UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 1:

Ejercicios

Luis Erick Montes Garcia - 419004547
Hele Michelle Salazar Zaragoza - 316068895

Trabajo presentado como parte del curso de **Matematicas Aplicadas para las Ciencias II** impartido por el profesor **Juan Carlos Balleza**.

Entrega 1 de Marzo 2019

Link al código fuente: git@github.com:lemg98/Matematicas-Aplicadas-II.git

1. Ejercicio 1. Sea $\overrightarrow{a} = 3\widehat{i} + 4\widehat{j} + 5\widehat{k}$ y $\overrightarrow{b} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$. Calcule (y además represente gráficamente) cada una de las siguientes operaciones:

   a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$
   $(3, 4, 5) + (1, -1, 1)$
   $= (3 + 1, 4 + (-1), 5 + 1)$
   $= (4, 3, 6)$

   b) $6\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b}$
   $\mathbf{6}(3, 4, 5) + \mathbf{8}(1, -1, 1)$
   $= (6 \cdot 3, 6 \cdot 4, 6 \cdot 5) + (8 \cdot 1, 8 \cdot -1, 8 \cdot 1)$
   $= (18, 24, 30) + (8, -8, 8)$
   $= (26, 16, 70)$

   c) $-2\overrightarrow{a}$
   $-\mathbf{2}(3, 4, 5)$
   $= (-2 \cdot 3, -2 \cdot 4, -2 \cdot 5)$
   $= (-6, -8, -10)$

   d) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ $(3, 4, 5) \cdot (1, -1, 1)$
   $= (3 \cdot 1) + (4 \cdot (-1)) + (5 \cdot 1)$
   $= 3 + (-4) + 5$
   $= 4$

   e) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ $(3\widehat{i}, 4\widehat{j}, 5\widehat{k}) \times (\widehat{i}, -\widehat{j}, \widehat{k})$
   $= ((4 \cdot 1) - (5 \cdot (-1)))i + ((5 \cdot 1) - (3 \cdot 1))j + (3 \cdot (-1) - (4 \cdot 1))k$
   $= (4 + 5)i + (5 - 3)j + (-3 - 4)k$
   $= 9i + 2j - 7k$

2. Ejercicio 2. Encuentre las ecuaciones de rectas y planos que se piden:

   a) Recta que pasa por el punto (0,1,0) y su vector de dirección está dado por el vector $3i + k$.
   Solución: $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(3, 0, 1) = (3\lambda, 1, \lambda)$.

   b) La recta que pasas por los puntos $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.
   Solución: Obtenemos el vector de dirección $v = (0, 2, -1)(-(-3, 1, 0) = (-3, 1, -1)$ y decimos $(x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda(-3, 1, -1) = (-3\lambda, \lambda + 2, -\lambda - 1)$.

   c) La *ec.* del plano perperdicular al vector $< -2, 1, 2 >$ y que pasa por el punto P = (-1,1,3).
   Solución: Obtenemos el punto PX $= (x - (-1), y - 1, z - 3)$ que debe ser perpendicular al vector normal. Por tanto $(x + 1, y - 1, z - 3) \cdot (-2, 1, 2) = -2x - 2 + y - 1 + 2z - 6 = 0$. Concluimos que la ecuación es $2x - y - 2z + 9 = 0$.

3. Ejercicio 3. Calcule $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ para los siguientes vectores:

   a) $\overrightarrow{v} = -\widehat{i} + \widehat{j}$ y $\overrightarrow{v} = \widehat{k}$
   $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1)$
   $(-1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1)$
   $= 0$

   b) $\overrightarrow{v} = -2\widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$ y $\overrightarrow{w} = 3\widehat{i} + 2\widehat{j} - 2\widehat{k}$ $(-2, -1, 1) \cdot (3, 2, -2)$
   $= (-2 \cdot 3) + (-1 \cdot 2) + (1 \cdot -2)$
   $= (-6) + (-2) + (-2)$
   $= -6 - 2 - 2$
   $= -10$

4. Ejercicio 4

5. Ejercicio 5. Encuentre el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 3.

   a) $\overrightarrow{v} = (-i, j, 0)$ $\overrightarrow{w} = (0, 0, k)$
   $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k$
   $(1-0)i - (-1-0)j + (0-0)k$
   $= i + j$

   b) $\overrightarrow{v} = (-2i, -j, k)$ $\overrightarrow{w} = (3i, 2j, -2k)$
   $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} k$
   $(2-2)i - (4-3)j + (-4+3)k$
   $= -j - k$

6. Ejercicio 6

7. Ejercicio 7. Multiplicar las matrices AB, y también hacer el producto BA. ¿Es cierto que AB=BA?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3+0+0 & 0+0+0 & 3+0+1 \\ 2+0+0 & 0+0+0 & 2+0+1 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3+0+1 & 0+0+0 & 1+0+1 \\ 3+1+1 & 0+0+0 & 1+1+1 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\therefore AB \neq BA$

8. Ejercicio 8

9. Ejercicio 9. Encuentre el volumen del paralelepipedo generado por los vectores (1, 0, 1), (1, 1, 1), (3, 2, 0).

$$\overrightarrow{a} = (i, 0j, k),\ \overrightarrow{b} = (i, j, k) \text{ y } \overrightarrow{c} = (-3i, 2j, 0k).$$
$$|(a \times b) \cdot c|$$

   $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k$
   $(0-1)i - (1-1)j + (1-0)k$
   $= -i + k \cdot (-3i, 2j, 0)$
   $= -1(-3) + 0 + 0$
   $= 3$

10. Ejercicio 10

11. Ejercicio 11. El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ está dado por la expresión $V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

    a) Expresé dicho volumen como un determinante.
    $V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} \cdot |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|$

    b) Calcule V cuando $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{b} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{c} = \widehat{i} + \widehat{j}$
    $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1)i - 1(0-1)j + 1(1+1)k = -1 + 1 + 2 = 2$
    $V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6}u^3$

12. Ejercicio 12

13. Ejercicio 13. Sea $A = (0, 4), B = (3, 1) y C = (2, 10)$.

    a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, y del vector $\overrightarrow{BA}$.
    $\overrightarrow{AB} = (3i - 0i, 1j - 4j, 0k - 0k) = (3i, -3j, 0k)$
    $\overrightarrow{BA} = (0i - 3i, 4j - 1j, 0k - 0k) = (-3i, 3j, 0k)$.

    b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$, y del vector $\overrightarrow{BC}$, y también $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
    $\overrightarrow{AC} = (-2i - 0i, -10j - 4j, 0k - 0k) = (-2i, -14j, 0k)$
    $\overrightarrow{BC} = (-2i - 3i, -10j - 1j, 0k - 0k) = (-5i, -11j, 0k)$
    $\overrightarrow{CB} = (3i + 2i, 1j + 10j, 0k - 0k) = (5i, 11j, 0k)$
    $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (-2i, -14j, 0k) + (5i, 11j, 0k) = (3i, -3j, 0k)$

    c) Describa gráficamente por qué $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

14. Ejercicio 14