四川大学期末考试试题（闭卷）
（2020 —2021 学年第 1 学期　B 卷）

课程号：201162040　课序号：01,02　课程名称：概率论　任课教师：彭雪, 常寅山　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：300　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1. 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2. 不带手机进入考场；
3. 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

1. (10 分) (Kounias 不等式) 假设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是有限个事件, 证明

$$P(\bigcup_{r=1}^{n} A_r) \le \min_{k=1,2,\ldots,n} \left(\sum_{r=1}^{n} P(A_r) - \sum_{r:r\neq k} P(A_r \cap A_k) \right).$$

证明. 只需要证明对于任意 $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$P(\bigcup_{r=1}^{n} A_r) \le \sum_{r=1}^{n} P(A_r) - \sum_{r:r\neq k} P(A_r \cap A_k). \text{ (2 分)} \tag{1}$$

注意到 $\bigcup_{r=1}^{n} A_r$ 可以写成 A_k 和 $\bigcup_{r\neq k} A_r A_k^c$ 的不交并. 所以,

$$P(\bigcup_{r=1}^{n} A_r) = P(A_k) + P(\bigcup_{r\neq k} A_r A_k^c). \text{ (2 分)} \tag{2}$$

利用次可加性, 可知

$$P(\bigcup_{r\neq k} A_r A_k^c) \le \sum_{r\neq k} P(A_r A_k^c). \text{ (2 分)} \tag{3}$$

注意到

$$P(A_r A_k^c) = P(A_r) - P(A_r A_k). \text{ (2 分)} \tag{4}$$

综上, 合并(2), (3), (4)即可得到(1). (2 分)

2. (10 分) 设 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 是一列单调递增的事件列. 若事件 B 与任意事件 A_n 两两独立, 但 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 不一定相互独立. 求证: 事件 B 与 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ 相互独立.

证明. 根据概率的连续性,

$$P(B\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} BA_n) = \lim_{n\to\infty} P(BA_n). \text{ (5 分)}$$

而 $P(BA_n) = P(B)P(A_n)$. (1 分) 再次利用概率的连续型, $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$. (2 分) 综上可知, $P(B\lim_{n\to\infty} A_n) = P(B)P(\lim_{n\to\infty} A_n)$, 于是事件 B 与 $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ 相互独立. (2 分)

3. (10 分) 现在有 n 个球, n 个盒子. 每个球等可能的投入 n 个盒子中的一个, 并且球和球之间相互独立. 求恰有 1 个小球的盒子数的期望值.

解. 用 X_i 表示第 i 个盒子里小球的个数. (2 分) 那么, X_i 服从参数是 $(n, 1/n)$ 的二项分布, 所以, $P(X_i = 1) = n(1/n)(1-1/n)^{n-1} = (1-1/n)^{n-1}$. (4 分) 最后, 根据期望的线性性质, 恰有 1 个小球的盒子数等于

$$\sum_{i=1}^{n} E(1_{X_i=1}) = \sum_{i=1}^{n} P(X_i = 1) = n(1-1/n)^{n-1}. \text{ (4 分)}$$

4. (15 分) 考虑 X 服从参数为 $(2,1)$ 的 Γ-分布, Y 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, 并且 X 和 Y 独立. 证明:XY 和 $X(1-Y)$ 独立.

证明. X 的密度函数为 $f_X(x) = \frac{e^{-x}x^{2-1}}{\Gamma(2)} 1_{x>0} = xe^{-x}1_{x>0}$. (2 分) Y 的密度函数 $f_Y(y) = 1_{y\in(0,1)}$. (2 分) 由于 X 和 Y 独立, 所以, (X, Y) 的联合密度

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = xe^{-x}1_{x>0}1_{y\in(0,1)}. \text{ (2 分)}$$

接下来, 我们考虑 $u = xy$, $v = x(1-y)$, $U = XY$, $V = X(1-Y)$. 那么, $x = u+v$, $y = \frac{u}{u+v}$. (2 分) 所以,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{v}{(u+v)^2} & -\frac{u}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u+v}. \text{ (2 分)}$$

所以, 我们有

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = e^{-u}e^{-v}1_{u>0}1_{v>0}. \text{ (2 分)}$$

因为 (U, V) 的联合密度函数可以分离变量, 所以, U, V 相互独立. (3 分)

5. (10 分) 设离散型随机变量 X 的可能取值为 1 和 -1, 离散型随机变量 Y 的可能取值也为 1 和 -1.

