

# ET4020 - Xử lý tín hiệu số

## Chương 4: Thiết kế bộ lọc số

TS. Đặng Quang Hiếu  
<http://dsp.edabk.org>

Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội  
Viện Điện tử - Viễn thông

Năm học 2012 - 2013

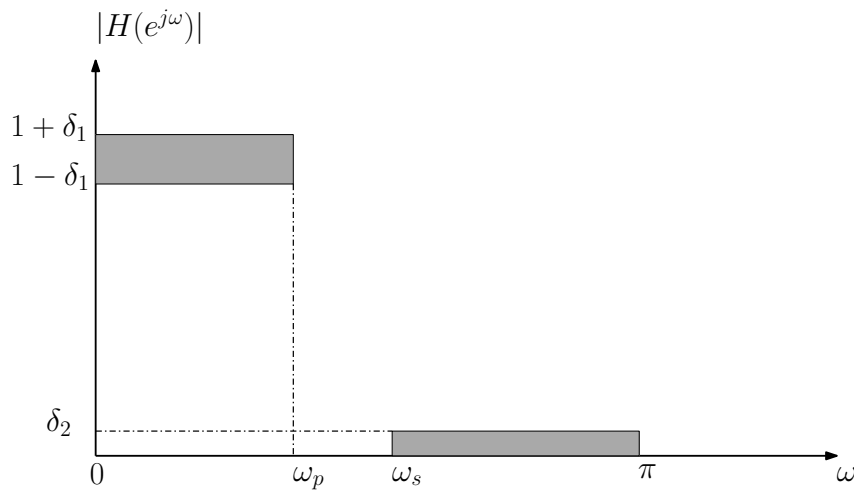
## Outline

Tổng quan

Thiết kế bộ lọc FIR

Thiết kế bộ lọc IIR

## Thiết kế bộ lọc chọn lọc tần số



Các chỉ tiêu kỹ thuật:

- ▶ Tần số cắt ( $\omega_c$ ), và dải chuyển tiếp ( $\omega_p, \omega_s$ )
- ▶ Độ gợn sóng dải thông  $\delta_1$
- ▶ Độ gợn sóng dải chặn  $\delta_2$

## Qui trình

- (1) Specifications: Xác định các chỉ tiêu kỹ thuật dựa trên ứng dụng thực tế.
- (2) Approximation: Tổng hợp hệ thống LTI có chỉ tiêu xấp xỉ với yêu cầu đặt ra.
- (3) Realization: Thực hiện hệ thống dựa trên các công cụ phần cứng / phần mềm hiện có.

Khóa học này chỉ nghiên cứu #2: Tìm các tham số  $a_k, b_r, M, N$  sao cho đáp ứng tần số  $H(e^{j\omega})$  của hệ thống LTI dưới đây có các thông số xấp xỉ với các chỉ tiêu kỹ thuật mong muốn  $\omega_s, \omega_p, \delta_1, \delta_2$ .

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{M-1} b_r x(n-r)$$

## Phân loại bộ lọc số

Có thể thực hiện được trên thực tế:

- ▶ Hệ thống LTI
- ▶ Nhân quả
- ▶ Ổn định

Phân loại theo chiều dài đáp ứng xung:

- ▶ Bộ lọc FIR
- ▶ Bộ lọc IIR

Phân loại theo cách thiết kế:

- ▶ Sử dụng các công thức
- ▶ Mang tính giải thuật (vòng lặp)

## Outline

Tổng quan

Thiết kế bộ lọc FIR

Thiết kế bộ lọc IIR

## Bộ lọc có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$
$$\rightarrow h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq (M-1) \\ 0, & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Ưu điểm của bộ lọc FIR:

- ▶ Luôn ổn định
- ▶ Có thể thực hiện với hiệu năng cao (sử dụng FFT)
- ▶ Dễ tổng hợp bộ lọc pha tuyến tính

## Khái niệm pha tuyến tính

Tại sao pha tuyến tính?

- ▶ Trễ nhóm không đổi
- ▶ Độ phức tạp tính toán giảm

Khi nào pha tuyến tính?

