

# 关于“数列”的通项解法的研究

宁波外国语学校 J1907 应侃洋

February 16, 2018

# Contents

1	摘要	3
2	关键词	3
3	推导与论证	3
3.1	引言	3
3.2	研究设计	3
3.3	一般形式与多解	5
3.4	特殊情况	5
3.4.1	特殊情况的证明	5
4	总结	6

# 1 摘要

本文主要介绍如何使用多元一次方程的方法求解数列规律题，并描述一些数列规律题的多解情况以及其产生原因。推导并证明数列通项公式的情况。

其中的一些论证内容略微超过初中范围，可选读。

# 2 关键词

数列规律；多元一次方程；多解

# 3 推导与论证

## 3.1 引言

数学中经常会遇到各种找规律的题目，它是最令笔者与同学头疼的，同时在笔者看来缺少化繁为简的数学之美。其中，“找规律填写数列”<sup>1</sup>是找规律题目中重要且经典的一块内容。

虽然题型在初中数学已经较为少见，但是深入研究之后还是会涉及一些有价值的代数内容。

## 3.2 研究设计

观察下列数列：

$$1, 2, 3, 5, 8, 13 \cdots \quad (1)$$

对于数列 (1)，可能是常见的斐波那契数列 (Fibonacci number)，不难想到其中一个答案：21。

通项公式为：

$$m_n = m_{n-2} + m_{n-1} \quad (2)$$

根据平面上的  $n$  个点可由  $n-1$  次函数准确拟合出来<sup>2</sup>，假设  $m_n$  为在平面直角坐标系中坐标为  $(n, m_n)$  的点。可以做出以下函数：

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \quad (3)$$

<sup>1</sup>本文简称“数列规律题”。注意，这并不是标准名称。

<sup>2</sup>要求它的系数矩阵是满秩的

代入  $n = x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ,  $m_n = 1, 2, 3, 5, 8, 13$ , 可以得到下列方程组:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 = 2 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 + 81a_4 + 243a_5 = 3 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 + 256a_4 + 1024a_5 = 5 \\ a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 75a_3 + 625a_4 + 3125a_5 = 8 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 + 216a_3 + 1296a_4 + 7776a_5 = 13 \end{cases} \quad (4)$$

这是一个六元一次方程, 且拥有 6 个方程, 理论上可以消元解出, 但是相应的也较为麻烦。这个时候, 使用高斯消元 (Gaussian Elimination) 或者克莱斯曼法则 (Cramer's rule) 进行解决更为方便。根据上述, 可以解得方程组 (4) 的解为:

$$\begin{cases} a_0 = -\frac{2348}{2387} \\ a_1 = \frac{386203}{143220} \\ a_2 = -\frac{43663}{57288} \\ a_3 = \frac{24}{2387} \\ a_4 = \frac{2491}{57288} \\ a_5 = -\frac{613}{143220} \end{cases} \quad (5)$$

于是, 对于数列  $m$  的第  $n$  项的通项公式是:

$$m_n = \frac{1}{143220}(-140880 + 386203n - \frac{218315}{2}n^2 + 1440n^3 + \frac{12455}{2}n^4 - 613n^5) \quad (6)$$

将  $n = 7$  代入通项公式 (9), 得到  $m_n = \frac{39288}{2387}$

这个数字非常的奇怪, 但的确是符合规律的。也就是说, 这道题目有两个答案:  $m_n = \frac{39288}{2387}$  或  $m_n = 21$

类似的, 还可以得到对于以下数列的答案:

$$1, 2, 4, 8, 16 \quad (7)$$

如果以  $m_n = 2^{n-1}$  为通项公式，则可以得到答案 32。若以以下函数作为通项公式：

$$f(x) = \frac{1}{24}(24 - 18x + 23x^2 - 6x^3 + x^4) \quad (8)$$

可得  $m_6 = 31$ 。

### 3.3 一般形式与多解

对于任何一个已知  $p$  项的数列  $m$  的其中一项  $m_n$ ，总能列出一个形如以下的函数：

$$m_n = f(n) = a_0 + a_1n^1 + \cdots + a_{p-1}n^{p-1} \quad (9)$$

通过代入  $m_n$  与  $n$ ，得到  $p$  个方程组成的方程组，可解出所有的系数  $a_1 \cdots a_{p-1}$ 。

显然对于平面上的任意一组点，总存在一组以上或一组以上的函数来准确拟合。因此，对于任何一个数列，如果不规定函数的最高次幂，那么就拥有无限解。

### 3.4 特殊情况

值得注意的是，对于一种情况，使用本方法求出的结果会与标准答案一致。

对于一个数列，如果其自身能够用一个任意次的函数表示出来，那么使用准确拟合求出的通项公式也会与其一致。

这里给出证明<sup>3</sup>：

#### 3.4.1 特殊情况的证明

已知：数列  $m$ ，已知  $n$  项。原通项公式为  $f(x)_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{p-1}x^{p-1}$ 。设得的通项公式为  $f(x)_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}$ 。

求证： $f(x)_1 = f(x)_2$ 。

不妨设  $p < n$

取任意一个  $x$  的值  $x_1$ ，代入  $f(x)_1$  与  $f(x)_2$  并相减，得：

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x_1 + (b_2 - a_2)x_1^2 + \cdots + (b_{p-1} - a_{p-1})x_1^{p-1} + \cdots + b_{n-1}x_1^{n-1} = 0 \quad (10)$$

<sup>3</sup>该部分内容涉及线性代数，有兴趣可以试着阅读，亦可跳过

同理还可得：

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x_2 + (b_2 - a_2)x_2^2 + \cdots + (b_{p-1} - a_{p-1})x_2^{p-1} + \cdots + b_{n-1}x_2^{n-1} = 0 \quad (11)$$

代入  $n-1$  个  $x$ , 以  $x$  为系数, 可以得到一个方程组：

$$\begin{cases} (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x_1 + (b_2 - a_2)x_1^2 + \cdots + (b_{p-1} - a_{p-1})x_1^{p-1} + \cdots + b_{n-1}x_1^{n-1} = 0 \\ (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x_2 + (b_2 - a_2)x_2^2 + \cdots + (b_{p-1} - a_{p-1})x_2^{p-1} + \cdots + b_{n-1}x_2^{n-1} = 0 \\ \cdots \\ (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x_{n-1} + (b_2 - a_2)x_{n-1}^2 + \cdots + (b_{p-1} - a_{p-1})x_{n-1}^{p-1} + \cdots + b_{n-1}x_{n-1}^{n-1} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

转换为增广矩阵的形式：

$$V = \left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{p-1} & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{p-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & 0 \end{array} \right) \quad (13)$$

$\therefore V$  为范德蒙矩阵

$$\therefore \det(V) = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j) (n \geq 3)$$

$$\therefore x_i \neq x_j$$

$$\therefore \det(V) \neq 0$$

$\therefore$  方程有唯一零解

$$\therefore f(x)_1 = f(x)_2$$

根据证明, 对于这种数列, 存在也仅存在一个唯一的多项式通项公式。

## 4 总结

对于任意一个只给定前若干项的数列, 其通项公式有 2 种可能：

1. 形如  $m_n = a_0 + a_1n + a_2n_2 + \cdots + a_{n-1}n_{n-1}$  的线性公式。
2. 特殊的通项公式：如递推公式等（非线性公式）。

如果数列本身不是线性公式写得, 那理论上它存在无数种通项公式, 这也意味着它有着无数的解<sup>4</sup>。

由于非线性的特殊性, 不能得到其普遍规律。但是可以肯定的是, 如

<sup>4</sup>在不规定最高次幂的情况下可解得无数的 1 类通项公式

果数列本身不由形如  $m_n = a_0 + a_1n + a_2n_2 + \cdots + a_{n-1}n_{n-1}$  的多项式通项公式写得的，那它一定只存在一个 1 类公式<sup>5</sup>。

---

<sup>5</sup>证明见 3.4.1