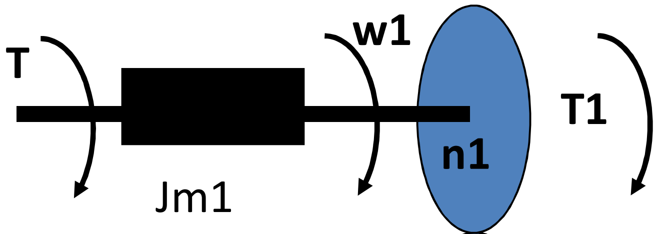
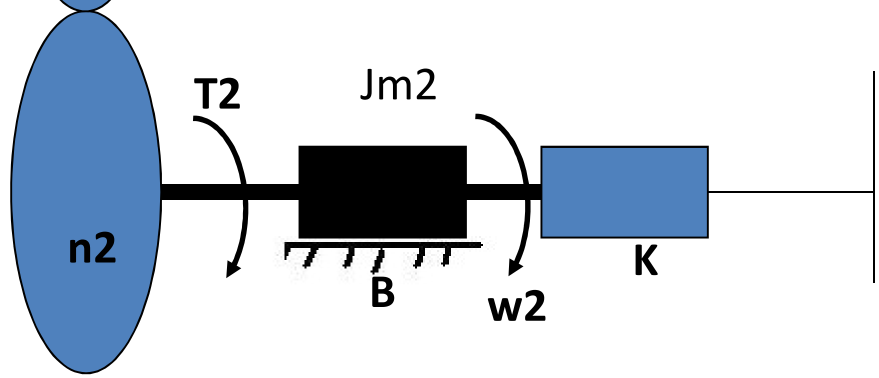
Ejemplo: Identificando Variables de Estado… Los engranes …

Consideremos el siguiente sistema de engranes:



Sistema de referencia: Definimos como positivo el sentido de giro horario para todas las variables del sistema.

Para el resorte, definimos el cero cuando este no ejerce ninguna fuerza sobre la masa 2.



De las leyes físicas obtenemos las ecuaciones:

Ec1 $$\boxed{T(t) = J_{m1}\dot{w}_1(t) + T_1(t)}$$

Ec2 $$\boxed{T_2(t) = -\frac{n_2}{n_1} T_1(t)}$$

Ec3 $$\boxed{w_2(t) = -\frac{n_1}{n_2} w_1(t)}$$

Ec4 $$\boxed{T_2(t) - K\int w_2(t)dt - Bw_2(t) = J_{m2}\dot{w}_2(t)}$$

Como la **Ec2** y **Ec3** no aportan información dinámica (puesto que solo relacionan a 2 variables entre sí, linealmente) las usaremos en la **Ec1**. Si, además, re-ordenamos la **Ec4** obtenemos:

$$-\tfrac{n_1}{n_2}T_2(t)-J_{m1}\tfrac{n_2}{n_1}\dot{w}_2(t)=T(t)$$
$$T_2(t)=J_{m2}\dot{w}_2(t)+K\int w_2(t)dt+Bw_2(t)$$

Despejamos $T_2(t)$ en la ecuación de arriba:

$$T_2(t)=-\tfrac{n_2}{n_1}T(t)-J_{m1}\left(\tfrac{n_2}{n_1}\right)^2\dot{w}_2(t)$$

Igualando las ecuaciones que definen $T_2(t)$:

$$-\tfrac{n_2}{n_1}T(t)-J_{m1}\left(\tfrac{n_2}{n_1}\right)^2\dot{w}_2(t)=J_{m2}\dot{w}_2(t)+K\int w_2(t)dt+Bw_2(t)$$

OJO: Ha desaparecido $\boldsymbol{w_1(t)}$ ¿cómo se explica esto? La clave está en **Ec. 3** ☺

Esta indica que no puede haber valores independientes de $\boldsymbol{w_1(t)}$ y $\boldsymbol{w_2(t)}$ ¿Porqué? El acople de los engranes las forza a ser dependientes.

Agrupamos para obtener:

$$-\tfrac{n_2}{n_1}T(t)=\dot{w}_2(t)\left[J_{m2}+J_{m1}\left(\tfrac{n_2}{n_1}\right)^2\right]+K\int w_2(t)dt+Bw_2(t)$$

¿Cuántos estados se requieren? ¿Cuál sería una buena elección de estados?

