**一、（10分）在直角坐标系下， 求过点（1，0，1），以及平面与的交线的平面方程。**

**二、（10分）在直角坐标系下，求过直线，并垂直于平面 的平面方程。**

**三、（10分）在直角坐标系下，求曲线关于平面的反射曲线的方程。**

**四、（10分）在直角坐标系下，计算点(4,4,-2) 到椭圆抛物面 上的点的最小距离。**

**五、（15分）在直角坐标系下，指出二次曲面是何种曲面。**

**六、（15分）在直角坐标系下，已知平面 与锥面的交线是两条正交的直线，证明：**

**七、（15分）证明：在直角坐标系下，存在过原点的平面，使得该平面和椭球面 的交线是一个圆，并写出其方程。**

**八、（15分）设 与 是两条不垂直的异面直线，分别通过 和作互相垂直的平面，证明这些互相垂直的平面的交线形成一张单叶双曲面。**

**九、（附加题，10分）证明在射影平面中抛物线和椭圆是射影等价的。**

**参考答案**

1. **经过两平面的交线的平面束方程是，**

**点(1,0,1)代入方程得到，于是所求平面方程是。**

1. **经过直线的平面束方程是，法向量是。**

**因为所求平面与平面垂直，所以，于是所求平面方程是。**

1. **设点关于平面的反射点（即对称点）是，它们的中点是C在平面上。**

**则直线的方程是，设点对应参数，则对应参数。**

**于是，，**

**即有。因而**

**,**

**,**

**.**

**故曲线关于平面的反射曲线方程是**

**即**

1. **如果点（4，4，-2）在抛物面上点的法线上，则这两点间的距离就是点（4，4，-2）到抛物面上点的最小距离。抛物面上点处的法向量是，于是有**

**因而得到，，解得。**

**所以最小距离是。**

**五、曲面的矩阵，**

**计算不变量。**

**特征方程：，得到特征值。**

**简化方程：。这是双曲抛物面。**

**六、已给锥面方程变形为设比值为，得到锥面的直母线族：**

**的方向向量为。因为所求直母线在平面上，所以有即**

**它的两个解就是所求直母线的参数，它们满足**

****

**由于两条直母线正交，所以将上述关系代入，得到即有。**

**七、由于通过坐标轴的平面一定通过原点，所以设平面方程为Ax+By+Cz=0.又由于椭球面关于原点对称，因而截线圆的圆心也在原点。设这圆的半径是R，则这圆在以原点为球心、半径为R的球面上，于是这圆上任意一点(x,y,z)满足**

**，将(1)中两式相减，有。**

**原点满足(2)式，截线圆上的任意一点也满足此式。由（2）式可以看出，原点与这圆上任一点(x,y,z)的连线上所有点必满足（2）式。这表明截线圆所在平面上任一点必然满足（2）式。因而（2）式的3个系数中至少有一个为0，另两个异号，否则（2）式表示的一个二次锥面不会包含一个平面。由于0<9<16<25，则有 ，所以只能是R=4。于是，由此得到恰有两个都过z轴的平面和椭球面的截线是圆。平面方程是：5。**

**八、以公垂线为z轴，过公垂线段的中点，垂直于公垂线的平面为xOy坐标面，两异面直线在xOy坐标面上的垂直投影直线的角平分线为x轴和y轴建立直角坐标系。设两异面直线的距离为2 *a*，夹角是2α≠90°，则两异面直线分别过点(0,0,*a*)，(0,0,-*a*)，方向向量分别可设为(cosα,sinα,0)，(cosα,-sinα,0)。**

**两异面直线的方程分别是。**

**过它们的平面束方程分别是。**

**因为两平面垂直相交，所以。**

**两平面垂直相交的交线满足,**

**因而。由于夹角是2α≠90°，所以方程表示一个单叶双曲面。**

**九、椭圆仿射等价于圆，抛物线仿射等价于。**

**设在射影平面的齐次坐标是，则圆的方程变为，抛物线的方程变为。**

**对抛物线做射影变换，**

**则，抛物线方程变为。**

**由此可见椭圆与抛物线射影等价。**