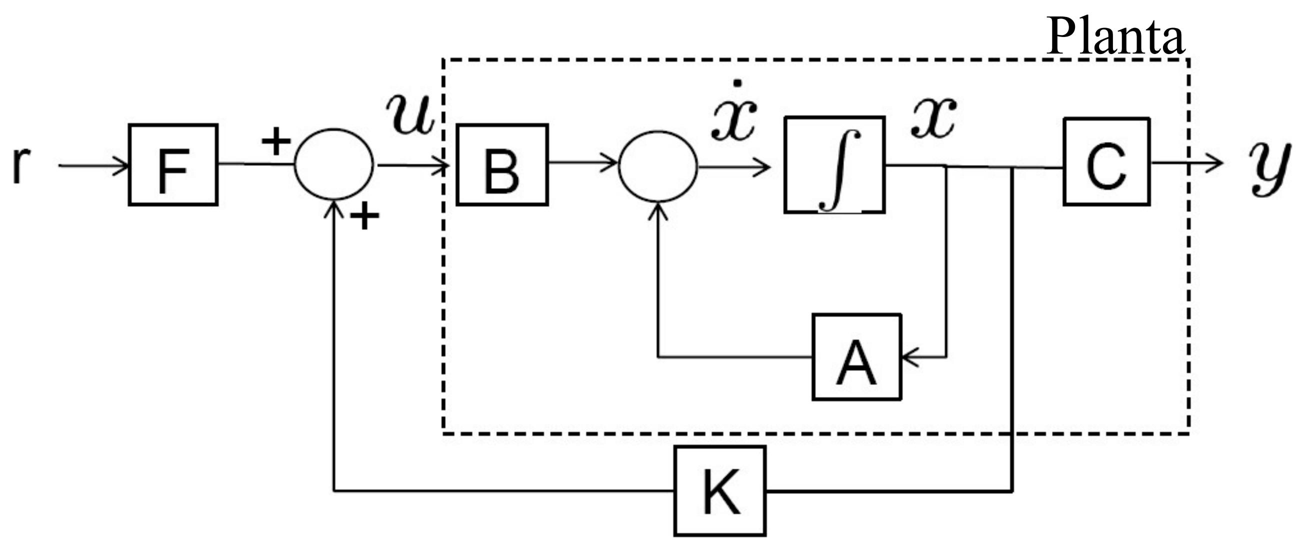
En los ejemplos que hemos visto, solo se ha llevado los estados del sistema a cero. A ese tipo de control se le llama <u>regulación.</u>

Pero… ¿Y si deseamos que los estados sigan referencias diferentes de cero?

En esta caso (para sistemas SISO) la ley de control es: $u(t) = Kx(t) + Fr(t)$

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + BFr(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$



Las matrices de la ley de control se usan para $K :=$ Ubicación de polos

$F :=$ Seguimiento de ref. constantes

La ubicación de polos ya la manejamos, pero ¿cómo lograr el seguimiento de referencias constantes?

Transformando a Laplace el SLC obtenemos

$$sX(s) = (A + BK)X(s) + BFR(s)$$

$$Y(s) = CX(s)$$

Expresando la salida en función de los estados resulta

$$X(s) = (sI - A - BK)^{-1} BFR(s)$$

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A - BK)^{-1} FR(s)$$

Una referencia constante es equivalente a una entrada escalón $R(s) = \frac{r}{s}$

Entonces, aplicando el teorema del valor final $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$ obtenemos

$$\lim_{s\to 0} sY(s) = sC(sI - A - BK)^{-1} BF\frac{r}{s}$$

$$= C(-A - BK)^{-1} BFr$$

Si definimos la matriz $F = \dfrac{1}{C\left(-A-BK\right)^{-1}B}$ **obtenemos:**

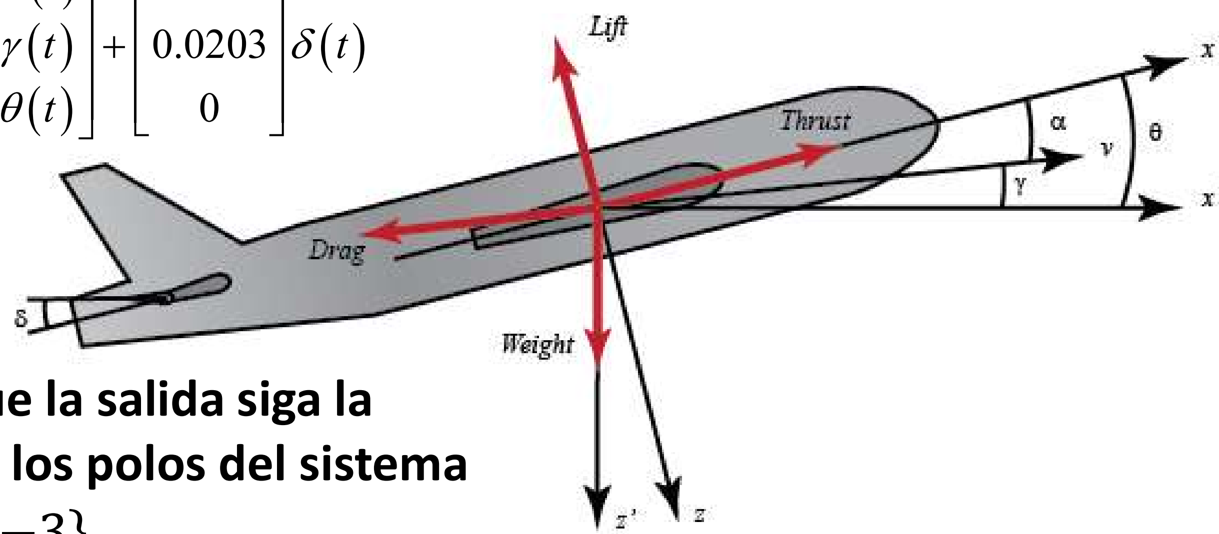
$$\lim_{t\to\infty} y\left(t\right) = \frac{C\left(-A-BK\right)^{-1}B}{C\left(-A-BK\right)^{-1}B}r$$

