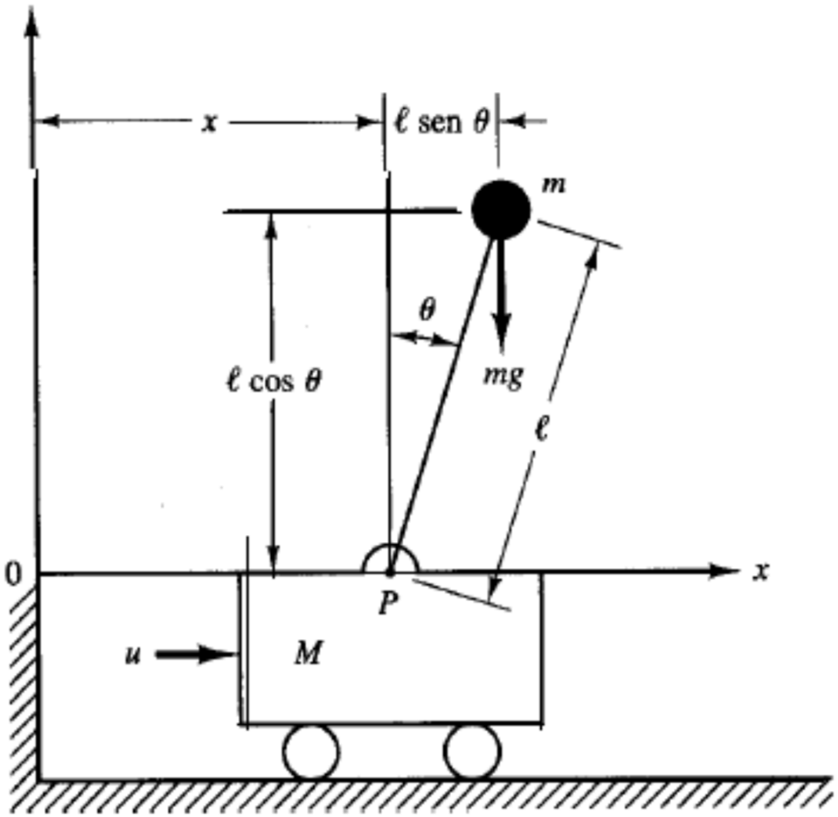
EJEMPLO 4: PÉNDULO INVERTIDO VARIANTE CON SENSOR DE x.



Recordemos que $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}$.

La salida es $y = x = x_1$.

Obtenemos el modelo en espacio de estados

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u$$

$$Y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]X$$

Diseñe un controlador que logre que la posición del carrito siga la referencia $y_{ref} = 2 + 1.5\cos(t)$.

Solución: Definiendo el error como $e = y_{ref} - y$ y verificamos la controlabilidad del sistema de error resulta en:

$$\dot{e} = \dot{y}_{ref} - \dot{y} = \dot{y}_{ref} - CAX - CBu$$

y $M_c = CB = 0$ por lo que el sistema no es controlable para esa salida con retro de error **¿Y ahora quién podrá ayudarnos?**

Si reorganizamos las ecuaciones diferenciales del sistema:

Bloque 1 $\longrightarrow$ $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$

Bloque 2 $\longrightarrow$ $\dot{x}_2(t) = 20.601x_1(t) - u(t)$

Bloque 3 $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = -0.4905x_1(t) + 0.5u(t) \end{array} \right.$

El objetivo es: por medio de x_2 controlar el bloque 1 y por medio de u controlar el bloque 2.

El bloque 3 (llamado dinámica cero) no nos interesa, siempre y cuando sea estable ☺

PASO 1: Supongamos que x_2 es la señal de control del bloque 1. Entonces, definamos la señal de error de ese bloque como $e_1(t) = y_{ref}(t) - y(t) = y_{ref}(t) - x_1(t)$.

Para obtener su dinámica, derivamos y resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \dot{y}_{ref}(t) - \dot{x}_1(t) \\ &= \dot{y}_{ref}(t) - x_2(t) \end{aligned}$$

Ahora, diseñando el "control" de ese bloque como lo hemos venido haciendo:

$$x_2(t) = \dot{y}_{ref} - K_1 e_1(t) \rightarrow \dot{e}_1(t) = K_1 e_1(t)$$

El polo de este bloque está definido por $p_{d1} = K_1$. Entonces, para que $e_1(t)$ converja a cero se requiere que $K_1 < 0$.

