Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Tarea 2:

Ejercicios

Luis Erick Montes Garcia - 419004547
Hele Michelle Salazar Zaragoza - 316068895

Trabajo presentado como parte del curso de **Matematicas Aplicadas para las Ciencias II** impartido por el profesor **Juan Carlos Balleza**.

Entrega 3 de Abril 2019

Link al código fuente: git@github.com:lemg98/Matematicas-Aplicadas-II.git

1. Sea la función vectorial $r(\overrightarrow{t}) = \left(\frac{t}{t+1}, \frac{1}{t}\right)$. A continuación responda lo siguiente:

   - Calcule el siguiente límite:
   $$lim_{t\to -1} r(\overrightarrow{t})$$
   Solución: Observamos que al acercarnos a -1 por la izquierda $t+1$ se hace pequeño negativamente, por tanto $\frac{t}{t+1}$ tiende a infinito de manera negativa, análogamente sucede cuando nos acercamos a -1 por la derecha, este tiende a infinito positivamente. Por tanto no existe el límite en ese punto

   - Calcule el siguiente límite:
   $$lim_{t\to 0} r(\overrightarrow{t})$$
   Solución: Sucede de la misma manera con este límite. Si tiende a 0 por la izquierda $\frac{1}{t}$ tiende a infinito negativamente. Análogamente cuando tiende por la derecha esto tiende a infinito.

   - ¿Para qué valores de t es discontinua la función $r(\overrightarrow{t})$? Explique su resultado.
   Solución: Como ya mencionamos en los dos puntos anteriores no existe el límite, en los demás la función es continua. Por tanto en los puntos 0 y -1 la función es discontinua.

   - Obtenga y dibuje los vectores velocidad y aceleración, en el punto donde $t = -\frac{1}{2}$.
   Solución: Encontramos la primera derivada y valuamos

$$\begin{aligned}
r'(\overrightarrow{t}) &= \left(\left(\frac{t}{t+1}\right)', (\frac{1}{t})'\right) \\
&= \left(\frac{1(t+1)-1(t)}{(t+1)^2}, -\frac{1}{t^2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{(t+1)^2}, -\frac{1}{t^2}\right) \\
r'(\overrightarrow{-\frac{1}{2}}) &= \left(\frac{1}{(-\frac{1}{2}+1)^2}, -\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}\right) \\
&= (4, -4)
\end{aligned}$$

   Encontramos ahora la segunda derivada y valuamos

$$\begin{aligned}
r''(\overrightarrow{t}) &= \left(\left(\frac{1}{(t+1)^2}\right)', -\left(\frac{1}{t^2}\right)'\right) \\
&= \left(-\frac{2(t+1)}{(t+1)^4}, -\left(\frac{1}{t^2}\right)'\right) \\
&= \left(-\frac{2}{(t+1)^3}, \frac{1}{t^4}\right) \\
r''(\overrightarrow{-\frac{1}{2}}) &= \left(-\frac{2}{(-\frac{1}{2}+1)^3}, \frac{1}{(-\frac{1}{2})^4}\right) \\
&= \left(-\frac{2}{(-\frac{1}{2}+1)^3}, \frac{1}{(-\frac{1}{2})^4}\right) \\
&= (-16, 16)
\end{aligned}$$

2. Sea la función vectorial $r(\overrightarrow{t}) = (4cos(\frac{t}{2}), 4sin(\frac{t}{2}))$, donde $t \in [0, 2\pi]$. A continuación responda lo siguiente:

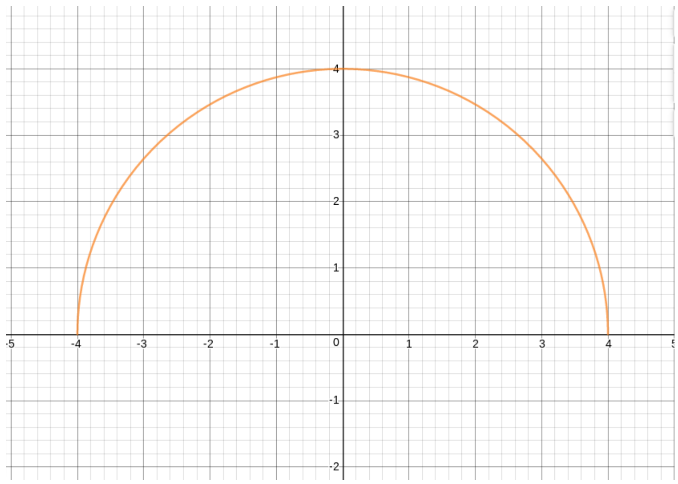
   (a) Calcule los vectores de velocidad y aceleración.
   Obtenemos la derivada de la función $r(\overrightarrow{t})$ para obtener la **velocidad**:
   $$r'(\overrightarrow{t}) = (-2sin(\frac{t}{2}), 2cos(\frac{t}{2}))$$

Obtenemos la derivada de la función $r'(\overrightarrow{t})$ para obtener la **aceleración**:

$$r''(\overrightarrow{t}) = (-cos(\tfrac{t}{2}), -\sin(\tfrac{t}{2}))$$

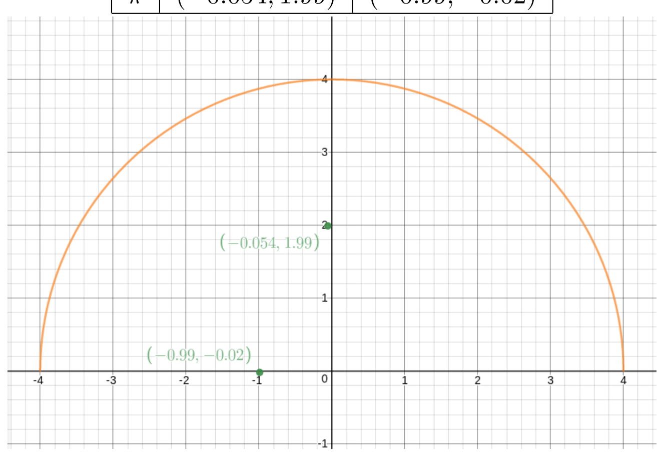
t	velocidad	aceleración
0	$(0,2)$	$(-1,0)$
2π	$(-0.109, 1.99)$	$(-0.99, -0.054)$

(b) Grafique la función vectorial, en el intervalo de t indicado.



(c) En la gráfica de la función vectorial (inciso anterior), agregue los vectores de velocidad y aceleración en el instante $t = \pi$

t	velocidad	aceleración
π	$(-0.054, 1.99)$	$(-0.99, -0.02)$



(d) Obtenga el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración.

Decimos que el vector de velocidad es el vector $\overrightarrow{a}$ y que el vector de aceleración es $\overrightarrow{b}$. Para obtener el ángulo θ formamos un triángulo, siendo $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ el lado opuesto al ángulo.

Aplicando ley de cosenos, tenemos que:

$$(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = ||\overrightarrow{a}||||\overrightarrow{b}|| \cos\theta$$

Despejamos $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})}{||\overrightarrow{a}||||\overrightarrow{b}||}$$

Sustituímos:

$$\cos\theta = \frac{((-0.054, 1.99)\cdot(-0.99, -0.02))}{||(-0.054, 1.99)||||(-0.99, -0.02)||}$$

$$\cos\theta = \frac{((-0.054\cdot -0.99) + (1.99\cdot -0.02))}{\sqrt{(-0.054)^2 + (1.99)^2}\cdot\sqrt{(-0.99)^2 + (-0.02)^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{0.09326}{(1.99)(0.99)}$$

$$\cos\theta = \frac{0.09326}{1.9701}$$

$$\cos\theta = 0.04733$$

Sacamos coseno inverso:

$$\theta = \cos^{-}1(0.04733) = 87.29\delta$$

3. Sea la función vectorial $r(\overrightarrow{t}) = (t^2, 2t-1, t^3)$. Proporcione las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a la curva, en el punto $t_0 = 2$.
Solución: Obtenemos $r(2) = (2^2, 2(2)-1, 2^3) = (4, 3, 8)$. Observamos

$$r' = (2t, 2, 3t^2)$$

, obtenemos $r'(2) = (2(2), 2, 3(2)^2) = (4, 2, 12)$, este es el vector de dirección. Por tanto las ecuaciones paramétricas son