Con lo que logramos nuestro objetivo de control $\lim_{t\to\infty} y\left(t\right) = r$

Problema: Un modelo reducido de un avión se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \gamma(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

$$y(t) = \alpha(t) + \theta(t)$$



Diseñe un controlador para que la salida siga la referencia $y_{ref}(t) = 1.5\ \text{rad}$ y los polos del sistema en lazo cerrado sean $\{-4, -3, -3\}$

Solución: El modelo en espacio de estados queda como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \gamma(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \delta(t)$$

$$y(t) = \alpha(t) + \theta(t)$$

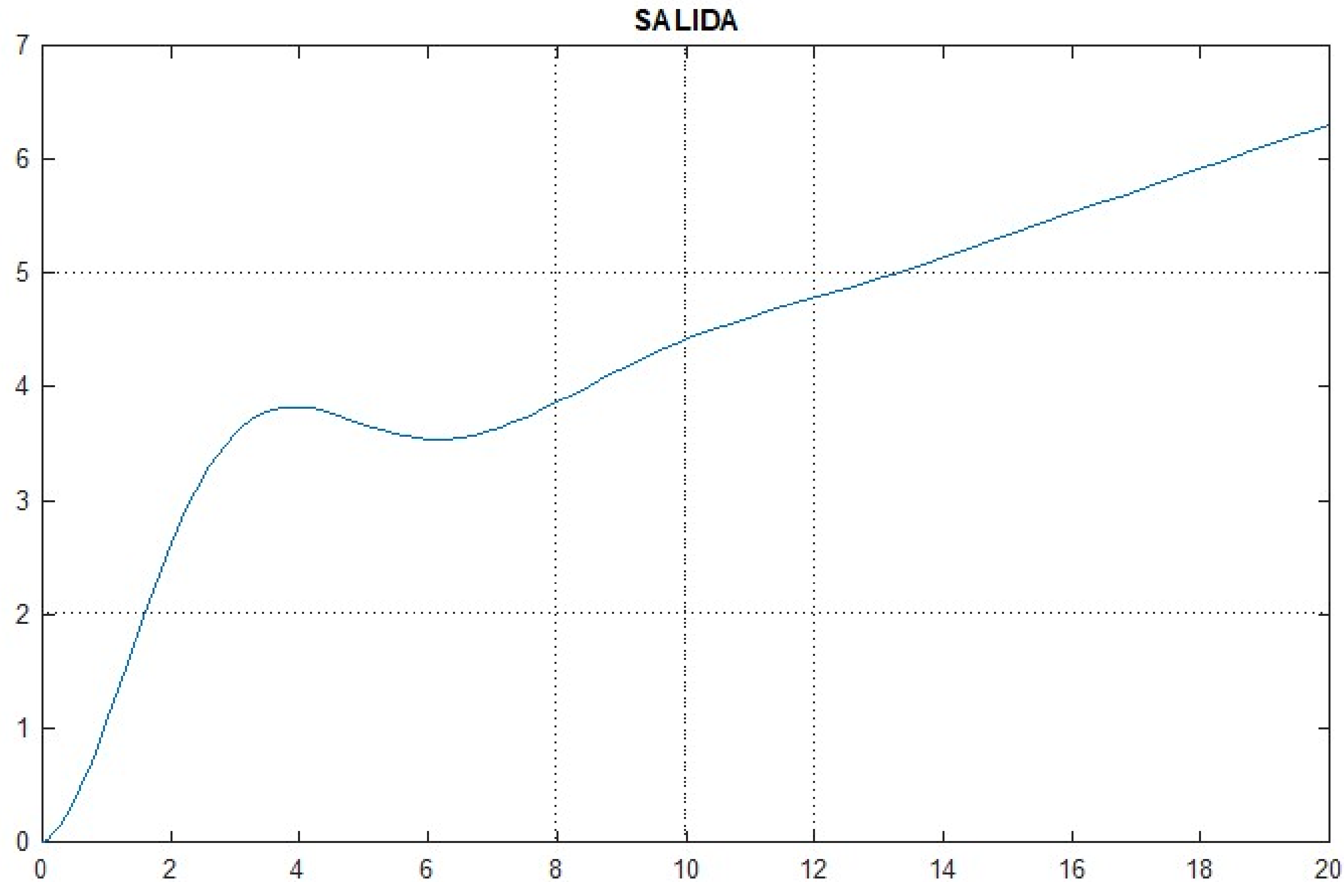
REQUERIMIENTOS

$y_{ref}(t) = 1.5 \text{ rad}$

¿YA SE CUMPLEN?

☹

Simulamos con condiciones iniciales cero y entrada escalón unitario:



Polos del sistema **eigs(A)** en Matlab

ans = -0.3695 + 0.8860i; -0.3695 - 0.8860i; 0

REQUERIMIENTOS

$y_{ref}(t) = 1.5$ rad

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$p_{1-4} = \{-4, -3, -3\}$

GANANCIAS DE CONTROL

K y F

LEY DE CONTROL

$u(t) = 167.1x_1 - 2366.2x_2 - 202.9x_3 + 304.35$

¿RESPUESTA DESEADA?

¿?

