Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 1:

Ejercicios

Luis Erick Montes Garcia - 419004547
Hele Michelle Salazar Zaragoza - 316068895

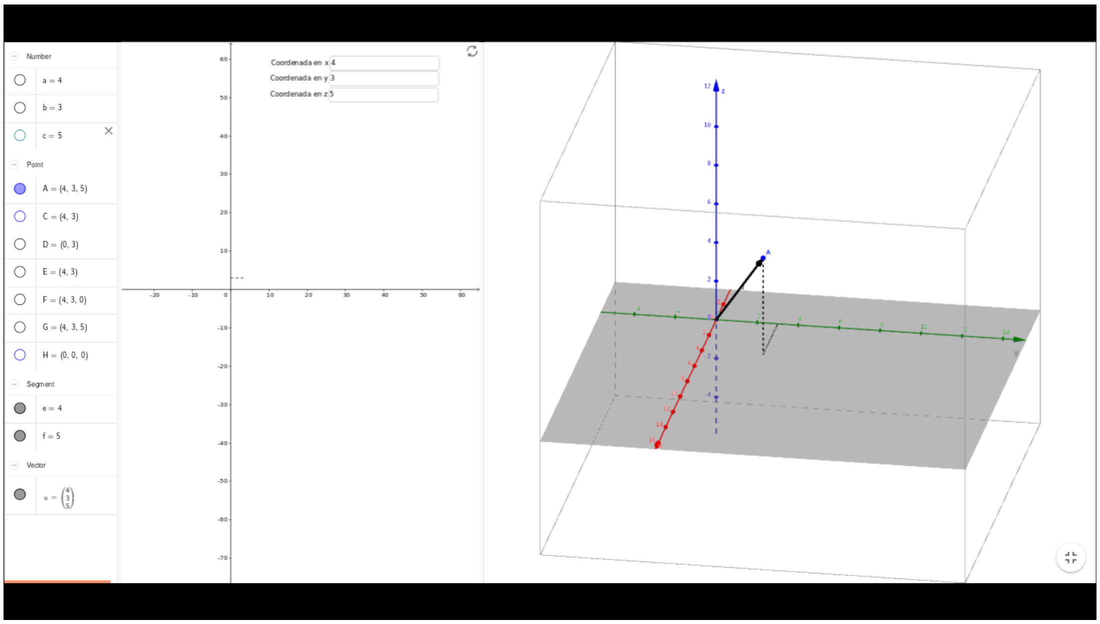
Trabajo presentado como parte del curso de **Matematicas Aplicadas para las Ciencias II** impartido por el profesor **Juan Carlos Balleza**.

Entrega 1 de Marzo 2019

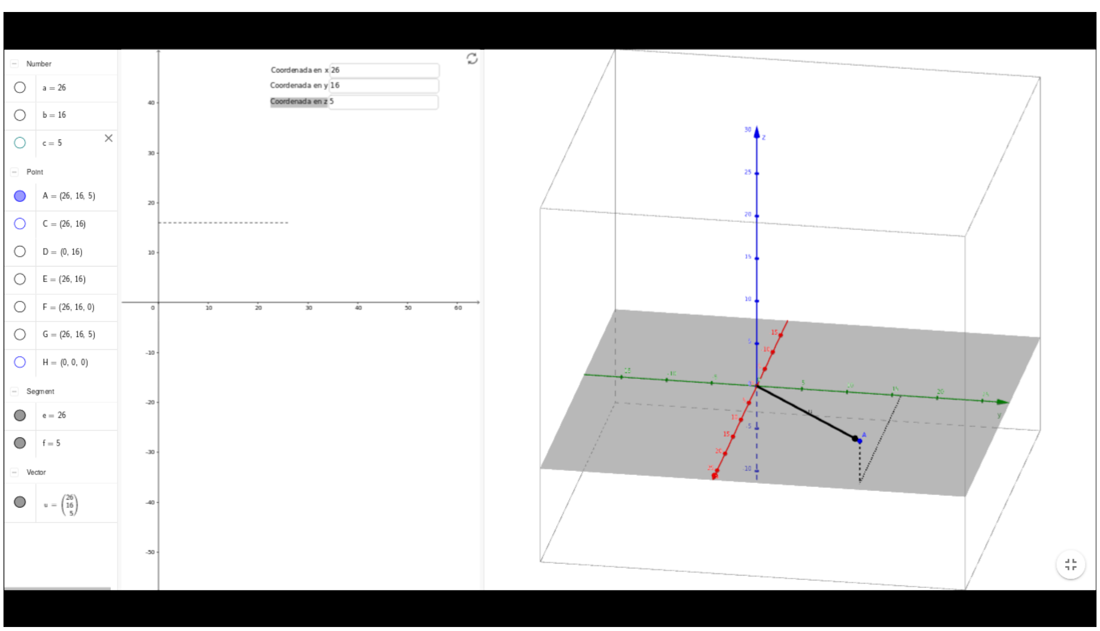
Link al código fuente: git@github.com:lemg98/Matematicas-Aplicadas-II.git