Como ese valor de $x_2(t)$ es el que deseamos, se convierte en la referencia para el segundo bloque:

$$x_{2,ref}(t) = \dot{y}_{ref} - K_1 e_1(t) \rightarrow e_2(t) = x_{2,ref}(t) - x_2(t)$$

Derivando el error para el segundo bloque obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(t) &= \dot{x}_{2,ref}(t) - \dot{x}_2(t) \\ &= \dot{x}_{2,ref}(t) - 20.601 x_1 + u(t) \end{aligned}$$

De nuevo, diseñamos el controlador de la misma manera que en el bloque anterior:

$$u(t) = K_2 e_2 - \dot{x}_{2,ref}(t) + 20.601 x_1$$

Al sustituir resulta en:

$$\dot{e}_2(t) = K_2 e_2(t)$$

El polo de este bloque está definido por $p_{d2} = K_2$**. Entonces, para que** $e_2(t)$ **converja a cero se requiere que** $K_2 < 0$**.**

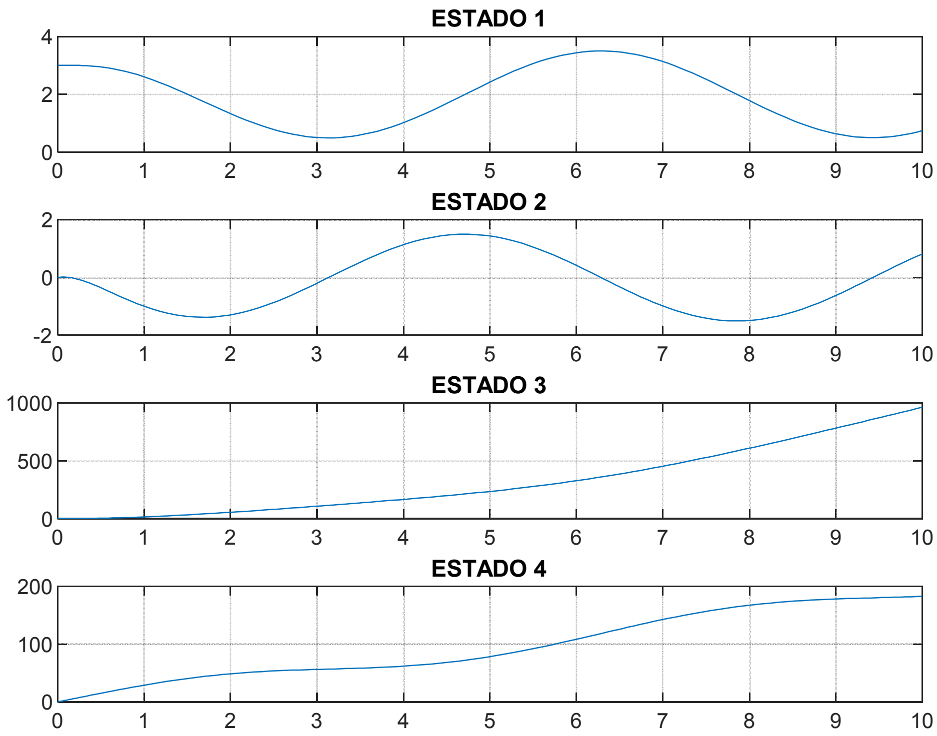
Solo falta calcular $\dot{x}_{2,ref}(t)$**… Hagámoslo en el pizarrón…**

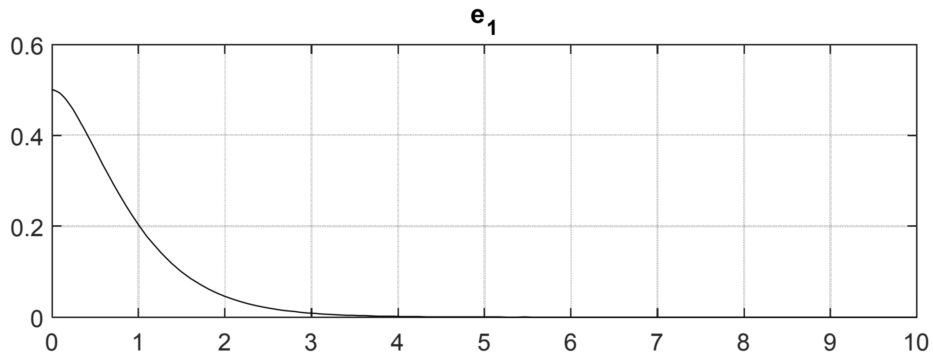
$$\begin{aligned} \dot{x}_{2,ref}(t) &= \ddot{y}_{ref} - K_1 \dot{e}_1(t) \\ &= \ddot{y}_{ref} - K_1 \left(\dot{y}_{ref}(t) - \dot{x}_1(t) \right) \end{aligned}$$