Verificamos si el sistema es controlable:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0.232 & 1.0784 & -1.0107 \\ 0.0203 & -0.0119 & -0.0099 \\ 0 & 1.151 & -0.6732 \end{bmatrix} \quad rank(M_c) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Controlable}$$

Obtenemos

$$H(A) = (A+4I)(A+3I)^2 = \begin{bmatrix} 19.6 & 1430.8 & 0 \\ -0.4 & 16.7 & 0 \\ -7.3 & 1595.2 & 36 \end{bmatrix}$$

Para calcular

$$K = -[0 \quad 0 \quad 1] M_c^{-1} H(A) = [167.1 \quad -2366.2 \quad -202.9]$$

$$F = \frac{1}{C(-A-BK)^{-1} B} = 202.9$$

Como la referencia es $r = 1.5$ la ley de control queda como

$$u(t) = KX(t) + Fr = 167.1x_1 - 2366.2x_2 - 202.9x_3 + 304.35$$

Código .m

```matlab
function Avion_ODE_plot( tspan, x0, Pd)
% ARGUMENTOS:
% x0    := Condiciones Iniciales
% tspan:= Periodo de integración

global A B C D K F

%MATRICES DEL SISTEMA
A = [-0.313 56.7 0;-0.0139 -0.426 0;0 56.7 0];
B = [0.232;0.0203;0];
C = [1 0 1];
D = 0;

%CALCULAMOS GANANCIAS DE CONTROL
Mc = [B A*B A^2*B] %Matriz de controlabilidad
H  = (A-Pd(1)*eye(3))*(A-Pd(2)*eye(3))*(A-Pd(3)*eye(3))
