Sistemas de Control Automático

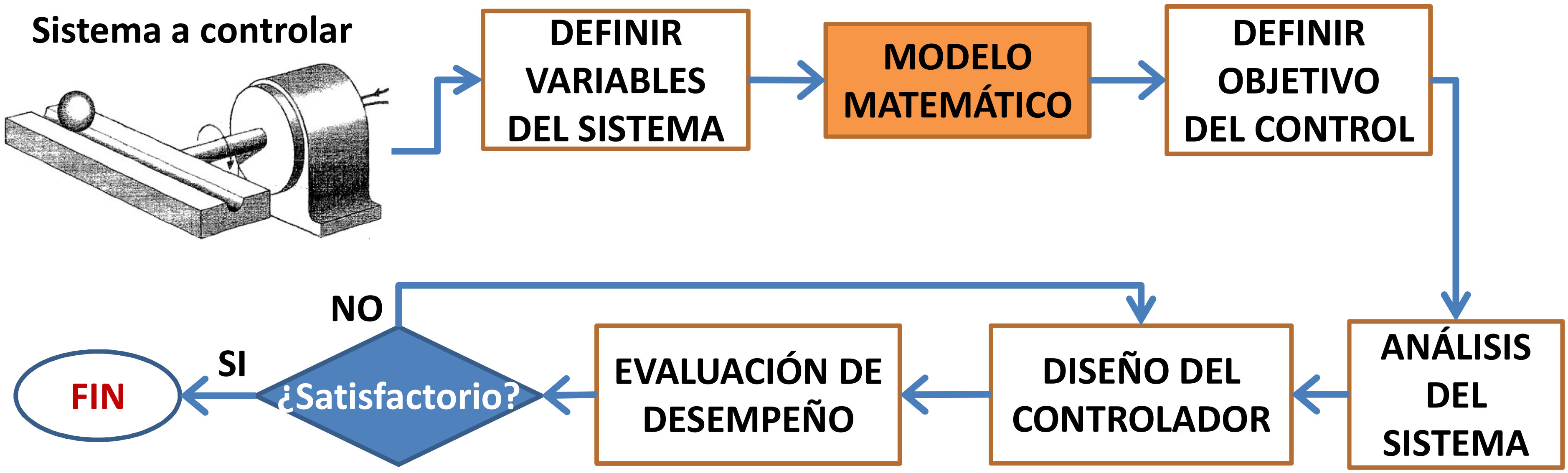
3. Modelado Matemático: ODEs de Sistemas Físicos

Profesor: **Luis Enrique González Jiménez**
Departamento de Electrónica, Sistemas e Informática (DESI)

Hora: ***Ma-Vi 16:00 - 18:00***

Aula: ***T-201***

PROCESO DE DISEÑO DE CONTROLADORES



Ya hablamos de la importancia del modelo matemático, y que el modelo se obtiene como ecuaciones diferenciales que corresponden a leyes físicas.

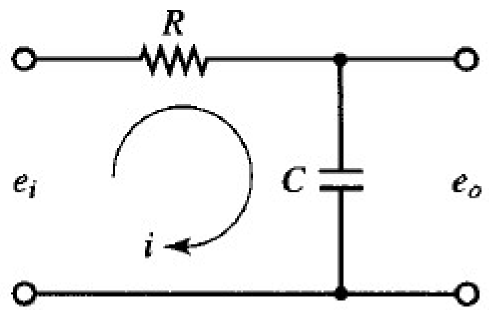
¿Pero qué es eso de modelar matemáticamente?

MODELO MATEMÁTICO

Un **modelo matemático** de un sistema físico es un **conjunto de ecuaciones** que representan, de manera fiable, el comportamiento **(dinámica, cinemática, etc.)** del mismo.

