ITESO

Universidad Jesuita de Guadalajara

Sistemas de Control Automático

Diseño de Control por Retroalimentación del Error

Profesor: Luis Enrique González Jiménez

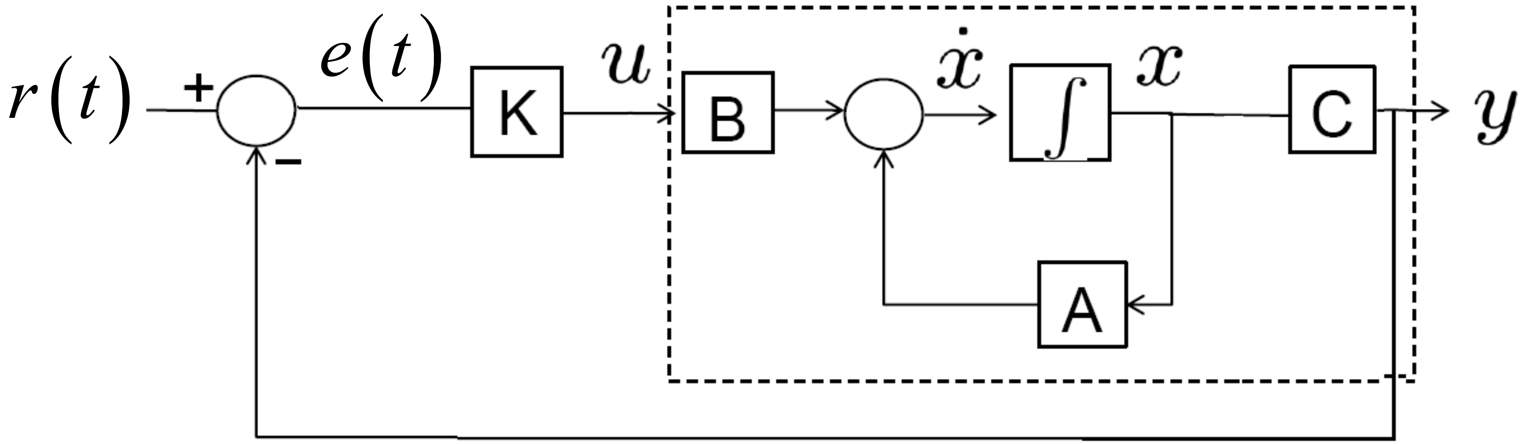
Departamento de Electrónica, Sistemas e Informática (DESI)

Hora: Lu-Mi 18:00 - 20:00

Aula: D-308

En los ejemplos que hemos visto, solo se han seguido referencias constantes, debido a la forma en que se definió la ganancia F.

Pero… ¿Y si deseamos que los estados sigan referencias variantes en el tiempo?



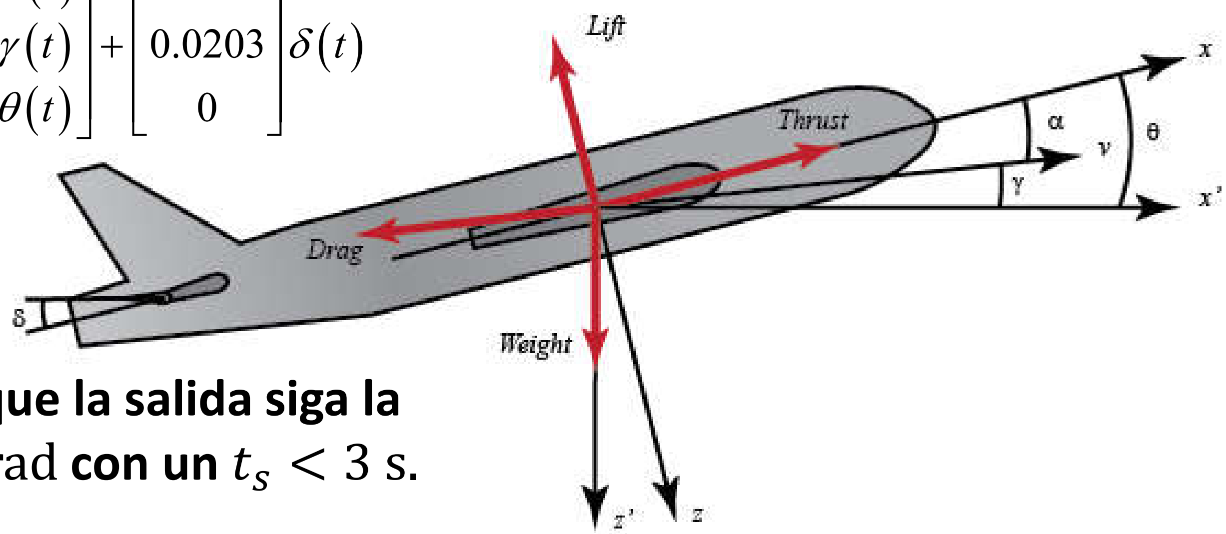
Una forma de lograr esto, es haciendo un <u>cambio de variable</u>. Definimos una variable de error $e(t) = r(t) - y(t)$ y regulamos esta variable de error (es decir la llevamos a cero).

Esto se logra asignando una dinámica lineal con polos estables a esta nueva variable de forma que $e(t) \rightarrow 0$ y, por lo tanto $y(t) \rightarrow r(t)$ cumpliendo el objetivo de control ☺

Problema: Un modelo reducido de un avión se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix}\dot{\alpha}(t)\\ \dot{\gamma}(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.313 & 56.7 & 0\\ -0.0139 & -0.426 & 0\\ 0 & 56.7 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha(t)\\ \gamma(t)\\ \theta(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.232\\ 0.0203\\ 0\end{bmatrix}\delta(t)$$

$$y(t)=\alpha(t)+\theta(t)$$



Diseñe un controlador para que la salida siga la referencia $r(t) = 1.5sin(t)$ rad **con un** $t_s < 3$ s.

Solución: El modelo en espacio de estados queda como

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-0.313 & 56.7 & 0\\ -0.0139 & -0.426 & 0\\ 0 & 56.7 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0.232\\ 0.0203\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)$$

REQUERIMIENTOS
$t_s < 3\ s$ y $r(t) = 1.5sin(t)$

DINÁMICA DE ERROR
☺
¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?
☺

Definimos la variable de error de interés

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Nuestro nuevo estado es la variable de error. Entonces, obtenemos su modelo dinámico como:

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{y}(t)$$
$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - C\dot{x}(t)$$
$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - C[Ax(t) + Bu(t)]$$
$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - CAx(t) - CBu(t)$$

¿es controlable este nuevo sistema?