- (i)  $h(n)$  đối xứng:  $h(n) = h(M-1-n)$
- (ii)  $h(n)$  phản đối xứng:  $h(n) = -h(M-1-n)$  và  $h(\frac{M-1}{2}) = 0$  với  $M$  lẻ.

## Phân loại bộ lọc pha tuyến tính

	$M$ lẻ	$M$ chẵn
$h(n)$ đối xứng	loại 1	loại 2
$h(n)$ phản đối xứng	loại 3	loại 4

$$H_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \left[ h\left(\frac{M-1}{2}\right) + 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right) \right]$$

$$H_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{M-1}{2}} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \cos \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

$$H_3(e^{j\omega}) = e^{-j[\omega \frac{M-1}{2} + \frac{\pi}{2}]} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

$$H_4(e^{j\omega}) = e^{-j[\omega \frac{M-1}{2} + \frac{\pi}{2}]} \cdot 2 \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n) \sin \omega \left(\frac{M-1}{2} - n\right)$$

## Vị trí các điểm không

- Khi  $h(n)$  đối xứng / phản đối xứng, dễ dàng chứng minh được:

$$H(z) = \pm z^{-(M-1)} H(z^{-1})$$

- Nếu  $H(z)$  có nghiệm  $z_1$  thì cũng có các nghiệm sau:  
 $z_1^*, 1/z_1, 1/z_1^*$
- Biểu diễn vị trí các điểm không trên mặt phẳng phức?

## Phương pháp cửa sổ - Khái niệm

Giả sử cần thiết kế bộ lọc có đáp ứng tần số mong muốn  $H_d(e^{j\omega})$  thỏa mãn các chỉ tiêu kỹ thuật. Khi đó:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Tuy nhiên, trong trường hợp lý tưởng,  $h_d(n)$  có chiều dài vô hạn và không nhân quả  $\rightarrow$  dịch đi  $(M-1)/2$  mẫu và nhân với hàm cửa sổ  $w(n)$

$$h(n) = h_d\left(n - \frac{M-1}{2}\right) \cdot w(n)$$

trong đó

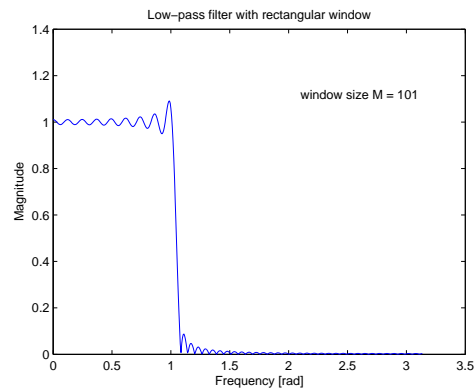
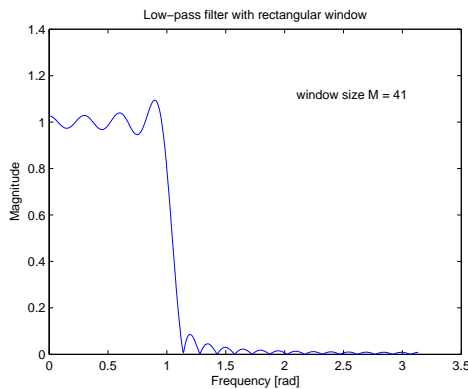
$$w(n) = 0, \forall n < 0, \forall n > (M-1)$$

## Phương pháp cửa sổ - Các bước thiết kế

- (1) Cho các chỉ tiêu kỹ thuật :  $\delta_1, \delta_2, \omega_p, \omega_s$
- (2) Chọn loại cửa sổ và tính  $w(n)$  với chiều dài  $M$ , tâm đối xứng tại  $(M-1)/2$ .
- (3) Tính các hệ số  $h_d(n)$  của bộ lọc lý tưởng, sau đó tính các hệ số  $h(n)$  nhờ trễ và nhân với hàm cửa sổ  $w(n)$ .
- (4) So sánh  $H(e^{j\omega})$  với các chỉ tiêu kỹ thuật. Nếu không thỏa mãn thì tăng  $M$  và quay lại bước (2).

## Phương pháp cửa sổ - Cửa sổ chữ nhật (1)

Xét một bộ lọc thông thấp lí tưởng với  $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ .

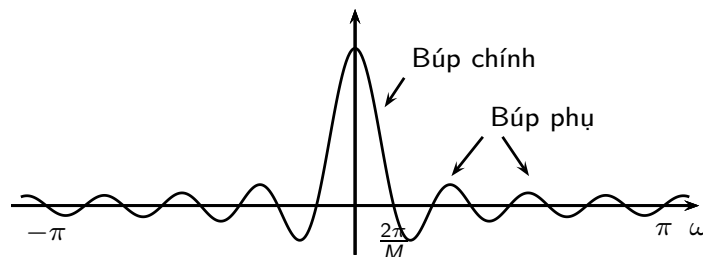


Hiện tượng Gibbs:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\lambda}) W(e^{j(\omega-\lambda)}) d\lambda$$

## Phương pháp cửa sổ - Cửa sổ chữ nhật (2)

$$W(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$$



Điều gì xảy ra khi  $M$  tăng?

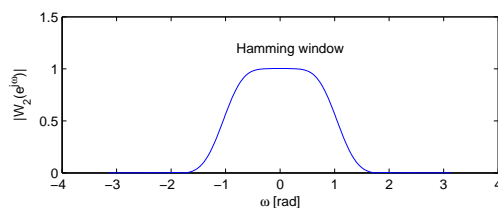
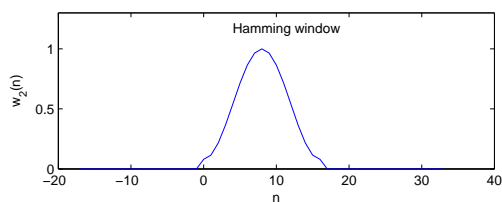
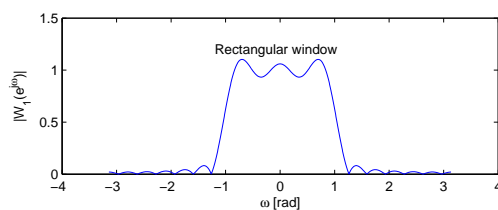
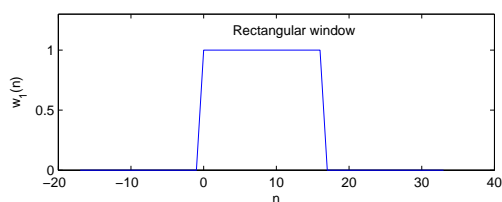
- ▶ Độ rộng búp chính giảm  $\rightarrow$  độ rộng dải chuyển tiếp giảm
- ▶ Phần diện tích dưới các búp phụ ko thay đổi  $\rightarrow$  độ gợn sóng không thay đổi.
- ▶ Bậc bộ lọc tăng  $\rightarrow$  độ phức tạp tính toán tăng

## Phương pháp cửa sổ - Giải pháp

- ▶ Chọn loại cửa sổ thay đổi mềm hơn trên miền thời gian → các búp phụ thấp hơn.
- ▶ Khi đó, dải chuyển tiếp rộng hơn.
- ▶ Tăng bậc của bộ lọc nhằm giảm độ rộng dải chuyển tiếp.

