А. Е. Полищук

Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье

Alexander Polishchuk
Boston University

Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

Александр Полищук

Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье

Перевод с английского Ю. Ю. Кочеткова

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 512.7
ББК 22.147
П50

Издание осуществлено при поддержке РФФИ
(издательский проект № 04-01-14115)

Полищук А. Е.

П50 Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье / Перевод с английского Ю. Ю. Кочеткова. — М.: МЦНМО, 2010. — 312 с.

ISBN 0-521-80804-9 (англ.)
ISBN 978-5-94057-621-1 (русск.)

Книга является современной монографией по теории абелевых многообразий (как над комплексными числами, так и над произвольным полем). Освещены, в частности, такие вопросы, как тэта-функции, связь с группой Гейзенберга, преобразование Фурье—Мукаи, теория якобианов кривых.

Для научных работников, аспирантов, студентов старших курсов.

ББК 22.147

Translation from the English language edition: *Abelian Varieties, Theta Functions and the Fourier Transform* by A. Polishchuk. Cambridge University Press, 2003.

Александр Евгеньевич Полищук

Абелевы многообразия, тэта-функции
и преобразование Фурье

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83

Подписано в печать 15.03.2010 г. Формат $60 \times 90\ {}^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 19,5. Тираж 400 экз. Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в ГУП «Типография „Наука“»
199034, Санкт-Петербург, В. О., 9 линия, 12

ISBN 0-521-80804-9 (англ.)
ISBN 978-5-94057-621-1 (русск.)

Оглавление

Предисловие

В 1981 г. С.Мукаи открыл нетривиальный алгебро-геометрический аналог преобразования Фурье. Конструкция Мукаи определена в контексте абелевых многообразий и называется *преобразованием Фурье—Мукаи* (см. [7]). Главная цель этой книги — введение в алгебраическую теорию абелевых многообразий, в рамках которой преобразование Мукаи занимает надлежащее место. По нашему мнению, использование этого преобразования позволяет по-новому взглянуть на теорию абелевых многообразий. С одной стороны, оно позволяет дать более прозрачные доказательства известных теорем, с другой — аналогия с преобразованием Фурье открывает новые направления исследований в теории абелевых многообразий. Стандартное преобразование Фурье применяется в доказательстве функциональных уравнений для тэта-функций, так что оно важно в аналитической теории комплексных абелевых многообразий. В книгах [6] и [9] это наблюдение развито в глубокую теорию, описывающую связь между тэта-функциями и представлениями группы Гейзенберга. В первой части этой книги мы даем введение в эту теорию и описываем ее связь с геометрией комплексных абелевых многообразий. Алгебраическая теория абелевых многообразий и преобразований Фурье—Мукаи рассматривается во второй части. Третья часть посвящена якобианам алгебраических кривых. Нитью, связующей три части книги, является теория тэта-функций: тэта-функции вводятся в первой части и используются во второй и третьей частях для иллюстрации абстрактных алгебраических теорем. Зависимость второй части от первой состоит еще и в том, что теория групп Гейзенберга — важная составляющая алгебраической теории абелевых многообразий — является алгебраическим аналогом конструкций из первой части.

Еще одной причиной, по которой эта книга была написана, является всплеск интереса к преобразованию Фурье—Мукаи и его обобщениям. Всплеск, вызванный недавно обнаруженной связью преобразования с теорий струн и, в частности, с зеркальной симметрией. Гомологическая зеркальная гипотеза Концевича предсказывает, что для зеркальной пары многообразий Калаби—Яу существует эквивалентность между производной категорией когерентных пучков на одном многообразии и некоторой категорией, определенной симплектической структурой на другом многообразии. Из этого следует, что если многообразия Калаби—Яу есть зеркальный образ, то производная категория когерентных пучков на нем имеет много автоэквивалентностей. Такие автоэквивалентности часто могут быть построены, и преобразование Фурье—Мукаи является здесь типичным примером. С другой стороны, гипотетически соответствие между когерентными пучками на многообразии Калаби—Яу и лагранжевыми подмногообразиями на его зеркальном образе (предсказанное гомологической зеркальной гипотезой) задается вещественным аналогом в виде преобразования Фурье—Мукаи. В конце первой части мы приводим простейший пример такого преобразования для случая комплексных и симплектических торов.

