关于“数列”的通项解法的研究

宁波外国语学校 J1907 应侃洋

January 30, 2018

Contents

1 摘要

本文主要介绍如何使用多元一次方程的方法求解数列规律题，并描述一些数列规律题的多解情况以及其产生原因。推导并证明数列通项公式的情况。

其中的一些论证内容略微超过初中范围，可选读。

2 关键词

数列规律；多元一次方程；多解

3 推导与论证

3.1 引言

数学中经常会遇到各种找规律的题目，它是最令笔者与同学头疼的，同时在笔者看来缺少化繁为简的数学之美。其中，“找规律填写数列”[1]是找规律题目中重要且经典的一块内容。

虽然题型在初中数学已经较为少见，但是深入研究之后还是会涉及一些有价值的代数内容。

3.2 研究设计

观察下列数列：

$$1, 2, 3, 5, 8, 13 \cdots \tag{1}$$

对于数列 (1)，可能是常见的斐波那契数列（Fibonacci number），不难想到其中一个答案：21。

通项公式为：

$$m_n = m_{n-2} + m_{n-1} \tag{2}$$

根据平面上的 n 个点可由 n-1 次函数准确拟合出来[2]，假设 m_n 为在平面直角坐标系中坐标为 (n, m_n) 的点。可以做出以下函数：

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 \tag{3}$$

[1]本文简称“数列规律题”。注意，这并不是标准名称。

[2]要求它的系数矩阵是满秩的

代入 $n=x=1,2,3,4,5,6$，$m_n=1,2,3,5,8,13$，可以得到下列方程组：

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4+32a_5=2 \\ a_0+3a_1+9a_2+27a_3+81a_4+243a_5=3 \\ a_0+4a_1+16a_2+64a_3+256_a4+1024a_5=5 \\ a_0+5a_1+25a_2+75a_3+625_a4+3125a_5=8 \\ a_0+6a_1+36a_2+216a_3+1296a_4+7776a_5=13 \end{cases} \tag{4}$$

这是一个六元一次方程，且拥有 6 个方程，理论上可以消元解出，但是相应的也较为麻烦。这个时候，使用高斯消元（Gaussian Elimination）或者克莱斯曼法则（Cramer's rule）进行解决更为方便。　　根据上述，可以解得方程组（4）的解为：

$$\begin{cases} a_0=-\dfrac{2348}{2387} \\ a_1=\dfrac{386203}{143220} \\ a_2=-\dfrac{43663}{57288} \\ a_3=\dfrac{24}{2387} \\ a_4=\dfrac{2491}{57288} \\ a_5=-\dfrac{613}{143220} \end{cases} \tag{5}$$

于是，对于数列 m 的第 n 项的通项公式是：

$$m_n=\frac{1}{143220}(-140880+386203n-\frac{218315}{2}n^2+1440n^3+\frac{12455}{2}n^4-613n^5) \tag{6}$$

将 $n=7$ 代入通项公式（9），得到 $m_n=\frac{39288}{2387}$

这个数字非常的奇怪，但的确是符合规律的。也就是说，这道题目有两个答案：$m_n=\frac{39288}{2387}$ 或 $m_n=21$

类似的，还可以得到对于以下数列的答案：

$$1,2,4,8,16 \tag{7}$$

如果以 $m_n = 2^{n-1}$ 为通项公式，则可以得到答案 32。若以以下函数作为通项公式：

$$f(x) = \frac{1}{24}(24 - 18x + 23x^2 - 6x^3 + x^4) \tag{8}$$

可得 $m_6 = 31$。

3.3 一般形式与多解

对于任何一个已知 p 项的数列 m 的其中一项 m_n，总能列出一个形如以下的函数：

$$m_n = f(n) = a_0 + a_1 n^1 + \cdots + a_{p-1} n^{p-1} \tag{9}$$

通过代入 m_n 与 n，得到 p 个方程组成的方程组，可解出所有的系数 $a_1 \cdots a_{p-1}$。

显然对于平面上的任意一组点，总存在一组以上或一组以上的函数来准确拟合。因此，对于任何一个数列，如果不规定函数的最高次幂，那么就拥有无限解。

3.4 特殊情况

值得注意的是，对于一种情况，使用本方法求出的结果会与标准答案一致。

对于一个数列，如果其自身能够用一个任意次的函数表示出来，那么使用准确拟合求出的通项公式也会与其一致。

这里给出证明[3]：

3.4.1 特殊情况的证明

已知：数列 m, 已知 n 项。原通项公式为 $f(x)_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{p-1} x^{p-1}$。设得的通项公式为 $f(x)_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$。

求证：$f(x)_1 = f(x)_2$。

不妨设 $p < n$

取任意一个 x 的值 x_1, 代入 $f(x)_1$ 与 $f(x)_2$ 并相减，得：

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)x_1 + (b_2 - a_2)x_1^2 + \cdots + (b_{p-1} - ap - 1)x_1^{p-1} + \cdots + b_{n-1} x_1^{n-1} = 0 \tag{10}$$

[3] 该部分内容涉及线性代数，有兴趣可以试着阅读，亦可跳过

同理还可得：

$$(b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_2+(b_2-a_2)x_2^2+\cdots+(b_{p-1}-ap-1)x_2^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_2^{n-1}=0 \tag{11}$$

代入 $n-1$ 个 x, 以 x 为系数，可以得到一个方程组：

$$\begin{cases} (b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_1+(b_2-a_2)x_1^2+\cdots+(b_{p-1}-a_{p-1})x_1^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_1^{n-1}=0 \\ (b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_2+(b_2-a_2)x_2^2+\cdots+(b_{p-1}-a_{p-1})x_2^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_2^{n-1}=0 \\ \cdots \\ (b_0-a_0)+(b_1-a_1)x_{n-1}+(b_2-a_2)x_{n-1}^2+\cdots+(b_{p-1}-a_{p-1})x_{n-1}^{p-1}+\cdots+b_{n-1}x_{n-1}^{n-1}=0 \end{cases} \tag{12}$$

转换为增广矩阵的形式：

$$V=\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{p-1} & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{p-1} & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{p-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & 0 \end{array}\right) \tag{13}$$

$\because V$ 为范德蒙矩阵

$\therefore det(V)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i-x_j)(n\geqslant 3)$

$\because x_i\neq x_j$

$\therefore det(V)\neq 0$

$\therefore$ 方程有唯一零解

$\therefore f(x)_1=f(x)_2$

根据证明，对于这种数列，存在也仅存在一个唯一的多项式通项公式。

4 总结

综上所述，对于任何一个数列显然存在两大类的通项公式：

1. 形如 $m_n=a_0+a_1n+a_2n_2+\cdots+a_{n-1}n_{n-1}$ 的多项式通项公式。
2. 特殊的通项公式：如递推公式等。

如果数列本身不是由形如 $m_n=a_0+a_1n+a_2n_2+\cdots+a_{n-1}n_{n-1}$ 的多项式通项公式写得的，那理论上它存在无数种通项公式，这也意味着它有着无数的解[4]。

[4]在不规定最高次幂的情况下可解得无数的 1 类通项公式

由于特殊通项公式的特殊性，不能得到其普遍规律。但是可以肯定的是，如果数列本身不由形如 $m_n = a_0 + a_1 n + a_2 n_2 + \cdots + a_{n-1} n_{n-1}$ 的多项式通项公式写得的，那它一定只存在一个 1 类公式[5]。

[5]证明见 3.4.1