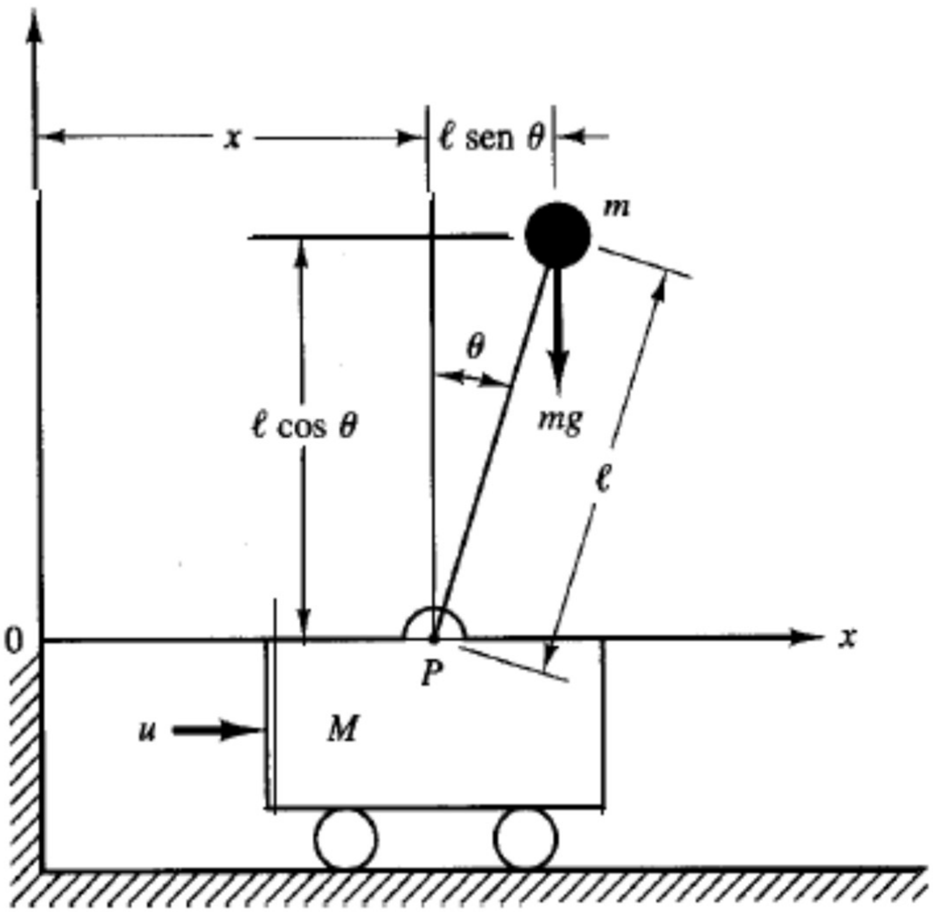


Despreciando la varilla que une al carrito con la bola, tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}=u$$

$$ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}=mgl\theta$$

a) Obtenga una representación en espacio de estados del sistema con u como entrada y las salidas $y_1 = \theta, y_2 = x$.

b) Defina los valores $M = 2\ \mathrm{kg}, l = 0.5\ \mathrm{m}, m = 0.1\ \mathrm{kg}, g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ y diseñe un controlador que estabilice el sistema.

c) Ahora diseñe un controlador que logre $t_s < 2\ s$ y $M_p = 0$ para las salidas.

Solución a) ¿Propuestas de estados? $\boxed{\begin{matrix}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}=u\\ ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}=mgl\theta\end{matrix}}$

Si definimos los siguientes estados $x_1=\theta, x_2=\dot{\theta}, x_3=x, x_4=\dot{x}$ obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= \frac{M+m}{Ml}gx_1-\frac{1}{Ml}u\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= -\frac{m}{M}gx_1+\frac{1}{M}u\end{aligned}$$

Obteniendo la forma matricial resulta en

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ -\frac{1}{Ml}\\ 0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u$$

$$Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}X$$

Solución b) Usando los parámetros definidos obtenemos:

$$\frac{M+m}{Ml}g = 20.601, \quad \frac{m}{M}g = 0.4905, \quad \frac{1}{Ml} = 1, \quad \frac{1}{M} = 0.5$$

Sustituyendo en la forma matricial resulta

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

Ahora sí, empezamos con nuestro procedimiento de diseño de controlador…

REQUERIMIENTOS

No hay, solo estabilidad

¿YA SE CUMPLEN?