Мы хотели бы отметить, что структура книги подчинена важной идее *категорификации* (см. [1]). Грубо говоря, категорификация — это процесс поиска категорных аналогов для теоретико-множественных понятий, т. е. процесс замены множеств — категориями, функций — функторами и т. д. Нетривиальность этой (совершенно не единственной) процедуры состоит в том, что аксиомы, формулируемые как равенства, должны заменяться изоморфизмами, так что дополнительно нужно формулировать условия совместимости этих изоморфизмов. Многие понятия теории абелевых многообразий оказываются категорификациями. Например, категория линейных расслоений на абелевом многообразии и их изоморфизмов, может рассматриваться как категорификация множества квадратичных функций на абелевой группе, производная категория когерентных пучков на абелевом многообразии является категорификацией пространства функций на абелевой группе и т. д. Разумеется, преобразование Фурье—Мукаи является категорификацией обычного преобразования Фурье. Читатель заметит, что большинство структур, рассматриваемых в части II—это категорификации структур из части I. Стоит отметить, что идеи категорификации работают и в других разделах математики. Самый яркий пример — недавняя работа Хованова [5] по категорификации полиномов Джонса в теории узлов.

Возможно, следует отметить, что эта книга написана не с целью превзойти уже существующие изложения теории абелевых многообразий и тэта-функций. Ее цель, скорее, состоит в том, чтобы обогатить классическую теорию новыми идеями и взглянуть на нее с новой точки зрения. Например, мы не пытались изложить в части II весь материал из книги Мамфорда [8], которая остается непревзойденным пособием. Наш выбор тем частично определялся их связью с тэта-функциями — объединяющей темой всей книги — и частично идеей категорификации. На изложение материала в части I сильно повлияли фундаментальные работы Лиона и Вернь [6] и Мамфорда с соавторами [9]. Наше изложение, однако, является значительно более сжатым — мы даем необходимый минимум материала для определения тэта-рядов и доказательства функциональных уравнений для них. Наше изложение теории якобианов в части III далеко не полное, потому что главной задачей здесь было подчеркнуть роль преобразования Фурье—Мукаи. Тем не менее, мы надеемся, что основные результаты теории нашли место в этой книге.

В основу книги положен курс лекций, прочитанный автором в Гарвардском университете осенью 1998 г. и в Бостонском университете весной 2001 г. Курс был ориентирован на студентов старших курсов и аспирантов, интересующихся алгебраической геометрией. Для понимания части I необходимо знание основ комплексной и дифференциальной геометрии (в объеме главы 0 книги [3]), теории преобразования Фурье и знакомство с основными понятиями теории представлений. Для понимания части II и части III требования выше. Например, определение преобразования Фурье—Мукаи использует производные категории когерентных пучков. Чтобы понять определение, читатель должен иметь навык работы с производными категориями. Книги [2] и [10] являются здесь полезным источником. Мы также предполагаем знакомство с алгебраической геометрией в объеме первых четырех глав книги Хартсхорна [4]. В тех случаях, когда нам необходимы более сложные факты из алгебраической геометрии, мы даем ссылки. Некоторые сложные понятия и теоремы собраны в приложении В. Каждая глава заканчивается упражнениями. Результаты некоторых из них используются в тексте книги.

Теперь опишем содержание книги подробнее. Главы 1—7, образующие первую часть книги, посвящены трансцендентной теории абелевых многообразий. В главе 1 мы классифицируем голоморфные линейные расслоения на комплексных торах. Основное внимание в главах 2—5 уделено тэта-функциям. Мы показываем, что они естественно возникают как сечения голоморфных линейных расслоений на комплексных торах. Однако наиболее эффективное средство работы с ними — это не геометрия, а теория представлений. Соответствующая группа — это группа Гейзенберга, т. е. центральное расширение векторного пространства с помощью $\mathrm{U}(1)$, в котором коммутатор задан симплектической формой. Тэта-функции возникают из сравнения разных моделей единственного неприводимого представления группы Гейзенберга, для которого действие $\mathrm{U}(1)$ стандартно. Основной результат здесь — это функциональное уравнение для тэта-функций, доказанное в главе 5. Наше изучение представлений группы Гейзенберга дает и дополнительный результат — некоторые формулы для сумм Гаусса, открытые ван дер Блеем и Тураевым. Их доказательство приведено в приложении Б.