K  = -[0 0 1]*Mc^-1*H
F  = 1/(C*(-A-B*K)^-1*B)

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
[t, X] = ode45(@Avion_ODE_sys, tspan, x0);

ref = 1.5*sin(t); %QUE TAL CON REFERENCIAS NO CONSTANTES?
%ref = 1.5;

U = X*K' + F*ref;

maxU = max(abs(U))

subplot(2,1,1); plot(t, X*C', t, ref, 'red');  title('SALIDA Y REFERENCIA');  grid;
subplot(2,1,2); plot(t, U);  title('ENTRADA');  grid;

end
```

```matlab
function dX = Avion_ODE_sys( t, X)

global A B C D K F

ref = 1.5*sin(t); %QUE TAL CON REFERENCIAS NO CONSTANTES?
%ref = 1.5;

U = K*X + F*ref; %Ley de control

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

Resultados de Simulación…

REQUERIMIENTOS

$y_{ref}(t) = 1.5 \text{ rad}$

¿YA SE CUMPLEN?

☹

CONTROLABILIDAD

☺

POLOS DESEADOS

$p_{1-4} = \{-4, -3, -3\}$

GANANCIAS DE CONTROL

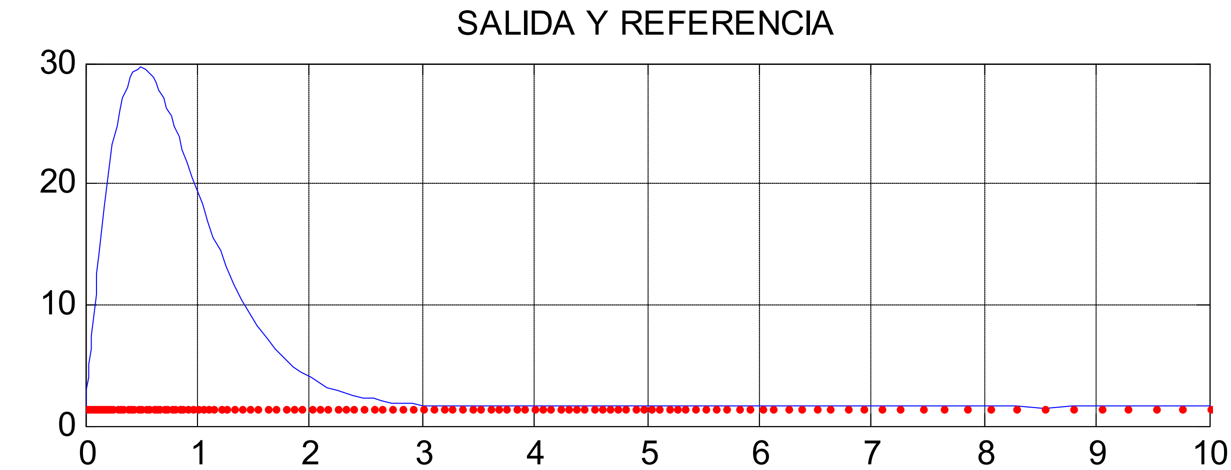
K y F

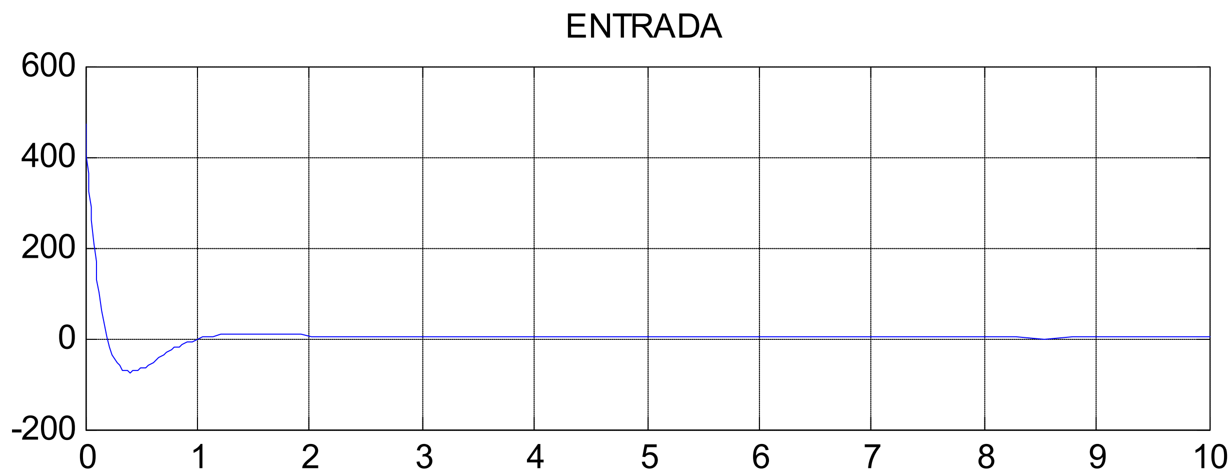
LEY DE CONTROL

$u(t)$
$= 167.1x_1 - 2366.2x_2$
$- 202.9x_3 + 304.35$

¿RESPUESTA DESEADA?

☺



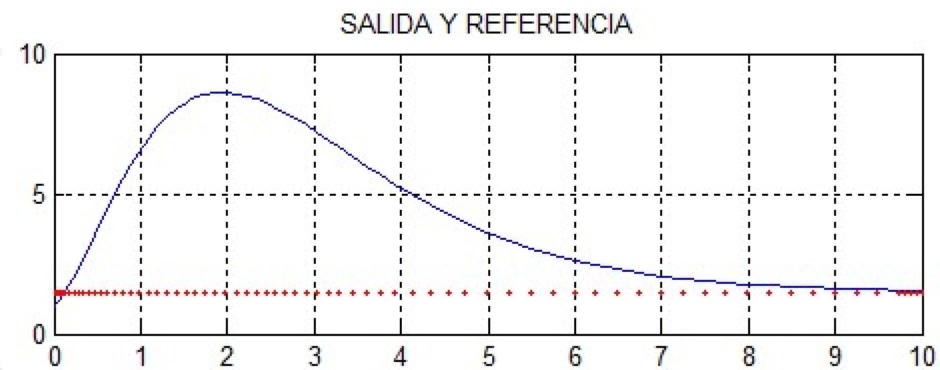


