Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. **Corrigé de l'épreuve n° 14 G 26 A 01**. Année 2014

Exercice I :

A) 1. Soit z un nombre complexe non nul donné.
   - L'écriture algébrique de z est de la forme : $z = a + ib$, avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire,
   - L'écriture exponentielle de z est de la forme : $z = re^{i\theta}$, avec r son module et θ un de ses arguments,
   - L'écriture trigonométrique de z est de la forme : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec r son module et θ un de ses arguments,

2. Soient $K(z_0), M(z)$ et $M'(z')$ et soit r la rotation de centre $K(z_0)$ qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ on a :

$$\begin{cases} KM' = KM \\ (\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KM'}) = \theta \ [2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} |z' - z_0| = |z - z_0| \\ \arg \frac{z'-z_0}{z-z_0} \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \tag{2}$$

D'où

$$z' = e^{i\theta}z + z_0(1 - e^{i\theta})$$

B) Soit $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$

1. Ecriture trigonométrique de z_0.
On a $|z_0| = \sqrt{1+3} = 2$,
soit θ un argument de z_0 alors $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui donne $\theta = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$

2. Calculons z_0^4.

$$z_0^4 = [2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})]^4 = 16(\cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}) = 16(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

D'où
$$z_0^4 = -8 + i8\sqrt{3}$$

3. Résolvons l'équation
$$z^4 = 1$$

$z^4 = 1$ implique $|z|^4 = 1$ et $4\arg z = 0[2\pi]$ ce qui donne
$$|z| = 1 \text{ et } \arg z = k\frac{\pi}{2},\ \ k \in \mathbb{Z}$$

d'où l'ensemble des solutions S de l'équation $z^4 = 1$ est
$$S = \{-1; 1; i; -i\}$$

.

4. Déduisons-en les solutions de l'équation (E) :$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$.
$z^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ est équivalent à
$$\frac{z^4}{-8 + i8\sqrt{3}} = 1$$

ce qui est équivalent, d'après B)2), à
$$(\frac{z}{1 - i\sqrt{3}})^4 = 1$$

Ce qui donne d'après B)3) les solutions suivantes :

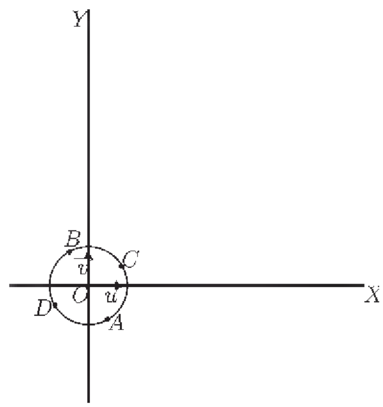
– Sous forme algébrique :
$$z_0 = 1 - i\sqrt{3},\ \ z_1 = -1 + i\sqrt{3},\ \ z_2 = \sqrt{3} + i,\ \ z_3 = -\sqrt{3} - i$$

– Sous forme trigonométrique :

$$z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}),\quad z_1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}),\quad z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

et

$$z_3 = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$$

5. 

6. Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   D'après A)2) si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par r alors

$$z' = ze^{i\frac{\pi}{2}}$$

7. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = z_0, z_B = z_1, z_C = z_2$ et $z_D = z_3$.
   Vérifions que $r(A) = C$.

$$z_A e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_C$$

   d'où $r(A) = C$.
   Vérifions que $r(C) = B$.

$$z_C e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{4\pi}{6}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_B$$

   d'où $r(C) = B$.
   Vérifions que $r(B) = D$.

$$z_B e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$$

d'où $r(B) = D$.

8. $r(A) = C$ implique $|z_A| = |z_C|$,
$r(C) = B$ implique $|z_C| = |z_B|$,
$r(B) = D$ implique $|z_B| = |z_D|$
D'où
$$|z_A| = |z_C| = |z_B| = |z_D| = 2$$
Ce qui est équivalent à
$$OA = OB = OC = OD = 2.$$
D'où A, B, C et D sont sur le même cercle (C) de centre O et de rayon 2.

Exercice II :

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher : $R_{\mathbf{1}}, R_2, R_{\mathbf{2}}, R_{\mathit{2}}, V_1, V_{\mathbf{1}}, V_2, J_2$.
R représente la couleur rouge, V la couleur verte, J la couleur jaune, 1 et 2 les numéros des couleurs.

A) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ un espace probabilisé. Soient A et B deux événements de cet espace probabilisé.
A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

B) On choisit successivement et sans remise 2 cubes de la boîte.

