关于“数列”的通项解法的研究

宁波外国语学校 J1907 应侃洋

January 28, 2018

Contents

1 摘要

本文主要介绍如何使用多元一次方程的方法求解数列规律题，并描述一些数列规律题的多解情况以及其产生原因。并对数列的现实意义给出数形结合的范例。

本文以斐波那契数列（Fibonacci number）为第一个例子，逐步介绍通项求解的思想与方法，并衍生给出其多解。

其中的一些论证内容略微超过初中范围，可选读。

2 关键词

数列规律　多元一次方程　多解　数形结合

3 正文

3.1 引言

数学中经常会遇到各种找规律的题目，它是最令笔者与同学头疼的，同时在笔者看来缺少化繁为简的数学之美。其中，“找规律填写数列”[1]是找规律题目中重要且经典的一块内容。

虽然题型在初中数学已经较为少见，但是深入研究之后还是会涉及一些有价值的代数内容。

找规律题的另一种经典模型就是将数列结合图形题目来找规律，如果几何图形较为复杂且难以发现规律，那就可以使用方程来求导通项公式并求解。

3.2 研究设计

观察下列数列：

$$1, 2, 3, 5, 8, 13 \cdots \tag{1}$$

对于数列 (1)，可能是常见的斐波那契数列（Fibonacci number），不难想到其中一个答案：21。

通项公式为：

$$m_n = m_{n-2} + m_{n-1} \tag{2}$$

[1]本文简称“数列规律题”。注意，这并不是标准名称。

根据平面上的 n 个点可由 n-1 次函数准确拟合出来[2]，我们假设 m_n 为在平面直角坐标系中坐标为 (n, m_n) 的点。可以做出以下函数：

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \tag{3}$$

代入 $n = x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$，$m_n = 1, 2, 3, 5, 8, 13$，我们可以得到下列方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 2 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 = 3 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256_a4 + 1024a_5 = 5 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 75a_3 + 625_a4 + 3125a_5 = 8 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 + 216a_3 + 1296a_4 + 7776a_5 = 13 \end{cases} \tag{4}$$

这是一个六元一次方程，且拥有 6 个方程，理论上可以消元解出，但是相应的也较为麻烦。这个时候，使用高斯消元（Gaussian Elimination）或者克莱斯曼法则（Cramer's rule）进行解决更为方便。

3.2.1 介绍与运用高斯消元

以下面的方程为例我们做一个演示，并不深究原理：

$$\begin{cases} a_0x_1 + a_1x_2 + a_3x_3 = i \\ b_0x_1 + b_1x_2 + b_3x_3 = j \\ c_0x_1 + c_1x_2 + c_3x_3 = k \end{cases} \tag{5}$$

我们先将其转换为一个有 n 行 m 列的增广矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_0 & a_1 & a_2 & i \\ b_0 & b_1 & b_2 & j \\ c_0 & c_1 & c_2 & k \end{array}\right) \tag{6}$$

最终，我们希望得到的矩阵是这样的：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & j' \\ 0 & 0 & 1 & k' \end{array}\right) \tag{7}$$

[2]要求它的系数矩阵是满秩的

具体的转换过程是这样的：先得使 $R_{1,1}$[3]变成 1。那么，就将其余的 $n-1$ 行做初等变换使得除了 R_1 以外的任意一行 R_p 的 $R_{p,1}$ 为 0，并把 $R_{1,1}$ 变为 1。

写成一般形式就是：

对任意一行 R_p，我们要使 $R_{p,p}$ 为 1，且其余任意一行 R_q 的 $R_{q,p}$ 为 0。

变换为：$R_q \pm \frac{R_{q,p}}{R_{p,p}} R_p \rightarrow R_q$

然后，把 $R_{p,p}$ 变为 1。

变换为：$\frac{1}{R_{p,p}} R_p \rightarrow R_p$

这样往复 m 次就可以得到方程组的解。

高斯消元实际上是依据了以下几种等式的特性（实际上就是初中解二元一次方程中的性质）：

1. 方程左右两边同时乘以系数 k，方程依旧成立。
2. 方程左右两边同时乘以系数 k 并加减另一个方程，依旧成立。
3. 两方程相加减，依旧成立。

根据上述，我们可以解得方程组（4）的解为：

$$\begin{cases} a_0 = -\dfrac{2348}{2387} \\ a_1 = \dfrac{386203}{143220} \\ a_2 = -\dfrac{43663}{57288} \\ a_3 = \dfrac{24}{2387} \\ a_4 = \dfrac{2491}{57288} \\ a_5 = -\dfrac{613}{143220} \end{cases} \tag{8}$$

