Tarea

7.4

$\cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{14}, \cancel{15}, \cancel{17}, \cancel{18}, \cancel{19}, \cancel{21}, \cancel{29}, \cancel{33}, \cancel{37}, \cancel{43}, \cancel{45}, \cancel{47}, \cancel{51}, \cancel{52}, \cancel{53}, \cancel{59}, \cancel{63}$

12 11 10 9

8 7 6 5 4 3 2 1

5.) $\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{senh} t\}$

$$F_s = \frac{1}{s^2-1} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)$$

$$= (s^2-1)^{-1}$$

$$-1(s^2-1)^{-2}$$

$$\frac{dy}{ds^2} \; \frac{-2s}{(s^2-1)^2}$$

$$\frac{F'(x)\,G(x) - F(x)\,G'(x)}{[G(x)]^2}$$

$$= \frac{-2(-3s^2-1)}{(s^2-1)^2}$$

$$= \frac{6s^2+2}{(s^2-1)^3} \; //$$

7.) $\mathcal{L}\{te^{2t}\sin 6t\} = \dfrac{6}{(s-2)^2+36}$

$= \dfrac{dy}{dt} \dfrac{6}{(s-2)^2+36}$

$= -6 \dfrac{dy}{dt}((x-2)^2+36)^{-1}$

$u = (x-2)^2+36$

$6 \cdot \dfrac{1}{(x-2)^2+36} \cdot 2(x-2)$

$-\dfrac{12(x-2)}{(x^2-4x+40)\,2}$

14.) $y'' + y = f(t)$ $\boxed{y(0)=1}$ $y'(0)=0$

$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi/2 \\ \text{sen}\,t & t \geq \pi/2 \end{cases}$

$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$(s^2+1)Y(s) = \frac{1}{s} + s$ $\frac{1}{s} + \frac{s}{s} =$

$Y(s) = 1$

$y(\frac{\pi}{2}) = 1$ $y'(\frac{\pi}{2}) - 0$

$y'' + y = \sin t$

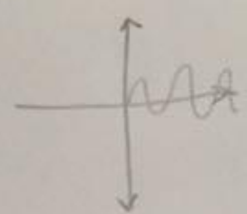
$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$(s^2+1) Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + s$

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{s^2+1}$

$y(t)\ \frac{1}{2}\{\sin t - t\cos t\} + \cos t \quad t > \frac{\pi}{2}$

15.) $y(t) = -\frac{1}{8} t \sin(4t) + \frac{1}{4}\sin(4t) - \frac{1}{8}(t-\pi)\sin(4t)\, u(t-\pi)$



17.) $t y'' - y' = 2t^2 \quad y(0) = 0$

$-\frac{d}{ds}\left(s^2 Y(s) - \cancel{s y(0)} - y'(0)\right) - sY(s) + y'(0) = \frac{4}{s^3}$

18.) $2y'' + t y' - 2y = 10 \quad y(0) = y'(0) = 0$

$2\{s^2 Y(s) - \frac{d}{ds}\{s Y(s) - 2Y(s) =)0$

19.) $\mathcal{L}\{1 * t^3\}$

$$\mathcal{L}\{1\}\mathcal{L}\{t^3\} = \left\{\frac{1}{s}\right\}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\} = \frac{6}{s^5}$$

21.) $\mathcal{L}\{e^{-t} * e^{t}\cos t\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}\,\mathcal{L}\{e^{t}\cos t\}$

$$\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\right) = \frac{s-1}{(s+1)(s-1)^2+1}$$

29.) $\mathcal{L}\left\{t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau\right\}$

$$F(s) = L\{f(t)\}$$

$$= -\frac{dy}{ds}\;\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$= \frac{dy}{ds}\frac{1}{s^3+s}$$

$$= \frac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$$

45) $y'(t) = 1 - \text{sen}\,t - \int_0^t y(T)\,dT \quad y(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s^2 - s + 1}{s^4 + 2s^2 + 1} = \frac{s^2 - s + 1}{(s^2+1)^2}$$

$$\frac{s^2 - s + 1}{(s^2+1)^2} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$y(t) = \text{sen}\,t - \frac{t}{2}\sin t$$

