初等数论参考答案及评分标准

考试时间：2018 年7 月6 日

1 原方程等价于$10x+9y=1009$，那么$x=\frac{1009-9y}{10}$**（2分）**。于是原方程有正整数解等价于：(1)$1009y-9y>0, y>0$；(2)$1009-9y\equiv 0 \bmod 10$**（3分）**。得到$0<y<\frac{1009}{9}, y\equiv 1 \bmod 10$**（2分）**。于是所有正整数解为：$(100,1),(91,11),(82,21),(73,31),(64,41),(55,51),(46,61),(37,71),(28,81),(19,91),(10,101),(1,111)$ **（3分）**。

2 原方程等价于：$x^2\equiv 19 \bmod 3$ 且 $x^2\equiv 19 \bmod 673$ **（5分）**。注意到$(\frac{19}{673})=(\frac{673}{19})(-1)^{\frac{672\cdot 18}{4}}=(\frac{8}{19})=(\frac{2}{19})=-1$ **（2分）**，所以$x^2\equiv 19 \bmod 673$无解**（2分）**，原方程也无解**（1分）**。

3 对于任意$a\in(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z})^{\times}$，$a$在乘法群中的阶整除$\varphi(23)=22$**（1分）**。模23的原根个数为$\varphi(\varphi(23))=10$**（2分）**。注意到$(-2)^2\equiv 4 \bmod 23, (-2)^{11}\equiv 2 \bmod 23$，故-2是一个模23的原根**（4分）**，因此所有模23的原根为$\{(-2)^k \bmod 23 \mid (k,22)=1\}$。

得到所有原根：5，7，10，11，14，15，17，19，20，21 mod23**（3分）**。

4 注意到当$s>2$时，有$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$，**（2分）**$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$**（2分）**。于是：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu*\mu*\varphi*\varphi*\varphi)(n)}{n^s}=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s})^3\cdot(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s})^2=\frac{\zeta^3(s-1)}{\zeta^5(s)}$$

（6分）

5 任取五个整数$a_1,a_2,...,a_5$。设：

$$A=\{a_i \mid 1\le i\le 5\}, A_0=\{a_i \mid a_i\equiv 0 \bmod 3\}, A_1=\{a_i \mid a_i\equiv 1 \bmod 3\}, A_2=\{a_i \mid a_i\equiv 2 \bmod 3\}$$

（3分） 则有$A=\bigcup_{i=1}^{3}A_i$，其中A_i两两无交。

情形(1)：若存在$A_j=\emptyset$，由抽屉原理（或Dirichlet原理）可知存在$i\ne j$使得$|A_i|\ge 3$**（3分）**。这时A_i中的任三个元素满足条件**（2分）**。

情形(2)：每个A_i非空，取$b_0\in A_0, b_1\in A_1, b_2\in A2$，则：$b_0+b_1+b_2\equiv 0 \bmod 3$**（3分）**。

6 (1)由于$p\ne 3$，则$(3,p)=1$**（1分）**，以及有同构：

$$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\times}\times(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}\longrightarrow(\mathbb{Z}/3p\mathbb{Z})^{\times};(a \bmod 3, b \bmod p)\mapsto(ap+b\cdot 3 \bmod 3p)$$

（3分）所以非负简化剩余系为$\{ap+3b \mid a=1,2; b=1,2,....,p-1\}$。

(2)$(\frac{6}{p})+(\frac{2p}{3})=(\frac{2}{p})(\frac{3}{p})+(\frac{2}{3})(\frac{p}{3})=(\frac{p}{3})((\frac{2}{p})(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1)=0\Leftrightarrow(\frac{2}{p})(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1=0$。**（4分）**
而$(\frac{2}{p})(-1)^{\frac{p-1}{2}}-1=0\Leftrightarrow(\frac{2}{p})$和$(-1)^{\frac{p-1}{2}}$异号$\Leftrightarrow p\equiv 1,3\bmod 8$**（2分）**

7 (1)设g在$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$中的阶为$k$，$k|p-1$**（2分）**，即证$k=p-1$。由于$g^k\equiv 1\bmod p$，可假设$g^k=np+1$。那么$g^{kp}=1+\sum_{i=1}^{p}C_p^i(np)^i$**（2分）**。由于$i\geq 1$时，$p|C_p^i$，则$p^2|C_p^i(np)^i$。于是有：$g^{kp}\equiv 1\bmod p^2$。