1. Ejercicio 1. Sea $\overrightarrow{a} = 3\widehat{i} + 4\widehat{j} + 5\widehat{k}$ y $\overrightarrow{b} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$. Calcule (y además represente gráficamente) cada una de las siguientes operaciones:

   (a) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$
   $(3, 4, 5) + (1, -1, 1)$
   $= (3 + 1, 4 + (-1), 5 + 1)$
   $= (4, 3, 6)$



   (b) $6\overrightarrow{a} + 8\overrightarrow{b}$
   $\mathbf{6}(3, 4, 5) + \mathbf{8}(1, -1, 1)$
   $= (6 \cdot 3, 6 \cdot 4, 6 \cdot 5) + (8 \cdot 1, 8 \cdot -1, 8 \cdot 1)$
   $= (18, 24, 30) + (8, -8, 8)$
   $= (26, 16, 70)$

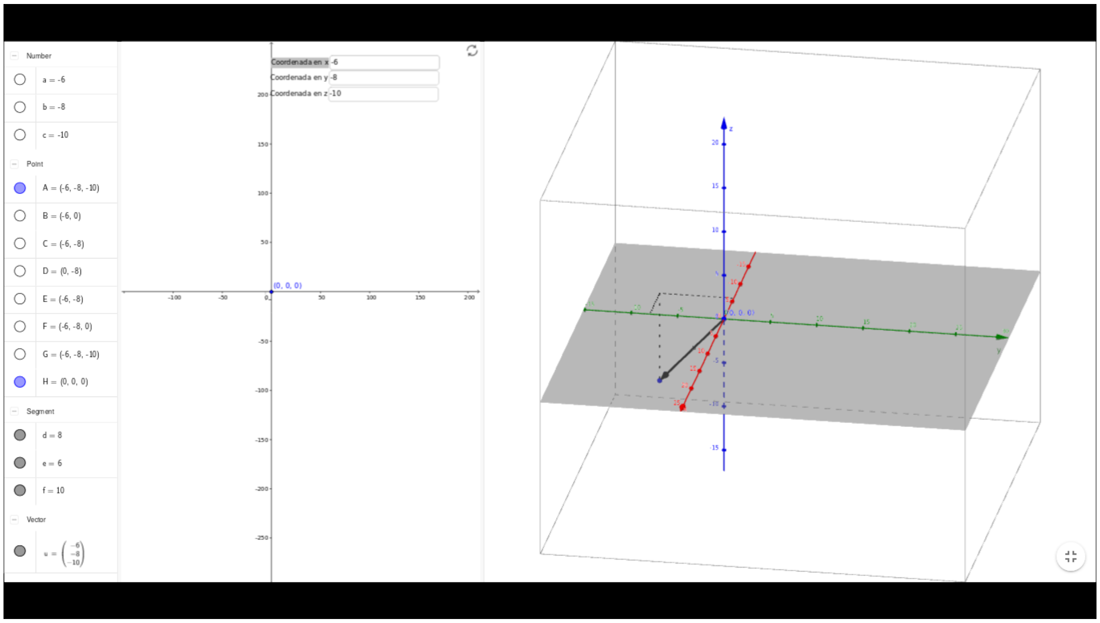


(c) $-2\overrightarrow{a}$

$-\mathbf{2}(3,4,5)$

$=(-2\cdot 3,-2\cdot 4,-2\cdot 5)$

$=(-6,-8,-10)$



(d) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\ (3,4,5)\cdot(1,-1,1)$

$=(3\cdot 1)+(4\cdot(-1))+(5\cdot 1)$

$=3+(-4)+5$

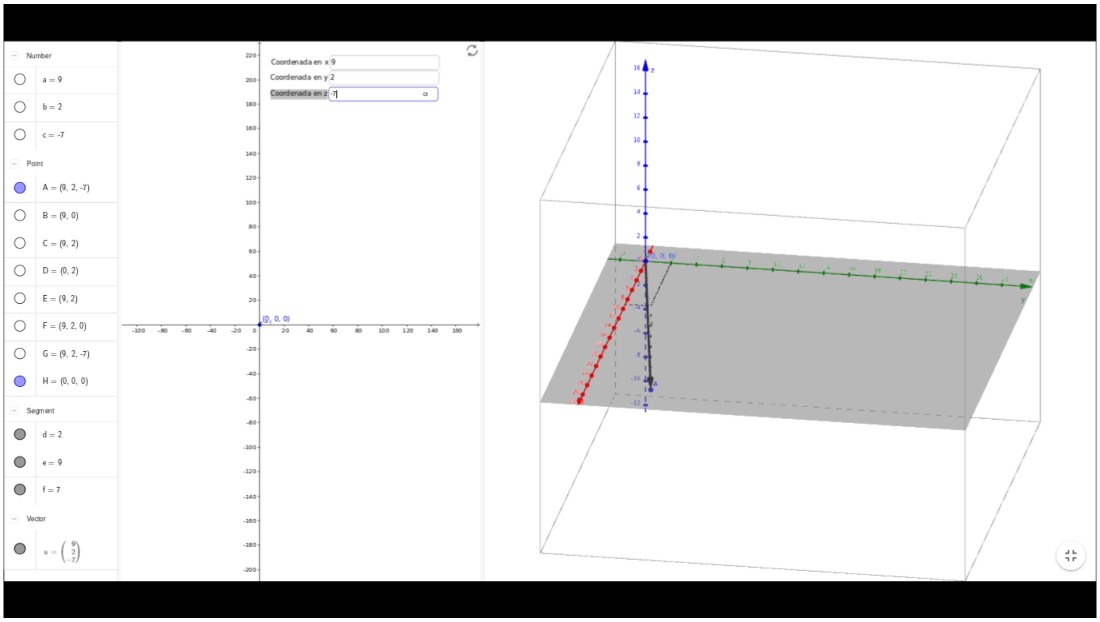
$=4$

(e) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\ (3\widehat{i},4\widehat{j},5\widehat{k})\times(\widehat{i},-\widehat{j},\widehat{k})$