1. Soient les événements A : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et
B : "Obtenir au plus un cube portant le numéro 2"

a) $p(A) = \frac{A_4^1 \times A_4^1 + A_3^1 \times A_5^1 + A_1^1 \times A_7^1}{A_8^2} = \frac{19}{28}$

b) $p(\overline{B}) = \frac{A_5^2}{A_8^2} = \frac{5}{14}$ d'où $p(B) = \frac{9}{14}$

c) Calculons $p(A \cap B)$ et comparons-le avec $p(A) \times p(B)$
$A \cap B$, l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes avec au plus un portant le numéro 2".
Les différentes possibilités sont :
$(R_1, V_1), (R_1, V_{\mathbf{1}}), (V_1, R_1), (V_{\mathbf{1}}, R_1)$,
$(R_2, V_1), (V_1, R_2), (R_2, V_{\mathbf{1}}), (V_{\mathbf{1}}, R_2)$,
$(R_{\mathbf{2}}, V_1), (V_1, R_{\mathbf{2}}), (R_{\mathbf{2}}, V_{\mathbf{1}}), (V_{\mathbf{1}}, R_{\mathbf{2}})$,
$(R_{\mathit{2}}, V_1), (V_1, R_{\mathit{2}}), (R_{\mathit{2}}, V_{\mathbf{1}}), (V_{\mathbf{1}}, R_{\mathit{2}})$,

$(R_1, J_2), (J_2, R_1),$
$(V_1, J_2), (J_2, V_1), (V_{\mathbf{1}}, J_2), (J_2, V_{\mathbf{1}}),$
$(R_1, V_2), (V_2, R_1),$
Donc $p(A \cap B) = \frac{3}{7}$
Ou encore $p(A \cap B) = \frac{C_2^1 \times A_2^2 + C_3^1 \times C_2^1 \times A_2^2 + A_2^2 + C_2^1 \times A_2^2 + A_2^2}{A_8^2} = \frac{3}{7}$
Or $p(A) \times p(B) = \frac{9}{14} \times \frac{19}{28}$ qui est différent de $\frac{3}{7}$.
d'où A et B ne sont pas indépendants.

2. Les valeurs prises par X :
   $X = \{0, 1, 2\}$

   a) La loi de probabilité de X :

$X = a_i$	0	1	2
$p(X = a_i)$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

   b) Espérance mathématique $E(X)$ de X :
   $E(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j p(X = x_j),$
   $E(X) = \frac{4}{7} + 2 \times \frac{3}{14} = 1$

   c) Variance $V(X)$ de X :
   $V(X) = \sum_{j=1}^{m} x_j^2 (pX = x_j) - (E(X))^2,$
   $v(X) = \frac{4}{7} + 4 \times \frac{3}{14} - 1 = \frac{3}{7}$

C) Tirage simultané de 3 cubes de la boîte :

a) $p(C) = \frac{C_3^3 + C_3^2 \times C_5^1}{C_8^5} = \frac{2}{7}$

b) $p_n = p(D_n) = 1 - (\frac{5}{7})^n$

c) $(p_n)_n$ est strictement croissante et $\lim_{+\infty} p_n = 1$

Problème :

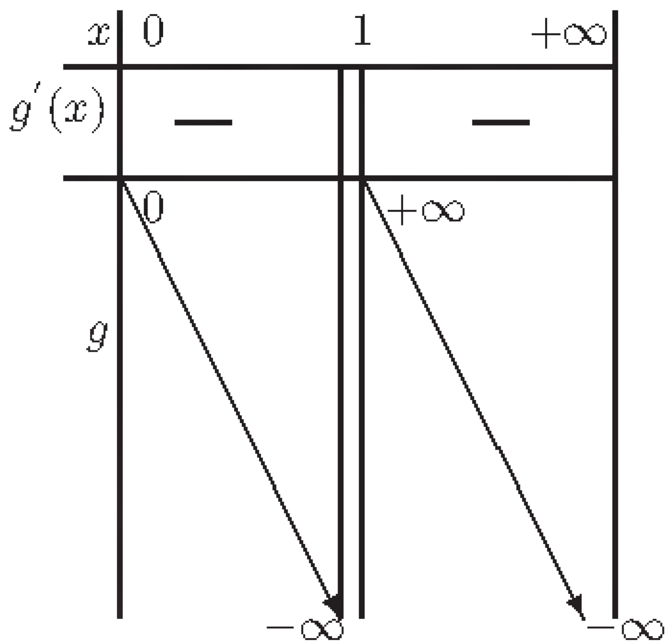
1. **a)** $g(x)$ existe si $x \neq 1$ avec $x > 0$
   $D_g =]0; 1[\cup]1; +\infty[$

b) $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0\,;\ \lim_{+\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x-1} - \ln|x-1| = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x-(x-1)\ln(1-x)}{x-1} =$
$-\infty$

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x-(x-1)\ln(x-1)}{x-1} = +\infty$