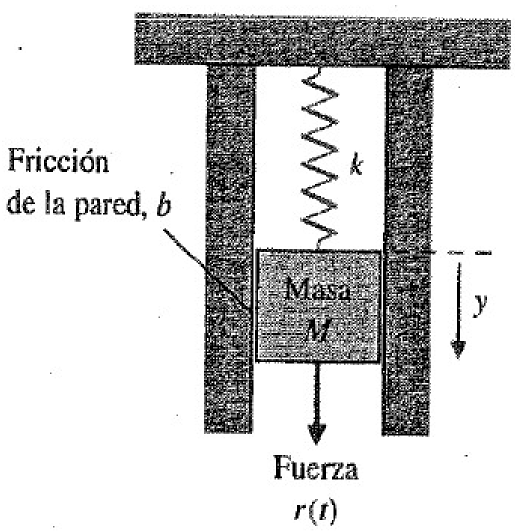
El comportamiento dinámico de sistemas (mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, etcétera) se describe en términos de **ecuaciones diferenciales**. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen en base a **leyes físicas** que gobiernan el sistema.

EJEMPLOS:



LEYES DE KIRCHHOFF

$$i = \frac{e_i - e_0}{R}, e_0 = \frac{\int i dt}{C}$$

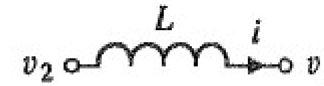
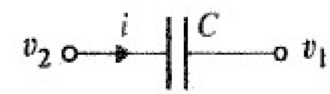
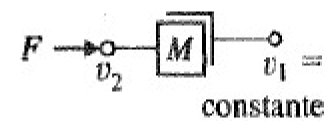
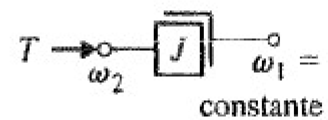
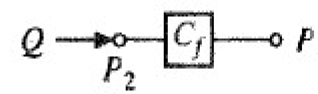
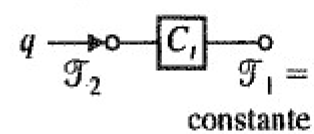


2da LEY DE NEWTON

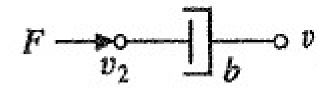
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = r(t)$$

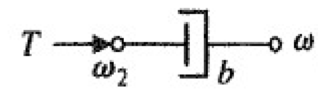
¿Es necesario conocer las leyes físicas a profundidad?

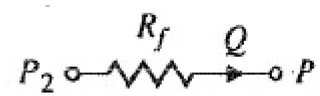
No, pero si es recomendable tener conocimientos básicos. Además existen las tablas de fórmulas ☺

Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía E o potencia $\mathcal{P}$	Símbolo
Almacenamiento inductivo	Inductancia eléctrica	$v_{21} = L\frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Li^2$	
	Resorte traslacional	$v_{21} = \frac{1}{k}\frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{F^2}{k}$	
	Resorte rotacional	$\omega_{21} = \frac{1}{k}\frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2}\frac{T^2}{k}$	
	Inercia del fluido	$P_{21} = I\frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2}IQ^2$	
Almacenamiento capacitivo	Capacitancia eléctrica	$i = C\frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Cv_{21}^2$	
	Masa trasnacional	$F = M\frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2}Mv_2^2$	
	Masa rotacional	$T = J\frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2}J\omega_2^2$	
	Capacitancia del fluido	$Q = C_f\frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2}C_fP_{21}^2$	
	Capacitancia térmica	$q = C_t\frac{d\mathcal{T}_2}{dt}$	$E = C_t\mathcal{T}_2$	

Disipadores de energía	Resistencia eléctrica	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$
	Amortiguador traslacional	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$
	Amortiguador rotacional	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$
	Resistencia del fluido	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$
	Resistencia térmica	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$







¿Cómo manipular y resolver ecuaciones diferenciales?

