号分析试卷

学院：________________ 学号：________ 姓名：___________

1、以间隔 τ 对模拟稳定信号 $f(t)$ 采样，所得的离散时间信号记为 $f(n)$，令 $\tilde{f}(n)$ 表示 $f(n)$ 的周期延拓，延拓周期为 N，记

$f(t)\xleftrightarrow{FT}F(j\omega)$，$f(n)\xleftrightarrow{FT}F(e^{j\omega})$，

$\tilde{f}(n)\xleftrightarrow{DFS}\tilde{F}(k)$。请表述 $F(j\omega)$、$F(e^{j\omega})$、$\tilde{F}(k)$ 三者之间的关系

FT　DTFT　DFS

$=\sum f(n)e^{-j\omega n}$

2、设 $f(t)\in D$，D 为能量有限信号空间，假定 $n\in Z$，$T_n\in R$，Z 为整数集，R 为正实数集。请问：

(1) 在什么条件下，$f(t-nT)$ 可以作为 D 的基？

(2) 在什么条件下，$f(t-T_n)$ 可以作为 D 的规范正交基？并给出之。

3、假定 Z 为整数集，$\{\varphi_m(n), n\in Z, m\in Z\}$、$\{\phi_m(n), n\in Z, m\in Z\}$ 分别是信号空间 X 的两组基，且互为正交，即

$<\phi_k(n),\varphi_m(n)>=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\phi_k(n)\varphi_m^*(n)=\delta(k-m)$，这里 $\delta(n)$ 表示离散冲激信号，上注符*表示复共轭。试证明：

(1) 对任意 $f(n)\in X, h(n)\in X$，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)h^*(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}<f(n),\varphi_m(n)><h(n),\phi_m(n)>^*=\sum_{m=-\infty}^{\infty}<f(n),\phi_m(n)><h(n),\varphi_m(n)>^*$$

$<f(n),h(n)>$

(2) 如果 $\varphi_m^*(-n)=\varphi_m(n),\varphi_m(n_1+n_2)=\varphi_m(n_1)\varphi_m(n_2)$，则对任意 $f(n)\in X, h(n)\in X$，有

$$f(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}<f(n),\varphi_k(n)><h(n),\phi_k(n)>\varphi_k(n)$$

这里，*表示卷积。

4、设 X_1 是 X 的子空间，$\varphi_m(t)$（$m\in\Gamma$ 为整数集合）是信号空间 X 的标准正

5、若存在两个常数 $A>0$ 和 $B>0$，使得小波 $\varphi(t)\in L^2(R)$ 满足

$A\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{\varphi}(ja^n\omega)\right|^2\le B$，且如果 $\phi(t)$ 满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}^*(ja^n\omega)\hat{\phi}(ja^n\omega)=1$$

试证明

$\Rightarrow \hat{f}(j\omega)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\hat{\varphi}^*(a^n j\omega)\hat{\phi}(jw)}{\sqrt{a^n}}$

(1) $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^n}W_{1,a^n}(f)*\phi(t)$，式中

$\hat{\varphi}^*(ja^n\omega_n)$

$W_{1,a}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\frac{1}{\sqrt{a}}\varphi^*\left(\frac{\tau-t}{a}\right)d\tau=f(t)*\frac{1}{\sqrt{a}}\overset{*}{\varphi}(-\frac{t}{a})$

$\hat{\phi}(a^n j\omega)+c\delta(\omega-w_n)$

(2) $\phi(t)$ 不是唯一的，请给出两个不同的 $\phi(t)$。 $\phi(t)=\frac{1}{a^n}\phi(\frac{t}{a^n})+\frac{c}{2\pi}e^{j\omega_n t}$

6、令 ψ 是实偶函数小波，且有 $C=\int_0^{\infty}\omega^{-1}\left|\hat{\psi}(\omega)\right|d\omega<\infty$，证明：对任意

$f(t)\in L^2(R)$，有

$$f(t)=\frac{1}{C}\int_0^{\infty}W_f(t,a)\frac{da}{a^{3/2}}$$

$W_f(t,a)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\frac{1}{\sqrt{a}}\overset{*}{\psi}(\frac{\tau-t}{a})\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}dt$

$=f(t)*\overset{*}{\psi}(-\frac{t}{a})$

记

$\hat{f}(\omega)\cdot a\cdot\hat{\psi}^*(a$

7、若 $C=\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{-1}\left|\hat{\psi}(\omega)\right|^2d\omega<\infty$，

$$W_f(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

$$W_g(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$，试证明

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_f(b,a)W_g^*(b,a)\frac{da}{a^2}db=\langle f,g\rangle$$

对所有 $f,g\in L^2(R)$ 成立。

注：5、6、7 任选一道