В главах 6 и 7 мы обсуждаем зеркальную симметрию между симплектическими и комплексными торами. Основная идея здесь состоит в том, что каждому симплектическому тору с расслоением, слои которого — это лагранжевы торы, можно естественно сопоставить комплексную структуру на двойственном расслоении. Более того, есть соответствие между лагранжевыми подмногообразиями в симплектическом торе и голоморфными векторными расслоениями на зеркальном комплексном торе. Это соответствие можно рассматривать как упрощенную вещественную версию преобразования Фурье—Мукаи. Эти идеи применяются для вычисления когомологий голоморфных линейных расслоений на комплексных торах.

Часть II (главы 8—15) посвящена алгебраической теории абелевых многообразий над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики. В главах 8—10 мы изучаем линейные расслоения на абелевых многообразиях и строим двойственное абелево многообразие. Часть этого материала представляет собой сжатое изложение результатов из книги [8], глава III, разделы 10—15. Доказательство же основной теоремы о двойственности абелевых многообразий отложено до главы 11, в которой мы определяем преобразование Фурье—Мукаи. В главе 11 также доказана теорема о том, что когомологии линейных расслоений на абелевых многообразиях с некоторыми условиями невырожденности лежат в степени один. Далее преобразование Фурье—Мукаи применяется для построения действия центрального расширения группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ на производной категории главных поляризованных абелевых многообразий. В главе 12 мы строим алгебраический аналог теории представлений группы Гейзенберга и применяем эту конструкцию для доказательства тэта-соотношения Римана. В главе 13 мы возвращаемся к линейным расслоениям на абелевых многообразиях и строим алгебраические аналоги некоторых структур, ассоциированных с голоморфными линейными расслоениями на комплексных торах. Глава 14 посвящена изучению векторных расслоений на эллиптических кривых. Главная идея здесь — это взаимосвязь действия центрального расширения группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ на производной категории пучков на эллиптической кривой и понятия стабильного векторного расслоения. В качестве результата мы получаем классификацию расслоений на эллиптических кривых, принадлежащую Атье. В главе 15 мы занимаемся категорификацией теории представлений групп Гейзенберга. Здесь роль обычного преобразования Фурье играет преобразование Фурье—Мукаи. Главный результат — это построение эквивалентностей между производными категориями когерентных пучков на абелевых многообразиях. Эта конструкция представляет собой «категорификацию» определения сплетающих операторов между различными моделями представления групп Гейзенберга (глава 4).

В части III (главы 16—22) рассматриваются некоторые разделы теории якобианов алгебраических кривых. Глава 16 посвящена построению якобиана кривой с помощью склеивания открытых подмножеств её g-й симметрической степени, где g — род кривой. Мы также излагаем основные результаты о симметрических степенях кривых, причем наши доказательства работают в любой характеристике. В главе 17 мы определяем главную поляризацию якобиана и даем современное рассмотрение некоторых классических задач о геометрии вложения кривой в еҷ якобиан. В частности, мы доказываем теорему Римана о пересечениях кривой с тэта-дивизорами якобиана. Глава 18 посвящена доказательству тождества тройной секущей Фэя, которому удовлетворяют тэта-функции на якобиане. В доказательстве использованы методы, развитые в главе 17, и теорема о вычетах для рациональных дифференциалов на кривой. В главе 19 мы более подробно изучаем симметрические степени кривой. Основными результатами этой главы являются вычисление групп Пикара и доказательство теоремы о занулении когомологий у некоторых естественно возникающих векторных расслоений. Мы также изучаем классы Чженя векторных расслоений на якобиане, проективизация которых изоморфна симметрической степени кривой. Глава 20 посвящена многообразиям особых дивизоров. Основные результаты состоят в оценке размерностей этих многообразий и в явном описании касательных конусов в их особых точках. В главе 21 мы доказываем теорему Торелли о том, что кривая может быть восстановлена по ее якобиану и тэта-дивизору на нем. Доказательство использует тот факт, что преобразование Фурье—Мукаи когерентные пучки с носителем на кривой, вложенной в якобиан, отображает на когерентные пучки с носителем на тэта-дивизоре. Наконец, в главе 22 мы рассматриваем символ Делиня для пары линейных расслоений на кривой и его связь с главной поляризацией якобиана. Мы также обсуждаем гипотезу о странной двойственности, в которой идет речь об аналогах тэта-функций на пространствах модулей векторных расслоений на кривых. Здесь, с помощью преобразования Фурье—Мукаи, удается переформулировать гипотезу более симметричным образом.

