Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 1:

Ejercicios

Luis Erick Montes Garcia - 419004547
Hele Michelle Salazar Zaragoza - 316068895

Trabajo presentado como parte del curso de **Matematicas Aplicadas para las Ciencias II** impartido por el profesor **Juan Carlos Balleza**.

Entrega 1 de Marzo 2019

Link al código fuente: git@github.com:lemg98/Matematicas-Aplicadas-II.git

1. Ejercicio 1. Sea $\overrightarrow{a} = 3\widehat{i} + 4\widehat{j} + 5\widehat{k}$ y $\overrightarrow{b} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$. Calcule (y además represente gráficamente) cada una de las siguientes operaciones:

   a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$
   $(3,4,5) + (1,-1,1)$
   $= (3+1, 4+(-1), 5+1)$
   $= (4,3,6)$

   b) $6\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b}$
   $\mathbf{6}(3,4,5) + \mathbf{8}(1,-1,1)$
   $= (6\cdot 3, 6\cdot 4, 6\cdot 5) + (8\cdot 1, 8\cdot -1, 8\cdot 1)$
   $= (18,24,30) + (8,-8,8)$
   $= (26,16,70)$

   c) $-2\overrightarrow{a}$
   $-\mathbf{2}(3,4,5)$
   $= (-2\cdot 3, -2\cdot 4, -2\cdot 5)$
   $= (-6,-8,-10)$

   d) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ $(3,4,5)\cdot(1,-1,1)$
   $= (3\cdot 1) + (4\cdot(-1)) + (5\cdot 1)$
   $= 3 + (-4) + 5$
   $= 4$

   e) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ $(3\widehat{i}, 4\widehat{j}, 5\widehat{k}) \times (\widehat{i}, -\widehat{j}, \widehat{k})$
   $= ((4\cdot 1) - (5\cdot(-1)))i + ((5\cdot 1) - (3\cdot 1))j + (3\cdot(-1) - (4\cdot 1))k$
   $= (4+5)i + (5-3)j + (-3-4)k$
   $= 9i + 2j - 7k$

2. Ejercicio 2. Encuentre las ecuaciones de rectas y planos que se piden:

   a) Recta que pasa por el punto (0,1,0) y su vector de dirección está dado por el vector $3i + k$.
   Solución: $(x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(3,0,1) = (3\lambda, 1, \lambda)$.

   b) La recta que pasas por los puntos $(0,2,-1)$ y $(-3,1,0)$.
   Solución: Obtenemos el vector de dirección $v = (0,2,-1) - (-3,1,0) = (-3,1,-1)$ y decimos $(x,y,z) = (0,2,-1) + \lambda(-3,1,-1) = (-3\lambda, \lambda+2, -\lambda-1)$.

   c) La *ec.* del plano perperdicular al vector $< -2,1,2 >$ y que pasa por el punto P = (-1,1,3).
   Solución: Obtenemos el punto PX $= (x-(-1), y-1, z-3)$ que debe ser perpendicular al vector normal. Por tanto $(x+1, y-1, z-3)\cdot(-2,1,2) = -2x-2+y-1+2z-6 = 0$. Concluimos que la ecuación es $2x - y - 2z + 9 = 0$.

3. Ejercicio 3. Calcule $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ para los siguientes vectores:

   a) $\overrightarrow{v} = -\widehat{i} + \widehat{j}$ y $\overrightarrow{v} = \widehat{k}$
   $\overrightarrow{v} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$
   $(-1,1,0)\cdot(0,0,1)$
   $= 0$

   b) $\overrightarrow{v} = -2\widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$ y $\overrightarrow{w} = 3\widehat{i} + 2\widehat{j} - 2\widehat{k}$ $(-2,-1,1)\cdot(3,2,-2)$
   $= (-2\cdot 3) + (-1\cdot 2) + (1\cdot -2)$
   $= (-6) + (-2) + (-2)$
   $= -6 - 2 - 2$
   $= -10$

4. Ejercicio 4. Calcule $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ para los vectores del ejercicio anterior.

   a) $\overrightarrow{v} = (-i, j, 0)$ $\overrightarrow{w} = (0, 0, k)$
   $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k$
   $(1-0)i - (0-(-1))j + (0-0)k$
   $= i - j$

   b) $\overrightarrow{v} = (-2i, -j, k)$ $\overrightarrow{w} = (3i, 2j, -2k)$
   $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} k$
   $(2-2)i - (3-4)j + (-4+3)k$
   $= j - k$

5. Ejercicio 5. Encuentre el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 3.

   - **Solución:** Tomamos los resultados del inciso anterior y decimos $a = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}u^2$.
   - **Solución:** Tomamos los resultados del inciso anterior y decimos $a = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}u^2$.

6. Ejercicio 6. Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vertices $A(0,1,0), B(1,1,1), C(0,2,0), D(3,1,2)$.
   Solución: Encontramos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1-0, 1-1, 1-0) = (1,0,1)$
   $\overrightarrow{AC} = (0-0, 2-1, 0-0) = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{AD} = (3-0, 1-1, 2-0) = (3,0,2)$.

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{2} - \mathbf{3} = -\mathbf{1}$$

   Puesto que el volumen debe ser positivo este es $1u^3$.

7. Ejercicio 7. Multiplicar las matrices AB, y también hacer el producto BA. ¿Es cierto que AB=BA?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3+0+0 & 0+0+0 & 3+0+1 \\ 2+0+0 & 0+0+0 & 2+0+1 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3+0+1 & 0+0+0 & 1+0+1 \\ 3+1+1 & 0+0+0 & 1+1+1 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\therefore AB \neq BA$

8. Ejercicio 8. Considere los siguientes vectores $\overrightarrow{b_1} = (1, 0, -1), \overrightarrow{b_2} = (0, 1, 0) =, \overrightarrow{b_3} = (1, 1, -1)$.