$=((4\cdot 1)-(5\cdot(-1)))i+((5\cdot 1)-(3\cdot 1))j+(3\cdot(-1)-(4\cdot 1))k$

$=(4+5)i+(5-3)j+(-3-4)k$

$=9i+2j-7k$



2. Ejercicio 2. Encuentre las ecuaciones de rectas y planos que se piden:

   (a) Recta que pasa por el punto (0,1,0) y su vector de dirección está dado por el vector $3i + k$.
   Solución: $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(3, 0, 1) = (3\lambda, 1, \lambda)$.

   (b) La recta que pasas por los puntos $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.
   Solución: Obtenemos el vector de dirección $v = (0, 2, -1) - (-3, 1, 0) = (-3, 1, -1)$ y decimos $(x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda(-3, 1, -1) = (-3\lambda, \lambda + 2, -\lambda - 1)$.

   (c) La *ec.* del plano perperdicular al vector $< -2, 1, 2 >$ y que pasa por el punto P = (-1,1,3).
   Solución: Obtenemos el punto PX = $(x - (-1), y - 1, z - 3)$ que debe ser perpendicular al vector normal. Por tanto $(x + 1, y - 1, z - 3) \cdot (-2, 1, 2) = -2x - 2 + y - 1 + 2z - 6 = 0$. Concluimos que la ecuación es $2x - y - 2z + 9 = 0$.