Благодарности

Во-первых, я хочу поблагодарить А. Бейлинсона, который рассказал мне о преобразовании Фурье—Мукаи. Моей приятной обязанностью является поблагодарить Д. Аринкина, Б. Конрада, Р. Донаги, К. Фукаи, Б. Гросса, Дж. Харриса, С. Клеймана, Дж. Липмана и Д. Орлова за полезные обсуждения различных тем этой книги. Я особенно благодарен Д. Каждану, Т. Пантеву и А. Вайнтробу за замечания о первом варианте книги. Также благодарю всех, кто слушал мои лекции в Гарвардском и Бостонском университетах, за замечания. Я также признателен

И. Долгачеву, который указал мне на связь между преобразованием Фурье—Мукаи и странной двойственностью, — эта тема обсуждается во второй части главы 22. Наконец, я хочу поблагодарить Стива Розенберга за его участие в публикации этой книги.

Литература

[1] *Baez J. C.*, *Dolan J.* Categorification // Higher Category Theory (Evanston, 1997) / E. Getzler and M. Kapranov, eds. P 1–36. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.

[2] *Gelfand S.*, *Manin Yu.* Methods of Homological Algebra. Berlin: Springer-Verlag, 1966. (Русское издание: *Гельфанд С.*, *Манин Ю.* Методы гомологической алгебры. М.: Наука, 1988.)

[3] *Griffiths P.*, *Harris J.* Principles of Algebraic Geometry. Wiley-Interscience, 1978. (Русское издание: *Гриффитс П.*, *Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.)

[4] *Hartshorne R.* Algebraic Geometry. Berlin: Springer-Verlag, 1977. (Русское издание: *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.)

[5] *Khovanov M.* A categorification of the Jones polynomial // Duke Math. J. 2000. V. 101, P. 359–426.

[6] *Lion G.*, *Vergne M.* The Weil Representation, Maslov Index and Theta Series. Birkhauser, 1980.

[7] *Mukai S.* Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ and its application to Picard sheaves // Nagoya Math. J. 1981, V. 81. P. 153–175.

[8] *Mumford D.* Abelian Varieties. London: Oxford University Press, 1974. (Русское издание: *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.)

[9] *Mumford D.* et al. Tata Lectures on Theta. I–III. Boston: Birkhauser, 1982–1991. (Русское издание: *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.)

[10] *Weibel C.* An Introduction to Homological Algebra. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

Часть I

Аналитическая теория

Глава 1

Линейные расслоения на комплексных торах

В этой главе мы будем изучать линейные расслоения на комплексных торах. Тор — это фактор комплексного векторного пространства по решетке. Основной результат этой главы — явное описание группы классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений на комплексном торе T. Топологический тип комплексного линейного расслоения L на комплексном торе T определен его первым классом Чженя $c_1(L) \in H^2(T, \mathbb{Z})$. Этот класс может быть интерпретирован как кососимметрическая билинейная форма $E\colon \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$, где $\Gamma = H_1(T, \mathbb{Z})$ — решетка, отвечающая T. Существование голоморфной структуры на L эквивалентно совместности формы E с комплексной структурой на $\Gamma \otimes \mathbb{R}$, т. е. справедливости тождества $E(iv, iv') = E(v, v')$. С другой стороны, группу классов изоморфизма топологически тривиальных голоморфных линейных расслоений на T легко отождествить с двойственным тором $T^\vee = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{U}(1))$, т. е. множество классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений на T с заданным первым классом Чженя E является $T^\vee$-торсором[1]. Его можно отождествить с $T^\vee$-торсором квадратичных отображений $\alpha\colon \Gamma \to \mathrm{U}(1)$, для которых ассоциированное билинейное отображение $\Gamma \times \Gamma \to \mathrm{U}(1)$ равно $\exp(\pi i E)$. Эти результаты описывают ту основную связь между теорией тэта-функций и геометрией, которая играет важную роль в первой части книги.