47) $L\frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,T\,dT = E\,t$

$$I(s)\left\{0.1s^2 + 3s + 20\right\} = 100\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

$$I(s) = 100\,\frac{\{e^{-s} - e^{-2s}}{0.1s^2 + 3s + 20}$$

33.) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s-1)}\right\}$

$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/s^2(s-1}{s}\right\}$

$= \int_0^t (e^\tau - \tau - 1)\,d\tau$

$= e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1$

37.) $f(t) + \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,d\tau$

$t \rightarrow f(t) = t - \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,d\tau$

$\frac{s^2}{s} F(s) + \frac{1}{s^2} F(s) = \frac{1}{s^2}$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

43.) $f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (\tau - t)^3 f(t)\,d\tau$

$f(t) = 1 + t - \frac{8}{3}\int_0^t (t-\tau)^3] f(\tau)\,dt$

59.) $f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left[\ln(s-3)-\ln(s+1)\right]\right\}$

$-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right\}$

63.) $f(t) = \frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-t/2}\cos\sqrt{15}\,t - \frac{\sqrt{3}/5\,e^{-t/2}}{6}\sin\sqrt{15}$

~~7.5~~ 7.5 ($\cancel{1}$, $\cancel{3}$, $\cancel{5}$, $\cancel{11}$, 13, 14)

① $y' - 3y = \Delta(t-2)$ ... $y(0)=0$

$\mathcal{L}\{y'-3y\} = L\{\Delta(t-2)\}$

$sY - 0 - 3Y = e^{-2s} \rightarrow Y = \frac{e^{-2s}}{s-3}$

$y(t) = e^{3(t-2)}U(t-2)$

③ $y'' + y = \delta(t-2\pi)$

$L\{y''+y\} = L\{\Delta(t-2\pi)\}$

$s^2Y - s(0) - 1 + Y = e^{-2\pi s}$

$y(t) = \sin(t-2\pi)U(t-2\pi) + \sin(t)$

51.) $T = b$

$$f(t) = \frac{a}{b} t$$

$$\frac{1}{1-e^{-sb}} \int_0^b e^{-st} \frac{a}{b} t \, dt$$

$$= \frac{a}{bs^2} - \frac{a}{s(e^{sb}-1)}$$

52.) $T = 2$

$$f(t) = t$$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^1 t e^{-st} dt + \int_1^2 (2-t) e^{-st} dt)$$

$$= \frac{1}{s^2(1-e^{-2s})} (1-e^{-s})^2$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}$$

53.) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} e^{-st} \sin t \, dt$

$$= \frac{1}{s^2+1} \cos A \frac{\pi s}{2}$$

13.) Inose! 11/

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^3} y''(0) + \frac{1}{6} \cdot \frac{3!}{s^4} y'''(0)$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot \frac{P_0}{EI} \cdot \frac{3!}{s^4} e^{-\frac{L}{2}s}$$

7.4 propiedades operacionales II

7.4.1 derivadas de una transformada

multiplicación de una función por t^n

teorema 7.4.1 derivadas de transformadas si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ej 1 - 2 y Nota del libro

Ej. Encuentre $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+3}{s-1}\right)\right\}$

$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{\ln(s+3) - \ln(s-1)\} = f(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d[\ln(s+3)]}{ds} - \frac{d}{ds}[\ln(s-1)]\right\} = -tf(t)$ ← solo derive una vez

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-1}\right\} = -tf(t)$

$e^{-3t} - e^{t} = -tf(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{e^t - e^{-3t}}{t}}$$

Ej: Encuentre $g(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

$\rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{\cancel{t} \cdot \sin t}{\cancel{t}}\right\} = -\frac{d}{ds} g(s)$

