四川大学期末考试试题(A 卷)　参考答案

(2018–2019学年第2学期)

课程号: **201098050** 课序号: **01,02** 课程名称: **高等代数-2(双语)** 任课教师:**付昌建 郭兵 谭友军** 成绩:

适用专业年级: **2018级数学学院各专业** 学生人数: **242** 印题分数: **280** 学号: 姓名:

注意: 满分100分, 按题号把解答写在答题纸上. 在以下题目中 $\mathbb{R}$ 为实数域, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维列向量组成的向量空间, $M_n(\mathbb{R})$ 表示数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶方阵组成的集合, 对于一个方阵 A, A^t 表示矩阵 A 的转置.

1. (本题满分15分) 设 $U \subseteq \mathbb{R}^4$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的解空间.

   (1) (8分) 在 $\mathbb{R}^4$ 的标准内积下求 U 的一个标准正交基;

   (2) (7分) 求向量 $\alpha = (1, 2, 1, 2)^t$ 在 U 的正交补 $U^\perp$ 上的正交投影.

解答. (1) 直接求解方程组可得U的一个基为$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

对向量组α_1, α_2做Gram-Schmidt正交化可得

$$\eta_1 = \alpha_1, \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

将向量组η_1, η_2单位化可得U的一个标准正交基

$$\epsilon_1 = \frac{\eta_1}{|\eta_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \epsilon_2 = \frac{\eta_2}{|\eta_2|} = \frac{\sqrt{10}}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(2) 设α_U表示α在子空间U上的正交投影. 由(1)所求U的标准正交基计算可得

$$\alpha_U = (\alpha, \epsilon_1)\epsilon_1 + (\alpha, \epsilon_2)\epsilon_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

记 $\alpha_{U^\perp}$表示α在$U^\perp$上的正交投影, 则$\alpha = \alpha_U + \alpha_{U^\perp}$.

由此可知$\alpha_{U^\perp} = \alpha - \alpha_U = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$.

注. 可以将 U 的标准正交基扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一个标准正交基, 从而求得 $U^\perp$ 的标准正交基, 进而利用 $U^\perp$ 的标准正交基求 $\alpha_{U^\perp}$.

□

2. (本题满分15分) 解答下列各题:

(1) (6分) 写出一个四次实系数多项式使得任意以此多项式为特征多项式的实矩阵在实数域上彼此相似, 说明理由;

(2) (9分) 对满足 (1) 中条件的所有四次实系数多项式进行分类并写出相应的实矩阵的初等因子.

解答. (1) $f(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)$, 其中$a>b>c>d$为实数.任意以$f(\lambda)$为特征多项式的实矩阵在$\mathbb{R}$上可对角化从而相似(有相同的初等因子).

(2) 两个矩阵相似等且仅当具有完全相同的初等因子. 所有初等因子的乘积等于特征多项式. 如果$f(\lambda)$有重因式, 易知存在不相似的矩阵但它们的特征多项式都是$f(\lambda)$. 反之若$f(\lambda)$没有重因式, 则任意以$f(\lambda)$为特征多项式的矩阵具有完全相同的初等因子, 从而彼此相似. 没有重因式的4次首一实系数多项式有如下3中情形:

(i) $f(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda-c)(\lambda-d)$, 其中$a>b>c>d\in\mathbb{R}$. 此时相应矩阵的初等因子为

$$\lambda-a,\lambda-b,\lambda-c,\lambda-d.$$

(ii) $f(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-b)(\lambda^2+p\lambda+q)$, 其中$a>b,p,q\in\mathbb{R}$且满足$p^2-4q<0$. 此时相应矩阵的初等因子为

$$\lambda-a,\lambda-b,\lambda^2+p\lambda+q.$$

(iii) $f(\lambda)=(\lambda^2+p_1\lambda+q_1)(\lambda^2+p_2\lambda+q_2)$, 其中$p_1,q_1,p_2,q_2\in\mathbb{R}$且满足$p_1^2-4q_1<0,p_2^2-4q_2<0,(\lambda^2+p_1\lambda+q_1,\lambda^2+p_2\lambda+q_2)=1$.此时相应矩阵的初等因子为

$$\lambda^2+p_1\lambda+q_1,\lambda^2+p_2\lambda+q_2.$$

注. (1) 中答案可以替换为(2)中的三类情形中的任意一个, 但需要说明理由.