Голоморфное линейное расслоение на T, отвечающее кососимметрической форме E и квадратичному отображению α, строится явно. Для этого нужно взять тривиальное линейное расслоение на комплексном векторном пространстве и задать действие решетки на нем. Это построение позволяет определить на голоморфном линейном расслоении на T каноническую эрмитову метрику и эрмитову связность. Мы также покажем, что на двойственном торе $T^\vee$ есть естественная комплексная структура, а *расслоение Пуанкаре* — универсальное семейство $\mathcal{P}$ линейных расслоений на T, параметризованное точками двойственного тора, — тоже имеет естественную комплексную структуру. В гл. 9 мы рассмотрим чисто алгебраическую версию этой двойственности в контексте абелевых многообразий.

[1]Следуя Гротендику, под *G-торсором* мы будем понимать главное однородное пространство группы G.

§ 1.1. Когомологии структурного пучка

Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство, а Γ — решетка в V (т. е. Γ — это такой конечно порожденный $\mathbb{Z}$-подмодуль в V, что естественное отображение $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\Gamma\to V$ является изоморфизмом).

Определение. Комплексное многообразие $T=V/\Gamma$ называется *комплексным тором.*

Как топологическое пространство тор T есть просто произведение окружностей, так что кольцо когомологий $H^*(T,\mathbb{Z})=\bigoplus\limits_r H^r(T,\mathbb{Z})$ (соответственно $H^*(T,\mathbb{R})$) можно естественно отождествить с внешней алгеброй $\bigwedge^* H^1(T,\mathbb{Z})$ (соответственно $\bigwedge^* H^1(T,\mathbb{R})$). Более того, существует естественный изоморфизм $\Gamma\xrightarrow{\sim} H_1(T,\mathbb{Z})$, переводящий элемент $\gamma\in\Gamma$ в цикл $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to T$, $t\mapsto t\gamma$. Таким образом, мы получаем канонические изоморфизмы $H^*(T,\mathbb{Z})\simeq\bigwedge^*\Gamma^\vee$ и $H^*(T,\mathbb{R})\simeq\bigwedge^*\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R})$, где $\Gamma^\vee=\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathbb{Z})$ — решетка, двойственная решетке Γ.

Напомним, что существует разложение в прямую сумму

$$V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=V\oplus\overline{V},$$

где само пространство V отождествляется с подпространством в $V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$, состоящим из векторов вида $v\otimes 1-iv\otimes i$, а комплексно сопряженное подпространство $\overline{V}$ состоит из векторов вида $v\otimes 1+iv\otimes i$. Соответственно

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})\xrightarrow{\sim} V^\vee\oplus\overline{V}^\vee,$$

где $V^\vee=\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$ — комплексное пространство, двойственное пространству V, а $\overline{V}^\vee$ — пространство $\mathbb{C}$-антилинейных функционалов на V. Так как тор T является группой Ли, касательное расслоение на T тривиально и указанное разложение в прямую сумму совместимо с разложением расслоения комплекснозначных 1-форм на T в сумму (1,0)-и (0,1)-форм. Итак, у нас есть канонические изоморфизмы

$$\mathcal{E}^{p,q}\simeq\bigwedge^p V^\vee\otimes_{\mathbb{C}}\bigwedge^q\overline{V}^\vee\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{E}^{0,0},$$

где $\mathcal{E}^{p,q}$ — пучок гладких (p,q)-форм на T.

Будем рассматривать тор T как комплексное многообразие. Первым важным результатом является описание когомологий структурного пучка $\mathcal{O}$, т. е. пучка голоморфных функций на T.

Предложение 1.1. *Существует канонический изоморфизм $H^r(T,\mathcal{O})\simeq\bigwedge^r\overline{V}^\vee$.*

Доказательство. Для вычисления когомологий структурного пучка $\mathcal{O}$ можно использовать резольвенту Дольбо:

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{E}^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,2} \to \ldots$$