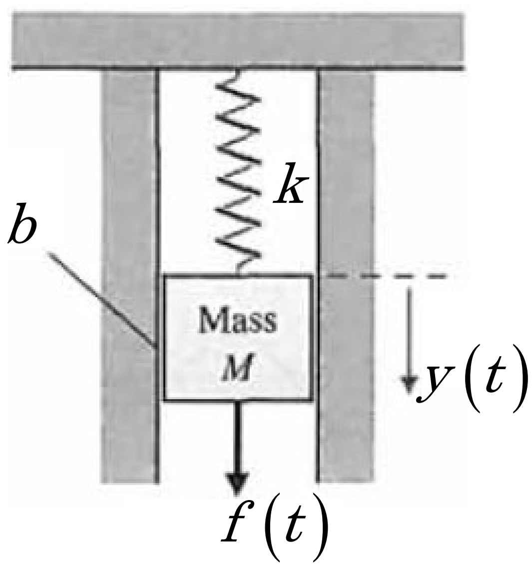
Hay muchos caminos, nosotros veremos dos:

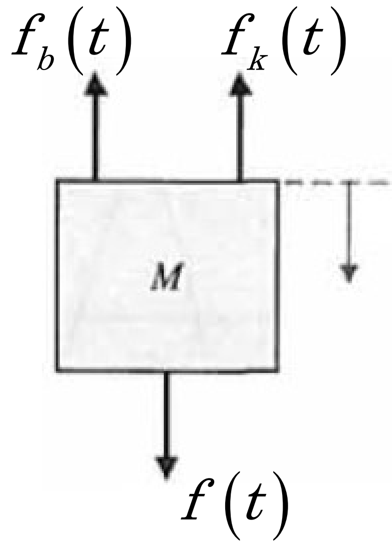
- **Utilizar lo desarrollado por un viejo amigo suyo… Laplace**

- **Resolver las ecuaciones computacionalmente (Matlab)**

Modelo de un sistema Masa-Resorte

PLANTA





Variable Controlada: $y(t)$

Variable Manipulada: $f(t)$

Referencia: $y_{ref}(t)$

Perturbación:
Viento, vibraciones externas

Objetivo de Control:
Que la posición de la masa se comporte de manera deseada.

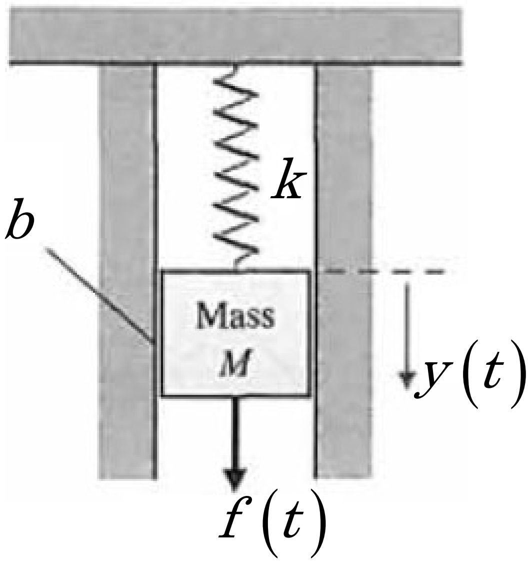
LEYES FÍSICAS

$$f_b(t) = b\frac{dy(t)}{dt}, \qquad f_k(t) = ky(t)$$

Fuerza de fricción — **Fuerza en el resorte**

Sistema de Referencia: Por simplicidad, se asume que la posición de la masa es cero en su posición de equilibrio (el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre la masa) y que el desplazamiento positivo es hacia abajo.

PLANTA



(2da Ley de Newton)

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}=f(t)-ky(t)-b\frac{dy(t)}{dt}$$

- **La fuerza del resorte es negativa puesto que siempre tiene signo contrario a $\boldsymbol{y(t)}$.**

- **La fuerza de fricción es negativa puesto que siempre tiene signo contrario a $\boldsymbol{\frac{dy(t)}{dt}}$.**

Re-ordenando la ecuación obtenemos:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=f(t)$$