$$p_d = \{-4 \quad -3 \quad -3\}, \quad K = [167.1 \quad -2366.2 \quad -202.9], \quad F = 202.9$$

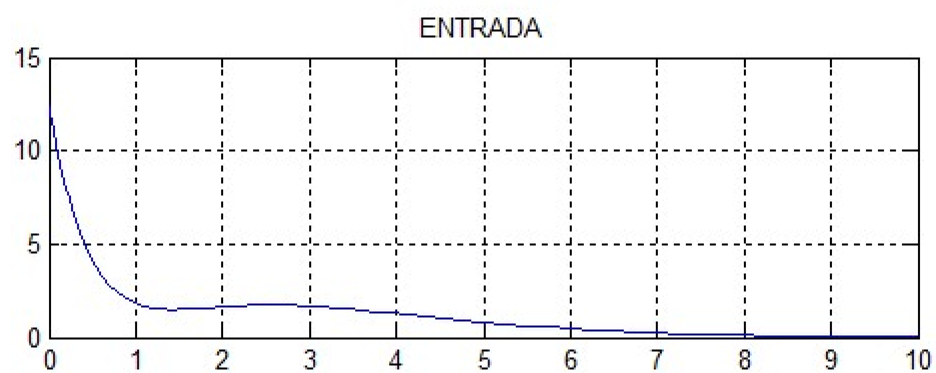
```
>> eigs(A+B*K)
ans =  -4.0000 + 0.0000i,  -3.0000 + 0.0000i,  -3.0000 - 0.0000i
```

$$p_d = \{-10 \quad -30 \quad -30\}$$
$$K = [46870 \quad -539020 \quad 50727]$$
$$F = 50727$$

$$p_d = \{-1 \quad -1 \quad -1\}$$
$$K = [3.9186 \quad -156.16 \quad -5.6363]$$
$$F = 5.6363$$



Polos más Negativos $\Rightarrow$ Respuesta más Rápida

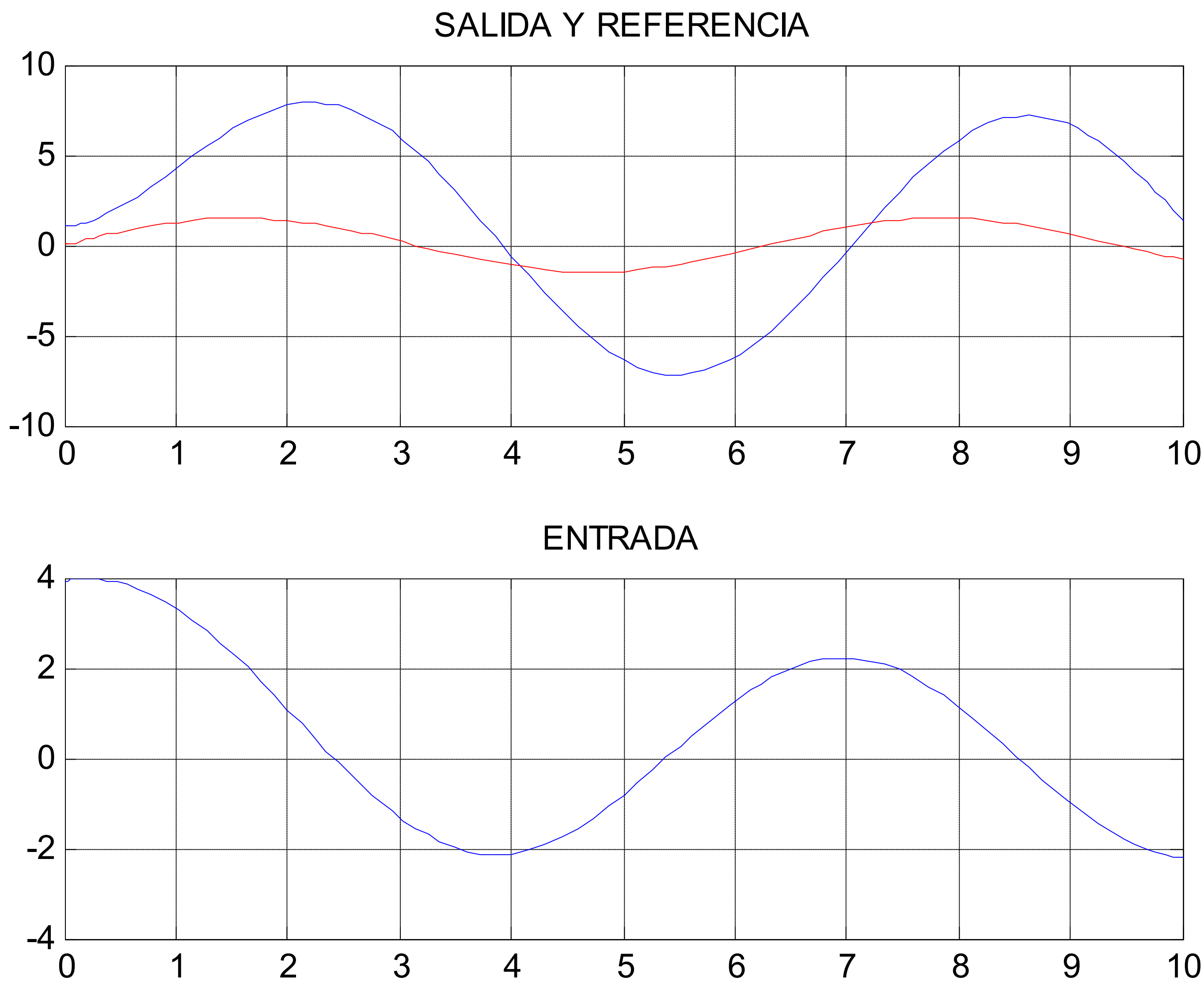


$$\boxed{\max(\mathrm{U}) = 122960}$$

$$\boxed{\max(\mathrm{U}) = 4.087}$$

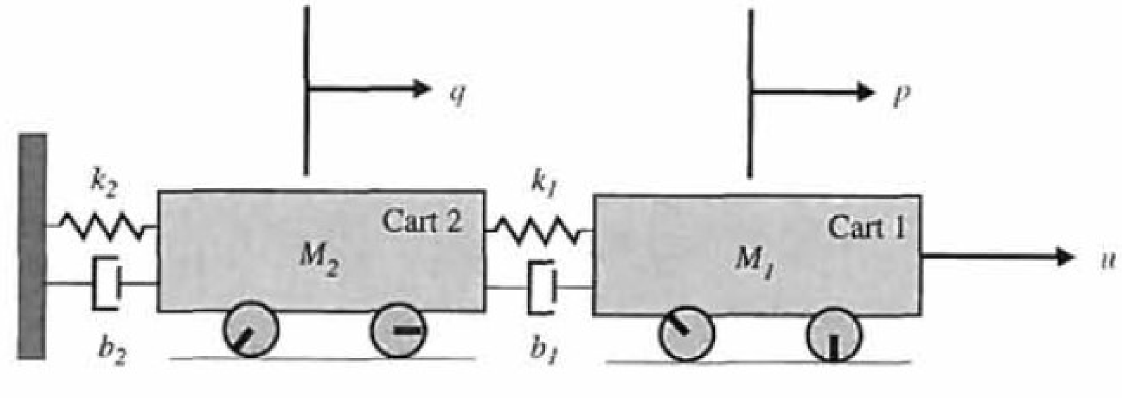
Polos más Negativos $\Rightarrow$ Más Alta Señal de Control

¿QUE TAL REFERENCIAS NO CONSTANTES? $r(t) = 1.5\sin(t)$ rad



¡ No puede con el trabajo ! ¿Porqué?

Problema: Recordando nuestro sistema de los carritos acoplados.



Estados:

$$x_1 = p, \quad x_2 = q$$
$$x_3 = \dot{p}, \quad x_4 = \dot{q} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Parámetros:

$$k_1 = 150, \quad k_2 = 700, \quad b_1 = 15,$$
$$b_2 = 30, \quad M_1 = 5, \quad M_2 = 20$$