□

3. (本题满分40分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是实线性空间 V 的一个基, $\mathbb{A}:V\longrightarrow V$ 为线性变换且 $\mathbb{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&0&2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

(1) (15分) 求 A 的 Jordan 标准型 J 及一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J$;

(2) (10分) 求 V 中包含向量 α_3 的最小的 $\mathbb{A}$ 的不变子空间 W; 进一步, 是否存在 $\mathbb{A}$ 的不变子空间 U 使得 $V=U\oplus W$? 若存在, 求出一个这样的 U; 若不存在, 说明理由;

(3) (5分) 利用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 写出线性变换 $\mathbb{A}$ 的所有的 3 维不变子空间;

(4) (5分) 设 $\mathbb{A}^{-1}$ 是 $\mathbb{A}$ 的逆. 是否存在 V 的一个基使得 $\mathbb{A}^{-1}$ 在此基下的矩阵等于 A, 说明理由;

(5) (5分) 是否存在线性变换 $\mathbb{B}: V\longrightarrow V$ 使得 $\mathbb{A}=\mathbb{B}^{2019}$, 说明理由.

解答. (1) 直接计算可得$\mathbb{A}$的特征多项式为

$$f_{\mathbb{A}}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2.$$

求解齐次线性方程组$(A-E)X=0$的基础解系, 由此可得矩阵A的特征值$\lambda=1$的特征子空间$V_1=L(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix})$.

求解齐次线性方程组$(A+E)X=0$的基础解系, 由此可得矩阵A的特征值$\lambda=-1$的特征子空间$V_{-1}=L(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix})$.

由$\dim_{\mathbb{R}}V_1=1=\dim_{\mathbb{R}}V_{-1}$可知矩阵$A$的Jordan矩阵$J$中分别只有一个特征值为1和$-1$的Jordan块. 另一方面, 由特征值1和$-1$的代数重数都是2可知相应的Jordan块的阶为2. 特别地,

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

设$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$, 则由$AP=PJ$可得

$$A\eta_1=\eta_1, A\eta_2=\eta_1+\eta_2, A\eta_3=-\eta_3, A\eta_4=\eta_3-\eta_4.$$

由此可知η_1为矩阵A的特征值1的特征向量, η_3为矩阵A的特征值为-1的特征向量.

因此不妨设

$$\eta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \eta_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

分别代入线性方程组$(A-E)\eta_2=\eta_1$及$(A+E)\eta_4=\eta_3$并求解可得

$$\eta_2=k\eta_1+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \eta_4=l\eta_3+\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\2\\0\\-2\end{bmatrix}, k,l\in\mathbb{R}.$$

令$k=l=0$可得$\eta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\eta_4=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\2\\0\\-2\end{bmatrix}$, 即

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1&\frac{3}{2}\\0&1&0&2\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}.$$

注. 求解Jordan标准型J也可以计算矩阵A的初等因子.

(2) 由不变子空间的定义知$\mathbb{A}(\alpha_3)=\alpha_1-\alpha_3$, 从而$\alpha_1\in W$. 因此$L(\alpha_1,\alpha_3)\subseteq W$.

直接验证可知$L(\alpha_1,\alpha_3)$是$\mathbb{A}$的不变子空间, 从而$W=L(\alpha_1,\alpha_3)$.

不存在.

假设存在不变子空间U使得$V=U\oplus W$. 设β_1,β_2是U的一个基, 则$\alpha_1,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$是$V$的一个基且

$$\mathbb{A}(\alpha_1,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{bmatrix}.$$

记$B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 则$B$的特征多项式为$f_B(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)$. 由此可知$\mathbb{A}|_U$上有特征值1的特征向量, 而$\mathbb{A}|_W$也有特征值1的特征向量, 与$\dim_{\mathbb{R}}V_1=1$矛盾. 特别地, 假设不成立, 即不存在这样的不变子空间U.