Мы можем рассматривать элементы из $\bigwedge^p \overline{V}^\vee$ как $(0,p)$-формы на торе T, инвариантные относительно сдвигов. Отметим, что формы, инвариантные относительно сдвигов, автоматически замкнуты. Мы утверждаем, что это дает нам вложение

$$i\colon \bigwedge^p \overline{V}^\vee \hookrightarrow H^p(T, \mathcal{O}).$$

В самом деле, пусть $\int\colon \mathcal{E}^{0,0} \to \mathbb{C}$ — отображение интегрирования (по отношению к какой-либо инвариантной относительно сдвигов форме объема на T), нормализованное условием $\int 1 = 1$. Мы можем продолжить это отображение до отображения $\int\colon \mathcal{E}^{0,p} \to \bigwedge^p \overline{V}^\vee$. Легко видеть, что $\int \circ \overline{\partial} = 0$, поэтому отображение $\int$ индуцирует такое отображение когомологий

$$\int\colon H^p(T, \mathcal{O}) \to \bigwedge^p \overline{V}^\vee,$$

что $\int \circ i = \mathrm{Id}$. Следовательно, отображение i является вложением. Пусть Ω^q — пучок голоморфных q-форм на T. Так как $\Omega^q \simeq \bigwedge^q V^\vee \otimes \mathcal{O}$, существует индуцированное вложение

$$i\colon \bigoplus_{p,q} \bigwedge^q V^\vee \otimes \bigwedge^p \overline{V}^\vee \to \bigoplus_{p,q} H^p(T, \Omega^q).$$

Отметим, что область определения i можно отождествить с $H^*(T, \mathbb{C}) \simeq$ $\simeq \bigwedge^*(V^\vee \oplus \overline{V}^\vee)$. Напомним, что для когомологий каждого кэлерова компактного комплексного многообразия X имеет место разложение Ходжа $H^*(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p,q} H^p(X, \Omega^q)$ ([52], гл. 0, раздел 7). Так как каждая инвариантная эрмитова метрика на T кэлерова, $\dim H^*(T, \mathcal{C}) =$ $= \dim \bigoplus_{p,q} H^p(T, \Omega^q)$. Следовательно, вложение i — изоморфизм. □

§ 1.2. Теорема Аппеля—Гумберта

Хорошо известно, что все голоморфные линейные расслоения на $\mathcal{C}^n$ тривиальны. В самом деле, из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0 \tag{1.2.1}$$

следует, что достаточно доказать тривиальность группы $H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$. Но $H^{>0}(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) = 0$ по $\overline{\partial}$-лемме Пуанкаре ([52], гл. 0, раздел 2).

Пусть X — комплексное многообразие. Обозначим через $\mathrm{Pic}(X)$ его группу Пикара, т. е. группу классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений на X. Тривиальность группы $\mathrm{Pic}(\mathbb{C}^n)$ позволяет вычислить группу $\mathrm{Pic}(T)$ в терминах групповых когомологий решетки Γ.

Предложение 1.2. *Каждое голоморфное линейное расслоение L на торе T является фактором тривиального расслоения на V по действию вида $\gamma(z,v) = (e_\gamma(v)z, v+\gamma)$, где $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{C}$, $v \in V$, а $\gamma \mapsto e_\gamma$ — 1-коцикл на Γ со значениями в группе $\mathcal{O}^*(V)$ обратимых голоморфных функций на V. Здесь действие группы Γ на $\mathcal{O}^*(V)$ индуцировано ее действием на пространстве V. Это соответствие продолжается до изоморфизма групп*

$$\mathrm{Pic}(T) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{O}^*(V)).$$

Доказательство. Пусть $\pi\colon V \to T$ — каноническая проекция. Так как группа $\mathrm{Pic}(V)$ тривиальна, линейное расслоение π^*L на V тривиально для каждого линейного расслоения L на торе T. Выберем тривиализацию $\pi^*L \simeq \mathcal{O}_V$. Тогда естественное действие группы Γ на π^*L превращается в действие группы Γ на тривиальном расслоении. Это действие имеет указанный вид: задан набор $(e_\gamma(v), \gamma \in \Gamma)$ обратимых голоморфных функций на V с условиями

$$e_{\gamma+\gamma'}(v) = e_\gamma(v+\gamma')e_{\gamma'}(v)$$

для всех $\gamma, \gamma' \in \Gamma$. Но это в точности условие коцикла для отображения $\Gamma \to \mathcal{O}^*(V)\colon \gamma \mapsto e_\gamma$. Если мы изменим тривиализацию, то функции $e_\gamma(v)$ заменятся на функции $e_\gamma(v)f(v+\gamma)f(v)^{-1}$, где f — обратимая голоморфная функция на V. Другими словами, коцикл $\gamma \mapsto e_\gamma$ изменяется на кограницу. Это и дает нам изоморфизм между $\mathrm{Pic}(T)$ и $H^1(\Gamma, \mathcal{O}^*(V))$. □

Определение. Мы будем называть 1-коциклы $\Gamma \to \mathcal{O}^*(V)\colon \gamma \mapsto e_\gamma$ *мультипликаторами*, задающими линейное расслоение на торе T.

