四川大学期末考试试题（闭卷）
（2020 —2021 学年第 1 学期　A 卷）

课程号：201162040　课序号：01,02　课程名称：概率论　任课教师：彭雪, 常寅山　成绩：
适用专业年级：　学生人数：　印题份数：300　学号：　姓名：

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订)》，郑重承诺：

1. 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2. 不带手机进入考场；
3. 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

1. (10 分) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是 $n(n \geq 1)$ 个事件. 求证:

$$P(A_1A_2\cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1).$$

证明. 令 $A = A_1A_2\cdots A_{n-1}, B = A_n$. 根据容斥原理, 我们有

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B). \text{ (4 分)}$$

因为 $P(A \cup B) \leq 1$, 所以, $P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$. 即,

$$P(A_1A_2\cdots A_n) \geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) + P(A_n) - 1. \text{ (3 分)}$$

利用上式, 对事件个数 n 使用利用归纳法, 即可得证. (3 分)

2. (12 分) 假设 N 是正整数值随机变量并且 $P(N = i) = 2^{-i}, i \geq 1$. 我们掷 N 枚均匀的骰子. (假设掷骰子得到的点数的分布不受 N 取值的影响.)

(a) 设得到点数之和为 S. 计算 $P(N = 2|S = 2)$.

(b) 计算出现的最大点数恰好等于 r 的概率, 其中, $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

解. 设 X_i 是第 i 次掷出的点数.

(a) 首先,

$$\begin{aligned}P(S = 2) &= P(N = 1, S = 2) + P(N = 2, S = 2)\\ &= P(N = 1, X_1 = 2) + P(N = 2, X_1 = 1, X_2 = 1). \text{ (1 分)}\end{aligned}$$

注意到骰子均匀, 掷骰子得到的点数的分布不受 N 取值的影响, 各次掷骰子所得点数独立. 所以,

$$\begin{aligned}P(S=2) &= P(N=1)P(X_1=2)+P(N=2)P(X_1=1)P(X_2=1)\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\frac{1}{6}\frac{1}{6}\\ &= \frac{13}{144}. \text{(2 分)}\end{aligned}$$

类似的, 我们有

$$P(N=2,S=2)=P(N=2)P(X_1=1,X_2=1)=\frac{1}{144}. \text{(2 分)}$$

所以, 所求条件概率

$$P(N=2|S=2)=\frac{P(N=2,S=2)}{P(S=2)}=\frac{1}{13}. \text{(1 分)}$$

(b) 设最大点数为 M. 则, 根据全概率公式,

$$P(M=r)=\sum_{n\geq 1}P(M=r|N=n)P(N=n). \text{(2 分)}$$

而我们有

$$\begin{aligned}P(M=r|N=n) =&P(\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)=r)\\ =&P(\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)\leq r)\\ &-P(\max(X_1,X_2,\ldots,X_n)\leq r-1)\\ =&P(X_1,X_2,\ldots,X_n\leq r)\\ &-P(X_1,X_2,\ldots,X_n\leq r-1)\\ =&\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq r)-\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leq r-1)\\ =&\left(\frac{r}{6}\right)^n-\left(\frac{r-1}{6}\right)^n. \text{(3 分)}\end{aligned}$$

最后,

$$\begin{aligned}P(M=r) &= \sum_{n\geq 1}2^{-n}\left(\left(\frac{r}{6}\right)^n-\left(\frac{r-1}{6}\right)^n\right)\\ &= \frac{r}{12-r}-\frac{r-1}{13-r}\\ &= \frac{12}{(12-r)(13-r)}. \text{(1 分)}\end{aligned}$$

3. (12 分) 设一个乘客在车站等车. 他坐 1 路车或 2 路车都可到达目的地, 于是, 哪路车先到站, 他便坐哪路车, 且车不来他不离开车站. 设他等 1 路车到站的时间 X 服从参数为 λ 的指数分布, 他等 2 路车到站的时间 Y 服从参数为 μ 的指数分布, 且 X 与 Y 相互独立.

(a) 求他等车时间的密度函数, 并判断该等车时间服从什么常用分布, 要注明该常用分布的参数.

(b) 求他坐 1 路车离开的概率.

解.