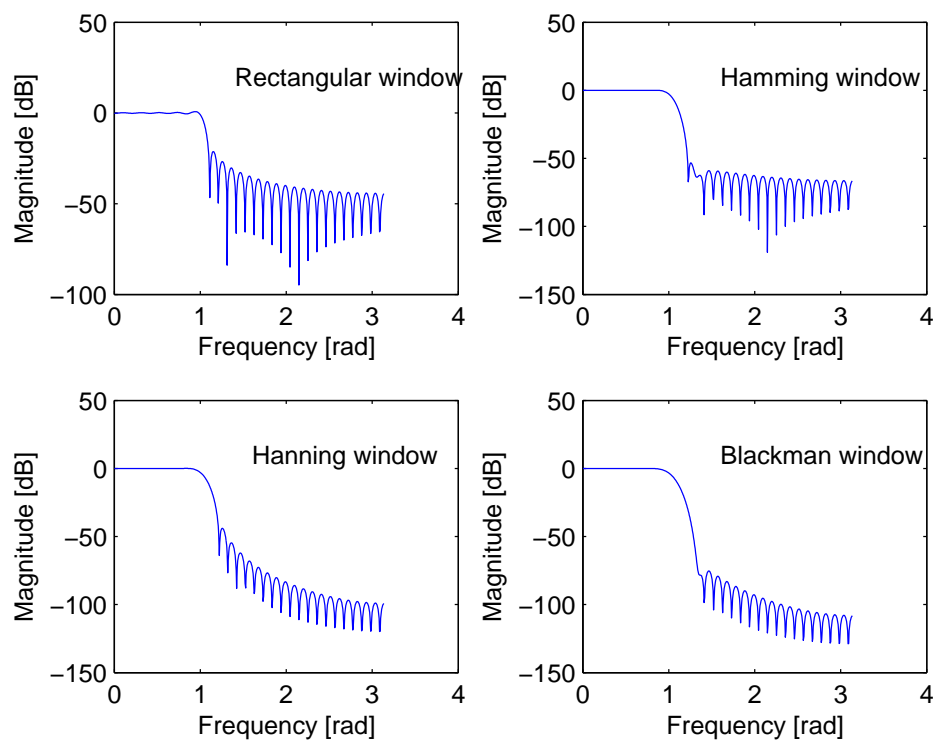
## Phương pháp cửa sổ - Cửa sổ Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / (M - 1))$$





## Phương pháp cửa sổ - Các loại cửa sổ (1)



## Phương pháp cửa sổ - Các loại cửa sổ (2)

Loại cửa sổ	Búp chính	Búp chính / búp phụ	$20 \log_{10} \delta$ tại đỉnh
Chữ nhật	$4\pi/M$	-13 dB	-21 dB
Hanning	$8\pi/M$	-32 dB	-44 dB
Hamming	$8\pi/M$	-43 dB	-53 dB
Blackman	$12\pi/M$	-58 dB	-74 dB

## Phương pháp cửa sổ - Thiết kế

Một số điểm cần lưu ý khi thiết kế

- ▶ Tần số cắt nằm giữa dải chuyển tiếp
- ▶ Độ gợn sóng dải thông và dải chặn xấp xỉ bằng nhau. Thường được tính đơn vị dB ( $20 \log_{10}(\delta)$ ).
- ▶ Độ rộng dải chuyển tiếp nhỏ hơn độ rộng búp chính.
- ▶ Khoảng cách giữa 2 đỉnh ở hai đầu dải chuyển tiếp xấp xỉ bằng độ rộng búp chính.

## Các phương pháp khác

- ▶ Lấy mẫu tần số
- ▶ Các phương pháp lặp

Tự học!

## Bài về nhà

- (1) Vẽ phổ bộ lọc pha tuyến các loại (1,2,3,4) và nhận xét?
- (2) Vẽ dạng cửa sổ (trên miền thời gian), và phổ bộ lọc thông thấp lý tưởng sử dụng các loại cửa sổ trên? So sánh?
- (3) Vẽ phổ bộ lọc được thiết kế sử dụng phương pháp lấy mẫu tần số cho các loại?
- (4) Viết chương trình thiết kế bộ lọc bằng phương pháp lặp?

## Outline

Tổng quan

Thiết kế bộ lọc FIR

Thiết kế bộ lọc IIR

## Bộ lọc IIR

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r)$$

Hàm truyền đạt:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

So sánh với bộ lọc FIR:

- ▶ Khi không cần có pha tuyến tính, bộ lọc IIR có độ phức tạp tính toán thấp hơn (với cùng chỉ tiêu kỹ thuật).
- ▶ Khó thiết kế
- ▶ Phải đảm bảo tính ổn định của hệ thống