Точная последовательность (1.2.1) порождает длинную точную последовательность

$$0 \to H^1(T,\mathbb{Z}) \to H^1(T,\mathcal{O}) \to H^1(T,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(T,\mathbb{Z}) \to H^2(T,\mathcal{O}) \to \ldots$$

Напомним, что первый класс Чженя $c_1(L) \in H^2(T,\mathbb{Z})$ линейного расслоения L на T определен как образ класса изоморфных расслоений $[L] \in H^1(T,\mathcal{O}^*)$ при действии граничного гомоморфизма δ. Мы можем рассматривать класс $c_1(L)$ как кососимметричную билинейную форму $\Gamma \times \Gamma \to \mathbb{Z}$. Заметим, что класс $c_1(L)$ определяет расслоение L как топологическое (или C^∞-) линейное расслоение. Это прямо следует из существования точной последовательности экспоненты для непрерывных (соответственно C^∞) функций и из того факта, что пучок непрерывных (соответственно C^∞) функций является вялым.

Теперь можно сформулировать следующие естественные вопросы.

1. Описать топологические линейные расслоения, допускающие голоморфную структуру, т. е. описать образ отображения δ.

2. Найти удобные мультипликаторы для голоморфных линейных расслоений в данном топологическом типе.

3. Описать группу топологически тривиальных голоморфных линейных расслоений на T.

Решение этих задач дает теорема 1.3. В основе решения лежит следующая конструкция мультипликаторов. Пусть H — эрмитова форма[1] на V, а $E = \operatorname{Im} H$ — соответствующая кососимметричная $\mathbb{R}$-билинейная форма на V. Пусть форма E принимает целые значения на $\Gamma \times \Gamma$, и пусть $\alpha\colon \Gamma \to \mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ — такое отображение, что

$$\alpha(\gamma_1 + \gamma_2) = \exp(\pi i E(\gamma_1, \gamma_2))\alpha(\gamma_1)\alpha(\gamma_2) \tag{1.2.2}$$

(такое отображение α всегда существует, см. упражнение 7). Положим

$$e_\gamma(v) = \alpha(\gamma) \exp\Big(\pi H(v, \gamma) + \frac{\pi}{2} H(\gamma, \gamma)\Big),$$

где $\gamma \in \Gamma$, а $v \in V$. Легко проверить, что отображение $\gamma \mapsto e_\gamma$ является 1-коциклом. Обозначим через $L(H, \alpha)$ соответствующее голоморфное линейное расслоение на T.

Нетрудно убедиться, что

$$L(H_1, \alpha_1) \otimes L(H_2, \alpha_2) \simeq L(H_1 + H_2, \alpha_1\alpha_2),$$
$$[-1]^* L(H, \alpha) = L(H, \alpha^{-1}),$$

где $[-1]\colon T \to T$ — инволюция тора T, переводящая v в $-v$.

Определение. Пусть E — кососимметричная $\mathbb{R}$-билинейная форма на V. Мы будем говорить, что форма E *согласована с комплексной структурой*, если $E(iv, iw) = E(v, w)$. Мы будем говорить, что форма E *строго согласована с комплексной структурой*, если, кроме того, $E(iv, v) > 0$ для всех $v \neq 0$.

Замечание. В некоторых книгах под согласованностью формы E с комплексной структурой понимается строгая согласованность в смысле нашего определения. Заметим, что строгая совместимость требует невырожденности формы E.

[1] Под эрмитовой формой мы понимаем $\mathbb{R}$-билинейную форму, которая $\mathbb{C}$-линейна по первому аргументу и $\mathbb{C}$-антилинейна — по второму (никакого условия положительности мы не требуем).