(a) 他等车的时间是 $\min(X,Y)$. 自然的, $\min(X,Y)>0$. 而, 对于 $t>0$, 利用独立性, 我们有

$$\begin{aligned}P(\min(X,Y)>t)=P(X>t,Y>t)&=P(X>t)P(Y>t)\\&=e^{-\lambda t}e^{-\mu t}=e^{-(\lambda+\mu)t}.\ (3\text{ 分})\end{aligned}$$

两边求导, 可得密度函数, $f(t)=(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)t}$, $t>0$. (2 分) 所以, 等车时间服从参数是 $\lambda+\mu$ 的指数分布. (1 分)

(b) 所求概率为

$$\begin{aligned}P(X<Y)&=\iint_{0<x<y<\infty}\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-(\lambda+\mu)x}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.\ (6\text{ 分})\end{aligned}$$

4. (16 分) 假设 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 现在我们按照如下的蒙特卡洛方法计算定积分 $I=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. 假设 $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ 是独立同分布的 $(0,1)$ 上的均匀分布的随机变量. 记 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i)$.

(a) (8 分) 证明随机变量序列 Y_n 依概率收敛到 I.

(b) (8 分) 若 $g(x)=\sin(2\pi x)$, $n=5000$. 试用中心极限定理计算概率 $P(|Y_n-I|>0.01)$. (已知 $\Phi(\sqrt{2}/2)=0.7602$, $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(\sqrt{2})=0.9213$.)

解.

(a) 由于 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 独立同分布, 所以, $g(X_1),g(X_2),\ldots,g(X_n),\ldots$ 也独立同分布. (2 分) 而 $E(g(X_1))=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=I$. (2 分) 所以, 根据大数定律, Y_n 依概率收敛到 I. (4 分)

(b) $E(g(X_1))=\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$. $E((g(X_1))^2)=\int_0^1(g(x))^2\,\mathrm{d}x=1/2$. 所以, $\sigma^2=\mathrm{Var}(g(X_i))=1/2$. (3 分) 所以, 根据中心极限定理, $\frac{nY_n-nI}{\sqrt{n\sigma^2}}$ 大致服从标准正态分布. (3 分) 所以,

$$\begin{aligned}P(|Y_n-I|>0.01)&\approx P\left(\frac{nY_n-nI}{\sqrt{n\sigma^2}}>\frac{0.01\sqrt{n}}{\sigma}\right)\\&=P\left(\frac{nY_n-nI}{\sqrt{n\sigma^2}}>1\right)=1-\Phi(1)+\Phi(-1)\\&=2(1-\Phi(1))=0.3174.\ (2\text{ 分})\end{aligned}$$

5. (50 分) 考虑 6 个独立的标准正态随机变量 $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$. 设点 A, B 和 C 的坐标分别为 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$. 我们通过回答以下一系列问题来计算 A, B, C 构成锐角三角形的概率.

(a) (8 分) 假设 $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ 是 n 元正态随机变量. 证明 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 相互独立的充要条件是

$$\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = 0, \quad i \neq j.$$

(b) (6 分) 证明“在三角形 ABC 中, C 是钝角”这一事件 F_C 可以表示为

$$\left(X_3 - \frac{X_1 + X_2}{2}\right)^2 + \left(Y_3 - \frac{Y_1 + Y_2}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}(X_2 - X_1)^2 + \frac{1}{4}(Y_2 - Y_1)^2.$$

(c) (8 分) 令

$$U_1 = X_3 - \frac{X_1 + X_2}{2}, U_2 = Y_3 - \frac{Y_1 + Y_2}{2}, V_1 = X_2 - X_1, V_2 = Y_2 - Y_1.$$

证明: (U_1, U_2, V_1, V_2) 服从 4 元正态分布, 并且 U_1, U_2, V_1, V_2 相互独立.

(d) (10 分) 证明 $K_1 = \frac{2}{3}(U_1^2 + U_2^2)$ 服从自由度为 2 的卡方分布, $K_2 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)$ 也服从自由度为 2 的卡方分布, 并且 K_1 和 K_2 相互独立. (提醒: 相互独立的 n 个标准正态随机变量的平方和的分布称为是自由度为 n 的卡方分布. 例如, $X_1^2 + X_2^2$ 服从自由度为 2 的卡方分布.)

(e) (6 分) 证明 $\frac{K_1}{K_1+K_2}$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布. (提示: 可以利用卡方分布和伽马分布 (Γ 分布) 的关系, 先求 $\left(K_1 + K_2, \frac{K_1}{K_1+K_2}\right)$ 的联合密度函数.)

(f) (6 分) 求概率 $P(F_C)$. (F_C 的定义在 (b) 问中.)

(g) (6 分) 求 A, B, C 构成锐角三角形的概率.

解.