$-\int \frac{1}{s^2+1} = \int \frac{d}{ds} g(s)$

$-\int_s^{\infty} \frac{1}{\sigma^2+1} d\sigma = g(s)$

$-[\arctan \sigma]_s^{\infty} = g(s)$ $\pi/2$

$\arctan(s) - \arctan(\infty) = g(s)$

$$\boxed{g(s) = \arctan(s) - \pi/2}$$

Ej: Resuelva el PVI $y'' + 2ty' - 4y = 1$ con $y(0) = y'(0) = 0$

① $s^2 Y(s) - \cancel{s y(0)} - \cancel{y'(0)} + 2\left[-\dfrac{d}{ds}\left(sY(s) - \cancel{y(0)}\right)\right] - 4Y(s) = \dfrac{1}{s}$

$$s^2 Y(s) - 2(Y(s) + sY'(s)) - 4Y(s) = 1/s$$

$$-2sY'(s) + (s^2 - 6)Y(s) = \frac{1}{s}$$ ¡Es lineal!

$P(s)$

$$\mu(s) = e^{\int \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{2}\right) ds} = e^{3\ln s - s^2} = s^3 e^{-s^2}$$

② $$\boxed{\frac{d}{ds}\left[Y(s) \cdot s^3 e^{-s^2}\right] = \frac{-s e^{-s^2}}{2}}$$

$$Y(s) \cdot s^3 e^{-s^2} = -\frac{1}{2}\int s e^{-s^2} ds = \frac{1}{4}\int e^u du = \frac{e^{-s^2}}{4} + C$$

③ $Y(s) = \dfrac{1}{4s^3} + \cancel{\dfrac{Ce^{s^2}}{s^3}}\ 0$ } $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$ y la única forma que sea 0 es que C sea 0.

④ $$\boxed{y(t) = \frac{t^2}{8}}$$

7.4.2 transformadas de integrales

convolución:

Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$, entonces la convolución se define por

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad \begin{cases} f * g = g * f \\ f * 1 = \int_0^t f(\tau) d\tau \end{cases}$$

teorema 7.4.2 teorema de convolución si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) G(s)$$

Ej 3 – 4 del libro

La transformada de una integral, es decir $g(t) = 1$, viene dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Ej 5 del libro

Ej. Halle $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+s^2}\right\}$ sin usar fracciones parciales

$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\} = t * \sin t = \sin t * t$ ← no es la respuesta

$\rightarrow f(t) = \sin t * t = t\int_0^t \sin\tau\, d\tau - \int_0^t \tau \sin\tau\, d\tau$

$f(t) = t(-\cos\tau)\Big|_0^t - (-\tau\cos\tau + \sin\tau)\Big|_0^t$

$f(t) = t(-\cos t + 1) - (-t\cos t + \sin t)$

$$\boxed{f(t) = t - \sin t}$$

Ecuación integro-diferencial:

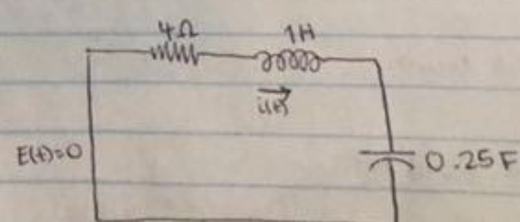
para no pasar por la carga en un circuito e ir directamente a la corriente se puede hacer lo siguiente

$$L\cdot\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t)$$

$$L\cdot\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E(t)$$

Ej 6 del libro

Ej Determine la función corriente del circuito con $i(0) = 1A$



① $\frac{di}{dt} + 4i + 4\int_0^t i(\mu)\,d\mu = 0$

② $sI(s) - \underbrace{i(0)}_{1} + 4I(s) + \boxed{\frac{4I(s)}{s}} = 0$

$(s^2 + 4s + 4)I(s) = s$ → pasé el 1 al otro lado y multipliqué todo por "s"

$I(s) = \frac{s}{(s+2)^2}$

③ fracciones parciales $\frac{s}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$

$A = 1 \quad ; B = -2$

④ $I(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s^2}\Big|_{s \to s+2}$

⑤ $\boxed{i(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t}}$

7.4.3 transformada de una función periódica

Función periódica

La transformada de Laplace de una función periódica se obtiene integrando sobre un periodo.

teorema 7.4.3 transformada de una función periódica si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

Ej 7 del libro

Ej 8 del libro

7.5 La función Delta de Dirac

Impulso unitario

Se da cuando actúa una fuerza externa de gran magnitud por un periodo muy corto. El impulso unitario $\delta(t-a)$ se llama función Delta de Dirac.