Usamos $u(t)$ para definir la dinámica de $\dot{e}(t)$, entonces solo es necesario que CB tenga rango pleno ($\det(CB) \neq 0$) para poder hacerlo.

En otras palabras, CB es la **matriz de controlabilidad** del sistema de error.

Validamos

$$\det(CB) = 0.232$$

¡Sistema de Error Controlable!

REQUERIMIENTOS
$t_s < 3\ s$ y $r(t) = 1.5sin(t)$

DINÁMICA DE ERROR

☺

¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?

☺

OBTENEMOS $u(t)$

$$u(t) = (CB)^{-1}[\dot{r}(t) - CAx(t) - Ke(t)]$$

Queremos definir una dinámica de error lineal y estable

$$\dot{e}(t) = K_e e(t)$$

donde K_e tenga polos con parte real negativa.

Entonces del sistema de error

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - CAx(t) - CBu(t)$$

Obtenemos $u(t)$ como

$$u(t) = (CB)^{-1}[\dot{r}(t) - CAx(t) - K_e e(t)]$$

OJO: Es necesario conocer la derivada de la referencia $\dot{r}(t)$.

Como en este sistema solo hay una variable de error, K_e es una constante y solo hay un polo que asignar $(p = K_e)$ ¿cómo diseñamos K_e para cumplir el t_s requerido? Recordemos la respuesta de un sistema de 1er orden.

REQUERIMIENTOS

$t_s < 3\ s$ y $r(t) = 1.5sin(t)$

DINÁMICA DE ERROR

☺

¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?

☺

OBTENEMOS $u(t)$

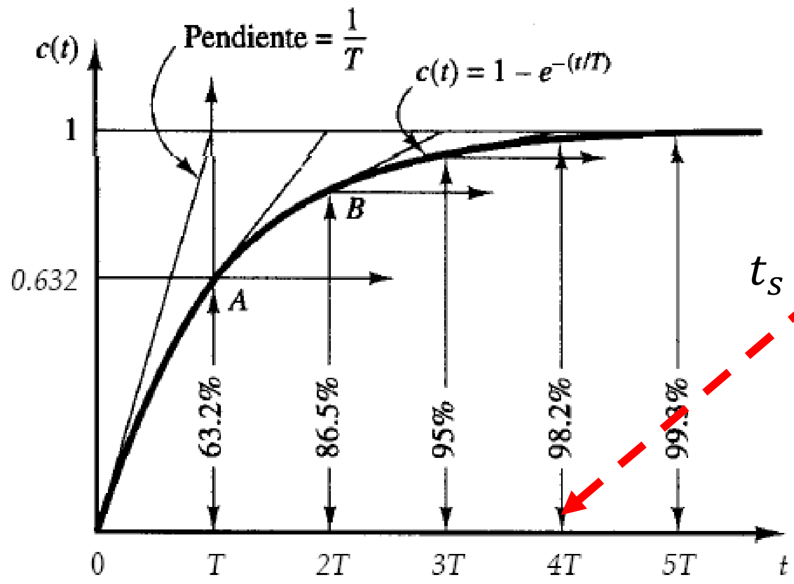
$$u(t) = (CB)^{-1}[\dot{r}(t) - CAx(t) - K_e e(t)]$$

DEFINIMOS K_e (polo deseado)

$K_e = -4/3$

¿RESPUESTA DESEADA?

¿?



$$G(s) = \frac{A}{s + \frac{1}{T}} \quad p = -\frac{1}{T}$$

$$t_s = 4T$$

$$\boxed{K_e = -\frac{4}{t_s}}$$

Por lo tanto, una forma de definir K_e es

$$K_e = -4/3$$

De hecho, debido al requerimiento, cumplir $K_e < -4/3$ es suficiente y necesario.

Con esto, logramos que $e(t) \rightarrow 0$ y $y(t) \rightarrow 1.5sin(t)$ en menos de 3 s. Validemos con Matlab ☺