(a) 对于 $i \neq j$, Z_i 和 Z_j 独立, 则不相关, 协方差为 0. (2 分). 反之, 若对于 $i \neq j$, $\mathrm{Cov}(Z_i, Z_j) = 0$, 那么, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 的联合矩母函数为

$$M(t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i E(Z_i) + \frac{t_i^2}{2}\mathrm{Var}(Z_i)\right\}. \text{(3 分)}$$

而 Z_i 服从正态分布, 边缘矩母函数为 $M_{Z_i}(t) = e^{tE(Z_i) + \frac{t^2}{2}\mathrm{Var}(Z_i)}$. (1 分) 所以,

$$M(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} M_{Z_i}(t_i).$$

故, $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 相互独立. (2 分)

(b) “C 是钝角”等价于 C 不在以 AB 为直径的圆内. (3 分) 这又等价于 C 到 AB 中点的距离的平方小于 $|AB|^2/4$. (3 分)

(c) 注意到 $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3$ 是独立同分布的标准正态变量. 作为它们的仿射变换, U_1, U_2, V_1, V_2 服从 4 元正态分布. (2 分) 根据 (a) 问的结果, 欲证独立性, 只需证明协方差矩阵为对角矩阵. 由 X 和 Y 之间的独立性, $\mathrm{Cov}(U_1, U_2) = \mathrm{Cov}(V_1, V_2) = \mathrm{Cov}(U_1, V_2) = \mathrm{Cov}(U_2, V_1) = 0$. (4 分) 而利用独立性, $\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 0$. 所以, 利用协方差的双线性性进行展开, 得到

$$\mathrm{Cov}(U_1, V_1) = \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X_1, X_1) - \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X_2, X_2) = 0.$$

类似的, $\mathrm{Cov}(U_2, V_2) = 0$. (2 分)

(d) 利用独立随机变量的和的方差等于方差之和, 我们有

$$\mathrm{Var}(U_1) = \mathrm{Var}(X_1) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_2) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}(X_3) = \frac{3}{2}. \text{ (1 分)}.$$

利用期望的线性性质,

$$E(U_1) = E(X_1) - \frac{1}{2}E(X_1) - \frac{1}{2}E(X_2) = 0. \text{ (1 分)}.$$

所以, U_1 服从分布 $N(0, \frac{3}{2})$, 故 $\sqrt{2/3}U_1$ 服从分布 $N(0,1)$. 类似的, $\sqrt{2/3}U_2$ 也服从分布 $N(0,1)$. 并且, U_1 和 U_2 独立. (1 分) 所以, 两者平方和 $K_1 = \frac{2}{3}(U_1^2 + U_2^2)$ 服从自由度为 2 的卡方分布. (1 分) 类似的, V_1, V_2 服从正态分布 $N(0,2)$, 并且 V_1 和 V_2 独立. 所以, $K_2 = \frac{1}{2}(V_1^2 + V_2^2)$ 也服从自由度为 2 的卡方分布. (4 分) 而由 U_1, U_2, V_1, V_2 的独立性, 可知 K_1 和 K_2 独立. (2 分)

(e) 自由度为 2 的卡方分布实际上是参数为 $(1, \frac{1}{2})$ 的伽马分布. (2 分) 而由 (d), 知道 K_1 和 K_2 独立, 所以, $\frac{K_1}{K_1+K_2}$ 实际服从参数是 $(1,1)$ 的贝塔分布. (2 分) 而参数是 $(1,1)$ 的贝塔分布就是 $(0,1)$ 上的均匀分布. (2 分)

(f) 我们注意到

$$\begin{aligned} F_C &= \left(U_1^2 + U_2^2 \le \frac{1}{4}(V_1^2 + V_2^2)\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}K_1 \le \frac{1}{2}K_2\right) \\ &= \left(K_1 \le \frac{1}{3}K_2\right) \\ &= \left(\frac{K_1}{K_1+K_2} \le \frac{1}{4}\right). \text{ (4 分)} \end{aligned}$$

而 $\frac{K_1}{K_1+K_2}$ 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, 所以, $P(F_C) = \frac{1}{4}$. (2 分)

(g) 类似于 F_C 的定义, 我们定义 F_A 为 A 是钝角这一事件, F_B 为 B 是钝角这一事件. 根据对称性, $P(F_A) = P(F_B) = P(F_C) = 1/4$. (4 分) 注意到不构成三角形和某个角是直角的概率为 0, 所以, 构成锐角三角形的概率等于 $1 - P(F_A) - P(F_B) - P(F_C) = 1/4$. (2 分)