Modelo:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & \frac{-k_1-k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & \frac{-b_1-b_2}{M_2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

Diseñe un controlador que logre que la salida siga una referencia de $y_{ref}(t) = 2 \text{ m}$ **con las siguientes especificaciones de la respuesta** $t_s < 1 \text{ s}, \quad M_P < 10\%$

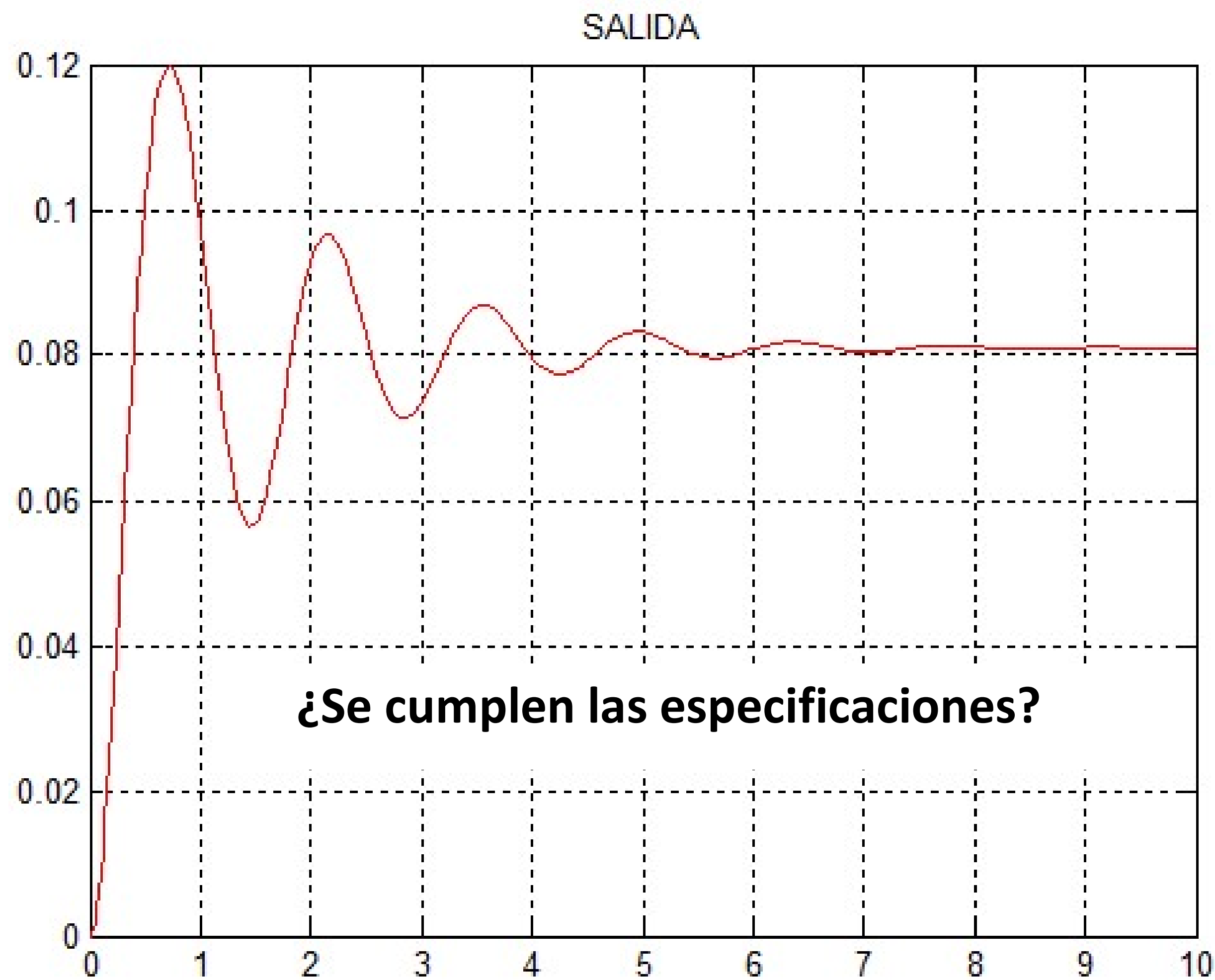
Pero antes unas preguntas…

- **¿Será el sistema estable?**
- **¿Será controlable el sistema?**
- **¿Se podrá forzar a que la posición del carrito uno siga una referencia constante por medio de la entrada del sistema?**

Solución: **Verificamos los polos del sistema:**

$$p_{1,2} = -1.93 \pm 6.88i, \quad p_{3,4} = -0.68 \pm 4.47i$$

¿Cómo obtener el tiempo de estabilización y el máximo sobreimpulso para este sistema? ***<u>Simulemos en Matlab para una entrada escalón…</u>***