2. $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ et $x \mapsto \ln|x-1|$ sont dérivables pour tout $x \neq 1$ d'où g est dérivable sur D_g et
$g^{'}(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} = -\dfrac{x}{(x-1)^2}$
Sur D_g, $g^{'}(x) < 0$.
Tableau de variations de g :



3. Sur $]1;+\infty[$, g est dérivable et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de $]1;+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$.
Or $0 \in \mathbb{R}$ il existe donc $\alpha \in]1;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Montrons que $4 < \alpha < 5$.
$g(4) \simeq 0,23$ et $g(5) \simeq -0,14$
$g(4) \times g(5) < 0$ donc $4 < \alpha < 5$.
4. Sur $]1;\alpha[$ $g(x) > 0$ et sur $]\alpha;+\infty[$ $g(x) < 0$

PARTIE B.

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln|x-1|}{x}, & si\ \ x > 0 \\ \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}, & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

1. **a)** $x \mapsto \dfrac{\ln|x-1|}{x}$ est définie si $x \neq 0$ et $x \neq 1$,
   d'où elle est définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
   $x \mapsto \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   d'où elle est définie sur $]-\infty;0]$.
   Donc $D_f =]-\infty;0]\cup]0;1[\cup]1;+\infty[=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|x-1|}{x} =$
   0 ; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(x-1)}{x} =$
   $-\infty$

   b) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f et la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

2. **a)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = -1$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{x} =$
   -1
   on a aussi $f(0) = \dfrac{-6e^0}{e^0+3e^0+2} = -1$.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$
   Donc f est continue en 0.

   b) On admet que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.
   Et on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}+1}{x}$
   $= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x(e^{2x}+3e^x+2)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x}}{e^{2x}+3e^x+2}$

Or $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-3e^x+2}{x} = 2e^{2\times 0} - 3e^0 = -1$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\dfrac{1}{6}$.

$f'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $f'_g(0) = -\dfrac{1}{6}$, $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ d'où $(\mathcal{C}_f)$ admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

3. **a)** $f(\alpha) = \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\alpha}$ or $g(\alpha)=0$ nous donne $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} = \ln(\alpha-1)$

   d'où $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$.

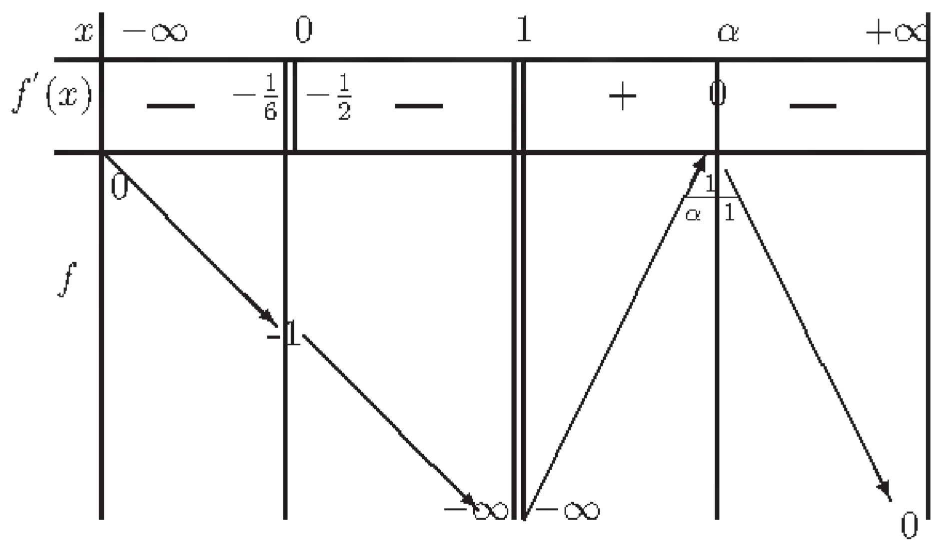
   b) Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, $\quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x-1}x - \ln|x-1|}{x^2} = \dfrac{\frac{x}{x-1} - \ln|x-1|}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   Sur $]-\infty;0[$, $\quad f'(x) = \dfrac{-6e^x(3e^{2x}+6e^x+2)}{(e^{2x}+3e^x+2)^2}$