Código .m

```
function Avion_ERROR_plot( tspan, x0, Pd)

global A B C D Ke

%MATRICES DEL SISTEMA
A = [-0.313 56.7 0;-0.0139 -0.426 0;0 56.7 0];
B = [0.232;0.0203;0];
C = [1 0 1];
D = 0;

%CALCULAMOS GANANCIAS DE CONTROL
Ke  = Pd;

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (
[t, X] = ode45(@Avion_EROR_sys, tspan, x0);

%Variables a Graficar
%ref = 1.5*sin(t);        dref = 1.5*cos(t); %Referencias Variantes
ref = 1.5;                dref = 0;           %Referencias constantes

e = ref - X*C';
U = (C*B)^-1*(dref - X*(C*A)' - Ke*e);

figure;
subplot(3,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(3,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(3,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;

%Valor Máximo de Señal de Control
maxU = max(abs(U))
figure;
subplot(2,1,1); plot(t, X*C', t, ref, 'red');  title('SALIDA Y REFERENCIA');  grid;
subplot(2,1,2); plot(t, U);  title('ENTRADA');  grid;

end
```

```
function dX = Avion_EROR_sys( t, X)

global A B C D Ke

%ref = 1.5*sin(t);  dref = 1.5*cos(t);   %Referencias Variantes
ref = 1.5;          dref = 0;           %Referencias constantes

%Variable de Error
e = ref - C*X;

% Ley de control
U = (C*B)^-1*(dref - C*A*X - Ke*e);

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

$K_e = -\frac{4}{3}, r(t) = 1.5\sin(t), \dot{r}(t) = 1.5\cos(t), X(0) = [2, 0, 0]$

REQUERIMIENTOS

$t_s < 3\ s$ y $r(t) = 1.5sin(t)$

DINÁMICA DE ERROR

☺

¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?

☺

OBTENEMOS $u(t)$

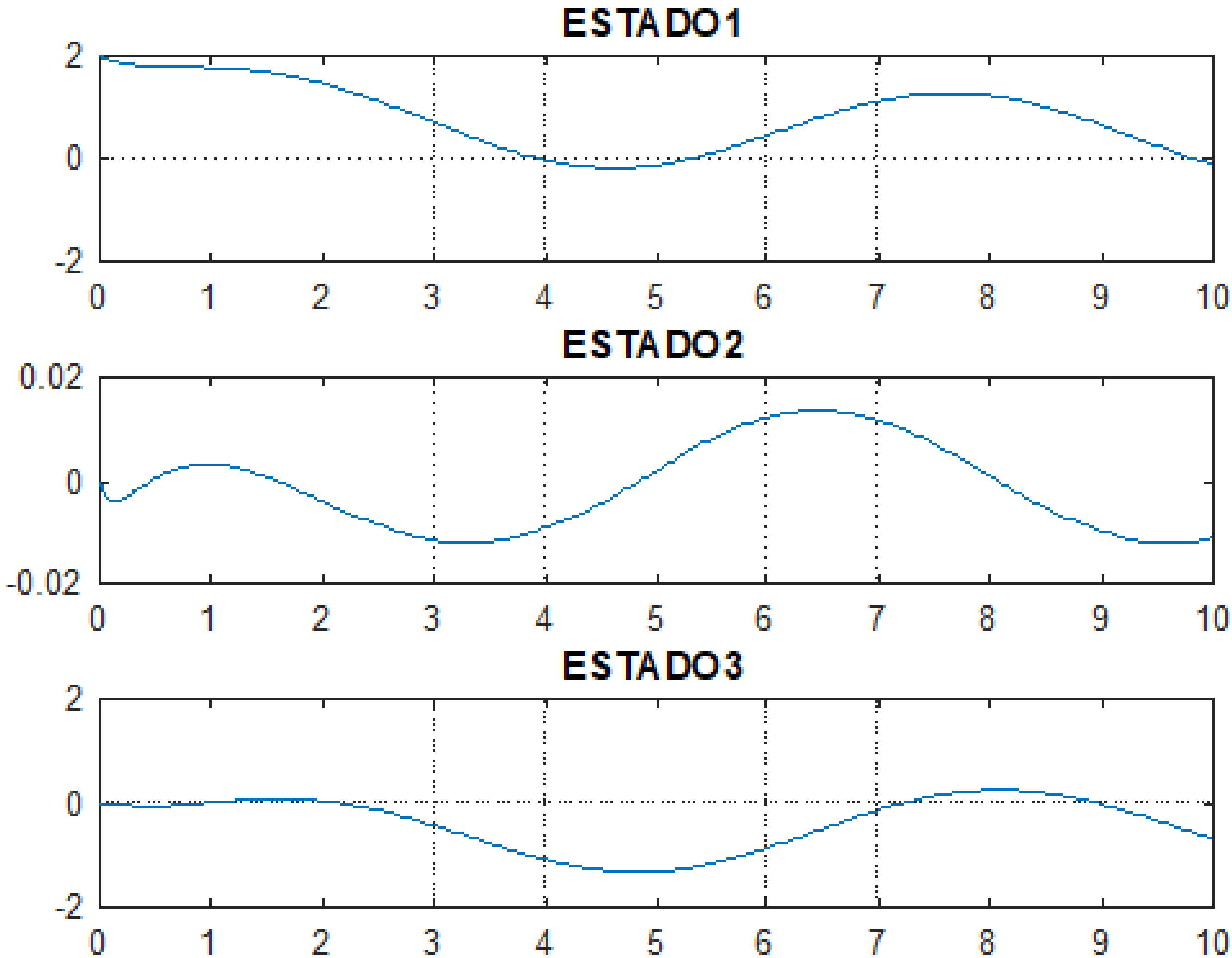
$$u(t) = (CB)^{-1}[\dot{r}(t) - CAx(t) - K_e e(t)]$$

