数学笔记

Ying Kanyang*

April 1, 2018

Contents

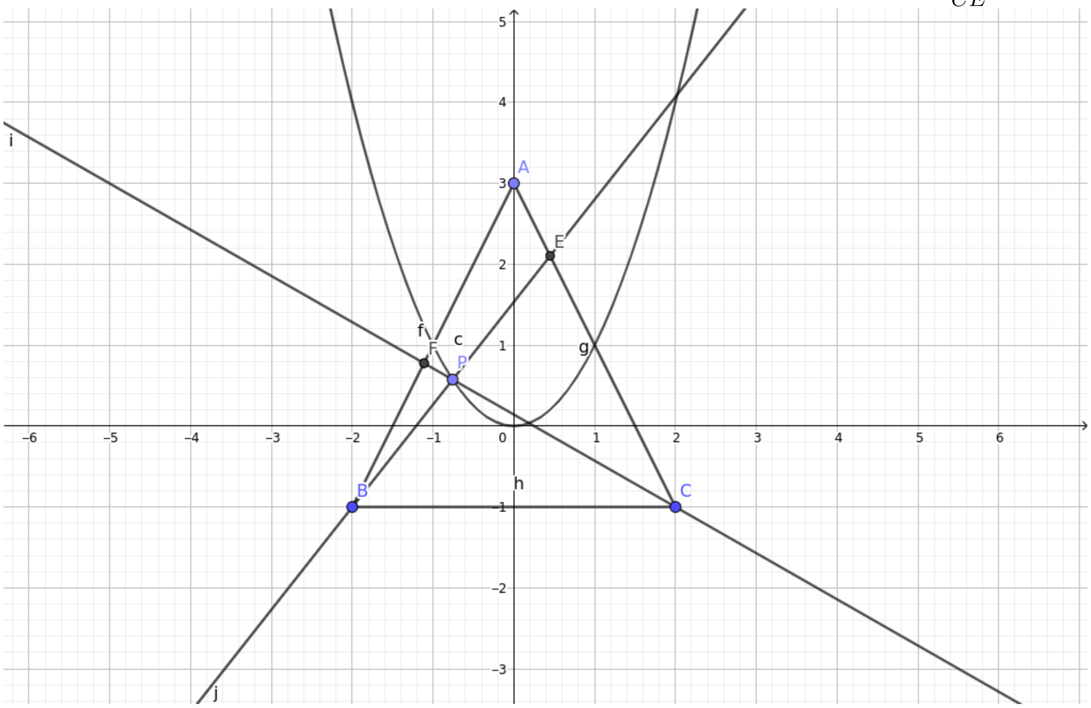
*Ningbo Foreign Language School J1907

1 笔记正文

1.1 March 11, 2018

1.1.1 题 1，2004 年全国赛题

已知点 $A(0,3)$、$B(-2,-1)$、$C(2,-1)$，$P(t,t^2)$ 为抛物线 $y=x^2$ 上位于三角形 ABC 内（包括边界）的一动点，BP 所在直线交 AC 于 E，CP 所在直线交 AB 于 F。请将 $\frac{BF}{CE}$ 表示为自变量 t 的函数。



思路：
第一种方法就是直接解析，计算出点的坐标并求出 BF 与 CE 的长度，从而得出比值。但是这种方法需要深厚的代数功底，需要解出大量高次含参方程，不推荐在竞赛考试中使用。
第二种方法借助了相似，通过相似将 $\frac{BF}{CE}$ 转换为另一个可简单表示并化简的代数式。但是比较难想到。

解法一：
通过解析，得到下列直线的解析式：

$$\begin{cases} AB: y=2x+3 \\ AC: y=-2x+3 \\ BP: y=\dfrac{t^2+1}{t+2}x+\dfrac{2t^2-t}{t+2} \\ CP: y=\dfrac{t^2+1}{t-2}x-\dfrac{2t^2+t}{t-2} \end{cases} \tag{1}$$

通过联立方程组的方式，得到 $E(\frac{-2t^2+4t+6}{t^2+2t+5}, \frac{7t^2-2t+3}{t^2+2t+5})$ 与 $F(\frac{2\left(t^2+2t-3\right)}{t^2-2t+5}, \frac{7t^2+2t+3}{t^2-2t+5})$
用欧几里得算法得到 BF 与 CE 的线段长度：