Ahora sí recurrimos a nuestro amigo SUPER LAPLACE

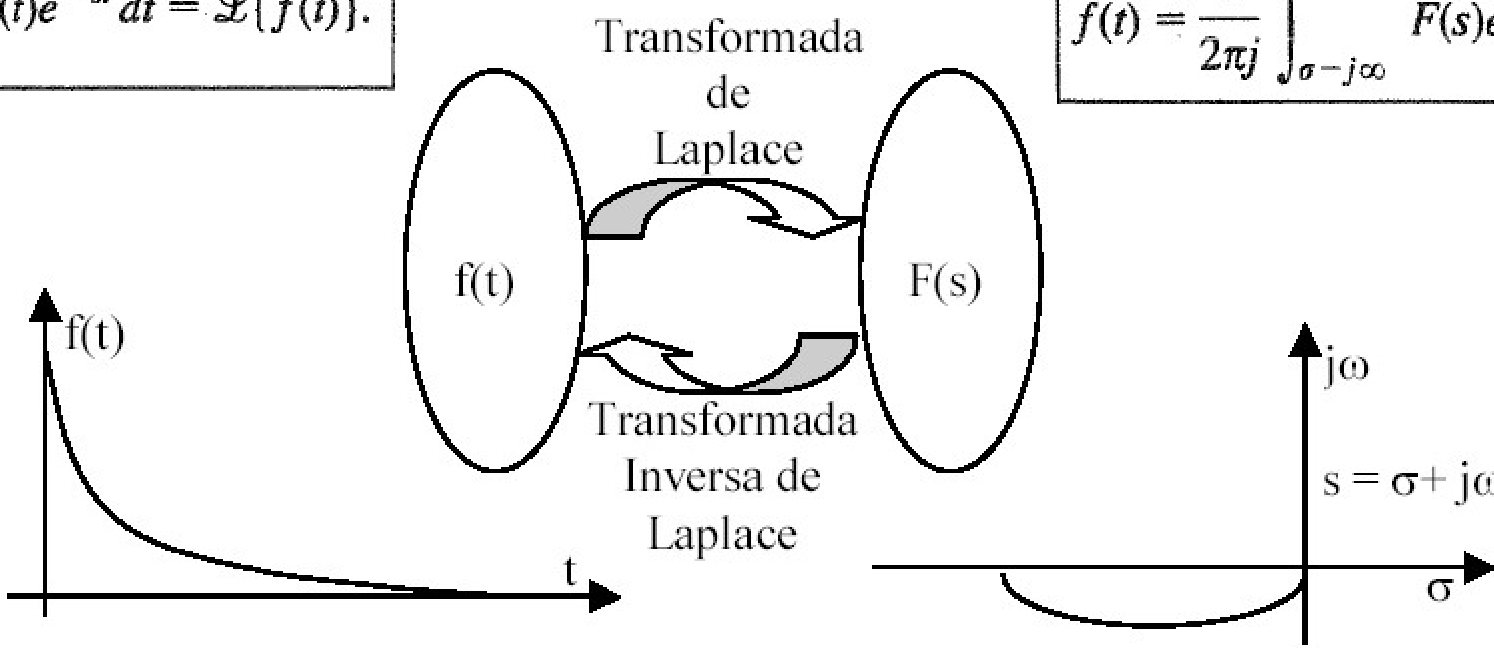
La **Transformada de Laplace** permite transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, más fáciles de resolver.

Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt = \mathscr{L}\{f(t)\}.$$

Transformada Inversa de Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{+st}\,ds.$$



¿ES NECESARIO EVALUAR LAS INTEGRALES QUE DEFINEN LA TRANSFORMADA?

La buena noticia es que **NO** es necesario. Existe una tabla con las propiedades de la transformada y con pares de transformadas de Laplace para las funciones en el tiempo más comunes.

Tabla de pares de transformada de Laplace

f(t)	F(s)
Función escalón f(t) = 1(t) = 1	$\frac{1}{s}$
Función rampa f(t) = t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(n=1,2,3\ldots)$	$\frac{1}{s^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$sen(w \cdot t)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$\cos(w \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$sen(w \cdot t+\theta)$	$\frac{s \cdot sen\theta+\omega \cdot \cos\theta}{s^2+w^2}$
$\cos(w \cdot t+\theta)$	$\frac{s \cdot sen\theta-\omega \cdot \cos\theta}{s^2+w^2}$
$e^{-at} sen(w \cdot t)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
$e^{-at}\cos(w \cdot t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$
$senh(w \cdot t)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$\cosh(w \cdot t)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$s \cdot F(s)-f(0^+)$
$\int_0^t f(t) \cdot dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$a_1 \cdot f_1(t)+a_2 \cdot f_2(t)$	$a_1 \cdot F_1(s)+a_2 \cdot F_2(s)$
$f(1-\tau) \cdot 1(t-\tau)$	$e^{-\tau s} \cdot F(s)$
$\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot dt$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. **Linealidad**: Si c_1, c_2 son constantes y $f_1(t)$, $f_2(t)$ son funciones cuyas transformaciones de Laplace son $F_1(t)$, $F_2(t)$ entonces