## Tổng hợp bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự

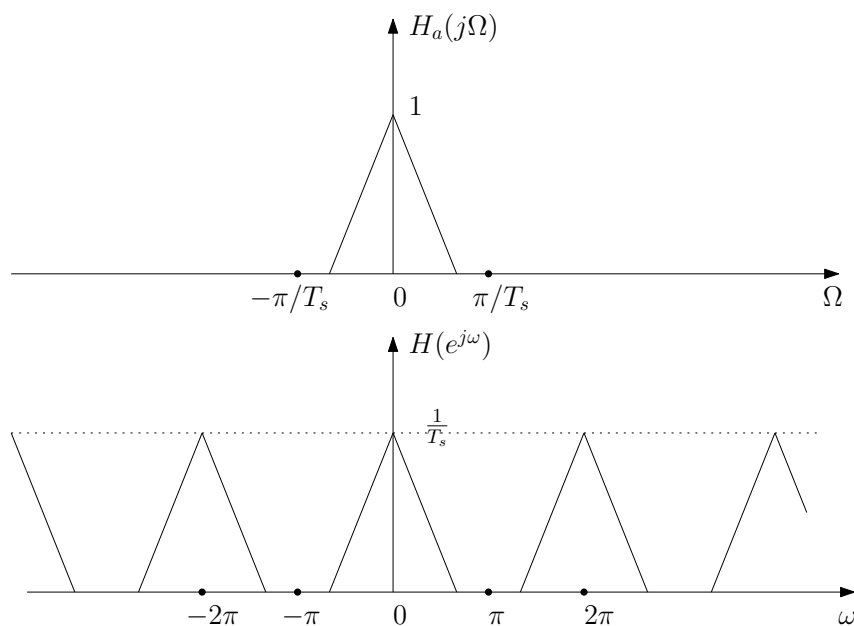
- ▶ Khó tính trực tiếp các hệ số của bộ lọc từ các chỉ tiêu kỹ thuật
- ▶ Kỹ thuật thiết kế bộ lọc tương tự đã được phát triển từ rất lâu, có nhiều thành quả để tận dụng.
- ▶ Nhiều bộ lọc IIR tương tự có công thức đơn giản, do vậy, bộ lọc số tương ứng dễ thực hiện.

## Tổng hợp bộ lọc IIR từ bộ lọc tương tự: Nguyên lý

- ▶ Xấp xỉ hàm truyền đạt hoặc đáp ứng xung:  
 $H_a(s), h_a(t) \rightarrow H(z), h(n)$ .
- ▶ Bảo toàn một số đặc tính cơ bản trên miền tần số:
  - (i) Ánh xạ trục ảo trên mặt phẳng  $s$  lên vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng  $z$ .
  - (ii) Tính ổn định: hệ tương tự có các điểm cực ở nửa bên trái mặt phẳng  $s \rightarrow$  hệ số có các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị ở mặt phẳng  $z$ .

## Phương pháp bất biến xung

Lấy mẫu đáp ứng xung  $h_a(t) \rightarrow h(n) = h_a(nT_s)$ . Tương tự như định lý lấy mẫu,  $H(e^{j\omega})$  có dạng như hình vẽ (khi  $|\Omega_{max}| \leq \frac{\pi}{T_s}$ ).



## Phương pháp bất biến xung - Hàm truyền đạt

Hàm truyền đạt của bộ lọc tương tự:

$$H_a(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{pk}}$$

Biến đổi Laplace ngược, lấy mẫu chu kỳ  $T_s$ , có thể tính được hàm truyền đạt của bộ lọc số:

$$H(z) = \sum_k \frac{A_k}{1 - e^{s_{pk} T_s} z^{-1}}$$

Ví dụ: Cho bộ lọc tương tự có hàm truyền đạt

$$H_a(s) = \frac{4}{(s+3)(s+5)}$$

- (a) Hãy tìm hàm truyền đạt  $H(z)$  của bộ lọc số bằng phương pháp bất biến xung
- (b) Vẽ sơ đồ thực hiện bộ lọc số