DEFINIMOS K_e **(polo deseado)**

$K_e = -4/3$

¿RESPUESTA DESEADA?

¿?



$$K_e = -\frac{4}{3}, r(t) = 1.5\sin(t), \dot{r}(t) = 1.5\cos(t), X(0) = [2,0,0]$$

REQUERIMIENTOS

$t_s < 3\ s$ y $r(t) = 1.5sin(t)$

DINÁMICA DE ERROR

☺

¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?

☺

OBTENEMOS $u(t)$

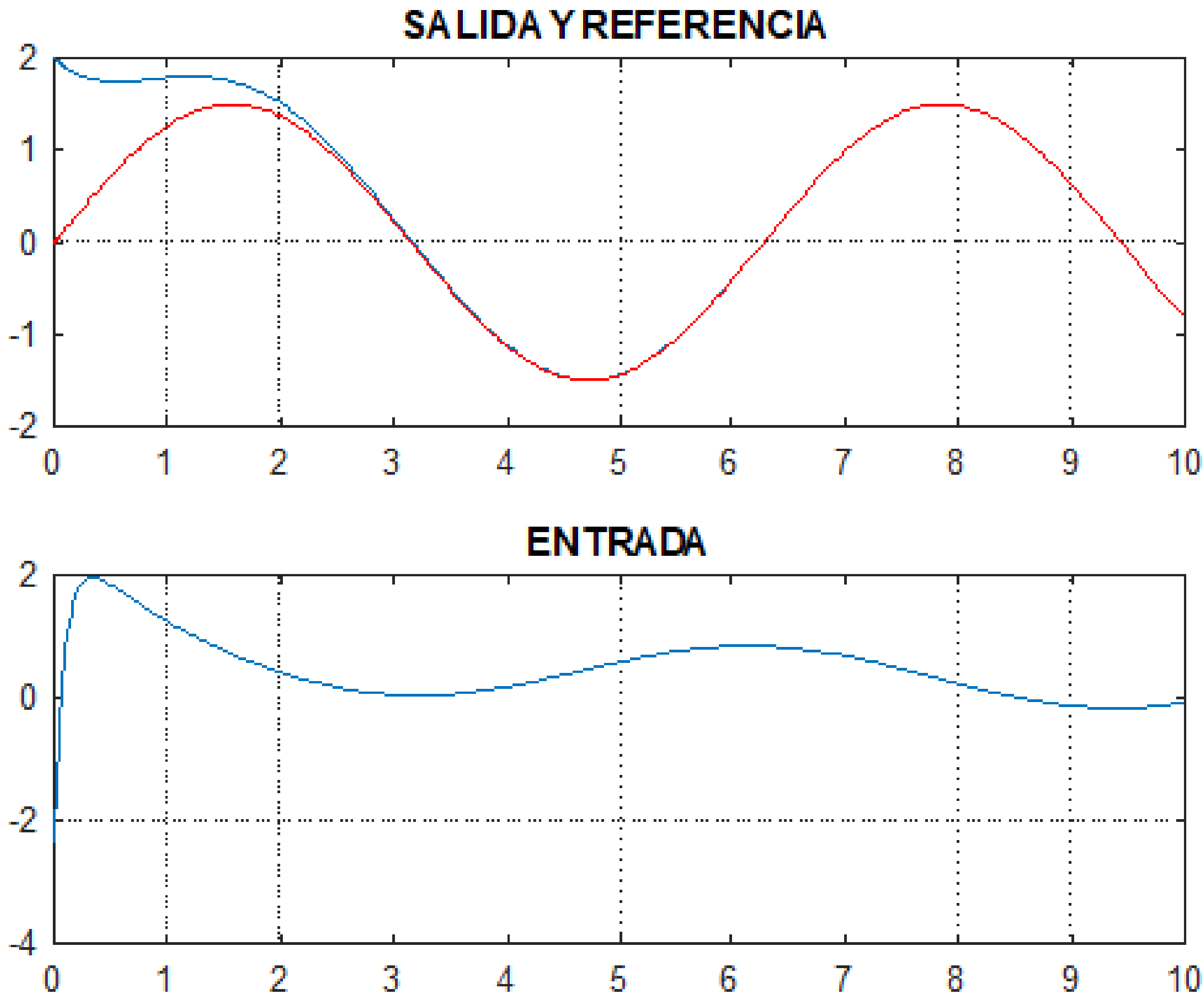
$$u(t) = (CB)^{-1}[\dot{r}(t) - CAx(t) - K_e e(t)]$$

DEFINIMOS K_e **(polo deseado)**

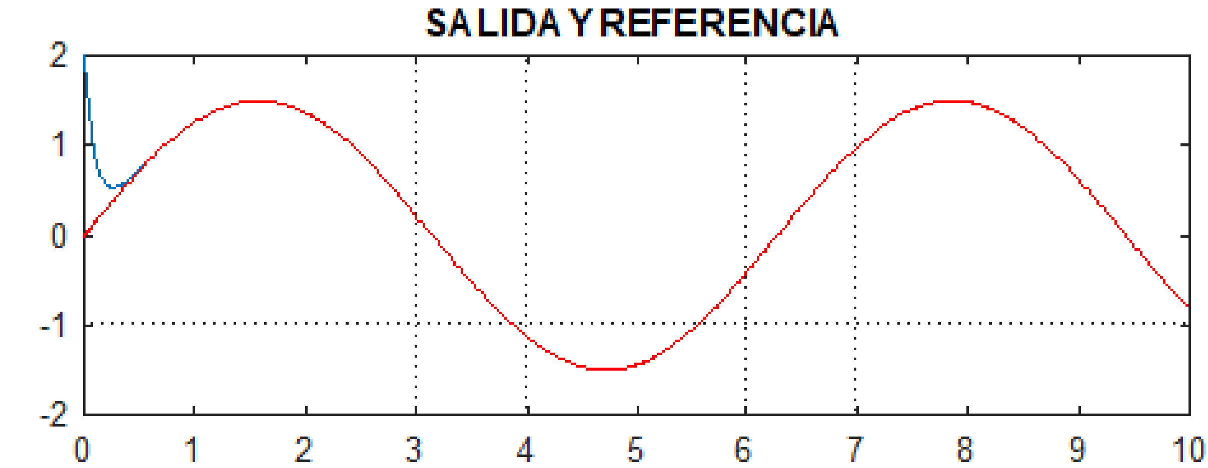
$K_e = -4/3$

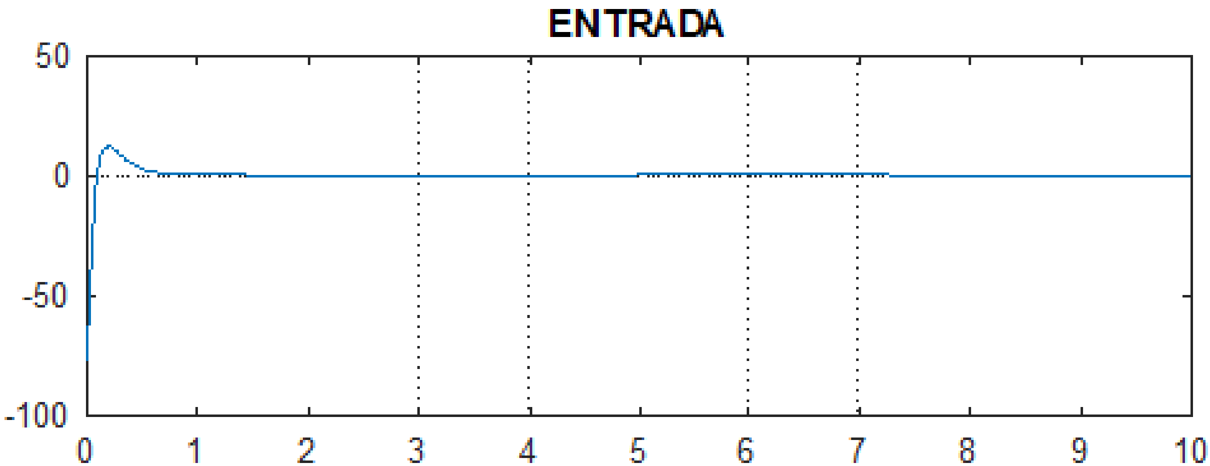
¿RESPUESTA DESEADA?

☺



$$K_e = -10, r(t) = 1.5\sin(t), \dot{r}(t) = 1.5\cos(t), X(0) = [2,0,0]$$





¿Diferencias?

Ahora es $p_d = -10$, por lo que converge más rápido pero demanda una señal de control de mayor magnitud.

¿Cuál es el nuevo t_s?

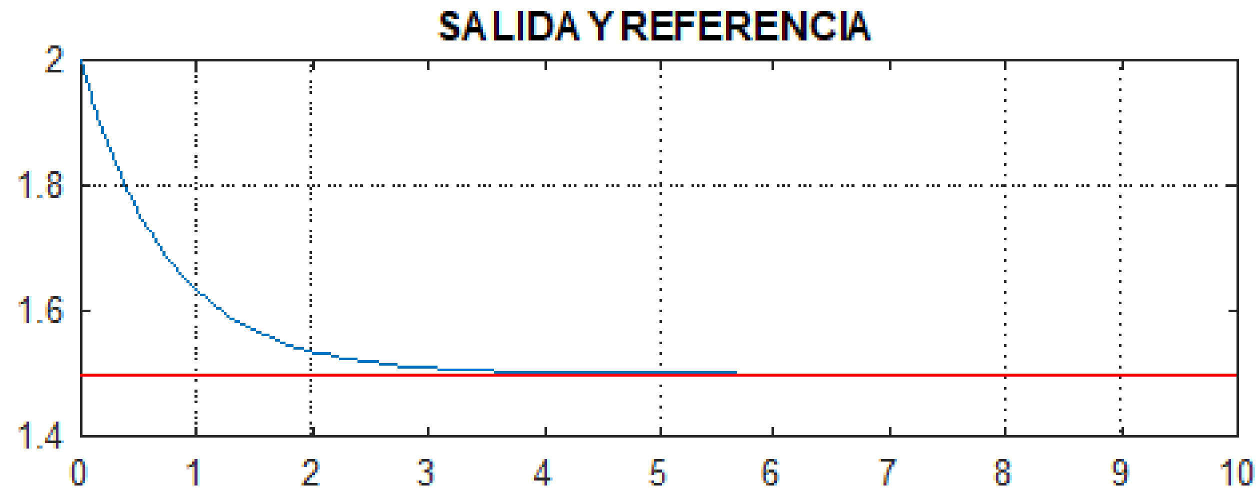
De la fórmula original

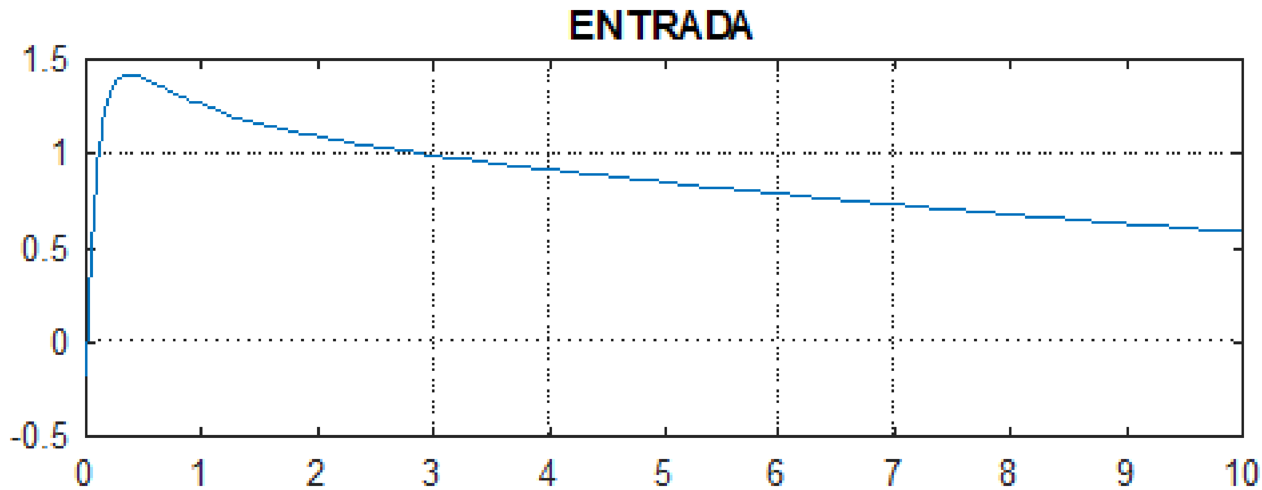
$$K_e = -\frac{4}{t_s}$$

Obtenemos

$$t_s = \frac{4}{10} = 0.4 \text{ s}$$

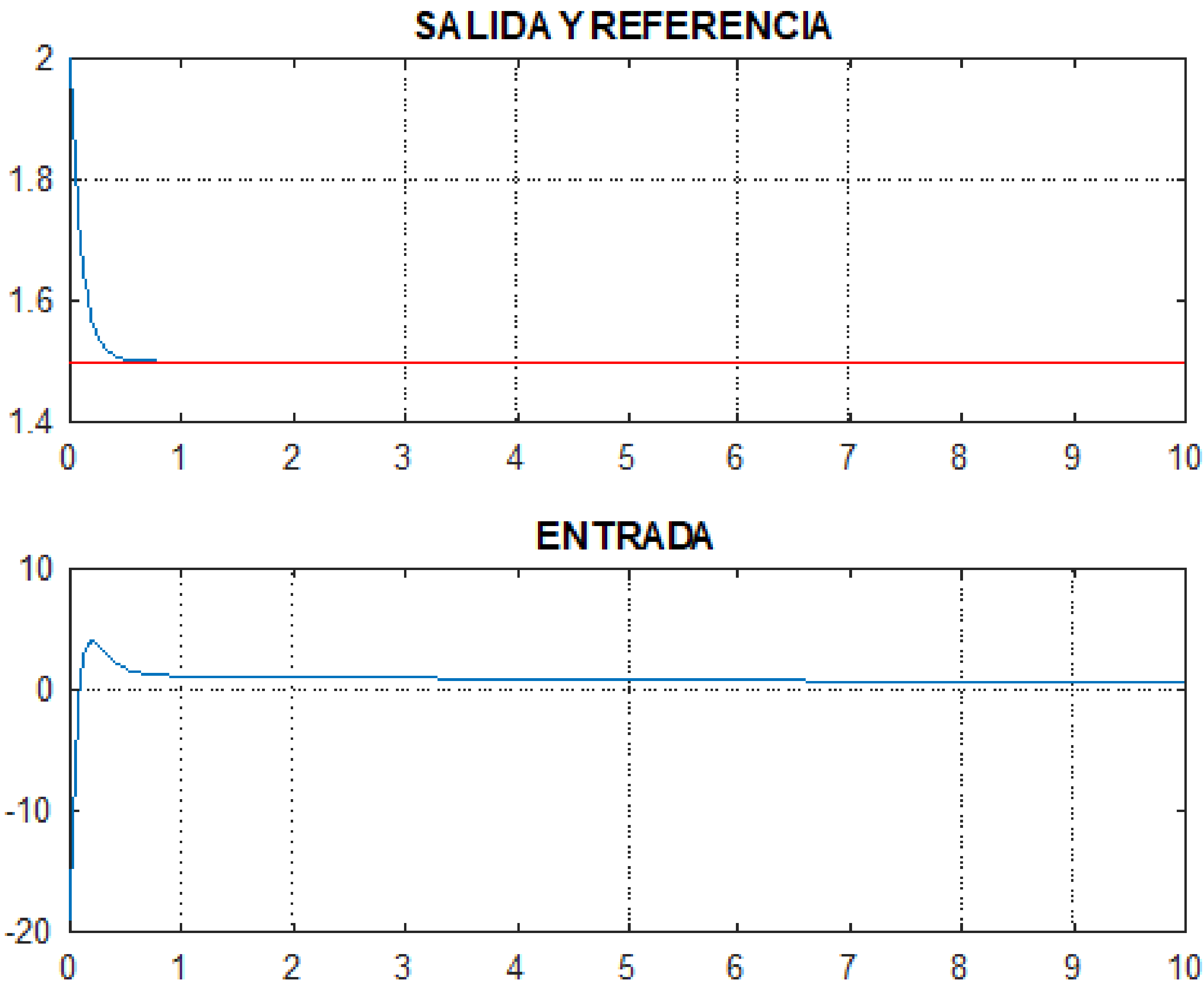
$$K_e = -\frac{4}{3}, r(t) = 1.5, \dot{r}(t) = 0, X(0) = [2, 0, 0]$$





REFERENCIAS CONSTANTES ☺

$K_e = -10, r(t) = 1.5, \dot{r}(t) = 0, X(0) = [2, 0, 0]$

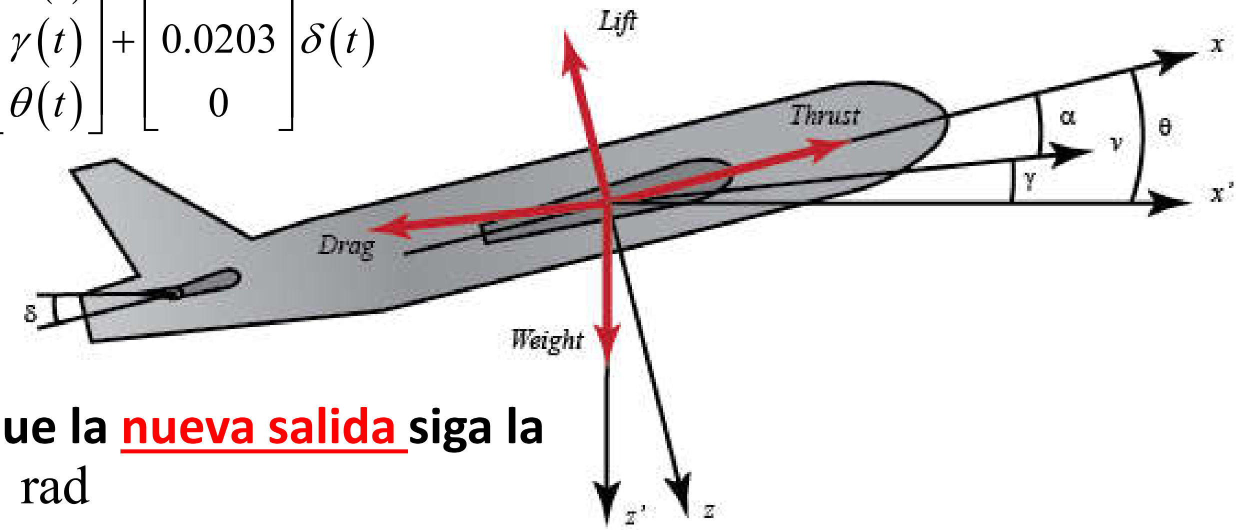


REFERENCIAS CONSTANTES CON MENOR t_s ☺

Problema: Un modelo reducido de un avión se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \gamma(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$$

$$y(t) = \theta(t)$$



Diseñe un controlador para que la nueva salida siga la referencia $y_{ref}(t) = 1.5\sin(t)$ rad

Solución: El modelo en espacio de estados queda como

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