$$x = 4t + 4$$
$$y = 2t + 3$$
$$z = 12t + 8$$

4. Proporcione la función vectorial $r(\overrightarrow{t})$, tal que cumpla las siguientes condiciones:

(a) $a(t) = (-1, -1, -1)$
$x = y = z = -1 + 0t$
$(x, y, z) = (-1 + t0, -1 + t0, -1 + t0)$
$(x, y, z) = (-1, -1, -1) + (0t, 0t, 0t)$
$(x, y, z) = (-1, -1, -1) + t(0, 0, 0)$
$a = (-1, -1, -1) + t(0, 0, 0)$

(b) $v(0) = (0, 0, 0)$
$x = y = z = 0$
$(x, y, z) = (0 + 0t, 0 + 0t, 0 + 0t)$
$(x, y, z) = (0, 0, 0) + (0t, 0t, 0t)$
$(x, y, z) = (0, 0, 0) + t(0, 0, 0)$
$v = (0, 0, 0) + t(0, 0, 0)$

(c) $r(0) = (10, 10, 10)$
$x = 10$; $y = 10$; $z = 10$
$(x, y, z) = (10 + 0t, 10 + 0t, 10 + 0t)$
$(x, y, z) = (10, 10, 10) + (0t, 0t, 0t)$
$(x, y, z) = (10, 10, 10) + t(0, 0, 0)$
$v = (10, 10, 10) + t(0, 0, 0)$

(

5. En el instante $t = 0$, una partícula se encuentra en el punto $A(1, 2, 3)$. Viaja siguiendo una línea recta hasta el punto (4,1,4) y tiene una rapidez de 2(en el punto A) y aceleración constante $a(t) = 3i - j + k$. Proporcione la ecuación del vector de posición $r(t)$ en el instante t.

6. Considere la función vectorial $r(\overrightarrow{t}) = ([\cos t]^3, [\sin t]^3)$. Responda lo siguiente:

   (a) Obtenga el vector tangente unitario a la curva.
   Parametrizamos la función: $r(\overrightarrow{t}) = ([\cos t]^3, [\sin t]^3)$
   $\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \cos^3 t \\ \frac{d}{dt} \sin^3 t \end{bmatrix}$
   Encontramos un vector tangente:
   $\begin{bmatrix} -3sin(t)\cos^2(t) \\ 3sin^2(t)\cos(t) \end{bmatrix}$
   Hacemos negativa la segunda componente para girar 90 grados en sentido de las manecillas del reloj.
   $\begin{bmatrix} 3sin^2(t)\cos(t) \\ -(-3sin(t)\cos^2(t)) \end{bmatrix}$
   Tenemos un vector normal, para hacerlo unitario, debemos dividir entre su magnitud, es decir,

   $$\sqrt{9sin^2(t)\cos^4(t) + 9sin^4(t)\cos^2(t)}$$

   Por lo tanto, la función para el vector unitario es el siguiente:
   $\begin{bmatrix} 3sin^2(t)\cos(t)/\sqrt{9sin^2(t)\cos^4(t) + 9sin^4(t)\cos^2(t)} \\ 3sin(t)\cos^2(t)/\sqrt{9sin^2(t)\cos^4(t) + 9sin^4(t)\cos^2(t)} \end{bmatrix}$

   (b) Calcule la longitud de la curva para $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

   $$\sqrt{9sin^2(t)\cos^4(t) + 9sin^4(t)\cos^2(t)}$$

   Sustituímos:

   $$\sqrt{9sin^2(\frac{\pi}{2})\cos^4(\frac{\pi}{2}) + 9sin^4(\frac{\pi}{2})\cos^2(\frac{\pi}{2})} - \sqrt{9sin^2(0)\cos^4(0) + 9sin^4(0)\cos^2(0)} = 0 - 0 = 0$$