求证: X 与 Y 相互独立的充分必要条件为 X 与 Y 不相关.

证明. 独立性蕴含不相关性. (2 分) 只需证明在此题的前提条件下, 不相关也蕴含独立性: 定义 $U = \frac{X+1}{2}, V = \frac{Y+1}{2}$. 那么, $X = 2U - 1, Y = 2V - 1$. 并且 X 和 Y 独立等价于 U 和 V 独立. 所以, 只需证明 U 和 V 独立. (2 分) 注意到 $\mathrm{Cov}(U, V) = \frac{1}{4}\mathrm{Cov}(X, Y)$. 所以, 若 X 和 Y 不相关 (协方差为零), 则, U 和 V 也不相关. (2 分) 令事件 A 表示 $(U = 1)$, 事件 B 表示 $(V = 1)$. 则, $\mathrm{Cov}(U, V) = P(AB) - P(A)P(B)$. 所以, U, V 不相关蕴含 A 和 B 独立. (2 分) 而 A 和 B 独立, 则, A^c 和 B 独立, A 和 B^c 独立, A^c 和 B^c 独立. 等价的, (U, V) 的联合分布列等于边缘分布列的乘积. 故 U 和 V 独立. (2 分)

6. (25 分) 考虑一个简化的投资模型. 现在有一个高风险的理财项目, 理财项目有 0.6 的可能收益 100%, 也有 0.4 的可能性损失 70%. 并假设每期理财收益相互独立.

   (a) (10 分) 每一期的该理财项目, 资金投资回报率 R 的期望是多少? (资金投资回报率 = 净利润 / 投资总额.)

   (b) (5 分) 假设我们没有其他投资渠道, 也没有其他的收入和支出. 现在, 我们考虑一种幼稚的较激进的投资策略: 连续投资这个理财项目, 每期都把手上全部的钱 (上一期的理财结余) 投入这个理财项目. 证明随着参与该理财的投资期数 n 的增多, 投资者手里的资金会几乎处处趋于 0.

   (c) (5 分) 假设我们没有其他投资渠道, 也没有其他的收入和支出. 现在, 我们采取一种成熟的较稳健的投资策略: 我们依然连续投资这个理财项目. 只不过我们每回只拿出固定比例 r 的资金投资该理财项目, 持有剩下的比例为 $1 - r$ 的资金不参加投资. 假设 X_n 是 n 期投资之后, 投资者手里的资金和初始资金的比值, 证明 $\ln X_n/n$ 几乎处处收敛, 并求该极限值 $f(r)$.

   (d) (5 分) 求小题 (c) 中 $f(r)(0 \le r \le 1)$ 的最大值点对应的 r_0. (这一有关最优投资比例的公式被称为 Kelly 公式.)

解.

(a) $E(R) = 1 \times P(R = 1) + (-0.7) \times P(R = -0.7) = 1 \times 0.6 - 0.7 \times 0.4 = 0.32$. (10 分)

(b) 第 n 期的资金回报率是 R_n. 那么, n 期下来总的资产额是初始资产额的 $\prod_{i=1}^n (1 + R_i)$ 倍. 只需要证明几乎必然的, $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^n (1 + R_i) = 0$. 或者等价的, 证明几乎必然的, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \ln(1 + R_i) = -\infty$. (2 分) 注意到 $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ 独立同分布. 所以, 利用强大数定律, 几乎必然的,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + R_i) = E(\ln(1 + R_1)).$$

而, 根据题意,

$$E(\ln(1 + R_1)) = 0.6 \times \ln(1 + 1) + 0.4 \times \ln(1 - 0.7) = \frac{1}{5}\ln(0.72) < 0.$$

所以, 几乎必然的, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \ln(1 + R_i) = -\infty$. (3 分)