REQUERIMIENTOS

$r(t) = 1.5sin(t)$

DINÁMICA DE ERROR

☺

¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?

☹

No podemos lograr el objetivo de control con este enfoque

Definimos la variable de error de interés

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Nuestro nuevo estado es la variable de error. Entonces, obtenemos su modelo dinámico como:

$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - \dot{y}(t)$$
$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - C\dot{x}(t)$$
$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - C[Ax(t) + Bu(t)]$$
$$\dot{e}(t) = \dot{r}(t) - CAx(t) - CBu(t)$$

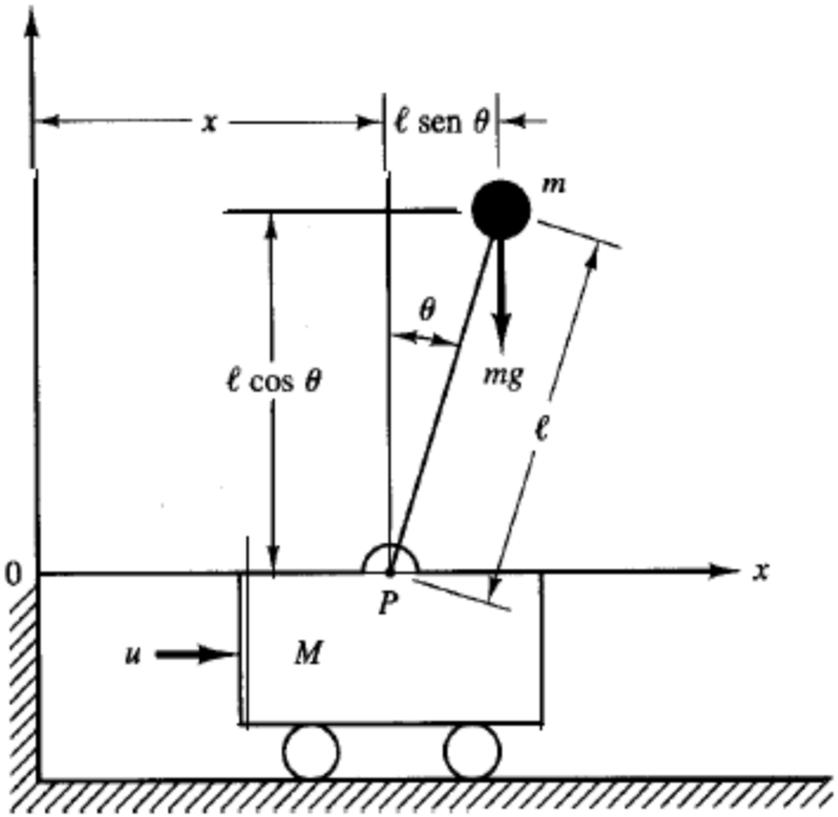
¿es controlable este nuevo sistema?

Usamos $u(t)$ para definir la dinámica de $\dot{e}(t)$, entonces solo es necesario que CB tenga rango pleno ($\det(CB) \neq 0$) para poder hacerlo.

En otras palabras, CB es la **matriz de controlabilidad** del sistema de error. Validamos

$$\det(CB) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.203 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

¡Sistema de Error No Controlable!



Como vimos anteriormente, si definimos los estados como

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = x, \quad x_4 = \dot{x}$$

las salidas

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

y los parámetros

$$\frac{M+m}{Ml}g = 20.601, \quad \frac{m}{M}g = 0.4905, \quad \frac{1}{Ml} = 1, \quad \frac{1}{M} = 0.5$$

Se obtiene el modelo en espacio de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Diseñe un controlador que logre que las salidas sigan las referencias

