Le modèle de Goodwin

Léo Revelli

1 Les variables du modèle :

- La production, Y : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
- Le capital, K : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

Dans ce modèle, il peut y avoir du chômage, on va donc distinguer le travail de la population, ainsi :

- Le travail, L : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
- La population, N : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
- Les connaissances, la productivité, a : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$
- Le salaire, les travailleurs = le salaire moyen : w : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

2 Postulat :

2.1 Postulat 1 : postulat sur la fonction de production :

La fonction de production F : $[0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est de **Leontief** :

F(K(t), a(t)L(t)) = min ($\frac{K(t}{v}$, a(t)L(t))

V représente la **capacité de production** (avec la fonction de production de type Leontief il n'y a plus de substituabilité entre le capital et le travail, on ne peut pas faire sans l'un des deux), on a V<0. On suppose que le stock de capital est utilisé à 100% (c'est-à-dire que nous n'allons jamais acheter du capital qui ne va pas nous servir car nous n'avons pas assez d'employés) .

De plus, on a : $\frac{K(t)}{v}$ = a(t)L(t) = Y(t) , $\forall t \in [0, +\infty[$.

2.2 Postulat 2 : L'évolution de a, n et w :

- Soit l'accroissement des connaissances $\dot{a} = \alpha$ a $\Leftrightarrow$ le taux de croissance de a est α
- De même, l'accroissement de la population est : $\dot{N} = \beta$ N

On pose ϕ (λ) une fonction croissante appellée courbe de Phillips avec $\lambda = \frac{L}{N}$ représente le taux d'emploi

- Enfin, on a, l'accroissement du salaire moyen : $\dot{w} = \phi$ (λ) (ainsi, plus le taux d'emploi est grand, plus l'accroissement de salaire va augenter et inversion, c'est l'idée marxiste de **l'armée de réserve du capitalisme** $\Rightarrow$ si tout le monde a du travail, alors les employeurs peuvent plus difficilement changer la main d'oeuvre ce qui permet aux travailleurs d'augmenter leurs salaires)

2.3 Postulat 3 : La loi de Say :

Les salaires sont entièrement consommés et les profits sont entiérement réinvestis (ce qui implique que l'offre est égal à la demande, nous sommes donc bien dans un modèle classique).

On a alors :

$\dot{K}$ = (y -wL) - δK avec δ la dépréciation du capital telle que $\delta > 0$

$\Rightarrow$ Le taux de croissance du capital = (production - salaire des travailleurs - nombre de travailleurs) - dépréciation du capital (car dans ce modèle seuls les travailleurs consomment et pas les chômeurs).

On pose ω la part des salaires dans la production telle que : $\omega = \frac{wL}{Y} = \frac{wL}{aL} = \frac{w}{a}$ $\Rightarrow$ ainsi d'après le postulat 3 : $\dot{K}$ = (Y-wL) - δK = (Y - Yω) - δK = Y(1-ω) - δK (car $\omega = \frac{wL}{Y} \Leftrightarrow$ Yω = wL)

On a $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{1-\omega}{v}$ - δ , en effet ln(Y) = ln($\frac{K}{V}$) = ln(K) - ln(v) $\Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \dot{ln(Y)} = \dot{ln(K)}$ - $\dot{ln(v)} = \frac{\dot{K}}{K}$ - $\frac{\dot{v}}{v} = \frac{\dot{K}}{K}$ - 0 (car v est une constante) or $\dot{K}$ = (1-ω) $\frac{1}{v}$Y - δK donc $\frac{\dot{K}}{K}$ = (1 - ω) $\frac{Y}{K}$ - δ $\frac{K}{K}$ = (1 - ω) $\frac{Y}{K}$ - δ. De plus, Y = $\frac{K}{v}$ donc $\frac{Y}{K} = \frac{K}{Kv} = \frac{1}{v}$ ainsi $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K}$ = (1 - ω) $\frac{1}{v}$ - δ (car (1 - ω $\frac{Y}{K}$ - δ = (1 - ω) $\frac{1}{v}$ - δ

$\Rightarrow$ plus ω est grand, plus (1 - ω) est petit $\Rightarrow$ le taux de croissance de la production dépend négativement de ω. C'est logique car selon les économistes classiques la croissance est tirée par les investissements . On pose g(ω) le taux de croissance tel que :

g(ω) = $\frac{1-\omega}{v}$ - δ

3 Théoréme :

La dynamique du modèle de Goodwin est décrite par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \omega\ (\phi(\ \lambda\ ) - \alpha\ ) \\ \dot{\lambda} = \lambda\ (\mathrm{g}(\omega) - \alpha - \beta\ ) \end{cases}$$

Démonstration :

On a donc ω $\frac{w}{a}$ $\Rightarrow$ ln(ω)= ln ($\frac{w}{a}$) = ln(w) - ln(a) $\Rightarrow \frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\phi(\lambda)w}{w} - \frac{\alpha a}{a} \Rightarrow \dot{\omega} = \omega$ (ϕ(λ) - α)

On a $\lambda = \frac{L}{N}$ $\Rightarrow$ ln(λ) = ln(L) - ln(N) or Y=aL $\Rightarrow$ ln(λ) = ln($\frac{Y}{a}$) - ln(N) = ln(Y) - ln(a) - ln(N) donc $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{N}}{N}$ = g(ω) - α - β (car $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}}{K}$ = g(ω) d'après le postulat 3)

Donc $\dot{\lambda} = \lambda$ (g(ω) - α - β)