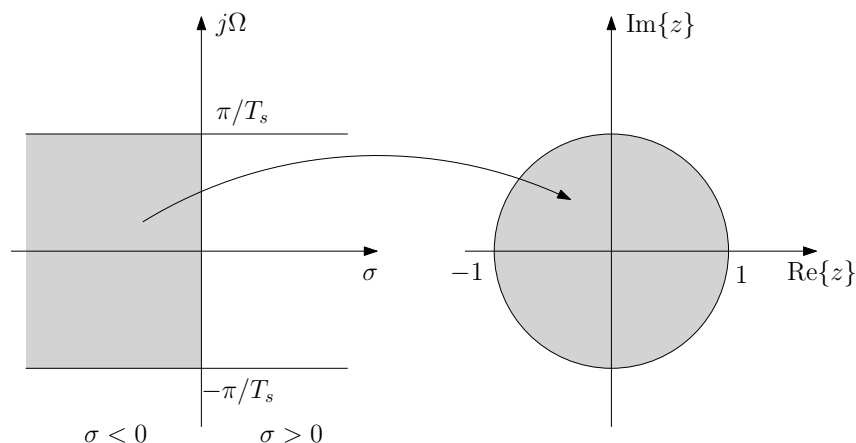
## Phương pháp bất biến xung - Tính ổn định

Nếu điểm cực của bộ lọc tương tự nằm bên trái mặt phẳng phức:

$$s_{pk} = \sigma + j\Omega, \quad \sigma < 0$$

thì điểm cực của bộ lọc số nằm trong vòng tròn đơn vị:

$$z_{pk} = e^{s_{pk} T_s} \rightarrow |z_{pk}| = e^{\sigma T_s} < 1$$



## Phương pháp bất biến xung - Tính chất

- ▶ Duy trì được bậc và tính ổn định của bộ lọc tương tự
- ▶ Không áp dụng được cho tất cả các loại bộ lọc (thông cao, chặn dải)
- ▶ Có thể xảy ra méo dạng đáp ứng tần số do chồng phổ

## Phương pháp biến đổi song tuyến

Tránh hiện tượng chồng phổ, ánh xạ toàn bộ trục ảo  $j\Omega$  trên mặt phẳng  $s$  thành vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng  $z$ .

$$H_a(s) \rightarrow H(z), \quad s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

với  $T$  bất kỳ.

- ▶ Trục ảo  $\sigma = 0 \leftrightarrow$  vòng tròn đơn vị  $|z| = 1$ .
- ▶ Nửa trái mặt phẳng phức  $\sigma < 0 \leftrightarrow$  phần mặt phẳng nằm trong vòng tròn đơn vị  $|z| < 1$ .

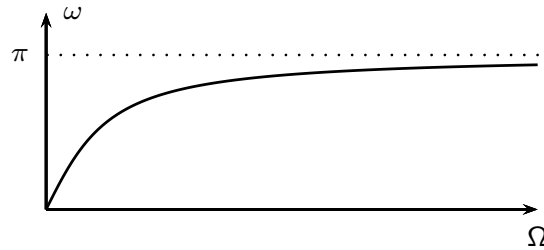
So với bộ lọc tương tự:

- ▶ Đáp ứng tần số giống nhau
- ▶ Đáp ứng xung có thể rất khác nhau

## Phương pháp biến đổi song tuyến: Tính chất

Nếu  $s = \sigma + j\Omega$  và  $z = re^{j\omega}$ , dễ dàng tính được

$$\omega = 2 \arctan\left(\frac{T}{2}\Omega\right), \quad \Omega = \frac{2}{T} \tan(\omega/2)$$



Các bước thiết kế:

1. Xấp xỉ các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số sang bộ lọc tương tự
2. Thiết kế bộ lọc tương tự
3. Áp dụng biến đổi song tuyến

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

## Phương pháp tương đương vi phân

Xấp xỉ: phương trình vi phân  $\rightarrow$  phương trình sai phân, ví dụ:

$$\frac{d}{dt}y_a(t) \rightarrow \frac{1}{T_s}[y(n) - y(n-1)]$$

Hàm truyền đạt:

$$H_a(s) \rightarrow H(z), \quad s = \frac{1 - z^{-1}}{T_s}$$



## Phương pháp biến đổi z thích ứng

Ánh xạ các điểm cực và điểm không:

$$H_a(s) = \frac{\prod_{r=1}^M (s - s_{0r})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{pk})}$$
$$\rightarrow H(z) = \frac{\prod_{r=1}^M (1 - e^{s_{0r} T_s} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{s_{pk} T_s} z^{-1})}$$