$$y_{ref} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5\sin(t) \\ 2 + 1.5\cos(t) \end{bmatrix}$$

REQUERIMIENTOS

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5\sin(t) \\ 2 + 1.5\cos(t) \end{bmatrix}$$

DINÁMICA DE ERROR

☺

Definimos la variable de error de interés

$$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

Nuestro nuevo estado es la variable de error. Entonces, obtenemos su modelo dinámico como:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{y}_{ref}(t) - C\dot{x}(t) \\ &= \dot{y}_{ref}(t) - C\left[Ax(t) + Bu(t)\right] \\ &= \dot{y}_{ref}(t) - CAx(t) - CBu(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{y}_{ref}(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \dot{r}_2(t) \end{bmatrix}}$$

REQUERIMIENTOS

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5\sin(t) \\ 2 + 1.5\cos(t) \end{bmatrix}$$

DINÁMICA DE ERROR

☺

¿SISTEMA DE ERROR CONTROLABLE?

☹

CAMBIAR C

¿Es controlable este nuevo sistema?

$$M_c = CB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad **no tiene rango pleno**, NO ES CONTROLABLE…

¿Cómo podemos interpretar esto?

La matriz de control, CB, **no relaciona directamente la entrada con la variable a controlar**. Por lo tanto, este enfoque no funciona.

Imaginemos que es más práctico modificar los tipos de sensores y propongamos sensar velocidades (en vez de posiciones) con

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las matrices quedarían como:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \rightarrow C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_c = CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Esto resuelve el problema de no tener una matriz de controlabilidad llena de ceros, pero… **¿Cuál es el rango de la matriz de controlabilidad?**