Que les parece esta…

$$\boxed{x_1(t)=\int w_2(t)dt},\ \boxed{x_2(t)=\dot{x}_1(t)=w_2(t)},\ \boxed{u(t)=T(t)},\ \boxed{y(t)=x_1(t)}$$

Si re-escribimos resulta en:

$$-\tfrac{n_2}{n_1}u(t)=\dot{x}_2(t)\left[J_{m2}+J_{m1}\left(\tfrac{n_2}{n_1}\right)^2\right]+Kx_1(t)+Bx_2(t)$$

Escribiendo las ecuaciones diferenciales en espacio de estados:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{K}{J_{m2} + J_{m1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} x_1(t) - \frac{B}{J_{m2} + J_{m1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} x_2(t) - \frac{1}{\frac{n_1}{n_2} J_{m2} + \frac{n_2}{n_1} J_{m1}} u(t)$$

Y en forma matricial

$$\boxed{\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u(t)}$$

$$\boxed{y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)}$$

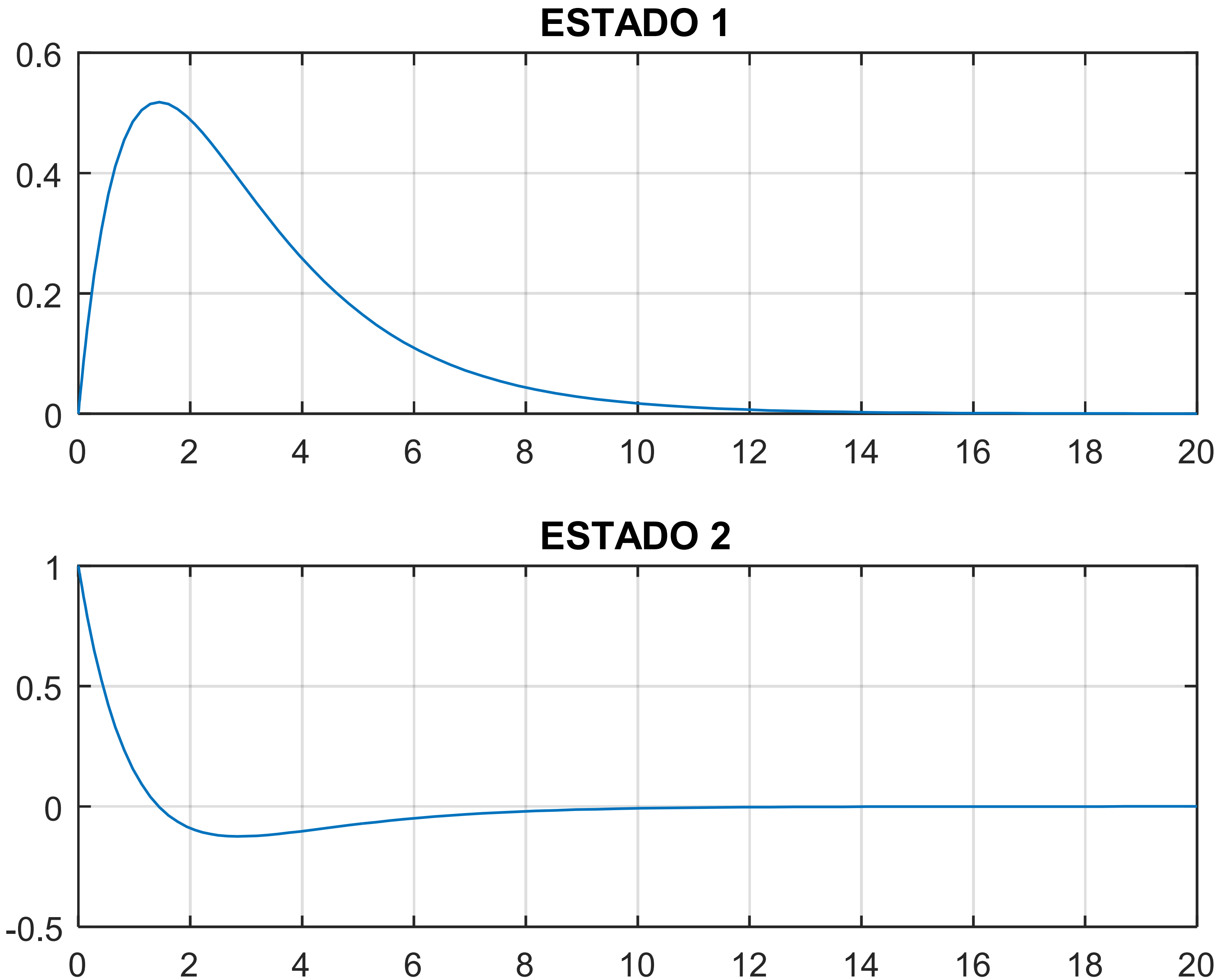
donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J_{m2} + J_{m1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} & -\frac{B}{J_{m2} + J_{m1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\frac{n_1}{n_2} J_{m2} + \frac{n_2}{n_1} J_{m1}} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = 0.$$