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$$

2. **Derivadas**:

$$\mathcal{L}\{f_1{}'(t)\} = sF_1(s) - f_1(0)$$
$$\mathcal{L}\{f_1{}''(t)\} = s^2 F_1(s) - s f_1(0) - f_1'(0)$$
$$\mathcal{L}\{f_1^n(t)\} = s^n F_1(s) - s^{n-1} f_1(0) - \cdots - f_1^{n-1}(0)$$

3. **Integrales**:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad , \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t e^{-u}\,du\right\} = \frac{1}{s(s+1)}$$

4. **Teorema del valor Final**: Si $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe entonces

$$\lim_{t\to\infty} f(t) := f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s), \quad t > 0$$

5. **Teorema del Valor Inicial**:

$$f\left(0^{+}\right)=\lim_{t\to 0} f\left(t\right)=\lim_{s\to\infty} sF\left(s\right), \quad t>0$$

6. **Integral de Convolución**:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t) * f_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

Continuamos con el sistema Masa-Resorte

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}\{f(t)\}}$$

$$M\left[s^2Y(s)-sy(0^-)-\frac{dy(0^-)}{dt}\right]+b\left[sY(s)-y(0^-)\right]+kY(s)=F(s)$$

Si definimos $f(t)=0, \frac{dy(0^-)}{dt}=0$ y resolvemos para $Y(s)$ obtenemos

$$Y(s)=\frac{My(0^-)s+by(0^-)}{Ms^2+bs+k}=\frac{p(s)}{q(s)}$$

Al polinomio $q(s)$ se le conoce como **ecuación característica,** ya que sus raíces determinan el carácter de la respuesta en el tiempo de $Y(s)$. A las raíces de la ecuación característica se les conoce como **polos** del sistema y a las raíces del numerador se les conoce como **ceros** del sistema.

Para analizar un caso específico, definamos $y(0^-)=1, M=1, k=2, b=3$ resultando en el sistema:

$$Y(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{Polos}=-2,-1\\ \text{Ceros}=-3\end{array}$$

Ahora, si queremos obtener la respuesta temporal $y(t)$ tenemos que aplicar la **transformada inversa de Laplace**. ¿Podemos hacerlo directamente? Echemos un vistazo a nuestra tabla…

Para poder aplicar la transformada inversa, desarrollaremos nuestra ecuación en **fracciones simples:**

$$Y(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}=\frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2}{(s+2)}$$

Una manera de obtener los numeradores de las fracciones simple (llamados **residuos**) es eliminar del denominador en la ecuación original el factor del residuo a calcular y sustituir el polo correspondiente, esto es:

$$k_1=\left.\frac{s+3}{s+2}\right|_{s=-1}=2 \qquad k_2=\left.\frac{s+3}{s+1}\right|_{s=-2}=-1$$