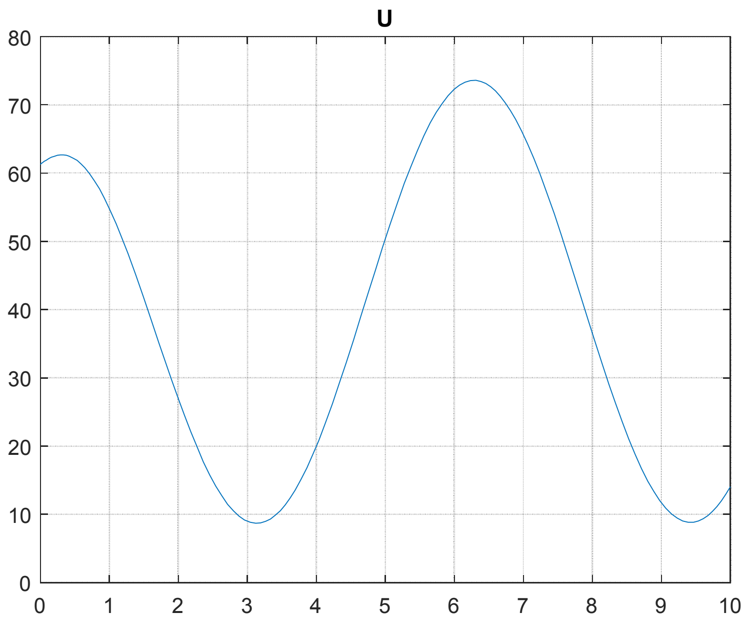
Ahora sí, veamos que dice Matlab…

```
function PInv_BLOQUES_plot( tspan, x0, K)
   global A B C K1 K2

   %MATRICES DEL SISTEMA
   A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-0.4905 0 0 0];
   B=[0;-1;0;0.5];        C=[1 0 0 0];
   K1=K(1);    K2=K(2);
   %RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
   [t, X] = ode45(@PInv_BLOQUES_sys, tspan, x0);

%Grafico los estados
   figure; subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
   subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
   subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
   subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;
%Grafico salida y referencia
   figure; subplot(2,1,1);plot(t,X(:,1),t,2+1.5*cos(t),'r'); title('SALIDA Y REF');    grid;
   subplot(2,1,2);plot(t,2+1.5*cos(t)-X(:,1),'k'); title('e_1');  grid;
%Obtengo y Grafico U
   Yref = 2+1.5*cos(t);      dYref = -1.5*sin(t);    ddYref = -1.5*cos(t);
   e1=Yref-X(:,1);           de1=dYref-X(:,2);
   X2ref=dYref-K1*e1;     dX2ref = ddYref-K1*de1;
   e2=X2ref-X(:,2);          U=K2*e2-dX2ref+20.601*X(:,1);
   figure; plot(t,U); title('U');grid;
end
```