Código .m (Engranes)

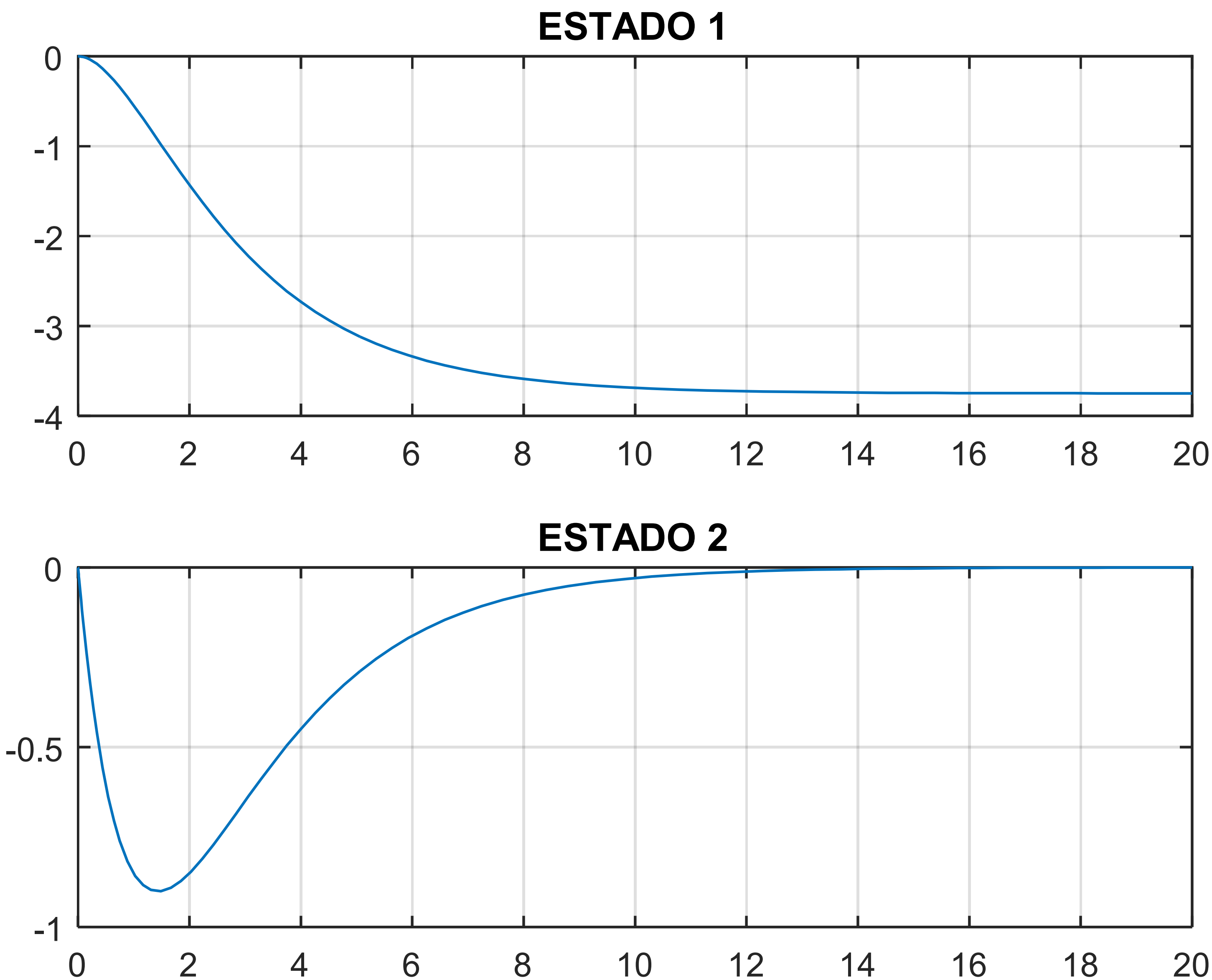
```
function Engranes_ODE_plot( tspan, x0 )

%Evaluando las ODE's definidas en el _sys
[t, X] = ode45(@Engranes_ODE_sys, tspan, x0);

%Graficando evolución de los estados
subplot(2,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(2,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;

end
function dX = Engranes_ODE_sys( t, X)

%Parámetros del sistema
Jm1 = 0.5; Jm2 = 0.6; n1 = 20; n2 = 30; K = 0.8; B = 2.5;

%Matrices del sistema
A = [0, 1; -K/(Jm2 + Jm1*(n2/n1)^2), -B/(Jm2 + Jm1*(n2/n1)^2)];
B = [0;-1/(n1*Jm2/n2 + n2*Jm1/n1)];
C = [1 0];
D = 0;

%Entrada del sistema
U = 0; %Para condiciónes iniciales solamente
%U = 2; %Escalón de 2 N.m
%U = 2*sin(t); %Senoidal

%ODE's
dX = A*X + B*U;
```