(c) 现在 $X_n = \prod_{i=1}^n (r(1+R_i)+1-r)$, 而

$$\ln X_n/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln(1+rR_i). \text{ (2 分)}$$

所以, 根据强大数定律, 几乎必然的, 我们有

$$\begin{aligned} f(r) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln X_n &= E(\ln(1+rR_i)) \\ &= 0.6\ln(1+r) + 0.4\ln(1-0.7r). \text{ (3 分)} \end{aligned}$$

(d) $f'(r) = \frac{0.6}{1+r} - \frac{0.4}{1-0.7r}$. (2 分) 求解 $f'(r_0) = 0$, 得到 $r_0 = \frac{10}{41}$. (2 分) 对于 $r < r_0$, $f'(r) > 0$; 对于 $r > r_0$, $f'(r) < 0$. 所以, $f(r)$ 的最大值点在 $r = r_0 = \frac{10}{41}$ 处取到. (1 分)

7. (20 分) 假设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 是独立同分布的随机变量, 满足 $E(X_i) = 1$. 且 $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. 令 $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. 假设 Z 是标准正态随机变量.

(a) (8 分) 证明 $\sqrt{S_n/n}$ 依概率收敛到 1.

(b) (8 分) 假设随机变量 Z_n 依分布收敛到标准正态随机变量 Z, 并且随机变量 W_n 依概率收敛到 1. 证明 Z_n/W_n 依分布收敛到 Z.

(c) (4 分) 证明 $\frac{2}{\sigma}(\sqrt{S_n} - \sqrt{n})$ 依分布收敛到 Z. (提示: 利用分子有理化和中心极限定理.)

证明. 假设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数.

(a) 根据大数定律, 以概率一, $S_n/n \overset{n\to\infty}{\to} E(X_1) = 1$. 所以, 几乎处处的, $\sqrt{S_n}/\sqrt{n}$ 收敛到 1. (4 分) 由于几乎处处收敛蕴含依概率收敛. 所以, $\sqrt{S_n}/\sqrt{n}$ 依概率收敛到 1. (4 分)

(b) 对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} P(Z_n/W_n \le x) \le& P(Z_n/W_n \le x, W_n \le 1+\varepsilon) + P(W_n > 1+\varepsilon) \\ \le& P(Z_n \le (1+\varepsilon)x) + P(W_n > 1+\varepsilon). \text{ (2 分)} \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 可得, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} P(Z_n/W_n \le x) \le \Phi((1+\varepsilon)x). \text{ (1 分)}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 利用 Φ 的连续型, 可得

$$\limsup_{n\to\infty} P(Z_n/W_n \le x) \le \Phi(x). \text{ (1 分)}$$

另一方面, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} P(Z_n/W_n \le x) \ge& P(Z_n \le (1-\varepsilon)x, W_n \ge 1-\varepsilon) \\ =& P(Z_n \le (1-\varepsilon)x) \\ &- P(Z_n \le (1-\varepsilon)x, W_n < 1-\varepsilon) \\ \ge& P(Z_n \le (1-\varepsilon)x) - P(W_n < 1-\varepsilon). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 可得, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} P(Z_n/W_n \le x) \ge \Phi((1-\varepsilon)x). \text{ (1 分)}$$

令 $\varepsilon \to 0$, 利用 Φ 的连续型, 可得

$$\liminf_{n\to\infty} P(Z_n/W_n \le x) \ge \Phi(x). \text{ (1 分)}$$

综上可知, $\lim_{n\to\infty} P(Z_n/W_n \le x) = \Phi(x)$.

(c) 注意到 $\frac{2}{\sigma}(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}) = \frac{S_n - n}{\sigma\sqrt{n}} \frac{2}{\sqrt{S_n/n}+1}$. (2 分) 由于 $\sqrt{S_n}/\sqrt{n}$ 依概率收敛到 1, 所以, $\frac{\sqrt{S_n/n}+1}{2}$ 也依概率收敛到 1. 同时, 由中心极限定理, $\frac{S_n-n}{\sigma\sqrt{n}}$ 依分布收敛到标准正态分布. 所以, 根据 (a), 我们有两者乘积依分布收敛到标准正态分布. (2 分)