Dado que debemos reubicar polos, verificamos controlabilidad:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & -0.6 & -3.75 \\ 0 & 0 & 0.15 & 0.71 \\ 0.2 & -0.6 & -3.75 & 35.88 \\ 0 & 0.15 & 0.71 & -15.29 \end{bmatrix} \qquad rank(M_c) = 4 \Rightarrow \text{Sistema Controlable}$$

De las especificaciones obtenemos:

$$0.1 = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{\Psi^2}{1+\Psi^2}} \text{ donde } \Psi = \frac{-\ln(M_p)}{\pi} \Rightarrow \zeta = 0.5912$$

$$1 = \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{0.5912} = 6.7659$$

Por lo tanto, los polos deseados quedan como:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -4 \pm 5.4569i$$

¿Y los otros dos polos? $p_{3,4} = -40$

Obtenemos

$$H(A) = (A + (4 - 5.4569i)I)(A + (4 + 5.4569i)I)(A + 40I)^2$$

$$K = -[0\ 0 \ldots 1]M_c^{-1}H(A) = [-6104 \quad 13539 \quad -414 \quad -5345]$$

$$F = \frac{1}{C(-A - BK)^{-1}B} = 8617$$

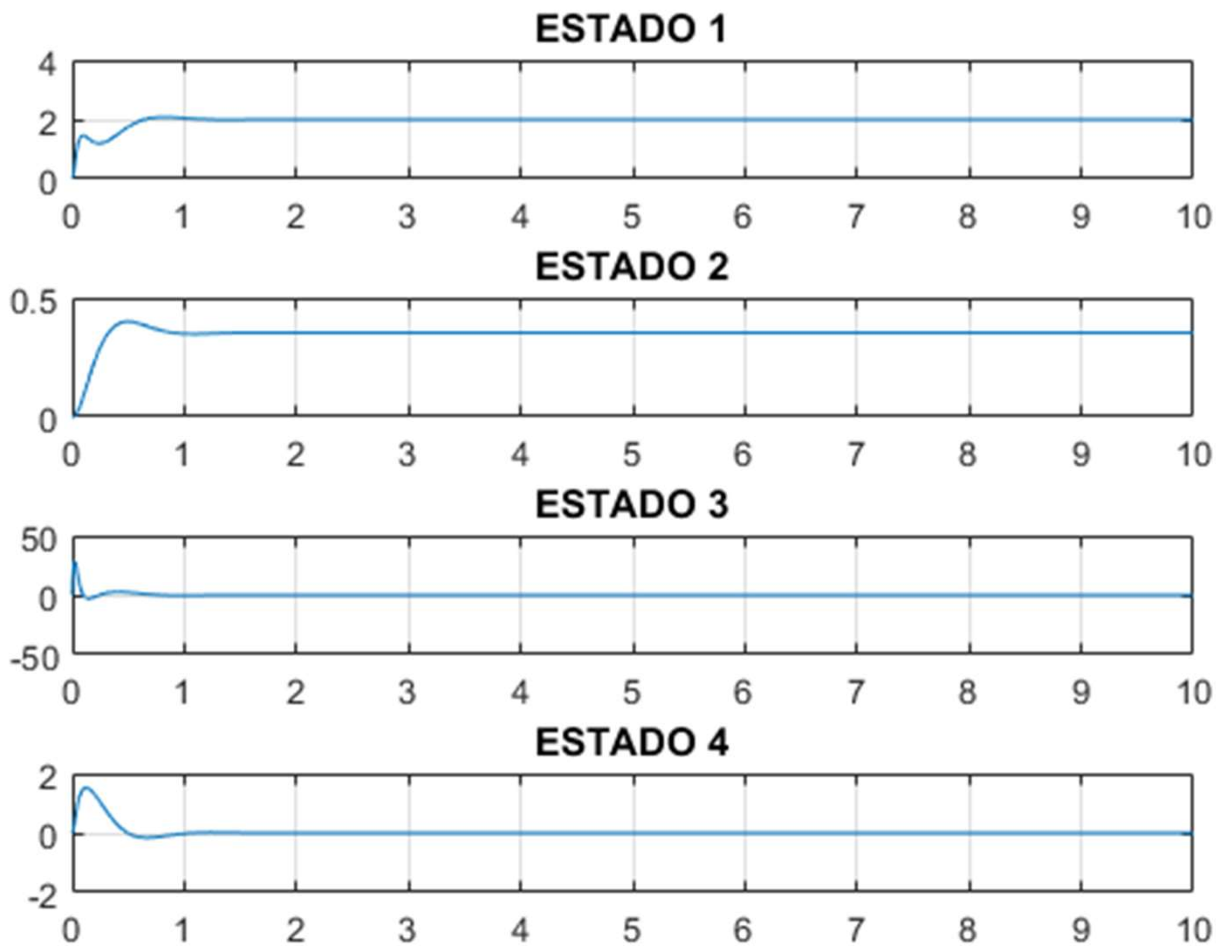
Entonces:

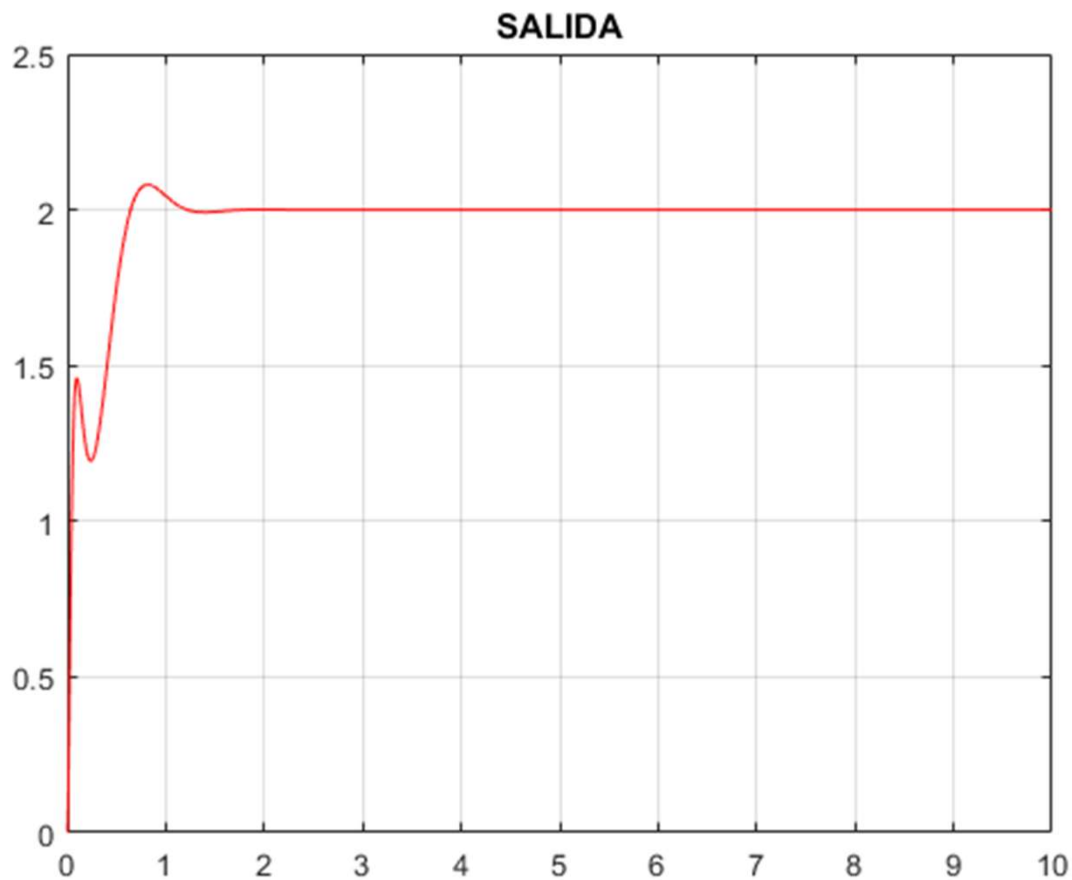
$$\boxed{u(t) = -6104x_1 + 13539x_2 - 414x_3 - 5345x_4 + 17234}$$

Verifiquemos con Matlab…

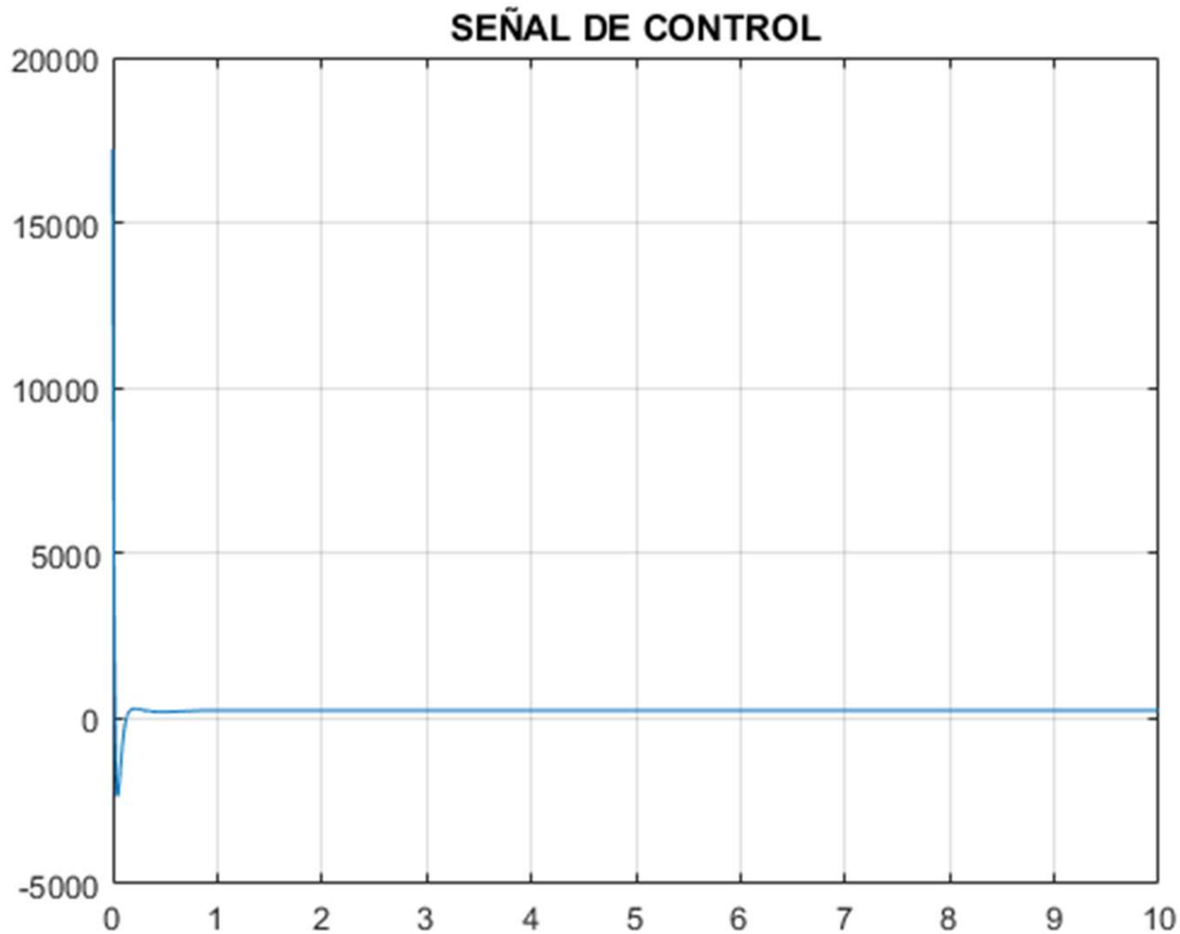
```
function Carritos_SegRef_plot( tspan, x0, Pd)

