四川大学期末考试试题(A)

（2008——2009学年第二学期）

课程号：201007020　课序号：0.1.2　课程名称：初等数论　任课教师：[illegible]　成绩：

适用专业年级：　学生人数：400　印题份数：400　学号：　姓名：

1.（10分）求 2009 的四进制表示和它在[illegible] 4 之下的数字和.

2.（10分）解线性同余式组：
$$\begin{cases} x \equiv 25 \pmod{36}, \\ x \equiv 33 \pmod{104}, \\ x \equiv 85 \pmod{507}. \end{cases}$$

3.（10分）计算：$\left(\dfrac{87}{2017}\right)$

4.（10分）设实数 $s>2$，整数 $a,b \geq 1$. 对于算术函数 f，令 $f^{(a)}$ 表示 a 个 f 的 Dirichlet 乘积. 试用黎曼 Zeta 函数 $\zeta(s)$ 表示 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu^{(a)} * \varphi^{(b)}(n)}{n^s}$，并证明你的结论.

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

5.（10分）设 m 为~~奇数~~，$a,b \geq 1$ 均为 $\varphi(m)$ 的倍数. 证明：若 $\gcd(a,b)$ 整除正整数 d，则 $2^d \equiv 1 \pmod{m}$.

Fermat

6.（10分）设素数 $p \neq 29$ 且整数 α 与 p 互素. 证明：若 α 为模 p 的 29 次幂剩余，则对于任何正整数 k，α 为模 p^k 的 29 次幂剩余.

Hensel's lemma

7.（10分）设 p 为一个素数，g 为模 p^3 的原根. 证明：对于任意整数 $\alpha \geq 3$，g 是模 p^α 的原根.

8.（10分）设 $n>1$ 为正整数. 证明：$n \nmid (2^n - 1)$.

9.（10分）设 f 为乘法函数，且 $f(1) \neq 0$. 证明：f 可以表为三个完全乘法函数的 Dirichlet 乘积的充分必要条件是：对于任意整数 $l \geq 4$ 和任意素数 p，均有 $f^{-1}(p^l) = 0$.

10.（10分）设 n 为正整数，令 $L_n = \operatorname{lcm}\{1,2,\ldots,n\}$ 表示 $1,2,\ldots,n$ 的最小公倍数. 证明如下两个等式成立：

(1) $L_n = \operatorname{lcm}_{1\leq k\leq n}\left\{k\binom{n}{k}\right\}$;　(2) $L_n = \gcd_{1\leq k\leq n}\left\{L_n\binom{n}{k}\right\}$.

注：1 试题字迹务必清晰，书写工整.
2 题间不留空，一般应题卷分开
3 务必用 A4 纸打印

本题 1 页，本页为第 1 页

教务处试题编号：

$2^n \equiv 1 \pmod{n}$

$2^n \equiv 1 \pmod{p}$