四川大学期末考试试题 (闭卷)

(2021 — 2022 学年第 1 学期)　B 卷

课程号: 201162040	课序号: 01,02	课程名称: 概率论	任课教师: 常寅山, 彭雪	成绩:
适用专业年级: 2020 级等	学生人数:	印题份数: 300	学号:	姓名:

考 生 承 诺

我已认真阅读并知晓《四川大学考场规则》和《四川大学本科学生考试违纪作弊处分规定（修订）》，郑重承诺：

1. 已按要求将考试禁止携带的文具用品或与考试有关的物品放置在指定地点；
2. 不带手机进入考场；
3. 考试期间遵守以上两项规定，若有违规行为，同意按照有关条款接受处理。

考生签名:

注意: 所有答案一律写在答题纸上, 写清题目编号. 每一张答题纸上写明姓名和学号.

1. (15 分) 设 $P(A) > 0, P(B) > 0$. 称事件 B 排斥事件 A, 如果 $P(A|B) < P(A)$. 称事件 B 吸引事件 A, 如果 $P(A|B) > P(A)$.

   (a) 请证明: 如果 B 吸引 A, 那么 A 吸引 B, 并且 B^c 排斥 A.

   (b) 请构造一个例子说明 A 吸引 B, B 吸引 C, 但是 A 不吸引 C.

   证明.

   (a) 如果 B 吸引 A, 那么, $P(A|B) > P(A)$. 故 $P(AB) > P(A)P(B)$. (4 分) 故, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} > P(B)$. 即, A 吸引 B. (2 分) 注意到 $P(AB^c) = P(A) - P(AB) < P(A) - P(A)P(B) = P(A)P(B^c)$. (2 分) 所以, $P(A|B^c) = \frac{P(AB^c)}{P(B^c)} < P(A)$. 即, B^c 排斥 A. (2 分)

   (b) 样本空间 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $A = \{1, 2\}$, $C = \{3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$. $P(\{2\}) = P(\{3\}) = 1/4$, $P(\{1\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/8$. 那么, $P(B|A) = 2/3 > 1/2 = P(B)$, 所以, A 吸引 B. 而 $P(C|B) = 1/2 > 3/8 = P(C)$, 所以, B 吸引 C. 但是, $P(C|A) = 0 < 3/8 = P(C)$, 所以, A 不吸引 C. (5 分)

2. (10 分) 甲乙两人轮流掷一枚均匀的骰子, 甲先掷. 每当某人掷出 1 点时, 则交给对方掷, 否则此人继续掷. 试求第 n 次投掷由甲投掷的概率.

解. 设甲最初的投掷次数是 X. 用 E_n 表示第 n 次投掷由甲投掷. (2 分) 那么, 根据全概率公式, 我们有

$$P(E_n)=\sum_{m=1}^{+\infty}P(E_n|X=m)P(X=m).\ (2\text{ 分})$$

这里, $P(X=m)=(5/6)^{m-1}/6$, $m=1,2,\ldots$. (1 分) 如果 $m\geq n$, 那么, $P(E_n|X=m)=1$. (1 分) 根据每次投掷是独立的重复试验以及甲和乙的对称性, 对于 $m=1,2,\ldots,n-1$, 我们有

$$\begin{aligned}P(E_n|X=m)&=P(\text{乙先投掷, 第}n-m\text{次由甲投掷})\\&=P(\text{甲先投掷, 第}n-m\text{次由乙投掷})\\&=1-P(E_{n-m}).\ (2\text{ 分})\end{aligned}$$

所以, 我们有

$$\begin{aligned}P(E_n)=&\sum_{m=1}^{n-1}(1-P(E_{n-m}))(5/6)^{m-1}/6\\&+\sum_{m=n}^{+\infty}(5/6)^{m-1}/6\\=&1-\sum_{m=1}^{n-1}P(E_{n-m})(5/6)^{m-1}/6.\ (1\text{ 分})\end{aligned}$$

利用归纳法, 可以证明 $P(E_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}+1\right)$. (2 分)