Resultados de simulación para $x(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T, \quad u(t)=0\,\mathrm{N\cdot m}$



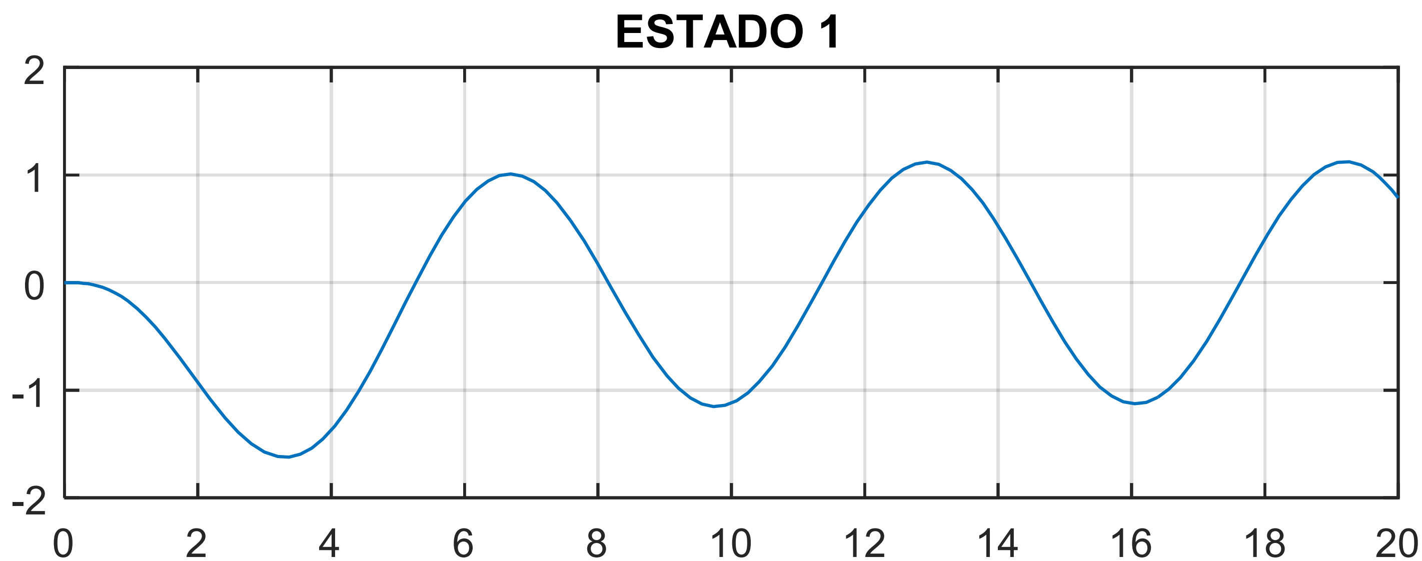
¿Tienen sentido estos resultados?