$$\boxed{rank\left(M_c\right) = 1}$$

¿Cómo podemos interpretar esto?

Solo podemos afectar la dinámica de error en una dimensión, ya que tenemos solo una entrada.

Estamos tratando de controlar dos variables (las salidas) con solo una entrada (fuerza sobre el carrito) ¿Es esto lógico? ¿Funcionará el control que diseñemos.

$$u(t) = (CB)^{-1}\left[\dot{y}_{ref}(t) - CAX(t) - K_e e(t)\right] \qquad \boxed{CB \Rightarrow \text{No es cuadrada!}}$$

Aquí hay dos opciones:

Agregar una columna a $\boldsymbol{B}$

(Incrementar actuadores)

- Proponemos

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow CB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

- $rank(CB) = 2$ **Sistema Controlable**
- La variable de error queda como

$$e = \begin{bmatrix} r_1 - y_1 \\ r_2 - y_2 \end{bmatrix}$$

AQUÍ CONTROLAMOS DOS SALIDAS

Quitar una fila a $\boldsymbol{C}$

(Quitar/Ignorar un sensor)

- Proponemos

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow CB = -1$$

- $rank(CB) = 1$ **Sistema Controlable**
- La variable de error queda como

$$e = [r_1 - y_1]$$

AQUÍ SOLO CONTROLAMOS UNA SALIDA

En ambos casos la ley de control queda como:

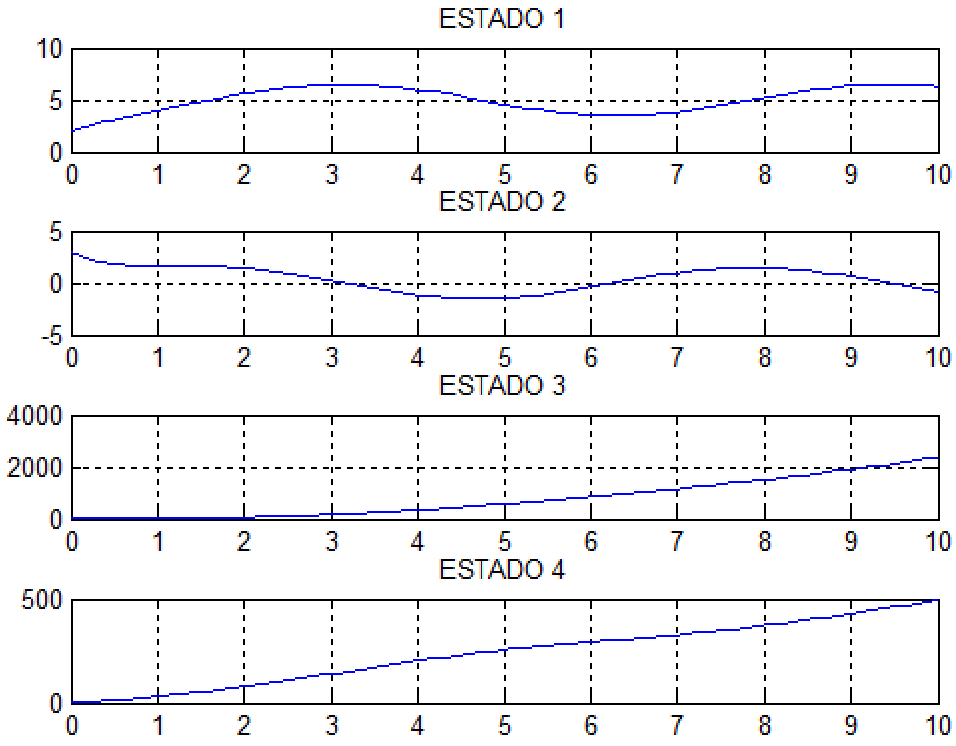
$$u(t) = (CB)^{-1}\left[\dot{y}_{ref}(t) - CAX(t) - K_e e(t)\right]$$

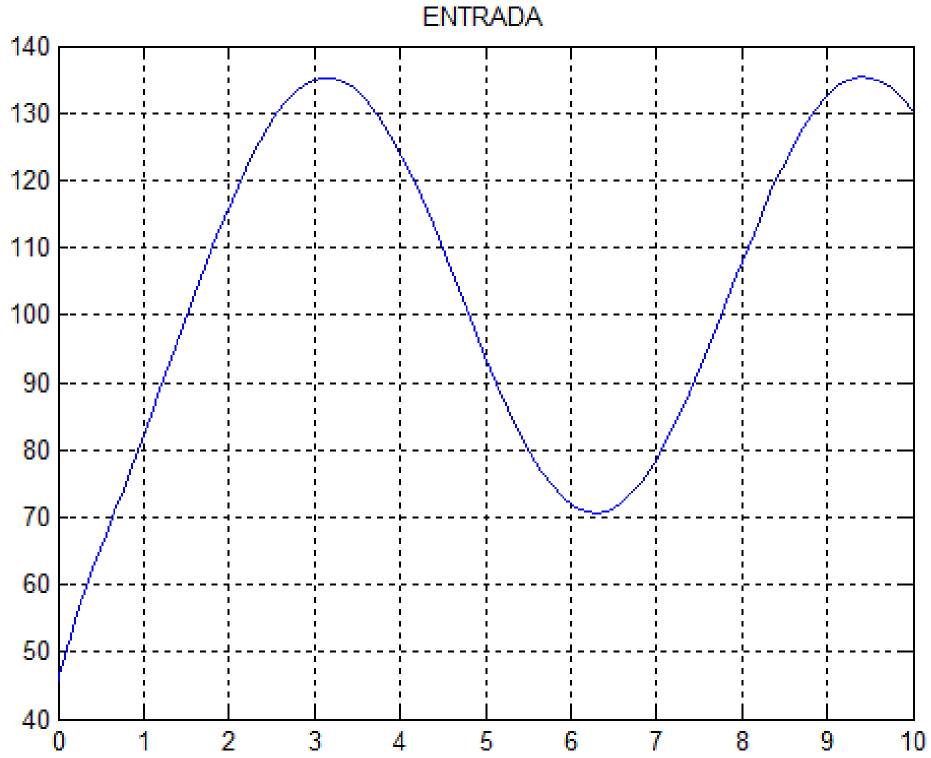
$$r(t) = 1.5sin(t), C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], X(0) = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0], K_e = p_d = -2$$