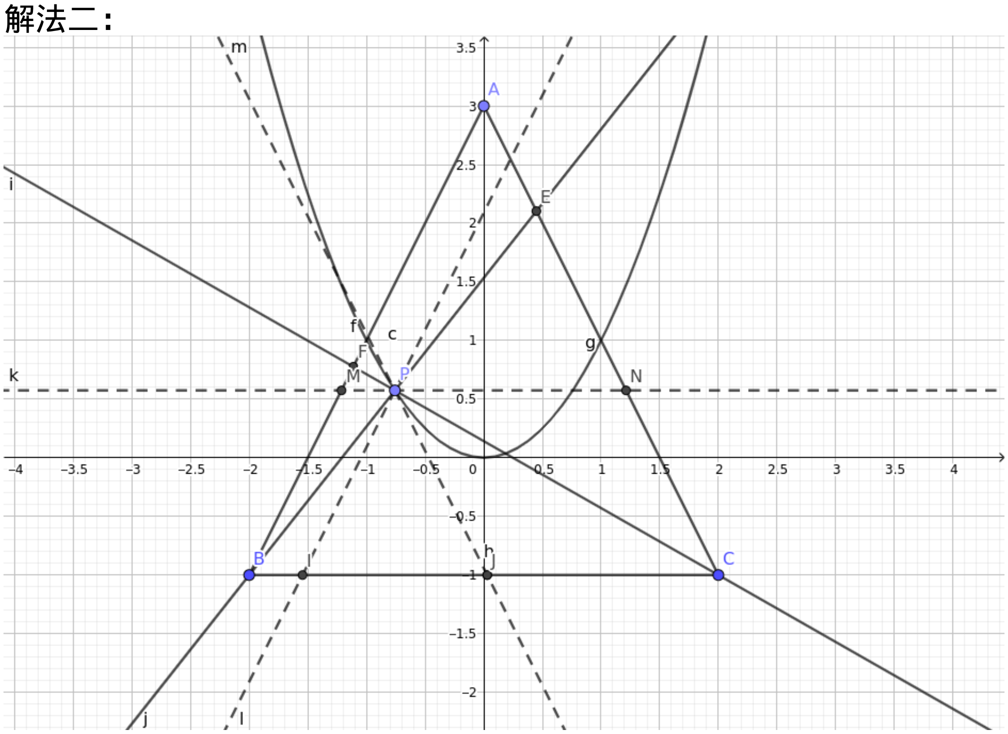
$$\begin{cases} BF: \sqrt{\left|\dfrac{7t^2+2t+3}{t^2-2t+5}+1\right|^2+\left|\dfrac{2\left(t^2+2t-3\right)}{t^2-2t+5}+2\right|^2} \\ CE: \sqrt{\left|\dfrac{7t^2+2t+3}{t^2-2t+5}+1\right|^2+\left|\dfrac{2\left(t^2+2t-3\right)}{t^2-2t+5}+2\right|^2} \end{cases} \tag{2}$$

化简[1]得：

$$\begin{cases} BF: 4\sqrt{5}\left|\dfrac{t^2+1}{t^2-2t+5}\right| \\ CE: 4\sqrt{5}\left|\dfrac{t^2+1}{t^2-2t+5}\right| \end{cases} \tag{3}$$

$\therefore \frac{BF}{CE} = \frac{t^2+2t+5}{t^2-2t+5}$ [2]

解法二：



过 P 作 BC 平行线交 AB 与 AC 于点 M 和 N
过 P 作 AB 平行线交 BC 于点 I
过 P 作 AC 平行线交 BC 于点 J
$\because MB = NC$

[1]本步骤使用了 Mathematica
[2]t^2+2t+5 与 t^2-2t+5 恒成立

$$
\therefore \begin{aligned}
\frac{BF}{CE} &= \frac{BF}{MB}\cdot\frac{CN}{CE} \\
&= \frac{BC}{CI}\cdot\frac{BJ}{BC} \\
&= \frac{BJ}{CI} \\
&= \frac{BC-PN}{BC-PM} \\
&= \frac{BC-(\frac{1}{2}MN-t)}{BC-(\frac{1}{2}MN+t)}
\end{aligned}
$$

代入 $MN=3-t^2$ 与 $BC=4$，可得 $\frac{BF}{CE}=\frac{t^2+2t+5}{t^2-2t+5}$

一般地，对于上述的解法，需要注意 P 的范围，通过求出抛物线与线段 AB 和 AC 的交点，得到范围 $-1\leqslant t\leqslant 1$

1.2 April 01, 2018

1.2.1 题 2，无来源

已知抛物线 $y=x^2+(k+1)x+1$ 与 x 轴的两交点 A、B 不全在原点的左侧，抛物线顶点为 C，则当 ΔABC 恰为等腰三角形时，求 k 的值。

思路：
讨论制约条件并进行解析。

解：
$\because$ 函数与 x 轴有两个交点
$\therefore \Delta>0$

$$
\therefore \begin{aligned}
\Delta &= (k+1)^2-4 \\
&= k^2+2k+1-4 \\
&= k^2+2k-3 \\
&> 0
\end{aligned}
$$

$\therefore k>3$ 或 $k<-1$
$\because$ 两交点 A、B 不全在原点的左侧且 $x^2+(k+1)x+1=0$ 两根之积为 1
$\therefore A_x\cdot B_x=1$ 且 A、B 均在原点右侧
$\therefore$

$$
\begin{cases}
x_1\cdot x_2>0 \\
x_1+x_2>0
\end{cases}
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
AB &= |x_1-x_2| \\
&= \sqrt{(x_1-x_2)^2} \\
&= \sqrt{k^2+2k-3}
\end{aligned}
$$

作 $CH\perp x$ 轴于点 H
可得 $CH:AH=\sqrt{3}:1$

进一步，推导出：

$$AH \cdot \sqrt{3} = CH$$
$$\frac{\sqrt{3[(k+1)^2-4]}}{2} = \frac{(k+1)^2-4}{4} \tag{5}$$

令 $(k+1)^2-4$ 为 α
解得

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 12 \end{cases} \tag{6}$$

对于 $(k+1)^2-4=\alpha_1$，解得：

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -3 \end{cases} \tag{7}$$

对于 $(k+1)^2-4=\alpha_2$，解得：

$$\begin{cases} k_3 = 3 \\ k_4 = -5 \end{cases} \tag{8}$$

$\because$ 制约条件
$\therefore k=-3$ 或 -5
特殊的，当 $k=-3$ 时，A、B、C 三点重合，ΔABC 不存在
$\therefore k=-5$