global A B C K F

%Parámetros del sistema
k1 = 150; k2 = 700; b1 = 15; b2 = 30; M1 = 5; M2 = 20;

%Matrices del sistema
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1;-k1/M1 k1/M1 -b1/M1 b1/M1; k1/M2 -(k1+k2)/M2 b1/M2 -(b1+b2)/M2];
B = [0; 0; 1/M1; 0];
C = [1 0 0 0];

%CALCULAMOS GANANCIAS DE CONTROL
Mc = [B A*B A^2*B A^3*B] %Matriz de controlabilidad
H  = (A-Pd(1)*eye(4))*(A-Pd(2)*eye(4))*(A-Pd(3)*eye(4))*(A-Pd(4)*eye(4));
K  = -[0 0 0 1]*Mc^-1*H
F  = 1/(C*(-A-B*K)^-1*B)

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
[t, X] = ode45(@Carritos_SegRef_sys, tspan, x0);

figure;
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;

ref = 2;        U = X*K' + F*ref;       maxU = max(abs(U))

figure;         plot(t, C*X','r',t,ref);  title('SALIDA');  grid;
figure;         plot(t, U);  title('SEÑAL DE CONTROL');  grid;

end
```

```
function dX = Carritos_SegRef_sys( t, X)

global A B C K F

ref = 2;

U = K*X + F*ref; %Ley de control para seguimiento
%U = 10;          %Escalón

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```


ESTADO 1
4
2
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ESTADO 2
0.5
0
ESTADO 3
50
0
-50
ESTADO 4
2
0
-2



¿Se cumplen las especificaciones del sistema en lazo cerrado?



¿Se puede implementar físicamente esta señal de control?

TAREA 2.1: Diseñar un controlador que cumpla con las especificaciones del problema anterior y cuya señal de control no pase de 2000 unidades en magnitud.