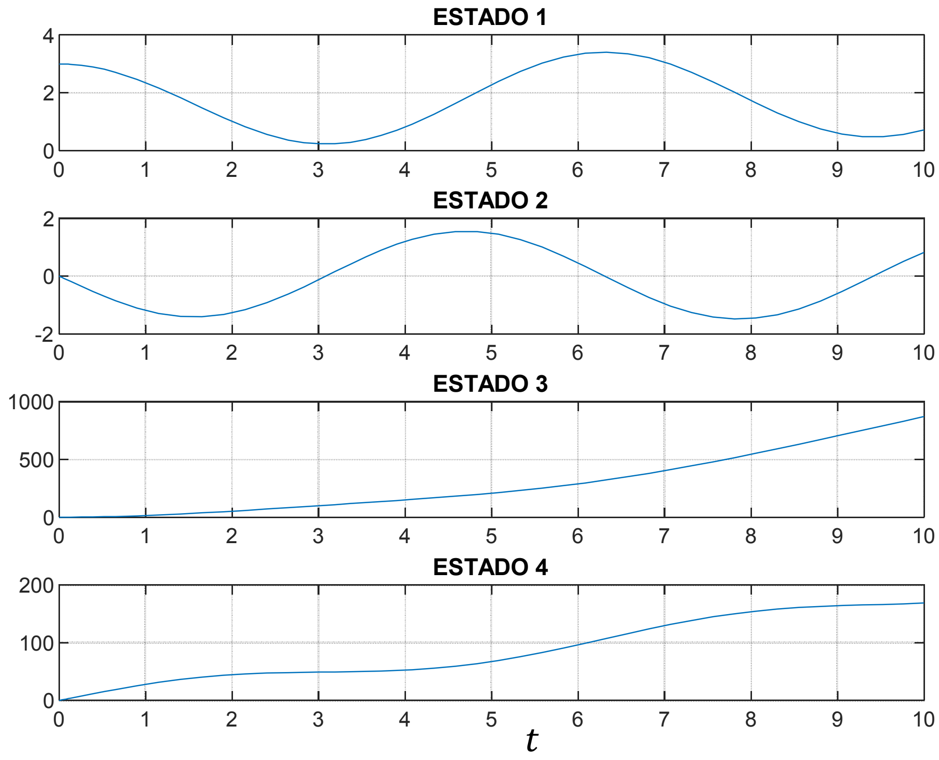
```
function dX = PInv_BLOQUES_sys( t, X )
   global A B K1 K2

   %Estados
   X1=X(1); X2=X(2);
   %Referencias
   Yref = 2+1.5*cos(t);     dYref = -1.5*sin(t);    ddYref = -1.5*cos(t);
   %Bloque 1
   e1=Yref-X1;              de1=dYref-X2;
   X2ref=dYref-K1*e1;    dX2ref = ddYref-K1*de1;
   %Bloque 2
   e2=X2ref-X2;             U=K2*e2-dX2ref+20.601*X1;

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

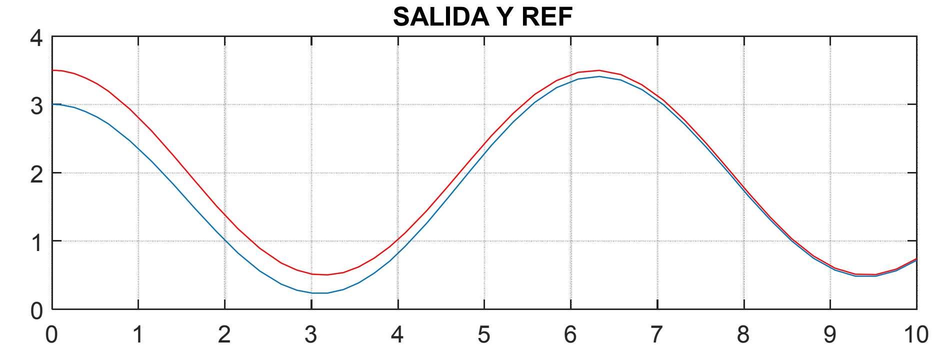


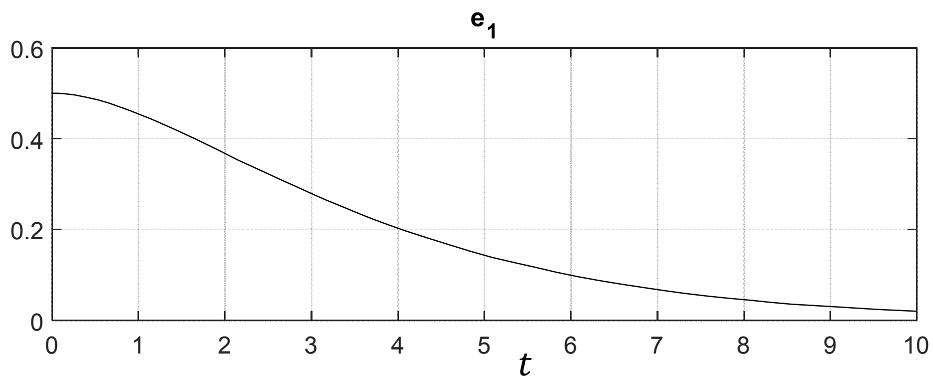


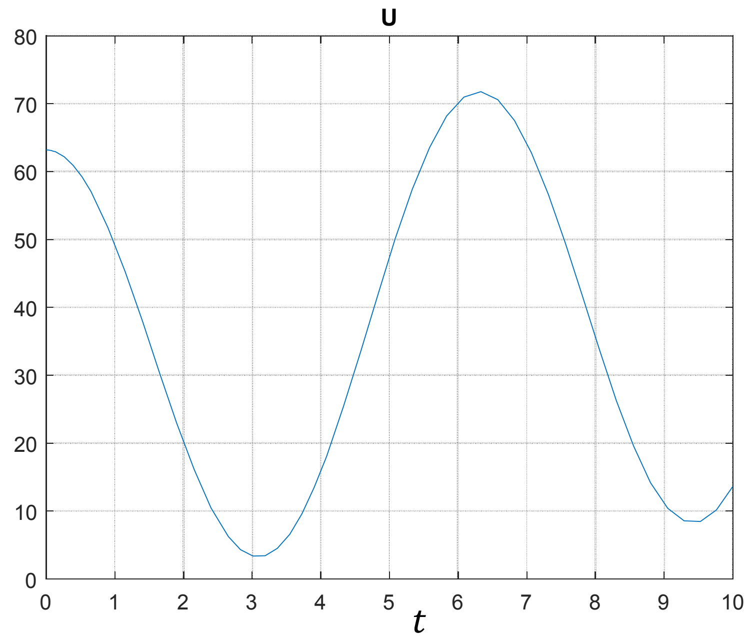


$$K_1 = -2, K_2 = -2, X(0) = [3,0,0,0]$$



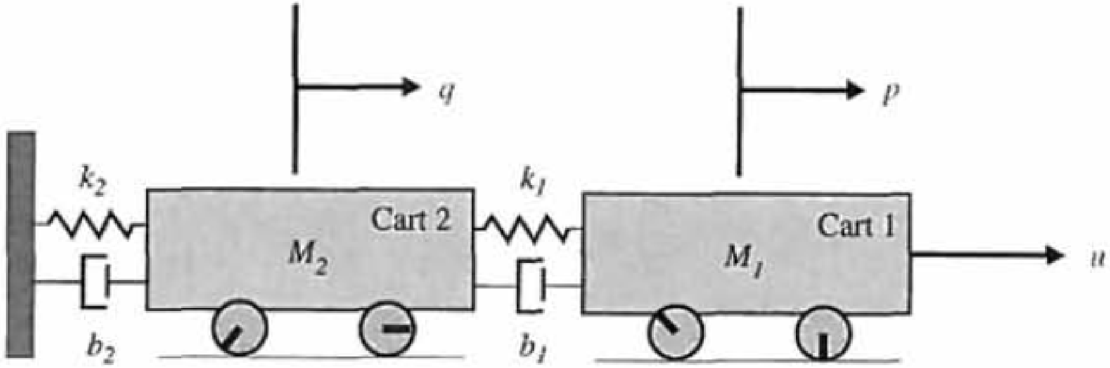






$$K_1 = -\frac{1}{2}\ K_2 = -\frac{1}{2}, X(0) = [3,0,0,0]$$

Problema: **Recordando nuestro sistema de los carritos acoplados.**



Estados:

$$x_1 = p, \quad x_2 = q \\ x_3 = \dot{p}, \quad x_4 = \dot{q} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

Modelo:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & \frac{-k_1-k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & \frac{-b_1-b_2}{M_2} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