*imagen 7.5.2

Se caracteriza por las siguientes propiedades

a) $\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t=a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$ b) $\int_0^{\infty} \delta(t-a)\,dt = 1$

La propiedad de selectividad se define como

$$\int_0^{\infty} f(t)\cdot\delta(t-a)\,dt = f(a)$$

Teorema 7.5.1 transformada de delta de Dirac: para $a>0$,

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$

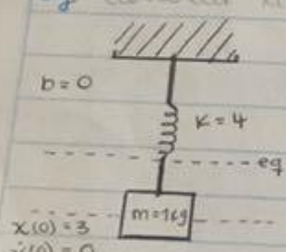
*siempre dicen en qué instante "a" se produce el golpe.

* $\delta(t-a) = \frac{d}{dt}\mathcal{U}(t-a)$

*se multiplica $\delta(t-a)$ por la magnitud del golpe.

Ej 1 del libro

Ej: calcular $x(t)$. En $t=2\pi$, el bloque recibe un martillazo hacia abajo con magnitud 8.



① $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_{ext}$

$\ddot{x} + 4x = \underbrace{8\,\delta(t-2\pi)}_{8e^{-2\pi s}}$

② $s^2X(s) - s\overset{3}{x(0)} - \cancel{\dot{x}(0)} + 4X(s) = 8e^{-2\pi s}$

$(s^2+4)X(s) = 8e^{-2\pi s} + 3s$

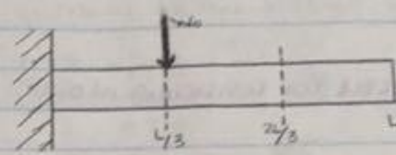
$X(s) = \dfrac{4\cdot 2e^{-2\pi s}}{s^2+4} + \dfrac{3s}{s^2+4}$

③ $\boxed{x(t) = 4\sin[2(t-2\pi)]\,\mathcal{U}(t-2\pi) + 3\cos 2t}$

④ Para ver la gráfica de lo que pasa...

$$x(t) = \begin{cases} 3\cos 2t & , \quad 0 \le t < 2\pi \\ 4\sin 2t + 3\cos 2t & , \quad t \ge 2\pi \end{cases}$$

Ej. carga puntual en vigas



$y(0) = 0 \quad y''(L) = 0$

$y'(0) = 0 \quad y'''(L) = 0$

$$EI\, y^{(4)}(x) = w_0\, \delta(x - L/3)$$

① $s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = {}^{w_0}/_{EI}\, e^{-L/3 s}$

$$Y(s) = \frac{w_0}{EI} \frac{6}{6} \cdot \frac{e^{-L/3 s}}{s^4} + \frac{2}{2} \cdot \frac{c_1}{s^3} + \frac{6}{6} \frac{c_2}{s^4}$$

② $y(x) = \frac{w_0}{6EI}(x - L/3)^3\, \mathcal{U}(x - L/3) + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{6} x^3$

③ Encontramos c_1 y c_2 para $x > L/3$

$$* \; y'(x) = \frac{w_0}{2EI}(x - L/3)^2 + c_1 x + \frac{c_2}{2} x^2$$

$$* \; y''(x) = \frac{w_0}{EI}(x - L/3) + c_1 + c_2 x \quad \Big\} \text{ evaluar } y''(L) = 0$$

$$\hookrightarrow c_1 = \frac{w_0 L}{3EI}$$

$$* \; y'''(x) = \frac{w_0}{EI} + c_2 \quad \Big\} \text{ evaluar } y'''(L) = 0$$

$$\hookrightarrow c_2 = -\frac{w_0}{EI}$$

④ El resultado, reemplazando, es

$$\boxed{y(x) = \frac{w_0}{6EI}\left[\left(x - \frac{L}{3}\right)^3 \mathcal{U}\left(x - \frac{L}{3}\right) + L x^2 - x^3\right]}$$