

# 四川大学期末考试试题 (闭卷)

(2018–2019 学年第 1 学期) A 卷

课程号: 201097050 课序号: 01,02 课程名称: 高等代数-1(双语) 任课教师: 付昌建 郭兵 谭友军 成绩:

适用专业年级: 2018 级数学学院各专业 学生人数: 242 印题分数: 280 学号: 姓名:

## 考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定(修订)》, 郑重承诺:

1. 已按要去将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在制定地点;
2. 不带手机进入考场;
3. 考试期间遵守以上两项规定, 若有违规行为, 同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

注意: 满分 100 分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中  $\mathbb{F}$  为数域,  $\mathbb{F}^n$  表示  $n$  维列向量组成的向量空间,  $\mathbb{Q}$  为有理数域,  $\mathbb{C}$  为复数域,  $M_n(\mathbb{F})$  表示数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶方阵组成的集合, 对于一个方阵  $A$ ,  $A^*$  表示矩阵  $A$  的伴随矩阵,  $r(A)$  表示矩阵  $A$  的秩,  $\det(A)$  表示  $A$  的行列式,  $E_n$  表示  $n$  阶单位阵.

1. (本题满分 30 分) 设  $f(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .

(1) (10 分) 求  $f(x)$  的所有重根及其重数;

(2) (5 分) 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_6 \in \mathbb{C}$  是  $f(x)$  的所有复数根; 计算  $\sum_{i=1}^6 \alpha_i^{2019} = ?$

(3) (5 分) 求  $f(x)$  在  $\mathbb{C}$  上的标准分解式;

(4) (5 分) 求  $f(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上的标准分解式;

(5) (5 分) 设  $A \in M_n(\mathbb{Q})$  且  $r(A) = t$ . 证明:  $r(f(A)) \geq n - t$ .

2. (本题满分 15 分) 解答下列各题:

(1) (10 分) 求线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}$$
 的通解;

(2) (5 分) 设  $A \in M_n(\mathbb{F})$  ( $n > 1$ ) 且  $r(A^*) = 1$ . 证明: 线性方程组  $AX = 0$  的解集为  $\{\beta = A^* \alpha \mid \alpha \in \mathbb{F}^n\}$ .

3. (本题满分 15 分) 设  $A$  的伴随矩阵为  $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

(1) (8 分) 求矩阵  $A$  的行列式;

(2) (7 分) 求矩阵  $A(A - 2E_4)^2$  的秩, 请说明理由.

4. (本题满分 10 分) 设  $A, B$  为数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  阶矩阵且  $A + B, A - B$  可逆, 令  $D = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ . 证明: 矩阵  $D$  可逆并求出其逆矩阵 (利用  $(A + B)^{-1}, (A - B)^{-1}, A, B$  表示).

5. (本题满分 15 分) 设  $A \in M_n(\mathbb{F})$ ,  $\alpha \in \mathbb{F}^n$  为非零向量. 已知向量组  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{n-1}\alpha$  的秩为  $k < n$ .

(1) (10 分) 证明:  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{k-1}\alpha$  是  $\alpha, A\alpha, \dots, A^{n-1}\alpha$  的一个极大无关组;

(2) (5 分) 设  $f(x) \in \mathbb{F}[x]$  为  $n$  次不可约多项式. 证明: 线性方程组  $f(A)X = \alpha$  有解.

6. (本题满分 10 分) 设  $A_1, A_2, \dots, A_{2019} \in M_{2018}(\mathbb{F})$ ,  $f(x_1, \dots, x_{2019}) = \det(x_1 A_1 + \dots + x_{2019} A_{2019}) \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_{2019}]$ .

(1) (5 分) 若对任意的  $1 \leq i, j \leq 2018$ , 存在矩阵  $A_k$  使得  $A_k$  的  $(i, j)$  元不为零, 其中  $1 \leq k \leq 2019$ . 问多项式  $f(x_1, \dots, x_{2019})$  是否为齐次多项式, 请说明理由;

(2) (5 分) 证明: 存在不全为零的数  $c_1, \dots, c_{2019} \in \mathbb{F}$  使得  $f(c_1, \dots, c_{2019}) = 0$ .

7. (本题满分 5 分) (非标准答案题.) 请简要谈谈您对本学期高等代数中印象最深刻的一个结论的理解 (不超过 50 字).