\ln y=\mu$，即，$y=e^\mu$。(2 分) 故，Y的中位数为e^μ。(1 分)

(3) $EY=Ee^X=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$ (3 分)

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-(\mu+\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\cdot e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$。(2 分)

(4) $EY^2=Ee^{2X}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-(\mu+2\sigma^2)\right)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\cdot e^{2\mu+2\sigma^2}=e^{2\mu+2\sigma^2}$。(4 分)

$DY=EY^2-(EY)^2=e^{2\mu+2\sigma^2}-e^{2\mu+\sigma^2}$。(1 分)

6. (10 分) (1) 设X服从双边指数分布，其密度函数为$\rho(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$。求$X$的特征函数。 (2) 设$Y$服从柯西分布，其密度函数为$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$。求$Y$的特征函数。(提示：可以利用(1)及逆转公式。)

解：

(1) $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-|x|}e^{itx}\mathrm{d}x\,(2\text{ 分})$

$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos(tx)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(tx)\mathrm{d}x$。(1 分) 利用分布积分公式，我们得到：

$\varphi(t)=-\cos(tx)\, e^{-x}|_0^{\infty}-t\int_0^{\infty} e^{-x}\sin(tx)\,\mathrm{d}x=1-t\int_0^{\infty} e^{-x}\sin(tx)\,\mathrm{d}x$。

再次分布积分，我们得到：

$\varphi(t)=1+t\sin(tx)\, e^{-x}|_0^{\infty}-t^2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x=1-t^2\varphi(t)$。

所以，$\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2}$。(2 分)

(2) 注意到$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\mathrm{d}t<\infty$。由(1)及逆转公式，

$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$。(3 分) 即，$e^{-|x|}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{it(-x)}\frac{1}{\pi(1+t^2)}\mathrm{d}t$。所以，$Y$的特征函数为$e^{-|t|}$。(2 分)

7. (10 分) 设随机变量X与Y独立，并且都服从区间(0,1)上的均匀分布，求随机变量$\frac{X}{Y}$的概率密度。

解： 由独立性，(X,Y)的联合密度函数$\rho(x,y)=1_{0\le x,y\le 1}$。(3 分)由随机变量的商的密度函数的公式，$\frac{X}{Y}$的密度函数

$$q(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|z|\rho(zx,z)\,\mathrm{d}z\ (3\text{ 分})=\int_{-\infty}^{\infty}|z|1_{zx,z\in(0,1)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 z\cdot 1_{zx\in(0,1)}\,\mathrm{d}z$$

$$=\begin{cases}0,x\le 0，\\ \frac{1}{2},0<x\le 1，\ (4\text{ 分})\\ \frac{1}{2x^2},x>1。\end{cases}$$

8. (10 分) 已知随机变量序列$\xi_1,\xi_2,\ldots$的方差有界：$D\xi_n\le C$，并且当$|i-j|\to\infty$时，ξ_i,ξ_j的相关系数$r_{ij}\to 0$，证明对$\{\xi_n\}_{n\ge 1}$成立弱大数定律。

证明：由 Markov 大数定律，只需验证下列 Markov 条件：

$\frac{1}{n^2} D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) \to^{n\to\infty} 0$。(4 分)注意到$D(\sum_{k=1}^{n} \xi_k) = \sum_{k,\ell=1,\dots,n} Cov(\xi_k, \xi_\ell) = \sum_{k,\ell=1,\dots,n} \sqrt{D\xi_k D\xi_\ell} r_{k\ell} \le C \sum_{k,\ell=1,\dots,n} r_{k\ell}$。(4 分) 而由于当$|k-\ell| \to \infty$时，$r_{k\ell} \to 0$，所以，$\frac{\sum_{k,\ell=1,\dots,n} r_{k\ell}}{n^2} \to^{n\to\infty} 0$。(2 分)

9. (10 分) 假设X_n服从参数（成功概率）是$\frac{1}{n}$的几何分布，证明$\frac{X_n}{n}$依分布收敛于参数（速率）是1的指数分布。

证明：

设$F(x)$是指数分布的分布函数，则，$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 1 - e^{-x}, x > 0。 \end{cases}$ 设$F_n(x)$是$\frac{X_n}{n}$的分布函数。(2 分) 则，对于$x \le 0$，$F_n(x) = 0$，故$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$。(1 分) 对于$x > 0$，

$F_n(x) = P(X_n < nx) = 1 - P(X_n \ge nx) = 1 - P(X_n \ge [nx])$

$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{[nx]-1} (5\text{ 分}) \to^{n\to\infty} F(x)\,(2\text{ 分})$。