☹

Inciso b)

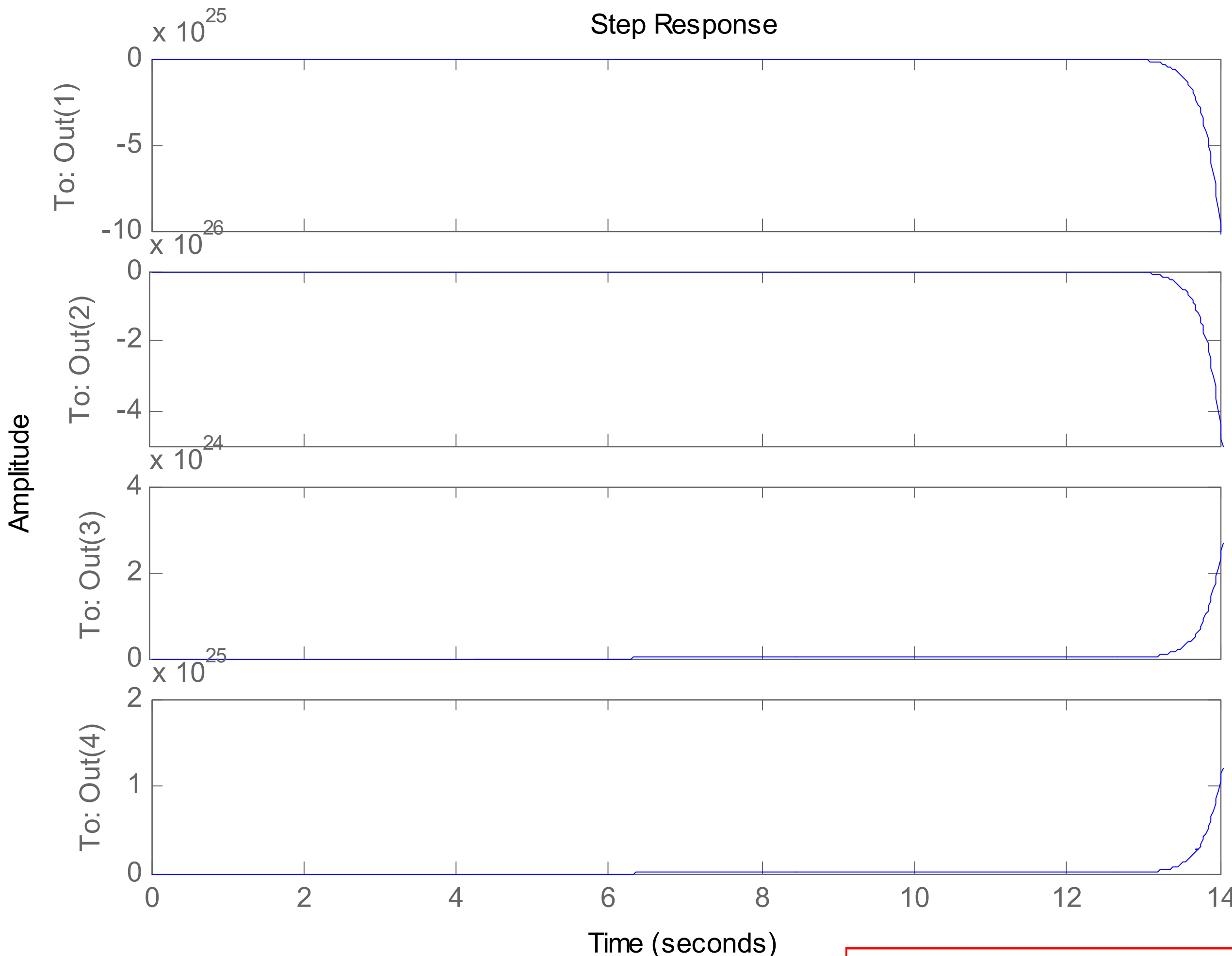
- El objetivo es estabilizar el sistema.
- **¿Es el sistema estable?** Veamos. Utilizando **eigs()** en Matlab para la matriz **A** del sistema obtenemos los siguientes polos actuales