3. Ejercicio 3. Calcule $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ para los siguientes vectores:

   (a) $\overrightarrow{v} = -\widehat{i} + \widehat{j}$ y $\overrightarrow{v} = \widehat{k}$
   $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1)$
   $(-1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1)$
   $= 0$

   (b) $\overrightarrow{v} = -2\widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$ y $\overrightarrow{w} = 3\widehat{i} + 2\widehat{j} - 2\widehat{k}$ $(-2, -1, 1) \cdot (3, 2, -2)$
   $= (-2 \cdot 3) + (-1 \cdot 2) + (1 \cdot -2)$
   $= (-6) + (-2) + (-2)$
   $= -6 - 2 - 2$
   $= -10$

4. Ejercicio 4. Calcule $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$ para los vectores del ejercicio anterior.

   (a) $\overrightarrow{v} = (-i, j, 0)$ $\overrightarrow{w} = (0, 0, k)$
   $$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k$$
   $(1 - 0)i - (0 - (-1))j + (0 - 0)k$
   $= i - j$

(b) $\overrightarrow{v} = (-2i, -j, k)$ $\overrightarrow{w} = (3i, 2j, -2k)$

$$\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} k$$

$(2-2)i - (3-4)j + (-4+3)k$

$= j - k$

5. Ejercicio 5. Encuentre el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 3.

   - **Solución:** Tomamos los resultados del inciso anterior y decimos $a = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}u^2$.
   - **Solución:** Tomamos los resultados del inciso anterior y decimos $a = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}u^2$.

6. Ejercicio 6. Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vertices $A(0,1,0), B(1,1,1), C(0,2,0), D(3,1,2)$.
   Solución: Encontramos los vectores $\overrightarrow{AB} = (1-0, 1-1, 1-0) = (1,0,1)$ $\overrightarrow{AC} = (0-0, 2-1, 0-0) = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{AD} = (3-0, 1-1, 2-0) = (3,0,2)$.

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{2} - \mathbf{3} = -\mathbf{1}$$

   Puesto que el volumen debe ser positivo este es $1u^3$.

7. Ejercicio 7. Multiplicar las matrices AB, y también hacer el producto BA. ¿Es cierto que AB=BA?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3+0+0 & 0+0+0 & 3+0+1 \\ 2+0+0 & 0+0+0 & 2+0+1 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3+0+1 & 0+0+0 & 1+0+1 \\ 3+1+1 & 0+0+0 & 1+1+1 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $\therefore AB \neq BA$

8. Ejercicio 8. Considere los siguientes vectores $\overrightarrow{b_1} = (1,0,-1), \overrightarrow{b_2} = (0,1,0) =, \overrightarrow{b_3} = (1,1,-1)$.

   - Encuentre los valores tales que $(5,6,-5) = c_1\overrightarrow{b_1} + c_2\overrightarrow{b_2} + c_3\overrightarrow{b_3}$.
     Solución: Tenemos $(c_1, 0, -c_1) + (0, c_2, 0) + (c_3, c_3, -c_3) = (c_1 + c_3, c_2 + c_3, -c_1 - c_3) = (5, 6, -5)$. Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 5 \\ c_2 + c_3 &= 6 \\ -c_1 - c_3 &= -5 \end{aligned}$$

     Obtenemos que $c_1 + c_3 + 1 = c_2 + c_3$, implica $c_1 + 1 = c_2$. Tomando la primer ecuación obtenemos $c_3 = 5 - c_1$. Obtenemos los valores en términos de $(c_1, c_1 + 1, 5 - c_1)$.

- Repita el inciso anterior para el vector $\overrightarrow{c} = (2,3,4)$¿Cuáles son los valores?
  Solución: Obtenemos de manera análoga las ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 2 \\ c_2 + c_3 &= 3 \\ -c_1 - c_3 &= 4 \end{aligned}$$

  observamos que no existen soluciones ya que llegamos a la contradicción $-(2) = 4$.
- ¿Puede considerar a los vectores como una base para $\mathbb{R}^3$?
  Solución: No ya que demostramos que no generan a todos los vectores.