(3) 设U是$\mathbb{A}$的3-维不变子空间, 则$\mathbb{A}|_U$的特征多项式为$f_{\mathbb{A}|_U}(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$或者$f_{\mathbb{A}|_U}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

设$f_{\mathbb{A}|_U}(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$. 由空间准素分解定理知

$$U=\ker(\mathbb{A}|_U+\mathrm{id}_U)^2\oplus\ker(\mathbb{A}|_U-\mathrm{id}_U)$$

且$\dim_{\mathbb{R}}\ker(\mathbb{A}|_U+\mathrm{id}_U)^2=2,\dim_{\mathbb{R}}\ker(\mathbb{A}|_U-\mathrm{id}_U)=1$. 注意到$\ker(\mathbb{A}|_U+\mathrm{id}_U)^2\subseteq\ker(\mathbb{A}+\mathrm{id}_V)^2$且$\dim_{\mathbb{R}}\ker(\mathbb{A}+\mathrm{id}_V)^2=2$；另一方面$\ker(\mathbb{A}|_U-\mathrm{id}_U)\subseteq\ker(\mathbb{A}-\mathrm{id}_V)$且$\dim_{\mathbb{R}}\ker(\mathbb{A}-\mathrm{id}_V)=1$. 由此可得$\ker(\mathbb{A}|_U-\mathrm{id}_U)=\ker(\mathbb{A}-\mathrm{id}_V)$且$\ker(\mathbb{A}|_U+\mathrm{id}_U)^2=\ker(\mathbb{A}+\mathrm{id}_V)^2$. 对任意的$1\le i\le 4$, 令$\gamma_i=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\eta_i$. 由(1)知

$$U=L(\gamma_1,\gamma_3,\gamma_4)=L(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2-\alpha_4).$$

当$f_{\mathbb{A}|_U}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$时, 同理可得$U=L(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

(4) 存在.

原问题等价于A^{-1}与A是否相似？注意到A相似于J, 则A^{-1}相似于J^{-1}. 原问题等价于J于J^{-1}是否相似？

直接计算可得$J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. 直接验证可知$J^{-1}$与$J$相似.

(5) 存在.

原问题等价是否存在$X \in M_4(\mathbb{R})$使得$X^{2019} = J$.

直接计算可知

$$J^{2019} = \begin{bmatrix} 1 & 2019 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2019 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

由此可知J^{2019}与J相似, 即存在可逆矩阵$Q \in M_n(\mathbb{R})$使得

$$Q^{-1}J^{2019}Q = (Q^{-1}JQ)^{2019} = J.$$

特别地, $X^{2019} = J$有解.

□

4. (本题满分10分) 设$A \in M_n(\mathbb{R})$为正定矩阵, $\alpha \in \mathbb{R}^n$为非零列向量. 证明: 矩阵$A\alpha\alpha^t$在$\mathbb{R}$上可对角化.

证明. 记$B = A\alpha\alpha^t$. 注意到$r(B) \leq r(\alpha^t) = 1$, 由此可知0至少是$B$的$(n-1)$-重特征值. 记$V_0$表示矩阵$B$的特征值0的特征子空间, 则$\dim_{\mathbb{R}} V_0 \geq n-1$.

另一方面, 注意到$BA\alpha = A\alpha\alpha^t(A\alpha) = A\alpha(\alpha^t A\alpha) = (\alpha^t A\alpha)A\alpha$. 由$A$正定且$\alpha \neq 0$可知$A\alpha \neq 0$且$0 < \alpha^t A\alpha \in \mathbb{R}$. 特别地, $a := \alpha^t A\alpha$是矩阵B的一个非零特征值且$A\alpha$是一个特征向量. 记V_a表示矩阵B的特征值a的特征子空间, 则$\dim_{\mathbb{R}} V_a \geq 1$.