又g为模p的原根，则$\phi(p^2)=p(p-1)|kp$，那么$p-1|k$，则$k=p-1$**（2分）**。

(2)**举出反例并给出计算过程得4分，否则得0分。**

8 当$m<2$时显然不是整数。现考虑$m\geq 2$的情形：此时必然有$1\leq k\leq m$使得$2^2|3k-1$。定义：$l_0=\max\{v_2(3k-1)\mid 1\leq k\leq m\}$**（1分）**，现证明只有一个$k$使得$v_2(3k-1)$取到$l_0$。

若不然，则有不相等的n_1,n_2使得$3k_1-1=2^{l_0}n_1,3k_2-1=2^{l_0}n_2,v_3(n_1),v_3(n_2)=0$。于是，$2^{l_0}(n_1-n_2)=3(k_1-k_2),2^{l_0}|k_1-k_2$，即$k_1=k_2+l2^{l_0}$。

若$l>1$，那么$m\geq k_1>2^{l_0+1}$，这意味着同余方程$3x\equiv 1\bmod 2^{l_0+1}$在$1\leq x\leq m$中有解$k_3$，然而此时$v_2(3k_3-1)\geq l_0+1$，这与$l_0$的定义矛盾**（3分）**。

于是$k_l=k_2$，此时$3k_1-1=3(k_2+2^{l_0})-1=2^{l_0}n_2+3\cdot 2^{l_0}=2^{l_0}(n_2+3)$。注意到$n_2$是奇数，那么$v_2(3k_1-1)=v_2(2^{l_0})(n_2+3)\geq l_0+1$，同样，和$l_0$的定义矛盾。

综上所述，$k_1=k_2$，我们记为k_0**（3分）**。

现在令$3k-1=2^{v_2(3k-1)}m_k,A=2^{l_0-1}\prod_{k=1}^{m}m_k$，于是$A\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{3k-1}=A'+\frac{A}{3k_0-1}=A'+\frac{B}{2}$。其中，$A$是整数，而$B$是奇数，所以$A\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{3k-1}$不是整数，即$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{3k-1}$不是整数**（3分）**。

9 (1)注意到$18201720162015\equiv 3\bmod 4$**（1分）**，并且任意整数的平方mod4为0或1。所以若有解x,y,z，那么它们都为奇数**（1分）**，则$x^2\equiv y^2\equiv z^2\equiv 1\bmod 8$，所以$x^2+y^2+z^2\equiv 3\bmod 8$。然而$2018201720162015\equiv 7\bmod 8$，矛盾**（3分）**。故原方程无解。

(2)注意到任意整数的立方mod7为0,1,6。因此对于任意整数x,y,z，$x^3+y^3+z^3\equiv 0,2,3,6,5\bmod 7$**（3分）**。然而$2119852018\equiv 4\bmod 7$**（2分）**，故原方程无解。

10 设$A=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$，$\chi_A(n)=1,n\in A$，否则$\chi_A(n)=0$**（1分）**。于是：

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{a_k}=\sum_{n\leq a_s}\frac{\chi_A(n)}{n}=\frac{s}{a_s}+\int_1^{a_s}\frac{A(t)}{t^2}dt=\frac{s}{a_s}+\int_1^{\infty}\frac{A(t)}{t^2}dt-\int_{a_s}^{\infty}\frac{A(t)}{t^2}dt$$

（3分） 因此只用证明：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\int_1^{\infty}\frac{A(t)}{t^2}dt$。又注意到

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{a_k}=\sum_{n\leq x}\frac{\chi_A(n)}{n}=\frac{A(x)}{x}+\int_1^{x}\frac{A(t)}{t^2}dt$$

（2分） 现只用证明$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=0$：若不成立，则存在$\epsilon_0>0$使得对于任意的$n$有$\frac{A(a_n)}{a_n}\geq\epsilon_0$**（2分）**，即$\frac{1}{a_n}\geq\frac{\epsilon_0}{n}$。然而这与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$收敛矛盾**（2分）**。所以$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}=0$，证毕。