

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



Tarea 1:
Ejercicios

Luis Erick Montes Garcia - 419004547
Hele Michelle Salazar Zaragoza - 316068895

Trabajo presentado como parte del curso de **Matemáticas Aplicadas para las Ciencias II** impartido por el profesor **Juan Carlos Balleza**.

Entrega 1 de Marzo 2019

Link al código fuente: [git@github.com:lemg98/Matematicas-Aplicadas-II.git](https://github.com:lemg98/Matematicas-Aplicadas-II.git)

1. Ejercicio 1. Sea $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. Calcule (y además represente gráficamente) cada una de las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{a} + \vec{b} \\ (3, 4, 5) + (1, -1, 1) \\ = (3+1, 4+(-1), 5+1) \\ = (4, 3, 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 6\vec{a} + 8\vec{b} \\ 6(3, 4, 5) + 8(1, -1, 1) \\ = (6 \cdot 3, 6 \cdot 4, 6 \cdot 5) + (8 \cdot 1, 8 \cdot -1, 8 \cdot 1) \\ = (18, 24, 30) + (8, -8, 8) \\ = (26, 16, 38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad -2\vec{a} \\ -2(3, 4, 5) \\ = (-2 \cdot 3, -2 \cdot 4, -2 \cdot 5) \\ = (-6, -8, -10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (3, 4, 5) \cdot (1, -1, 1) \\ = (3 \cdot 1) + (4 \cdot (-1)) + (5 \cdot 1) \\ = 3 + (-4) + 5 \\ = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad \vec{a} \times \vec{b} \quad (3\hat{i}, 4\hat{j}, 5\hat{k}) \times (\hat{i}, -\hat{j}, \hat{k}) \\ = ((4 \cdot 1) - (5 \cdot (-1)))\hat{i} + ((5 \cdot 1) - (3 \cdot 1))\hat{j} + (3 \cdot (-1) - (4 \cdot 1))\hat{k} \\ = (4 + 5)\hat{i} + (5 - 3)\hat{j} + (-3 - 4)\hat{k} \\ = 9\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k} \end{aligned}$$

2. Ejercicio 2. Encuentre las ecuaciones de rectas y planos que se piden:

- a) Recta que pasa por el punto $(0,1,0)$ y su vector de dirección está dado por el vector $3\hat{i} + \hat{k}$.

Solución: $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \lambda(3, 0, 1) = (3\lambda, 1, \lambda)$.

- b) La recta que pasas por los puntos $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.

Solución: Obtenemos el vector de dirección $v = (0, 2, -1) - (-3, 1, 0) = (-3, 1, -1)$ y decimos $(x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda(-3, 1, -1) = (-3\lambda, \lambda + 2, -\lambda - 1)$.

- c) La ec. del plano perpendicular al vector $\langle -2, 1, 2 \rangle$ y que pasa por el punto $P = (-1, 1, 3)$.

Solución: Obtenemos el punto $PX = (x - (-1), y - 1, z - 3)$ que debe ser perpendicular al vector normal. Por tanto $(x + 1, y - 1, z - 3) \cdot (-2, 1, 2) = -2x - 2 + y - 1 + 2z - 6 = 0$. Concluimos que la ecuación es $2x - y - 2z + 9 = 0$.

3. Ejercicio 3. Calcule $\vec{v} \cdot \vec{w}$ para los siguientes vectores:

$$\begin{aligned} a) \quad \vec{v} = -\hat{i} + \hat{j} \text{ y } \vec{w} = \hat{k} \\ \vec{v} = (-1, 1, 0) \text{ y } \vec{w} = (0, 0, 1) \\ (-1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \vec{v} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k} \text{ y } \vec{w} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k} \quad (-2, -1, 1) \cdot (3, 2, -2) \\ = (-2 \cdot 3) + (-1 \cdot 2) + (1 \cdot -2) \\ = (-6) + (-2) + (-2) \\ = -6 - 2 - 2 \\ = -10 \end{aligned}$$

4. Ejercicio 4. Calcule $\vec{v} \times \vec{w}$ para los vectores del ejercicio anterior.

$$a) \vec{v} = (-i, j, 0) \quad \vec{w} = (0, 0, k)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} k \\ &= (1-0)i - (0-(-1))j + (0-0)k \\ &= i - j \end{aligned}$$

$$b) \vec{v} = (-2i, -j, k) \quad \vec{w} = (3i, 2j, -2k)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} k \\ &= (2-2)i - (3-4)j + (-4+3)k \\ &= j - k \end{aligned}$$

5. Ejercicio 5. Encuentre el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 3.

■ **Solución:** Tomamos los resultados del inciso anterior y decimos $a = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}u^2$.