另解. 设 E_n 表示第 n 次由甲投掷. 用 X_i 表示第 i 次投掷的点数. (2 分) 我们有 $P(E_1)=1$. (1 分) 利用全概率公式, 我们有

$$P(E_{n+1})=P(E_n)P(E_{n+1}|E_n)+P(E_n^c)P(E_{n+1}|E_n^c).\ (2\text{ 分})$$

在 E_n 的条件下, E_{n+1} 发生当且仅当 $X_n\neq 1$. 注意到 E_n 只和 $X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$ 有关. 所以, E_n 和 $X_n\neq 1$ 独立. 故, 我们有

$$P(E_{n+1}|E_n)=P(X_n\neq 1|E_n)=P(X_n\neq 1)=5/6.\ (2\text{ 分})$$

类似的, 我们有

$$P(E_{n+1}|E_n^c)=P(X_n=1|E_n^c)=P(X_n=1)=1/6.\ (1\text{ 分})$$

故, 我们得到递推公式:

$$\begin{aligned}P(E_{n+1})=\frac{5}{6}P(E_n)+\frac{1}{6}P(E_n^c)=\frac{5}{6}P(E_n)+\frac{1}{6}(1-P(E_n))\\=\frac{2}{3}P(E_n)+\frac{1}{6}.\ (1\text{ 分})\end{aligned}$$

最后, 利用归纳法, 可以知道 $P(E_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}+1\right)$. (1 分)

3. (20 分) 假设 (X,Y) 有密度函数

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2)),\quad |x|<1,|y|<1.$$

(a) 计算 X 的边缘密度函数和 Y 的边缘密度函数, 并判断 X 与 Y 是否相互独立.

(b) 用 $M_X(t),M_Y(t),M_{X+Y}(t)$ 分别表示 $X,Y,X+Y$ 的矩母函数. 证明:

$$M_{X+Y}(t)=M_X(t)M_Y(t).$$

或者用 $\varphi_X(t),\varphi_Y(t),\varphi_{X+Y}(t)$ 分别表示 $X,Y,X+Y$ 的特征函数. 证明:

$$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

解.

(a) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y$ (2 分) $=\frac{1}{2}$, $|x|<1$. (2 分) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (2 分) $=\frac{1}{2}$, $|y|<1$. (4 分) 由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以, X 和 Y 并不独立. (2 分)

(b) $M_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)e^{tx}\,\mathrm{d}x$ (2 分) $=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{tx}\,\mathrm{d}x=\frac{e^t-e^{-t}}{2t}$. (2 分) 类似的, $M_Y(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2t}$. (2 分) 最后,

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(t)=&E(e^{t(X+Y)})\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t(x+y)}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ (2 分)}\\
=&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}e^{t(x+y)}\frac{1}{4}(1+xy(x^2-y^2))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}e^{t(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{x^3y}{4}e^{t(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{xy^3}{4}e^{t(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{tx}\,\mathrm{d}x\right)^2+0\\
=&\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2t}\right)^2\\
=&M_X(t)M_Y(t). \text{ (2 分)}
\end{aligned}$$

4. (10 分) 举例说明两个随机变量的不相关性不能推出独立性.

证明. 令 $P(X=1)=P(X=0)=P(X=-1)=1/2$, $Y=X^2$. (6 分) 则, 可以看到 (X,Y) 的联合分布列不等于边缘分布列的乘积. 故 X 和 Y 不独立. (2 分) 但是, $E(X)=0$, $E(XY)=E(X^3)=0$, 所以, $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$. 故, X 和 Y 不相关. (2 分)

5. (20 分) 设 X 和 Y 独立同分布于参数为 1 的指数分布, 令 $U=\min\{X,Y\}, V=\max\{X,Y\}$.

(a) 求 U 的密度函数, 并判断 U 服从什么常用分布, 写出该常用分布的参数.

(b) 求 V 的分布函数.

(c) 令 $Z=X+\frac{1}{2}Y$. 请证明: Z 与 V 同分布. 从而, 计算 EV 和 $Var(V)$.

解.