$$p_{1,2,3,4} = \{-4.5388, 4.5388, 0, 0\}$$

$$\boxed{\text{¡ SISTEMA INESTABLE !}}$$

Veamos que dice Matlab…

Sistema sin controlar con condiciones iniciales $x(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$



¡ SISTEMA INESTABLE !

REQUERIMIENTOS
No hay, solo estabilidad
¿YA SE CUMPLEN?
☹
CONTROLABILIDAD
☺
POLOS DESEADOS
$p_{1-4} = \{-1,-1,-1,-1\}$

Inciso b)

Entonces, verifiquemos controlabilidad:

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20.601 \\ -1 & 0 & -20.601 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.4905 \\ 0.5 & 0 & 0.4905 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{rank(M_c) = 4} \Rightarrow \text{Sistema Controlable}$$

Wiiiii ☺… Podemos ubicar los polos donde queramos
¿Cuáles proponen?

Propongamos $p_{1-4} = \{-1,-1,-1,-1\}$ y empecemos el proceso de diseño.

$$H(A) = (A+I)^4 = \begin{bmatrix} 549 & 86.4 & 0 & 0 \\ 1780 & 54.9 & 0 & 0 \\ -13 & -2 & 1 & 4 \\ -42.4 & -13 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REQUERIMIENTOS

No hay, solo estabilidad

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$p_{1-4} = \{-1, -1, -1, -1\}$

GANANCIA DE CONTROL

$K = [26.6, 4.2, 0.1, 0.4]$

LEY DE CONTROL

$$u(t) = 26.6x_1 + 4.2x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4$$

¿RESPUESTA DESEADA?

¿?

Inciso b)

Calculemos la matriz de ganancias de control:

$$K = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} H(A) = \begin{bmatrix} 26.6 & 4.2 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{u(t) = Kx(t) = 26.6x_1 + 4.2x_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4}$$

¿Se logró el objetivo? Veamos que dice Matlab…

Código .m

```
function dX = PInv_ODE_sys( t, X )

global A B C K

U = K*X;          %Control por retro (solo estabiliza el sistema)
%U = K*X - 1;     %Control por retro a una entrada escalón
%U = 1;           %Entrada escalón
%U = 0;           %Condiciones Iniciales

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

```
function PInv_ODE_plot( tspan, x0, Pdc)

global A B C K

%MATRICES DEL SISTEMA
A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-.4905 0 0 0];
B=[0;-1;0;0.5];      C=[1 0 1 0];        D=0;

%Controlador
Mc = [B A*B A^2*B A^3*B] %Matriz de controlabilidad
rank(Mc) %Probando Controlabilidad
Hc  = (A-Pdc(1)*eye(4))*(A-Pdc(2)*eye(4))*(A-Pdc(3)*eye(4))*(A-Pdc(4)*eye(4))
K  = -[0 0 0 1]*Mc^-1*Hc

eigs(A+B*K) %Comprobando Ubicación de Polos en Lazo Cerrado

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
[t, X] = ode45(@PInv_ODE_sys, tspan, x0);

%Grafico los estados
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;