注意到$\dim_{\mathbb{R}} V_a + \dim_{\mathbb{R}} V_0 \leq n$, 由此可得$\dim_{\mathbb{R}} V_a = 1, \dim_{\mathbb{R}} V_0 = n-1$, 即$\mathbb{R}^n = V_0 \oplus V_a$. 特别地, 矩阵$B$可对角化.

□

5. (本题满分15分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = X^tAX$ 为相应的实二次型, 其中 $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$.

(1) (10分) 写出 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的矩阵 B, 并用正交变换把 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 化成标准型;

(2) (5分) 设 V 是 $\mathbb{R}^4$ 的子空间且对任意的 $\alpha, \beta \in V$ 都有 $\alpha^t A\beta = 0$. 问 V 的维数最大可以取多少? 说明理由.

解答. (1) 令$B=\frac{A+A^t}{2}$, 则B为实二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵.

计算矩阵B的特征多项式可得

$$f_B(\lambda)=\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)^2.$$

由矩阵B的特征值为$0,\pm1$知可利用正交替换将$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$化为规范型. 分别计算矩阵B的特征子空间的标准正交基:

当$\lambda=1$时, 求解线性方程组$(B-E_4)X=0$可得矩阵B的特征值1的特征子空间V_1的一个基为$\epsilon_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\epsilon_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$. 显然$\epsilon_1,\epsilon_2$是$V_1$的一个标准正交基.

当$\lambda=-1$时, 求解线性方程组$(B+E)X=0$可得矩阵B的特征值-1的特征子空间V_{-1}的一个基为$\eta_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$. 单位化$\eta_3$可得$\epsilon_3:=\frac{\eta_3}{|\eta_3|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$.

当$\lambda=0$时, 求解线性方程组$BX=0$可得矩阵B的特征值0的特征子空间V_0的一个基为$\eta_4=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

单位化η_4可得$\epsilon_4:=\frac{\eta_4}{|\eta_4|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$.

令$P=(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0&0\\0&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$, 则$X=PY$为所求的正交替换,相应的 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的规范型为

$$y_1^2+y_2^2-y_3^2.$$

(2) V的维数最大可以取2.

注意到$\alpha^tA\beta=\alpha^tB\beta$. 记$\Lambda=\mathrm{diag}\{1,1,-1,0\}$. 由(1)知原问题等价于: W是$\mathbb{R}^4$的子空间且满足$\forall\alpha,\beta\in W,\alpha^t\Lambda\beta=0$, 求$W$的维数的最大取值.

设$0\neq\alpha=(a,b,c,d)^t\in W$, 则由$\alpha^t\Lambda\alpha=0$可知$a^2+b^2-c^2=0$. 特别地, 若$c=0$, 则$a=b=0$. 下面假设$c\neq0$, 由$W$是子空间,不妨假设$c=1$, 即$(a,b,1,d)^t\in W$. 我们断言: 若$(g,h,k,l)^t\in W$, 则$g=ka,h=kb$.

由$(g,h,k,l)^t\in W$可得

$$g^2+h^2=k^2\tag{0.1}$$

及

$$ag + bh = k. \tag{0.2}$$

由$a^2+b^2=1$可知a,b不同时为零, 因此不妨假设$a\neq 0$. 由(0.2)可知$g=\frac{k-bh}{a}$, 带入(0.1)可得

$$k^2-2bkh+b^2h^2+a^2h^2-a^2k^2=0.$$

注意到$(a,b,1,d)^t\in W$, 因此$a^2+b^2=1$. 带入上式有

$$(bk-h)^2=b^2k^2-2bkh+h^2=0.$$

因此$h=kb$. 带入计算可得$g=ka$.

由断言易知$\dim_{\mathbb{R}} W\leq 2$. 另一方面, 显然$\dim_{\mathbb{R}} W$可以取2.

□

6. (本题满分5分) （非标准答案题）请简要谈谈您对正交变换的理解 (不超过50字).