Diseñe un controlador para que la salida siga la referencia $y_{ref}(t) = 1 + 0.5\cos(t)$ rad

Solución: Definiendo el error como $e(t) = y_{ref} - y$ y verificamos la controlabilidad del sistema de error resulta en:

$$\dot{e}(t) = \dot{y}_{ref}(t) - CAx(t) - CBu(t) \Rightarrow M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \text{No controlable}$$

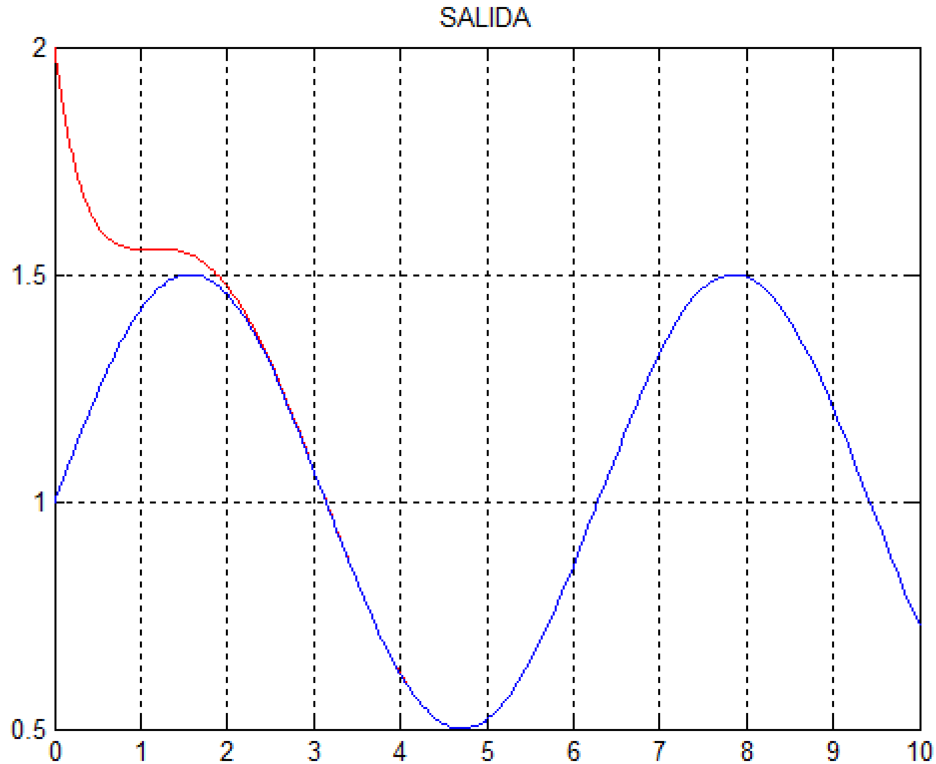
Podríamos modificar la matriz de salida (intercambiando sensores) a:

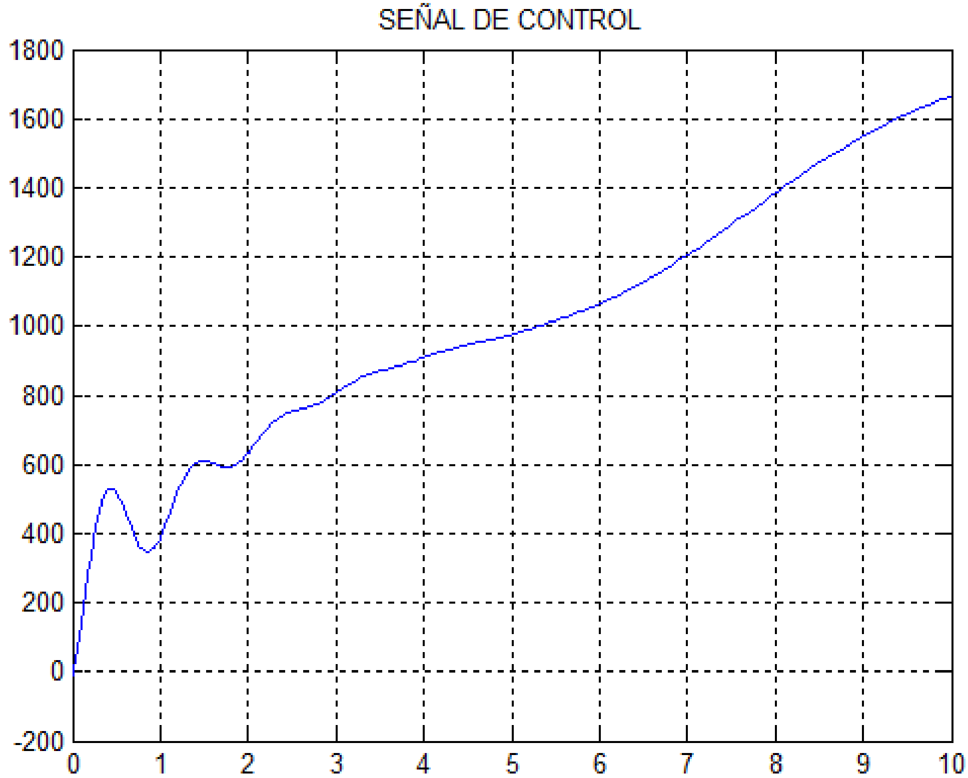
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{M_1} \Rightarrow \text{Controlable}$$

Entonces, podemos utilizar la ley de control que ya diseñamos:

$$u(t) = (CB)^{-1}\left[\dot{y}_{ref}(t) - CAX(t) - K_e e(t)\right]$$

Veamos que resultados nos resultan en Matlab…





Pero… **¿Se cumplió el objetivo de control?**

No, debido a que con el controlador diseñado logramos seguimiento de referencia para la salida. Al cambiar la salida, cambiamos la variable a controlar.

ITESO Universidad Jesuita de Guadalajara 50 AÑOS

Si reorganizamos las ecuaciones diferenciales del sistema:

Bloque 1 $\longrightarrow \dot{x}_1 = x_3$