%Grafico el control
figure;
U = K*X';
plot(t, U);  title('SEÑAL DE CONTROL');  grid;

end
```

REQUERIMIENTOS

No hay, solo estabilidad

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$\mathrm{p}_{1-4} = \{-1, -1, -1, -1\}$

GANANCIA DE CONTROL

$K = [26.6, 4.2, 0.1, 0.4]$

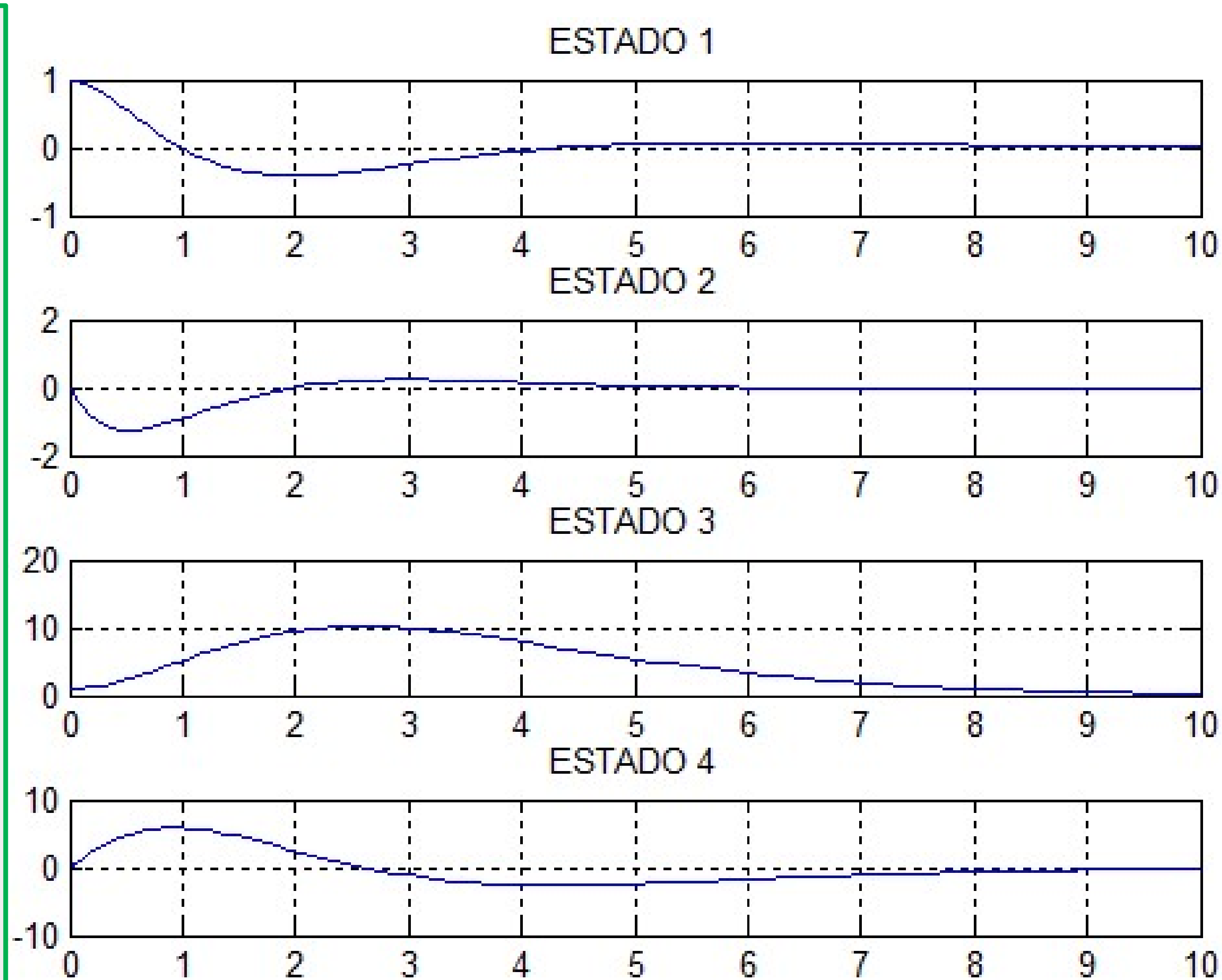
LEY DE CONTROL

$$u(t) = 26.6\mathrm{x}_1 + 4.2\mathrm{x}_2 + 0.1x_3 + 0.4x_4$$

¿RESPUESTA DESEADA?

☺

Inciso b)



¡ SISTEMA ESTABLE !

REQUERIMIENTOS

$t_s < 2\,s$ y $M_p = 0$

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$\mathrm{p}_{1-4} = \{-4, -4, -40, -40\}$

Inciso c)

Solución c) Tenemos requerimientos que cumplir $t_s < 2\,s$ y $M_p = 0$.

Sabemos que **no se cumplen** en el sistema original pues es **inestable**.