9. Ejercicio 9. Encuentre el volumen del paralelepipedo generado por los vectores (1, 0, 1), (1, 1, 1), (3, 2, 0).

$$\overrightarrow{a} = (i, 0j, k),\ \overrightarrow{b} = (i, j, k) \text{ y } \overrightarrow{c} = (-3i, 2j, 0k).$$
$$|(a \times b) \cdot c|$$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k$
$(0-1)i - (1-1)j + (1-0)k$
$= -i + k \cdot (-3i, 2j, 0)$
$= -1(-3) + 0 + 0$
$= 3$

10. Ejercicio 10. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto (3,-1,2) y a al recta de ecuación $r(t) = (2,-1,0) + t(2,3,0)$.

    Decimos que tenemos a los puntos $P_1 = (3,-1,2)$, $P_2 = (2,-1,0)$ ya que está en la recta y a $P_3 = (2,-1,0)+(2,3,0) = (4,2,0)$. Obtenemos los vectores de dirección $\overrightarrow{v} = (3-2, -1-(-1), 2-0) = (1,0,2)$ y $\overrightarrow{u} = (4-3, 2-(-1), 0-2) = (1,3,-2)$. Decimos que

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$B = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-2) = 4$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$D = -(-6(2) + 4(-1) + 3(0)) = -(-12-4) = 16$$

    Podemos decir que la ecuación general del plano es $-6x + 4y + 3z + 16 = 0$.

11. Ejercicio 11. El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ está dado por la expresión $V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.
    (a) Exprese dicho volumen como un determinante.
    $V = \frac{1}{6}\overrightarrow{a} \cdot |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|$
    (b) Calcule V cuando $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{b} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$, $\overrightarrow{c} = \widehat{i} + \widehat{j}$
    $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1)i - 1(0-1)j + 1(1+1)k = -1 + 1 + 2 = 2$
    $V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6}u^3$

12. Ejercicio 12. Encuentre un vector unitario que tenga la propiedad solicitada:

    (a) Ortogonal al plano $x - 6y + z = 12$.
    Solución: Obtenemos $\overrightarrow{n} = (1, -6, 1)$, decimos que el vector unitario es

$$\frac{\overrightarrow{n}}{||\overrightarrow{n}||} = \frac{(1,-6,1)}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + 1^1}} = \frac{(1,-6,1)}{\sqrt{38}} = \left(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{-6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}\right)$$

    (b) Ortogonal al vector $\overrightarrow{a} = \widehat{i} + 2\widehat{j} - \widehat{k}$ y al vector $\overrightarrow{b} = \widehat{k}$.
    Solución: Decimos $\overrightarrow{a} = (1, 2, -1)$ y $\overrightarrow{b} = (0, 0, 1)$. Decimos que (x, y, z) es un vector que es ortogonal a ambos, por tanto $(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = z = 0$ y $(x, y, z) \cdot (1, 2, -1) = x + 2y - z = 0$. Obtenemos que $y = -\frac{x}{2}$. Los vectores de la forma $(x, -(x/2), 0)$, tomamos $(2, -1, 0)$. Decimos que el vector unitario es