Bloque 2 $\longrightarrow \dot{x}_3 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 + \frac{k_1}{M_1}x_2 - \frac{b_1}{M_1}x_3 + \frac{b_1}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}u$

Bloque 3
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{k_1}{M_2}x_1 - \frac{k_1+k_2}{M_2}x_2 + \frac{b_1}{M_2}x_3 - \frac{b_1+b_2}{M_2}x_4 \end{cases}$$

El objetivo es: por medio de x_3 controlar el bloque 1 y por medio de u controlar el bloque 2.

El bloque 3 no nos interesa, siempre y cuando sea estable ☺

PASO 1: Supongamos que x_3 es la señal de control del bloque 1. Entonces, definamos la señal de error de ese bloque como $e_1 = x_{1,ref} - x_1$

Para obtener su dinámica, derivamos para obtener:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \dot{x}_{1,ref} - \dot{x}_1 \\ &= \dot{x}_{1,ref} - x_3 \end{aligned}$$

Ahora, diseñando el “control” de ese bloque como lo hemos venido haciendo:

$$x_3(t) = \dot{x}_{1,ref} - K_1 e_1(t) \rightarrow \dot{e}_1(t) = K_1 e_1(t)$$

El polo de este bloque está definido por $p_{d1} = K_1$. Entonces, para que $e_1(t)$ converja a cero se requiere que $K_1 < 0$.

Como ese valor de X_3 es el que deseamos, se convierte en la referencia para el segundo bloque:

$$x_{3,ref}(t) = \dot{x}_{1,ref} - K_1 e_1(t) \rightarrow e_3(t) = x_{3,ref}(t) - x_3(t)$$

Derivando el error para el segundo bloque obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{e}_3 &= \dot{X}_{3,ref} - \dot{X}_3 \\ &= \dot{X}_{3,ref} - \left(-\frac{k_1}{M_1}X_1 + \frac{k_1}{M_1}X_2 - \frac{b_1}{M_1}X_3 + \frac{b_1}{M_1}X_4 + \frac{1}{M_1}u\right) \\ &= \dot{X}_{3,ref} + \frac{k_1}{M_1}X_1 - \frac{k_1}{M_1}X_2 + \frac{b_1}{M_1}X_3 - \frac{b_1}{M_1}X_4 - \frac{1}{M_1}u\end{aligned}$$

Diseñando el controlador de la misma manera que en el bloque anterior:

$$u(t) = M_1\left(\dot{x}_{3,ref}(t) + \frac{k_1}{M_1}x_1(t) - \frac{k_1}{M_1}x_2(t) + \frac{b_1}{M_1}x_3(t) - \frac{b_1}{M_1}x_4(t) - K_3 e_3(t)\right)$$

Al sustituir resulta en:

$$\dot{e}_3(t) = K_3 e_3(t)$$

El polo de este bloque está definido por $p_{d3} = K_3$**. Entonces, para que** $e_3(t)$ **converja a cero se requiere que** $K_3 < 0$**.**

Solo falta calcular $\dot{X}_{3,ref}$ **… Hagámoslo en el pizarrón…**

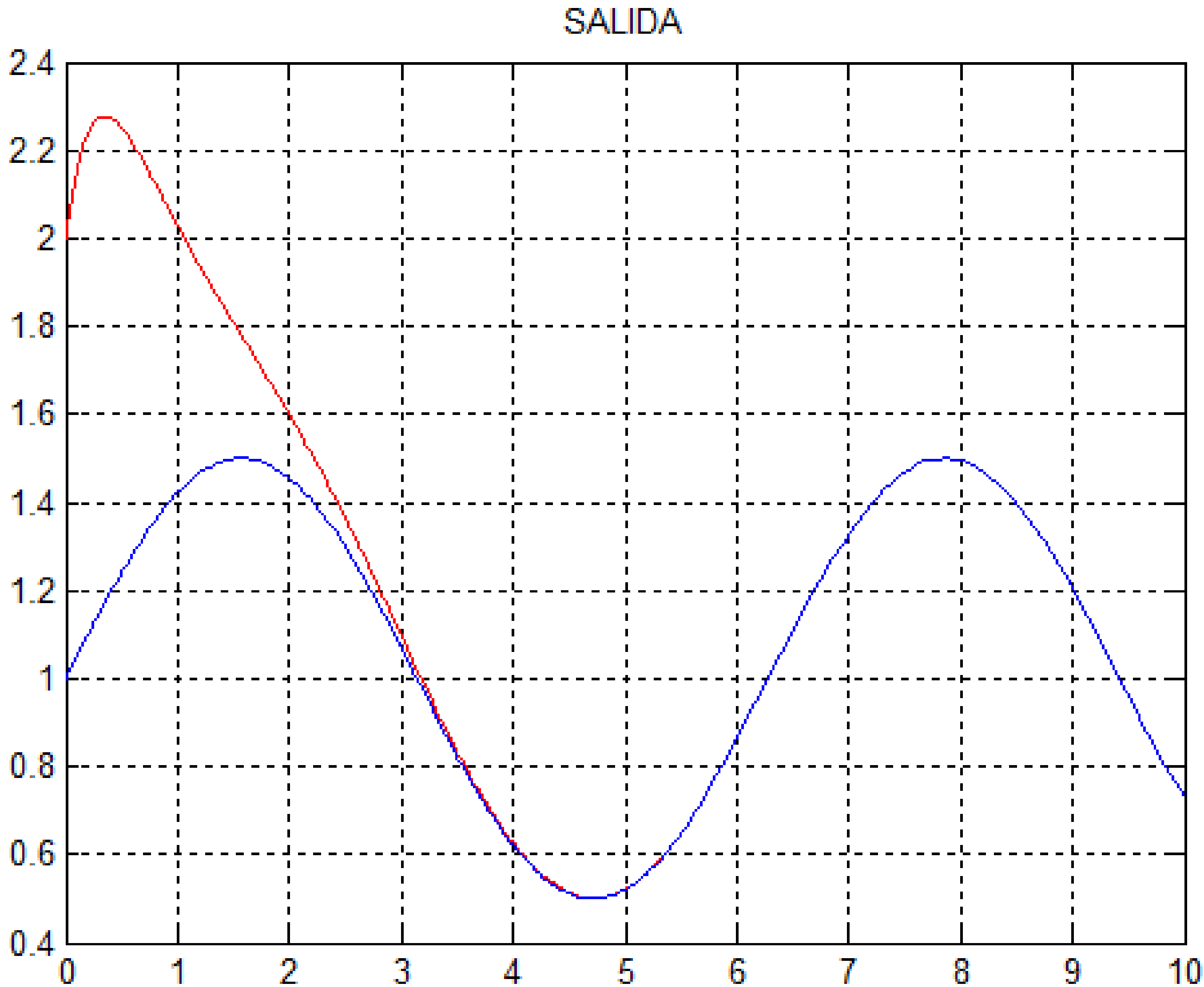
$$\dot{x}_{3,ref}(t) = \ddot{x}_{1,ref}(t) - K_1\left[\dot{x}_{1,ref}(t) - x_3(t)\right]$$

Ahora sí, veamos que dice Matlab…