Pero, sabemos que el sistema es **controlable**.

Sabemos del ejercicio anterior que esos requerimientos definen los polos deseados $\boldsymbol{p_{1,2} = -4}$ ¿será suficiente con definir estos polos deseados?

Como el sistema tiene 4 polos, hay que encontrar una manera de definir los otros 2 polos. Para esto, aproximamos el sistema a uno con 2 polos dominantes en $\boldsymbol{p_{1,2} = -4}$ y los otros los hacemos 10 veces más rápidos $\boldsymbol{p_{3,4} = -40}$ (regla de dedo ☺).

Y entonces utilizamos la formulación de Ackermann…

REQUERIMIENTOS

$t_s < 2\,s$ y $M_p = 0$

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$p_{1-4} = \{-4, -4, -40, -40\}$

GANANCIA DE CONTROL

K

LEY DE CONTROL

$u(t) = 3581.4x_1 + 805.6x_2 + 2609.6x_3 + 1435.3x_4$

¿RESPUESTA DESEADA?

¿?

Inciso c)

Calculando

$$H(A) = (A+4I)^2(A+40I)^2 = \begin{bmatrix} 72500 & 15890 & 0 & 0 \\ 327410 & 72500 & 0 & 0 \\ -1120 & -40 & 25600 & 14080 \\ -7800 & -1120 & 0 & 25600 \end{bmatrix}$$

$$K = -[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] M_c^{-1} H(A) = [3581.4 \quad 805.6 \quad 2609.6 \quad 1435.3]$$

La ley de control queda

$$u(t) = 3581.4x_1 + 805.6x_2 + 2609.6x_3 + 1435.3x_4$$

¿Se obtuvo la respuesta deseada? Veamos que dice Matlab…

Sistema en Lazo Cerrado con condiciones iniciales $x(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

REQUERIMIENTOS

$t_s < 2\,s$ y $M_p = 0$

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$$p_{1-4} = \{-4, -4, -40, -40\}$$

GANANCIA DE CONTROL

K

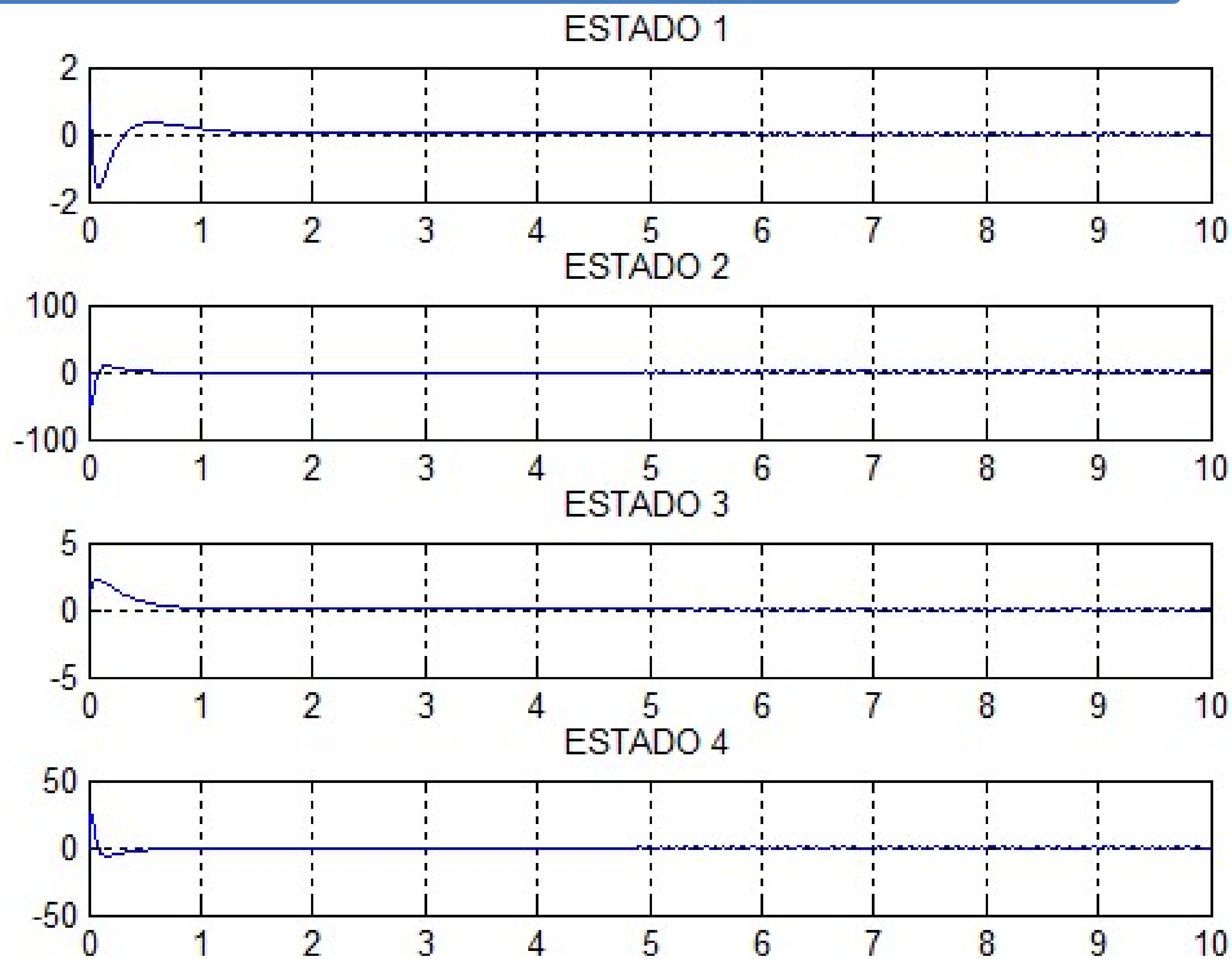
