四川大学期末考试试题（闭卷） B

(2014–2015学年春)

课程号: **201098050** 课序号: **01, 02** 课程名称: 高等代数-2 (双语) 任课教师: 付昌建 王浩 谭友军 甘惠灵 成绩:
适用专业年级: **2014级数学学院各专业** 学生人数: **300** 印题份数: **320** 学号: 姓名:

注意：满分100分，按题号把解答写在答题纸上，写在试题纸上的解答不得分. 在以下各题中，$\mathbb{F}$表示一个数域；$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$表示$\mathbb{F}$上的所有$m\times n$型矩阵组成的线性空间，$A'$表示矩阵$A$的转置.

1. **(25分)** 对任意$A\in\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{F})$，定义映射$f_A:\ \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})\to\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{F})$为：$f_A(X)=XA$，$X\in\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

(1) **(15分)** 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. 分别求$f_A$的核$\ker f_A$ 和像$\operatorname{im} f_A$的维数，并分别写出$\ker f_A$和$\operatorname{im} f_A$的一个基.

(2) **(5分)** 已知：f_A是单射当且仅当$\ker f_A=0$. 写出f_A是单射的一个充分必要条件，并给出证明.

(3) **(5分)** 对任意线性映射$g:\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{F})\to\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{F})$，是否存在$A\in\mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{F})$，使得$g=f_A$？说明理由.

2. **(25分)** 设$\dim V=3$，$\underline{A}$是V上的线性变换，且$\underline{A}$在V的某个基下的矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) **(10分)** 求A的特征多项式和极小多项式.

(2) **(10分)** 设$C(\underline{A})$是由所有与$\underline{A}$可交换的线性变换组成的线性空间. 求$\dim C(\underline{A})$.

(3) **(5分)** 证明：不存在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$使得$\underline{A}\alpha_1=\underline{A}\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$，$\underline{A}\alpha_2=\alpha_2$.

3. **(25分)** 设V是欧式空间，其内积$(\ ,\ )$在V的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$下的度量阵为$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\2&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) **(5分)** 设W是V的由$\alpha_1+\alpha_2$和$\alpha_1-\alpha_2$生成的子空间. 求W在V中的正交补$W^\perp$的维数并写出它的一个基.

(2) **(10分)** 求V的一个基，使得$(\ ,\ )$在这个基下的度量阵是对角阵.

(3) **(5分)** 是否存在V上对称变换$\underline{B}$使得$\underline{B}\alpha_1=-\alpha_1$，且$\underline{B}$在$V$的某个基下的矩阵合同于$A$？说明理由.

(4) **(5分)** 是否存在V上正交变换$\underline{C}$使得$\underline{C}(\alpha_1-\alpha_2)=\alpha_1$？说明理由.

4. **(25分)** 设V是实数域$\mathbb{R}$上的n维线性空间，设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为V的一个基，$A=(a_{ij})\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$可逆.

(1) **(10分)** 对每个$1\le i\le n$定义映射$f_i:\ V\to\mathbb{R}$为$f_i(\alpha_j)=a_{ij}$，$1\le j\le n$. 证明：$f_1,\cdots,f_n$是V的对偶空间$V^\star$的一个基.

(2) **(10分)** 在V上定义函数g为：$g(\alpha)=X'A'AX$，其中任意$\alpha\in V$，$X=(x_1,\cdots,x_n)'$是α在$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的坐标. 证明：存在正数a使得$g(\alpha)\le a\sum\limits_{i=1}^n x_i^2$对任意$\alpha\in V$都成立.

(3) **(5分)** 设$\underline{A}$是V上的线性变换，且$\underline{A}$在$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为A，W是非零$\underline{A}$-子空间. 线性变换$\underline{A}|_W$ 是否可逆？说明理由.