De esta forma nuestra ecuación se convierte en

$$Y(s)=\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

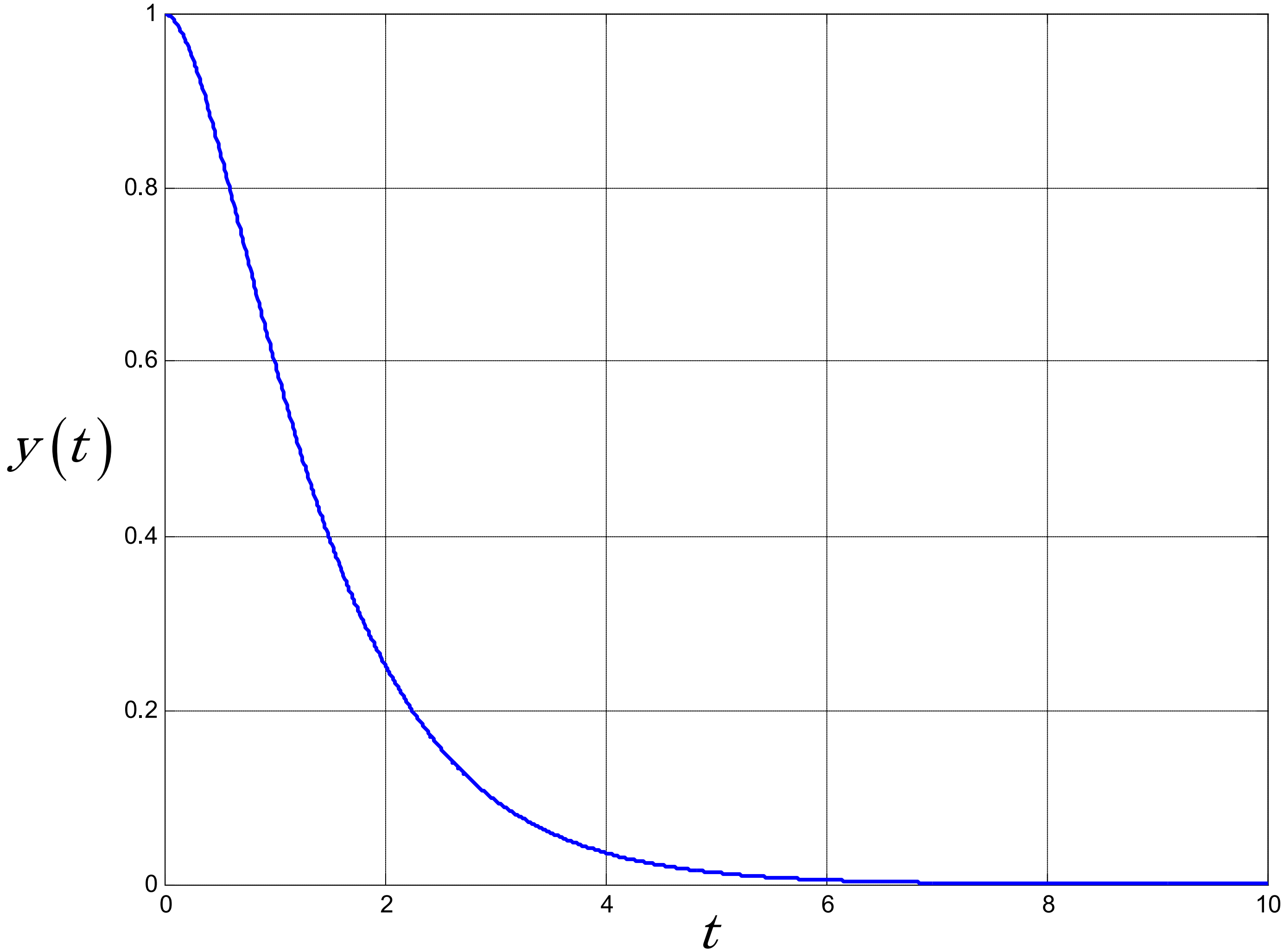
¿A estas **fracciones simples** podemos aplicarles la **transformada inversa de Laplace**?

La respuesta es **SI** y quedaría como:

$$Y(s)=\frac{2}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)} \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{} y(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

Y obtenemos la respuesta en tiempo de nuestra variable de interés.