■ **Solución:** Tomamos los resultados del inciso anterior y decimos $a = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}u^2$.

6. Ejercicio 6. Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vertices $A(0, 1, 0), B(1, 1, 1), C(0, 2, 0), D(3, 1, 2)$.

Solución: Encontramos los vectores $\vec{AB} = (1-0, 1-1, 1-0) = (1, 0, 1)$
 $\vec{AC} = (0-0, 2-1, 0-0) = (0, 1, 0)$ y $\vec{AD} = (3-0, 1-1, 2-0) = (3, 0, 2)$.

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{2} - \mathbf{3} = -\mathbf{1}$$

Puesto que el volumen debe ser positivo este es $1u^3$.

7. Ejercicio 7. Multiplicar las matrices AB, y también hacer el producto BA. ¿Es cierto que AB=BA?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3+0+0 & 0+0+0 & 3+0+1 \\ 2+0+0 & 0+0+0 & 2+0+1 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3+0+1 & 0+0+0 & 1+0+1 \\ 3+1+1 & 0+0+0 & 1+1+1 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore AB \neq BA$

8. Ejercicio 8. Considere los siguientes vectores $\vec{b}_1 = (1, 0, -1), \vec{b}_2 = (0, 1, 0), \vec{b}_3 = (1, 1, -1)$.

- Encuentre los valores tales que $(5, 6, -5) = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + c_3 \vec{b}_3$.

Solución: Tenemos $(c_1, 0, -c_1) + (0, c_2, 0) + (c_3, c_3, -c_3) = (c_1 + c_3, c_2 + c_3, -c_1 - c_3) = (5, 6, -5)$.
Obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}c_1 + c_3 &= 5 \\c_2 + c_3 &= 6 \\-c_1 - c_3 &= -5\end{aligned}$$

Obtenemos que $c_1 + c_3 + 1 = c_2 + c_3$, implica $c_1 + 1 = c_2$. Tomando la primera ecuación obtenemos $c_3 = 5 - c_1$. Obtenemos los valores en términos de $(c_1, c_1 + 1, 5 - c_1)$.

- Repita el inciso anterior para el vector $\vec{c} = (2, 3, 4)$; ¿Cuáles son los valores?

Solución: Obtenemos de manera análoga las ecuaciones

$$\begin{aligned}c_1 + c_3 &= 2 \\c_2 + c_3 &= 3 \\-c_1 - c_3 &= 4\end{aligned}$$

observamos que no existen soluciones ya que llegamos a la contradicción $-(2) = 4$.

- ¿Puede considerar a los vectores como una base para \mathbb{R}^3 ?

Solución: No ya que demostramos que no generan a todos los vectores.

9. Ejercicio 9. Encuentre el volumen del paralelepípedo generado por los vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$.

$$\vec{a} = (i, 0j, k), \vec{b} = (i, j, k) \text{ y } \vec{c} = (-3i, 2j, 0k).$$

$$|(a \times b) \cdot c|$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k \\ &= (0 - 1)i - (1 - 1)j + (1 - 0)k \\ &= -i + k \cdot (-3i, 2j, 0) \\ &= -1(-3) + 0 + 0 \\ &= 3\end{aligned}$$

10. Ejercicio 10. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto $(3, -1, 2)$ y a la recta de ecuación $r(t) = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

Decimos que tenemos a los puntos $P_1 = (3, -1, 2)$, $P_2 = (2, -1, 0)$ ya que está en la recta y a $P_3 = (2, -1, 0) + (2, 3, 0) = (4, 2, 0)$. Obtenemos los vectores de dirección $\vec{v} = (3 - 2, -1 - (-1), 2 - 0) = (1, 0, 2)$ y $\vec{u} = (4 - 3, 2 - (-1), 0 - 2) = (1, 3, -2)$. Decimos que

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$B = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

$$D = -(-6(2) + 4(-1) + 3(0)) = -(-12 - 4) = 16$$

Podemos decir que la ecuación general del plano es $-6x + 4y + 3z + 16 = 0$.