7. ¿Cuáles son las coordenadas (x, y, z) del punto sobre la función vectorial $r(t) = (5t, 5\cos t, 12t)$ que se encuentran a una distancia de 26π unidades del punto $(0, 5, 0)$ y en la dirección en la que crece la longitud del arco?
Solución: observamos que $r(0) = (50, 5\cos 0, 12(0)) = (0, 5, 0)$. A su vez

$$v = (5\cos t, -5t, 12)$$

por tanto

$$|v| = \sqrt{25\cos^2 t + 25^2 t + 144} = \sqrt{25(\cos^2 t +^2 t) + 144} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

. Tenemos que

$$26\pi = \int_0^x 13 \text{ dt} = 13(x - 0)$$

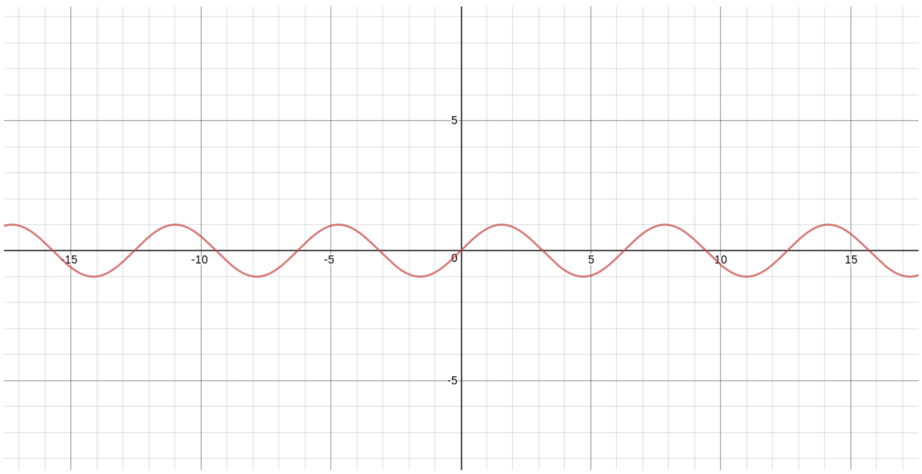
Por ende $x = \frac{26}{13}\pi = 2\pi$. Valuamos $r(2\pi) = (5(2\pi), 5\cos(2\pi), 12(2\pi)) = (0, 5, 24\pi)$

8. Obtenga la ecuación del círculo osculador para la función $y = \sin x$ en el punto de coordenadas $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Proponga $r(\overrightarrow{t})$ a partir de la "parametrización trivial" de la función. Calcule lo siguiente:

   (a) $(\overrightarrow{T})$, $(\overrightarrow{N})$ y k.
   Parametrización de la función:
   $x(t) = t$
   $y(t) = \sin t$

   Haga una gráfica con la siguiente información:

   (a) La función $y = \sin x$



   (b) El círculo osculador y además localizar el punto de coordenadas $(\frac{\pi}{2}, 1)$

   (c) Los vectores $(\overrightarrow{T})$, $(\overrightarrow{N})$.

9. Considere la función vectorial $r(t) = (\cos t, t, -1)$

   - $r(t) = (\cos t, t, -1)$
   - $T(t)$. Observamos $v(t) = (-t, \cos t, 0)$ y $|v| = \sqrt{\cos^2 t +^2 t + 0^2} = \sqrt{1} = 1$, por tanto $T(t) = (-t, \cos t, 0)$.
   - $N(t)$. Observamos $T'(t) = (-\cos t, -t, 0)$ y $|T'| = \sqrt{\cos^2 t +^2 t + 0^2} = \sqrt{1} = 1$, por tanto $N(t) = (-\cos t, -t, 0)$.
   - $B(t)$. Tenemos que $T = \mathbf{k}((-)^2 t - (-cos^2 t)) = \mathbf{k}(^2 t + \cos^2 t) = \mathbf{k}$.

   Evalue los obtenidos en (i) en el punto donde $t = \frac{-\pi}{4}$.

   - $r(-\pi/4) = (\cos(-\pi/4), (-\pi/4), -1) = (-0.25, 0, -1)$
   - $T(-\pi/4) = (-(-\pi/4), \cos(-\pi/4), 0) = (0, -0.25, 0)$
   - $N(-\pi/4) = (-\cos(-\pi/4), -(-\pi/4), 0) = (0.25, 0, 0)$
   - $B(-\pi/4) = (0, 0, 1)$