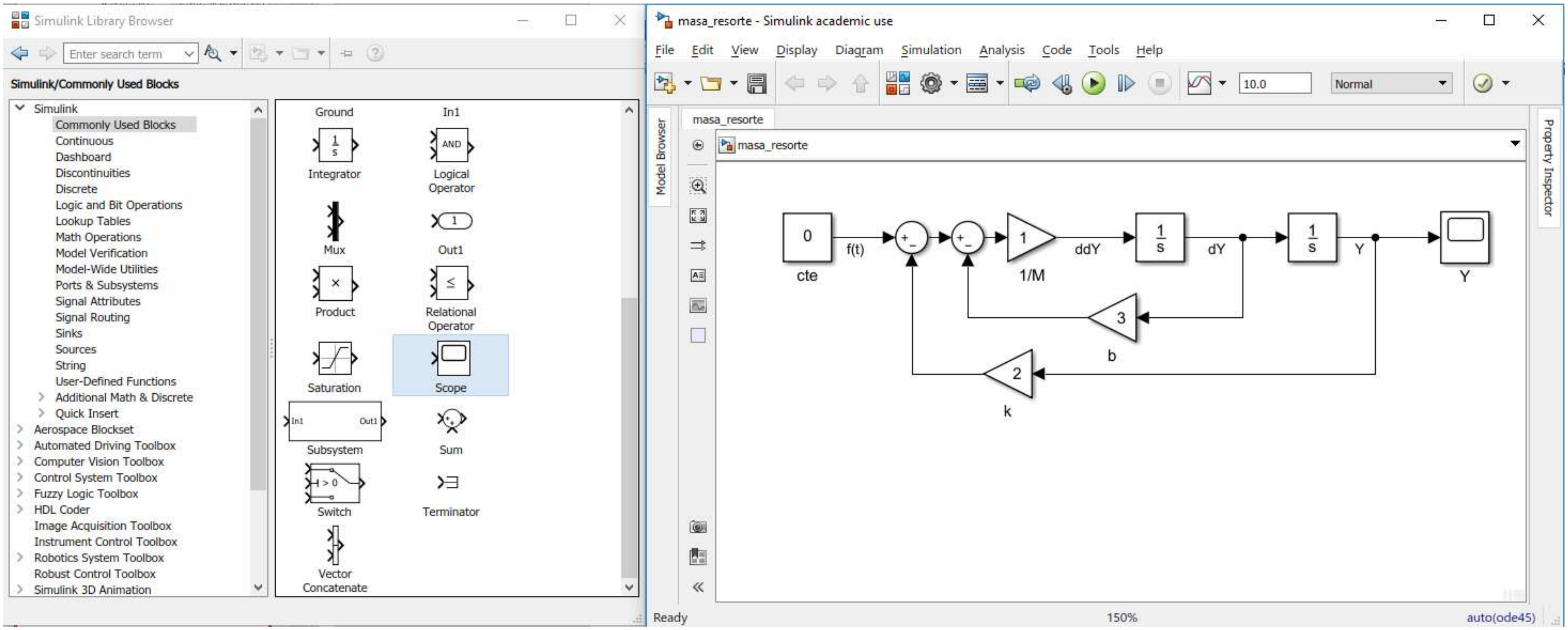
Gráfica Usando MatLab



¿Saben todos cómo obtener esta gráfica en Matlab?

```
>> t=(0:0.01:10);
>> plot(t,2*exp(-t)-exp(-2*t),'b','linewidth',1.5); grid;
```

Gráfica Usando Simulink



Simulink es la versión gráfica de Matlab. Ambos contienen básicamente las mismas funciones. Uno tiene ventajas frente al otro y viceversa.

Validando resultados…

¿Cómo saber que el modelo obtenido corresponde al sistema real?
¿Qué hacer con el modelo para validar su funcionamiento?

Por ejemplo, si definimos $k = 0.05$ ¿Qué cambiaría en la respuesta del sistema? ¿Tendría sentido esta nueva respuesta?

Podemos simular desde la ecuación compleja de $Y(s)$ para modificar condiciones iniciales y parámetros, y comparar el comportamiento resultante con el del sistema real.

$$Y(s) = \frac{My(0^-)s + by(0^-)}{Ms^2 + bs + k}$$ ⟹ **Defino nuevos parámetros y condición inicial** ⟹ **Anti-transformo y grafico**

Tarea Puntos Extra (TPE1):

- **Obtener y graficar la función de la respuesta del sistema con k=0.05. Explicar si tiene sentido la nueva respuesta.**
- **Proponer un cambio a otro parámetro (M o b) y obtener lo mismo del inciso anterior.**