11. Ejercicio 11. El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} está dado por la expresión $V = \frac{1}{6} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

a) Expresa dicho volumen como un determinante.

$$V = \frac{1}{6} \vec{a} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}|$$

b) Calcule V cuando $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-1)i - 1(0-1)j + 1(1+1)k = -1 + 1 + 2 = 2$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6}u^3$$

12. Ejercicio 12. Encuentre un vector unitario que tenga la propiedad solicitada:

a) Ortogonal al plano $x - 6y + z = 12$.

Solución: Obtenemos $\vec{n} = (1, -6, 1)$, decimos que el vector unitario es

$$\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(1, -6, 1)}{\sqrt{1^2 + (-6)^2 + 1^2}} = \frac{(1, -6, 1)}{\sqrt{38}} = \left(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{-6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}} \right)$$

b) Ortogonal al vector $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ y al vector $\vec{b} = \hat{k}$.

Solución: Decimos $\vec{a} = (1, 2, -1)$ y $\vec{b} = (0, 0, 1)$. Decimos que (x, y, z) es un vector que es ortogonal a ambos, por tanto $(x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = z = 0$ y $(x, y, z) \cdot (1, 2, -1) = x + 2y - z = 0$. Obtenemos que $y = -\frac{x}{2}$. Los vectores de la forma $(x, -(x/2), 0)$, tomamos $(2, -1, 0)$. Decimos que el vector unitario es

$$\frac{(2, -1, 0)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

13. Ejercicio 13. Sea $A = (0, 4)$, $B = (3, 1)$ y $C = (2, 10)$.

a) ¿Cuáles son las coordenadas del vector \vec{AB} , y del vector \vec{BA} .

$$\vec{AB} = (3i - 0i, 1j - 4j, 0k - 0k) = (3i, -3j, 0k)$$

$$\vec{BA} = (0i - 3i, 4j - 1j, 0k - 0k) = (-3i, 3j, 0k).$$

b) ¿Cuáles son las coordenadas del vector \vec{AC} , y del vector \vec{BC} , y también $\vec{AC} + \vec{CB}$.

$$\vec{AC} = (-2i - 0i, -10j - 4j, 0k - 0k) = (-2i, -14j, 0k)$$

$$\vec{BC} = (-2i - 3i, -10j - 1j, 0k - 0k) = (-5i, -11j, 0k)$$

$$\vec{CB} = (3i + 2i, 1j + 10j, 0k - 0k) = (5i, 11j, 0k)$$

$$\vec{AC} + \vec{CB} = (-2i, -14j, 0k) + (5i, 11j, 0k) = (3i, -3j, 0k)$$

c) Describa gráficamente por qué $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$

14. Ejercicio 14. Usted se encuentra en el punto $(10, 16)$ y comienza a moverse desde ese punto con el vector velocidad $\vec{v} = (-1, 2)$. Conteste lo siguiente:

■ ¿Cuánto vale la magnitud de su velocidad?

Solución: Vale la norma del vector que es

$$\sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

■ ¿En dónde se encuentra usted después de 10 horas?

Solución: Se encuentra en $(10, 16) + 10(-1, 2) = (10, 16) + (-10, 20) = (0, 36)$.

■ ¿Cuánto tiempo le toma usted alcanzar el punto $(-8, -20)$?

Solución: Planteamos $(10, 16) + x(-1, 2) = (-8, -20)$ y obtenemos $10 - x = -8$ lo cual implica $x = 18$. Comprobamos $(10, 16) + (-18, 36) = (-8, 52)$.

- ¿Alcanzará usted en algún momento el punto $(-15, -20)$? Justifique.

Solución: Suponiendo que se puede tenemos que $(10, 16) + (-x, -2x) = (-15, -20)$ de los cuales obtenemos las ecuaciones $10 - x = -15$, la cual implica $x = 25$. También se debe cumplir la ecuación $16 - 2x = -20$, con $16 - 2(25) = -34$, la cual no cumple. Por tanto no es un punto que se pueda alcanzar.