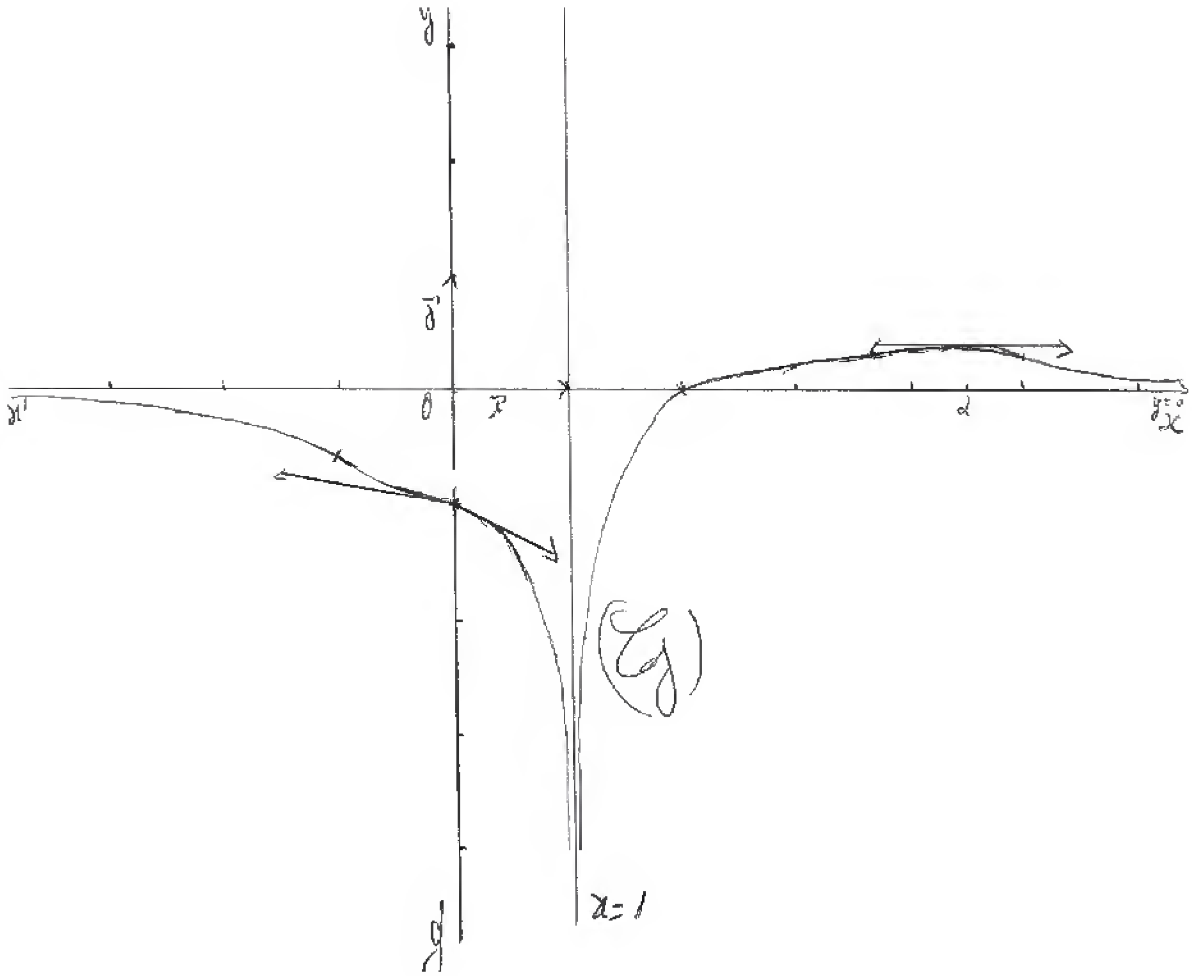
   Sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$, $\quad$ a le même signe que $g(x)$,

   Sur $]-\infty;0[$, $\quad f'(x) < 0$.

   Dressons le tableau de variations de la fonction f.



4. Traçons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique $2cm$.



5. **a)** $\dfrac{-6x}{x^2+3x+2} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x+1}$ nous donne $a = -12$ et $b = 6$, d'où
$\dfrac{-6x}{x^2+3x+2} = \dfrac{-12}{x+2} + \dfrac{6}{x+1}$.

b) D'après a) $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \dfrac{-12}{e^x+2} + \dfrac{6}{e^x+1}$
$= \dfrac{-12}{e^x(1+2e^{-x})} + \dfrac{6}{e^x(1+e^{-x})}$
D'où $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \dfrac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}} + \dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$

c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe, les droites d'équations $x = -ln2$ et $x = 0$.

$\mathcal{A} = \int_{-\ln 2}^{0} -f(x)dx \times u.a = \int_{-\ln 2}^{0} -\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx \times u.a$
$= \int_{-\ln 2}^{0} \dfrac{12e^{-x}}{1+2e^{-x}} - \dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}} = [-6\ln(1+2e^{-x}) + 6\ln(1+e^{-x})]_{-\ln 2}^{0} \times$
$4cm^2$
d'où $\mathcal{A} = 24 \ln \frac{10}{9} cm^2$