四川大学期末考试试题（闭卷）

(2017–2018学年第 1 学期)　　B卷

课程号: **201097050** 课序号: **01, 02** 课程名称: 高等代数-1(双语) 任课教师: 付昌建 卢明 马强 谭友军　　　成绩:

适用专业年级: 数学学院2017级各专业 学生人数: **269** 印题份数: **300**　　　学号:　　　姓名:

考　生　承　诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1、已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；

2、不带手机进入考场；

3、考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名：

注意: 满分100分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中, $\mathbb{F}$ 表示一个数域, $\mathbb{F}^n$ 表示 n 维列向量组成的向量空间, A' 表示 A 的转置, $r(A)$ 表示 A 的秩, $\det$ 表示行列式, E_n 表示 n 阶单位阵.

1. (20分) 解答下列各题.

(1) (8分) 设 $f(x)=x^6-x^5-2x^4+4x^3-5x^2+5x-2$. 求 $f(x)$ 的全部复根和多项式 $g(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 在实数域上的标准分解式, 其中, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(2) (5分) 证明: $\sqrt[3]{15}$ 是无理数.

(3) (7分) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_5$ 是 $f(x)=x^5+5x+1$ 的全部复根. 求 $\sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i^5$ 的值.

2. (30分) 解答下列各题.

(1) (10分) 在 $\mathbb{F}$ 上求方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=-4 \\ -3x_1+x_2+2x_3-5x_4-4x_5=-1 \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4+x_5=4 \\ -4x_1+16x_2+x_3+3x_4-9x_5=-21 \end{cases}$ 的全部解.

(2) (10分) 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\mathbb{F}^n$ 线性无关.

(i) 证明: $n\geq m$.

(ii) 设 $\beta_i=\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\right)-\alpha_i,\ 1\leq i\leq m$. 求向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的秩.

(3) (5分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的可逆反对称的 n 阶方阵, α 是 n 维列向量. 设 $B=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha' & 0 \end{pmatrix}$, B^* 是 B 的伴随矩阵. 求 BB^* 的秩.

(4) (5分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的可逆阵, $m(x)$ 是 A 的极小多项式 (即, $m(x)$ 是 A 的次数最低的首一的零化多项式, 而 A 的零化多项式是使得 $f(A)=0$ 的非零多项式 $f(x)$). 证明: $m(x)$ 的常数项不为 0.

3. (30分) 解答下列各题.

(1) (10分) 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

(2) (10分) 求 λ 的值使得线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+2\lambda x_3=2 \\ x_1+\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=2\lambda \\ (2\lambda-1)x_1+x_2+(3\lambda-1)x_3=\lambda+1 \end{cases}$ 有解, 并在有解的情况下求出所有解.

(3) (10分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵. 证明: $r(A)\leq 1$ 当且仅当 A 可以分解为 $\mathbb{F}$ 上的一个行向量与一个列向量的乘积.

4. (10分) 设 A 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶方阵, 且存在整数 k 使得 $A^{k-1}\neq 0$, 但 $A^k=0$. 证明:
(i) 存在 $\xi\in\mathbb{F}^n$ 使得 $A^{k-1}\xi\neq 0$;　　(ii) 对于 (i) 中的 ξ 有: $\xi,A\xi,\cdots,A^{k-1}\xi$ 线性无关.

5. (10分) 设 A 是实数域上的 n 阶可逆阵. 设复数 a 满足 $\det(A'-aA^{-1})=0$. 证明: a 是实数且 $a>0$.