四川大学期末考试试题（闭卷）（A）

（2012——2013 学年第 2 学期）

课程号：201030020　课序号：01、02　课程名称：近世代数基础　任课教师：付昌建　成绩：

适用专业年级：数学学院 2012　学生人数：280　印题份数：320　学号：　姓名：

考 试 须 知

四川大学学生参加由学校组织或由学校承办的各级各类考试，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》和《四川大学考场规则》。有考试违纪作弊行为的，一律按照《四川大学学生考试违纪作弊处罚条例》进行处理。

四川大学各级各类考试的监考人员，必须严格执行《四川大学考试工作管理办法》、《四川大学考场规则》和《四川大学监考人员职责》。有违反学校有关规定的，严格按照《四川大学教学事故认定及处理办法》进行处理。

1、(本题满分 15 分)设$\sigma: G \to H$为群同态，$a \in G$且a的阶$o(a) = n$.

证明：(1)$o(\sigma(a)) \mid o(a)$;

(2) 若$(|G|, |H|) = 1$，则群G到群H只有平凡同态.

2、(本题满分 15 分)设G为群，H为G的子群，定义集合$N(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \subseteq G$.

证明：(1)H为$N(H)$的正规子群;

(2)若$K < G$使得$H \lhd K$，则K为$N(H)$的子群.

3、(本题满分 20 分)设$GL_n(\mathbb{R})$为实数域$\mathbb{R}$上的n阶可逆矩阵在矩阵乘法意义下的群.

令 $G^+ = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$, $H^+ = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. 证明:

(1) $G^+ < GL_n(\mathbb{R})$, $H^+ < GL_n(\mathbb{R})$;

(2) $H^+ \lhd G^+$;

(3) 设$N = \{kE_n \mid k > 0\} < G^+$，其中$E_n$为单位矩阵. 证明：$G^+/N \cong H^+$.

4、(本题满分 10 分)设G, H为群，记$\mathrm{Hom}(G, H)$表示群G到群H的群同态全体组成的集合.

试求$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ 及$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$，其中$\mathbb{Z}$为整数加法群，要求写出集合中每个同态的具体定义.

5、(本题满分 10 分)设S_n为n元对称群. 证明：$\sigma \in S_n$的阶为2当且仅当σ可以分解为一些不相交的对换的乘积.

6、(本题满分 30 分)设S_n为n元对称群，$F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$为数域F上的n元多项式全体. 定义映射

π: $S_n \times F[x_1, x_2, \cdots, x_n] \to F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$，其中对任意的$\sigma \in S_n$, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$,

$\pi(\sigma, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) := \sigma(f(x_1, x_2 \cdots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$. 如果对任意的对换$\sigma_{ij} := (i, j) \in S_n$, $1 \le i \ne j \le n$,

$\sigma_{ij}(f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为对称多项式.

(1)证明:π为群作用且为如实的;

(2) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为对称多项式当且仅当$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为群作用π的不动点;

(3)对任意的$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 证明：$\frac{1}{n}\sum_{\sigma \in S_n} \sigma(f(x_1, x_2, \cdots, x_n))$为对称多项式;

(4)计算多项式x_1x_2在此群作用下的轨道，并由此证明S_n有阶为$2 \times (n-2)!$的子群.

注：1 试题字迹务必清晰，书写工整。

2 题间不留空，一般应题卷分开

3 务必用 A4 纸打印

教务处试题编号：