```
function PInv_ERROR_plot( tspan, x0, Pd)

global A B C Ke

%MATRICES DEL SISTEMA
A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-.4905 0 0 0];
B=[0;-1;0;0.5];      C=[0 1 0 0];

%CALCULAMOS GANANCIAS DE CONTROL
Ke  = Pd;

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
[t, X] = ode45(@PInv_ERROR_sys, tspan, x0);

%Grafico los estados
figure;
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;

ref = 1.5*sin(50*t);   dref = 50*1.5*cos(50*t);
%ref = 1.5*tan(t);   dref = 1.5*sec(t).^2;

e=ref-X*C';
U = (C*B)^-1*(dref - X*(C*A)' - Ke*e);

%Valor Máximo de Señal de Control
figure;   plot(t, X(:,2), t, ref(:,1), 'red');  title('SALIDA 1 Y REFERENCIA');  grid;
figure;   plot(t, U);                          title('ENTRADA');  grid;

end
```

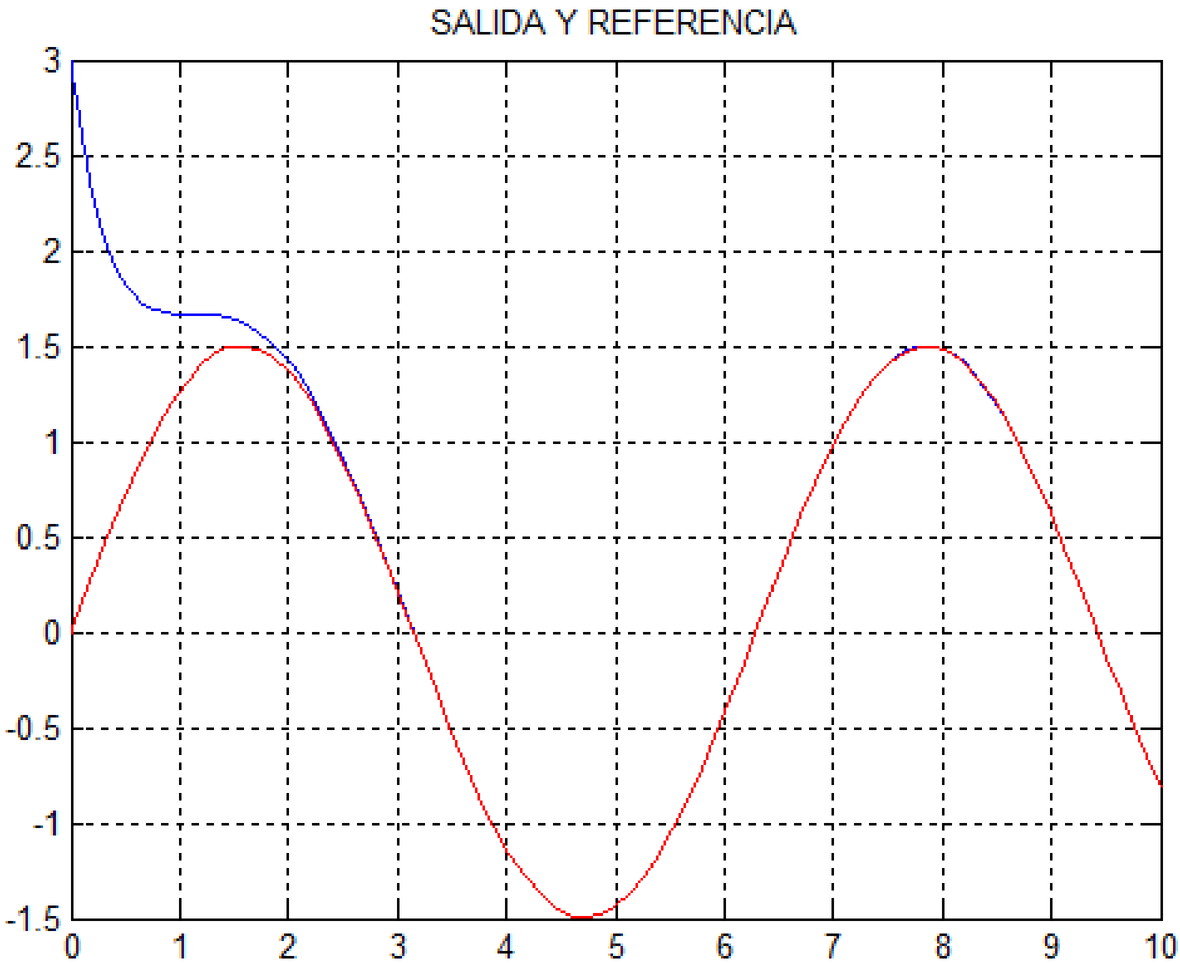
```
function dX = PInv_ERROR_sys( t, X )

global A B C Ke

ref = 1.5*sin(50*t);   dref = 50*1.5*cos(50*t);
%ref = 1.5*tan(t);   dref = 1.5*sec(t)^2;

%Variable de Error
e = ref - C*X;

% Ley de control
U = (C*B)^-1*(dref - C*A*X - Ke*e);

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

$$r(t) = 1.5sin(t), C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0], X(0) = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0], K_e = p_d = -2$$





$$r(t) = 1.5sin(t), C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X(0) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K_e = p_d = -2$$



OJO: No olvidar que al cambiar los sensores, ahora estamos controlando $\dot{\theta}$ y no θ como queríamos al principio. **Al cambiar la salida, cambiamos la variable que estamos controlando.**

¿Cómo se modificaría el código para simular con $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$?

TPE 2.1: Implementar en Matlab este controlador con 2 entradas y 2 salidas usando 2 referencias variantes elegidas por ustedes.