(a) 对于 $u>0$, $P(U>x)=P(\min\{X,Y\}>u)=P(X>u,Y>u)$ (2 分) $=P(X>u)P(Y>u)=e^{-u}e^{-u}=e^{-2u}$. (2 分) 所以, U 的密度函数为 $1_{u>0}2e^{-2u}$. (1 分) 因而, U 服从参数为 2 的指数分布. (1 分)

(b) 由于 X,Y 为正随机变量, 所以, V 也是正随机变量. 所以, $v\le 0$, $F_V(v)=P(V\le v)=0$. (1 分) 对于 $v>0$, 我们有 $F_V(v)=P(\max\{X,Y\}\le v)=P(X\le v,Y\le v)$ (2 分) $=P(X\le v)P(Y\le v)=(1-e^{-v})^2$. (2 分)

(c) 对于 $z\le 0$, $F_Z(z)=P(Z\le z)=0=F_V(z)$. (1 分) 而对于 $z>0$,

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y/2\le z) \\ =E(P(X+Y/2\le z|X)).\ (2\text{ 分})$$

而 $P(X+Y/2\le z|X=x)=1_{0<x<z}P(Y\le 2z-2x|X=x)\overset{X\perp\!\!\!\perp Y}{=}1_{0<x<z}P(Y\le 2z-2x)=1_{0<x<z}(1-e^{-2z+2x})$. (1 分) 故, 我们有

$$F_Z(z)=E(1_{0<X<z}(1-e^{-2z+2X}))=\int_0^z(1-e^{-2z+2x})e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ =(1-e^{-z})^2=F_V(z).$$

所以, Z 和 V 同分布. (1 分) 故 $EV=EZ=E(X+Y/2)=EX+EY/2=1+1/2=3/2$. (2 分) $\mathrm{Var}(Y)=\mathrm{Var}(X+Y/2)\overset{X\perp\!\!\!\perp Y}{=}\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)/4=1+1/4=5/4$. (2 分)

6. (10 分) 假设硬币正面朝上的概率是 p. 反复独立地抛掷这枚硬币直至首次连续出现 n 次正面为止. 记此时的总抛掷次数为 X_n. 设 Y 表示硬币首次出现反面时抛掷的次数. 求:$E(X_n)$.

解. 利用重期望公式, 我们有

$$E(X_n) = E(E(X_n|Y)).\ (2\ 分)$$

注意到 $P(Y = m) = p^{m-1}(1-p)$, $m \geq 1$. (1 分) 对于 $m \geq n+1$,

$$E(X_n|Y = m) = n.\ (1\ 分)$$

对于 $m = 1, 2, \ldots, n$,

$$E(X_n|Y = m) = m + E(E_n).\ (2\ 分)$$

综上, 可知

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(Y = m)E(X_n|Y = m) \\ &= \sum_{m=1}^{n} p^{m-1}(1-p)(m + E(X_n)) + \sum_{m=n+1}^{+\infty} p^{m-1}(1-p)n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^k + (1-p^n)E(X_n).\ (2\ 分) \end{aligned}$$

解得 $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k}$. (2 分)

7. (5 分) 设 $E(X_n) = a_n$, 并且存在 $b_n > 0$ 使得 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n)/b_n^2 = 0$. 证明 $(X_n - a_n)/b_n$ 依概率收敛到 0.

证明. 根据 Chebyshev 不等式, 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P(|(X_n - a_n)/b_n| \geq \varepsilon) &= P(|X_n - a_n| \geq \varepsilon b_n) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2 b_n^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.\ (4\ 分) \end{aligned}$$

所以, $(X_n - a_n)/b_n$ 依概率收敛到 0. (1 分)

8. (10 分) 设 X 服从参数为 (a, b) 的 Beta 分布. 给定 $X = x$ 的条件下, N 的条件分布为二项分布 $B(n, x)$. 计算给定 $N = k$ 的条件下, X 的条件分布的条件密度函数, 并指出对应的条件分布的名称和参数.

解. 令 $f(x)$ 是 X 的密度函数, 则, $f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, 0 < x < 1$. (2 分) 根据题设,

$$P(N=k|X=x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \text{ (2 分)}$$

假设 $N=k$ 的条件下, X 的条件密度函数为 $f_{X|N}(x|k)$. 则,

$$f_{X|N}(x|k) = \frac{f(x)P(N=k|X=x)}{P(N=k)} = c_{n,a,b} x^{a+k-1}(1-x)^{b+n-k-1},$$

其中, $c_{n,a,b}$ 是和 x 无关的常数. (2 分) 条件密度函数积分为 1, 所以, $c_{n,a,b} = \frac{1}{B(a+k,b+n-k)}$. (2 分) 所以, 对应的条件分布为参数为 $(a+k, b+n-k)$ 的 Beta 分布. (2 分)