```
function Carritos_ERROR_BLOQUES_plot( tspan, x0, Pd)

global A B M1 K1 K3
%Parámetros del sistema
k1 = 150; k2 = 700; b1 = 15; b2 = 30; M1 = 5; M2 = 20;
%Matrices del sistema
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1;-k1/M1 k1/M1 -b1/M1 b1/M1; k1/M2 -(k1+k2)/M2 b1/M2 -(b1+b2)/M2];
B = [0; 0; 1/M1; 0];
C = [1 0 0 0];

%CALCULAMOS GANANCIAS DE CONTROL
K1 = Pd;    K3 = -10;

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
[t, X] = ode45(@Carritos_ERROR_BLOQUES_sys, tspan, x0);

%REFERENCIAS Y DERIVADAS
ref = 1 + 0.5*sin(t); dref = 0.5*cos(t);  ddref = -0.5*sin(t);

%SEÑALES DE ERROR
e1 = ref - X(:,1);  X3r  = dref - K1*e1;
e3 = X3r - X(:,3);  dX3r = ddref - K1*(dref - X(:,3));

% Ley de control
U = M1*(-X*A(3,:)' + dX3r - K3*e3); %CONTROL POR BLOQUES

figure;
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;

figure;         plot(t, C*X','r',t,ref);  title('SALIDA');  grid;
figure;         plot(t, U);  title('SEÑAL DE CONTROL');  grid;
end
```

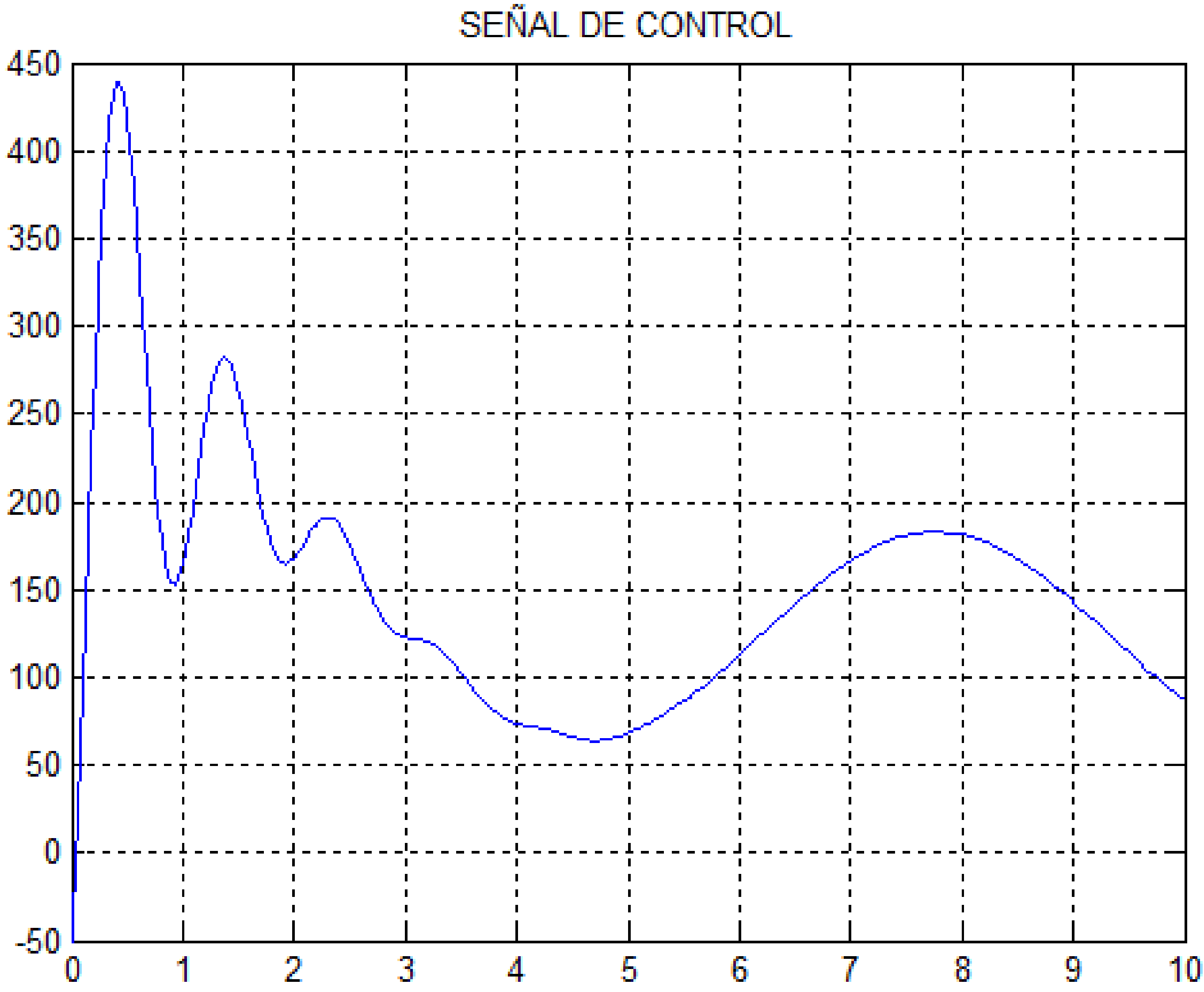
```
function dX = Carritos_ERROR_BLOQUES_sys( t, X)

global A B C K1 K3 M1

%REFERENCIAS Y DERIVADAS
ref = 1 + 0.5*sin(t);
dref = 0.5*cos(t);
ddref = -0.5*sin(t);

%SEÑALES DE ERROR
e1 = ref - X(1);
X3r  = dref - K1*e1;
e3 = X3r - X(3);
dX3r = ddref - K1*(dref - X(3));

% Ley de control
U = M1*(dX3r - K3*e3 - A(3,:)*X);

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

$$X(0) = [2,2,2,0]^T, K_1 = -2, K_3 = -2$$



Ahora si se cumple el objetivo de control ya que la salida si es x_1

$$X(0) = [2,2,2,0]^T, K_1 = -2, K_3 = -2$$



$$X(0) = [2,2,2,0]^T, K_1 = -2, K_3 = -2$$