$$\frac{(2,-1,0)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

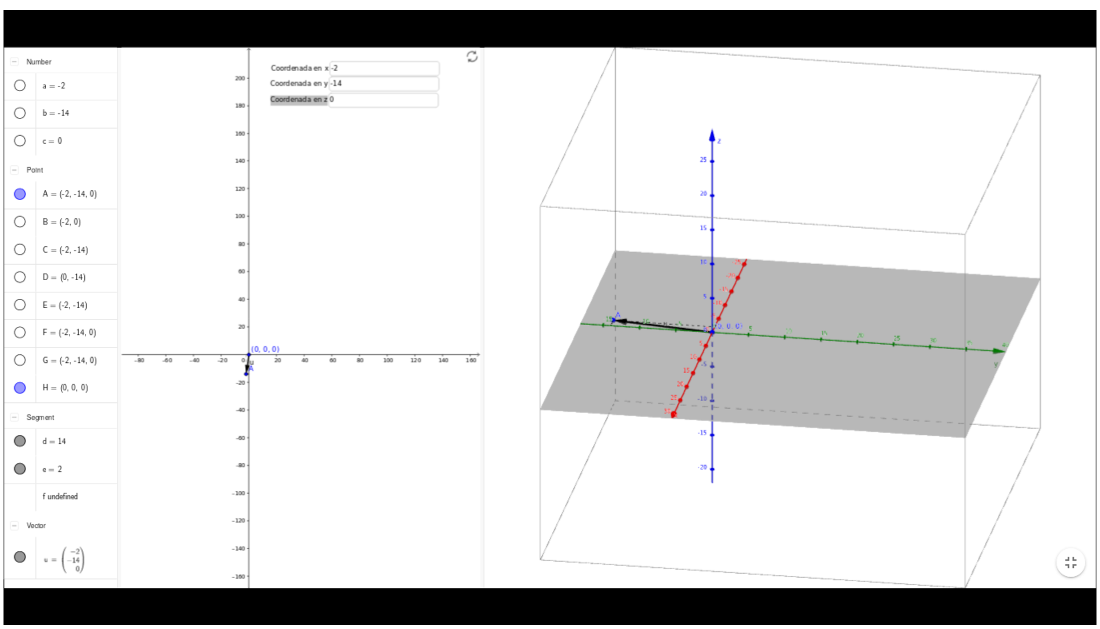
    .

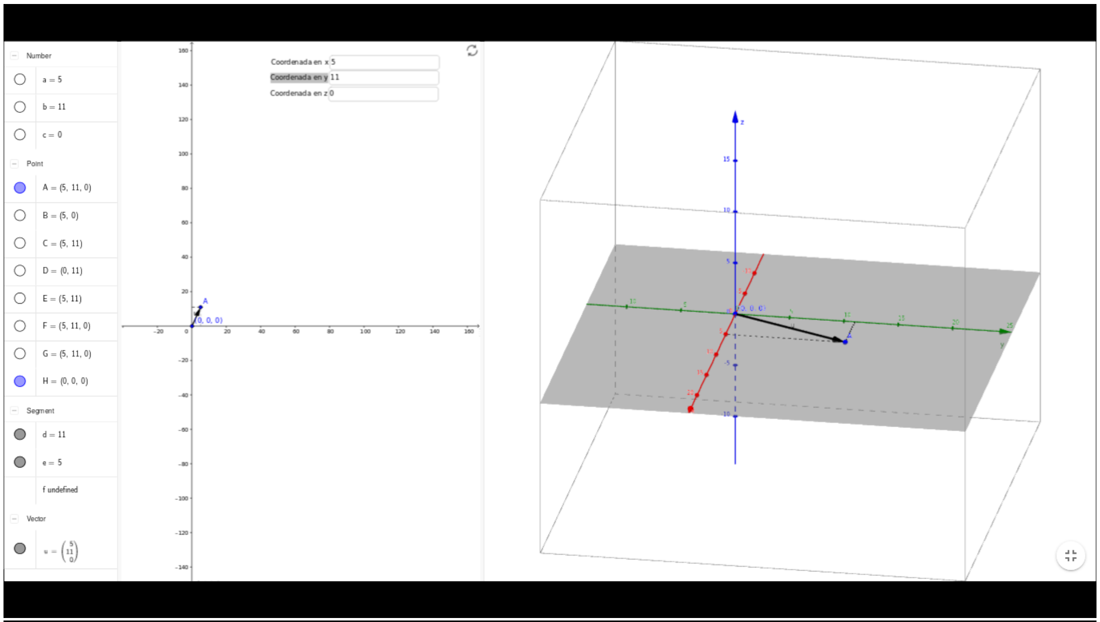
13. Ejercicio 13. Sea $A = (0, 4), B = (3, 1) y C = (2, 10)$.