LEY DE CONTROL

$$u(t) = 3581.4x_1 + 805.6x_2 + 2609.6x_3 + 1435.3x_4$$

¿RESPUESTA DESEADA?

☺

Inciso c)

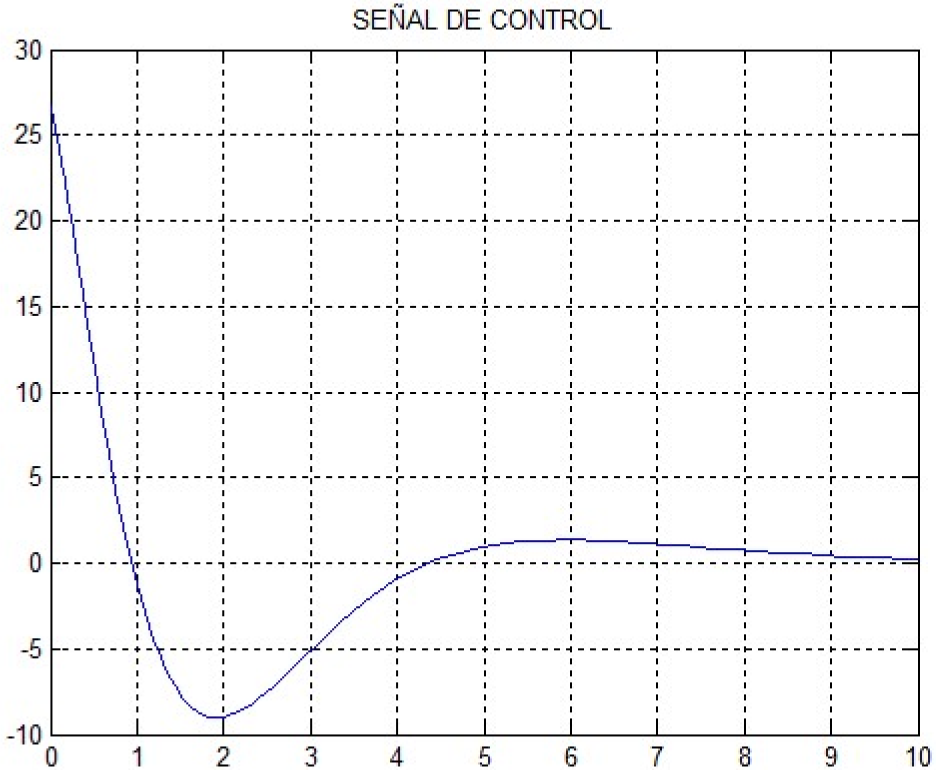


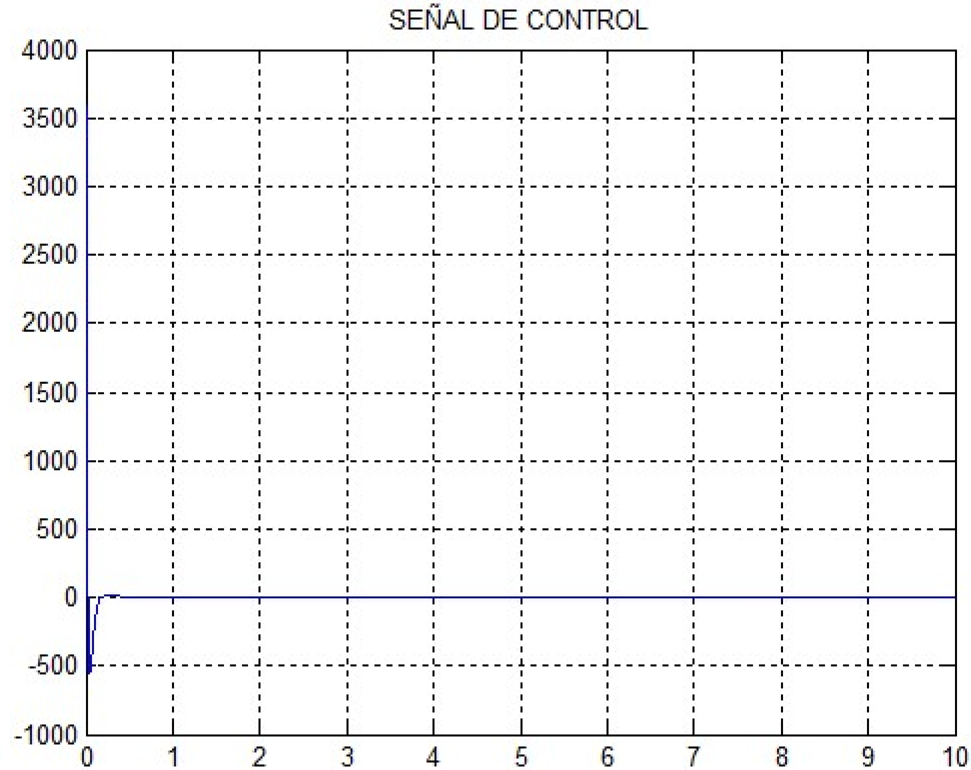
SISTEMA ESTABLE Y CUMPLIENDO REQUERIMIENTOS

¿En la vida real es posible ubicar los polos donde queramos?

Analicemos la señal de control necesaria en ambos casos

SEÑAL DE CONTROL: Comparativo entre las dos ubicaciones de polos…





$$P_d = \{-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1\}$$

$$K = [26.6 \quad 4.2 \quad 0.1 \quad 0.4]$$

$$\boxed{U_{max} < 30 \text{ N}}$$

$$P_d = \{-4 \quad -4 \quad -40 \quad -40\}$$

$$K = [3581.4 \quad 805.6 \quad 2609.6 \quad 1435.3]$$

$$\boxed{U_{max} > 3500 \text{ N}}$$

¿Cuál de estos controladores es realizable?