- Encuentre los valores tales que $(5,6,-5) = c_1\overrightarrow{b_1} + c_2\overrightarrow{b_2} + c_3\overrightarrow{b_3}$.
Solución: Tenemos $(c_1, 0, -c_1) + (0, c_2, 0) + (c_3, c_3, -c_3) = (c_1 + c_3, c_2 + c_3, -c_1 - c_3) = (5, 6, -5)$. Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 5 \\ c_2 + c_3 &= 6 \\ -c_1 - c_3 &= -5 \end{aligned}$$

Obtenemos que $c_1 + c_3 + 1 = c_2 + c_3$, implica $c_1 + 1 = c_2$. Tomando la primer ecuación obtenemos $c_3 = 5 - c_1$. Obtenemos los valores en términos de $(c_1, c_1 + 1, 5 - c_1)$.

- Repita el inciso anterior para el vector $\overrightarrow{c} = (2, 3, 4)$¿Cuáles son los valores?
Solución: Obtenemos de manera análoga las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 2 \\ c_2 + c_3 &= 3 \\ -c_1 - c_3 &= 4 \end{aligned}$$

observamos que no existen soluciones ya que llegamos a la contradicción $-(2) = 4$.

- ¿Puede considerar a los vectores como una base para $\mathbb{R}^3$?
Solución: No ya que demostramos que no generan a todos los vectores.

9. Ejercicio 9. Encuentre el volumen del paralelepipedo generado por los vectores (1, 0, 1), (1, 1, 1), (3, 2, 0).

$$\overrightarrow{a} = (i, 0j, k),\ \overrightarrow{b} = (i, j, k) \text{ y } \overrightarrow{c} = (-3i, 2j, 0k).$$
$$|(a \times b) \cdot c|$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k$$

$(0-1)i - (1-1)j + (1-0)k$
$= -i + k \cdot (-3i, 2j, 0)$
$= -1(-3) + 0 + 0$
$= 3$

10. Ejercicio 10. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto (3,-1,2) y a al recta de ecuación $r(t) = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

Decimos que tenemos a los puntos $P_1 = (3, -1, 2)$, $P_2 = (2, -1, 0)$ ya que está en la recta y a $P_3 = (2, -1, 0) + (2, 3, 0) = (4, 2, 0)$. Obtenemos los vectores de dirección $\overrightarrow{v} = (3-2, -1-(-1), 2-0) = (1, 0, 2)$ y $\overrightarrow{u} = (4-3, 2-(-1), 0-2) = (1, 3, -2)$. Decimos que

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$B = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-2) = 4$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$D = -(-6(2) + 4(-1) + 3(0)) = -(-12-4) = 16$$

Podemos decir que la ecuación general del plano es $-6x + 4y + 3z + 16 = 0$.

11. Ejercicio 11. El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ está dado por la expresión $V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

    a) Exprese dicho volumen como un determinante.
    $V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} \cdot |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|$

    b) Calcule V cuando $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{b} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{c} = \widehat{i} + \widehat{j}$
    $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1)i - 1(0-1)j + 1(1+1)k = -1+1+2 = 2$
    $V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6}u^3$

12. Ejercicio 12. Encuentre un vector unitario que tenga la propiedad solicitada:

    a) Ortogonal al plano $x - 6y + z = 12$.
    Solución: Obtenemos $\overrightarrow{n} = (1, -6, 1)$, decimos que el vector unitario es

$$\frac{\overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{(1,-6,1)}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + 1^1}} = \frac{(1,-6,1)}{\sqrt{38}} = \left(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{-6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$$

    b) Ortogonal al vector $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + 2\widehat{j} - \widehat{k}$ y al vector $\overrightarrow{b} = \widehat{k}$.
    Solución: Decimos $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$ y $\overrightarrow{b} = (0, 0, 1)$. Decimos que (x, y, z) es un vector que es ortogonal a ambos, por tanto $(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = z = 0$ y $(x, y, z) \cdot (1, 2, -1) = x + 2y - z = 0$. Obtenemos que $y = -\frac{x}{2}$. Los vectores de la forma $(x, -(x/2), 0)$, tomamos $(2, -1, 0)$. Decimos que el vector unitario es

$$\frac{(2,-1,0)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

    .

13. Ejercicio 13. Sea $A = (0, 4), B = (3, 1) y C = (2, 10)$.

    a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, y del vector $\overrightarrow{BA}$.
    $\overrightarrow{AB} = (3i - 0i, 1j - 4j, 0k - 0k) = (3i, -3j, 0k)$
    $\overrightarrow{BA} = (0i - 3i, 4j - 1j, 0k - 0k) = (-3i, 3j, 0k)$.

    b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$, y del vector $\overrightarrow{BC}$, y también $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
    $\overrightarrow{AC} = (-2i - 0i, -10j - 4j, 0k - 0k) = (-2i, -14j, 0k)$
    $\overrightarrow{BC} = (-2i - 3i, -10j - 1j, 0k - 0k) = (-5i, -11j, 0k)$
    $\overrightarrow{CB} = (3i + 2i, 1j + 10j, 0k - 0k) = (5i, 11j, 0k)$
    $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (-2i, -14j, 0k) + (5i, 11j, 0k) = (3i, -3j, 0k)$

    c) Describa gráficamente por qué $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

14. Ejercicio 14