于是，对于数列 m 的第 n 项的通项公式是：

$$m_n = \frac{1}{143220}(-140880 + 386203n - \frac{218315}{2}n^2 + 1440n^3 + \frac{12455}{2}n^4 - 613n^5) \tag{9}$$

[3]记 $R_{i,j}$ 为矩阵 R 的第 i 行 j 列所表示的数

将 $n=7$ 代入通项公式（9），得到 $m_n=\frac{39288}{2387}$

这个数字非常的奇怪，但的确是符合规律的。也就是说，这道题目有两个答案：$m_n=\frac{39288}{2387}$ 或 $m_n=21$

类似的，我们还可以得到对于以下数列的答案：

$$1,2,4,8,16 \tag{10}$$

如果以 $m_n=2^n$ 为通项公式，则我们可以得到答案 32。若以以下函数作为通项公式：

$$f(x)=\frac{1}{24}(24-18x+23x^2-6x^3+x^4) \tag{11}$$

可得 $m_6=31$。

3.3 一般形式与多解

对于任何一个已知 p 项的数列 m 的其中一项 m_n，总能列出一个形如以下的函数：

$$m_n=f(n)=a_0+a_1n^1+\cdots+a_{p-1}n^{p-1} \tag{12}$$

通过代入 m_n 与 n，得到 p 个方程组成的方程组，可解出所有的系数 $a_1\cdots a_{p-1}$。

显然对于平面上的任意一组点，总存在一组以上的函数来准确拟合。因此，对于任何一个数列，如果不规定函数的最高次项的系数，那么就拥有无限解。

3.4 特殊情况

值得注意的是，对于一种情况，使用本方法求出的结果会与标准答案一致。

对于一个数列，如果其自身能够用一个任意次的函数表示出来，那么使用准确拟合求出的通项公式也会与其一致。

这里给出证明：

[4] 已知：数列 m, 已知 n 项。原通项公式为 $f(x)_1=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}$。设得的通项公式为 $f(x)_2=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$。

求证：$f(x)_1=f(x)_2$。

[4][1] 张远达. 线性代数原理 [J]. 1980. [2] 李国王晓峰. 线性代数 65：科学出版社，2012：15

不妨设 $p < n$

取任意一个 x 的值 x_1, 代入 $f(x)_1$ 与 $f(x)_2$ 并相减，得：

$$(b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_1+(b_2-a_2)x_1^2+\cdots+(b_{p-1}-ap-1)x_1^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_1^{n-1}=0 \tag{13}$$

同理还可得：

$$(b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_2+(b_2-a_2)x_2^2+\cdots+(b_{p-1}-ap-1)x_2^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_2^{n-1}=0 \tag{14}$$

代入 $n-1$ 个 x, 以 x 为系数，可以得到一个方程组：

$$\begin{cases} (b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_1+(b_2-a_2)x_1^2+\cdots+(b_{p-1}-ap-1)x_1^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_1^{n-1}=0 \\ (b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_2+(b_2-a_2)x_2^2+\cdots+(b_{p-1}-ap-1)x_2^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_2^{n-1}=0 \\ \cdots \\ (b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_{n-1}+(b_2-a_2)x_{n-1}^2+\cdots+(b_{p-1}-ap-1)x_{n-1}^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_{n-1}^{n-1}=0 \end{cases} \tag{15}$$

转换为增广矩阵的形式：

$$V=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{p-1} & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{p-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & 0 \end{array}\right) \tag{16}$$

$\because V$ 为范德蒙矩阵

$\therefore det(V)=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)(n\geqslant 2)$

$\because x_i\neq x_j$

$\therefore det(V)\neq 0$

$\therefore$ 方程有唯一零解

$\therefore f(x)_1=f(x)_2$

3.5 数形结合的研究

数列具有实际意义吗？显然是有的。写出以（11）为通项公式的数列：

$$1,2,4,8,16,31,57,99,163,256\cdots \tag{17}$$

在几何中的意义就是：对于一个圆，取其边上的 n 个点，全部连线以后能将圆分为几块。

普通的求解办法是：

1. 圆本身算作一块

2. 对于边上的 n 个点，全部连线，因为每多连接一条可以多产生一块，所以可分得 C_n^2 块

3. 两条直线相交，因为两直线相交可多一块，所以可分得 C_n^4 块[5]。

所以，答案就是：

$$\begin{aligned} S &= 1 + C_n^2 + C_n^4 \\ &= 1 + \frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= \frac{1}{24}(24 - 18n + 23n^2 - 6n^3 + n^4) \end{aligned} \tag{18}$$

与（11）完全吻合。

[5]两条直线需要 4 个点，故为 C_n^4