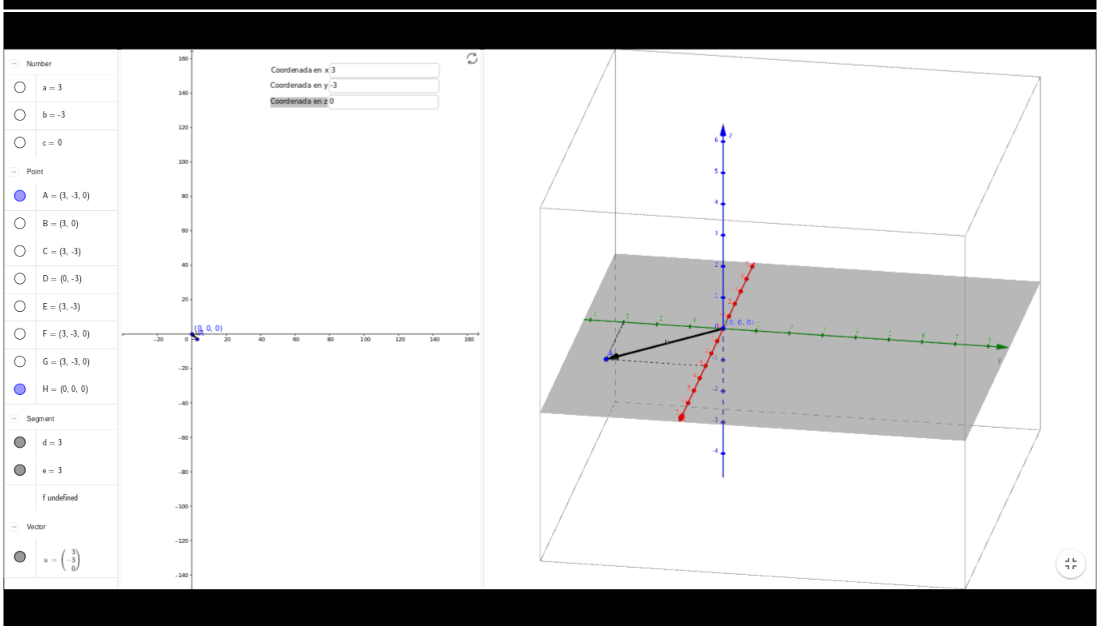
    (a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, y del vector $\overrightarrow{BA}$.
    $\overrightarrow{AB} = (3i - 0i, 1j - 4j, 0k - 0k) = (3i, -3j, 0k)$
    $\overrightarrow{BA} = (0i - 3i, 4j - 1j, 0k - 0k) = (-3i, 3j, 0k)$.

    (b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\overrightarrow{AC}$, y del vector $\overrightarrow{BC}$, y también $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
    $\overrightarrow{AC} = (-2i - 0i, -10j - 4j, 0k - 0k) = (-2i, -14j, 0k)$
    $\overrightarrow{BC} = (-2i - 3i, -10j - 1j, 0k - 0k) = (-5i, -11j, 0k)$
    $\overrightarrow{CB} = (3i + 2i, 1j + 10j, 0k - 0k) = (5i, 11j, 0k)$
    $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (-2i, -14j, 0k) + (5i, 11j, 0k) = (3i, -3j, 0k)$

    (c) Describa gráficamente por qué $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$







14. Ejercicio 14. Usted se encuentra en el punto (10,16) y comienza a moverse desde ese punto con el vector velocidad $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$.Conteste lo siguiente:

- ¿Cuánto vale la magnitud de su velocidad?
  Solución: Vale la norma del vector que es
  $$\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$
  .
- ¿En dónde se encuentra usted después de 10 horas?
  Solución: Se encuentra en $(10, 16) + 10(-1, -2) = (10, 16) + (-10, -20) = (0, -4)$.
- ¿Cuánto tiempo le toma usted alcanzar el punto $(-8, -20)$?
  Solución: Planteamos $(10, 16) + x(-1, -2) = (-8, -20)$ y obtenemos $10 - x = -8$ lo cual implica $x = 18$. Comprobamos $(10, 16) + (-18, -2(18)) = (-8, -20)$.

- ¿Alcanzará usted en algún momento el punto $(-15, -20)$? Justifique.
  Solución: Suponiendo que se puede tenemos que $(10, 16) + (-x, -2x) = (-15, -20)$ de los cuales obtenemos las ecuaciones $10 - x = -15$, la cual implica $x = 25$. También se debe cumplir la ecuación $16 - 2x = -20$, con $16 - 2(25) = -34$, la cual no cumple. Por tanto no es un punto que se pueda alcanzar.