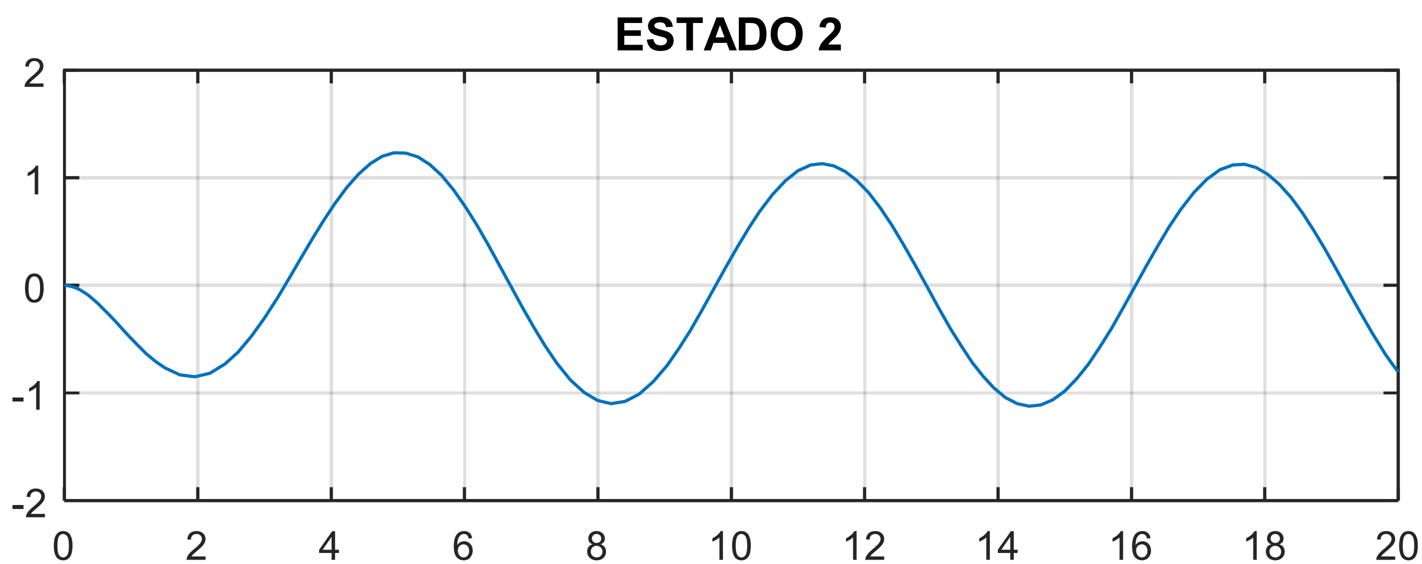
Resultados de simulación para $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad u(t) = 2\mu(t)\,\mathrm{N \cdot m}$



¿Tienen sentido estos resultados?

Resultados de simulación para $x(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T, \quad u(t)=2\sin(t)$





¿Tienen sentido estos resultados?

De FDT a Variables de Estados

Supongamos una FDT como

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

Si multiplicamos como sigue

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

Podemos obtener las igualdades

$$\boxed{Y(s) = b_m s^m Z(s) + b_{m-1} s^{m-1} Z(s) + \cdots + b_0 Z(s)}$$

$$\boxed{U(s) = s^n Z(s) + a_{n-1} s^{n-1} Z(s) + \cdots + a_0 Z(s)}$$

Como sabemos que multiplicar pos **s** es equivalente a derivar, podemos pasar estas derivadas al dominio del tiempo como

$$y(t) = b_m \frac{d^{(m)} z(t)}{dt^{(m)}} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} z(t)}{dt^{(m-1)}} + \cdots + b_0 z(t)$$

$$u(t) = \frac{d^{(n)} z(t)}{dt^{(n)}} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} z(t)}{dt^{(n-1)}} + \cdots + a_0 z(t)$$

Ahora si definimos las variables de estado como:

$$x_1(t) = z(t)$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$
$$\vdots$$
$$x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) = \frac{d^{(n-1)}z(t)}{dt^{(n-1)}}$$

Nota: El número de variables de estado es igual al orden de la ecuación característica de la FDT original.

Entonces podemos expresar la salida y la entrada como

$$u(t) = \dot{x}_n(t) + a_{n-1}x_n(t) + \cdots + a_0 x_1(t) \qquad y(t) = b_m x_{m+1}(t) + \cdots + b_0 x_1(t)$$

Y las ecuaciones diferenciales que rigen al sistema son

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = -a_{n-1}x_n(t) - \ldots - a_0 x_1(t) + u(t)$$

Por lo que la representación en espacio de estados queda como:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = -a_{n-1}x_n(t) - \ldots - a_0 x_1(t) + u(t)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}}$$

$$y(t) = b_m x_{m+1}(t) + b_{m-1}x_m(t) + \cdots + b_0 x_1(t)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s^2+8s+12}{2s^3-4s^2-s+2}$$

Simplificamos la FDT a una forma adecuada:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s^2+4s+6}{s^3-2s^2-\frac{1}{2}s+1}$$

De donde sabemos que

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad a_2 = -2$$
$$b_0 = 6, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 2$$

Finalmente, obtenemos

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} x(t)$$

TPE 1.2: De FDT a Estados

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s^3 - 3}{5s^3 + 4s^2 + 2s + 8}$$

Supongamos un sistema en espacio de estados con **1 entrada y 1 salida:**

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{aligned}}$$

Transformando al dominio de Laplace

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$Y(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s)$$

Despejando el vector de estados de la primera ecuación

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B}U(s).$$

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B}U(s).$$

Sustituyendo en la ecuación de la salida

$$Y(s) = [\mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]U(s).$$

Sabiendo que la **FDT** es la razón $G(s) = Y(s)/U(s)$ obtenemos

$$\boxed{G(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

Ejemplo:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

Del espacio de estados sabemos que:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix},D=0$$

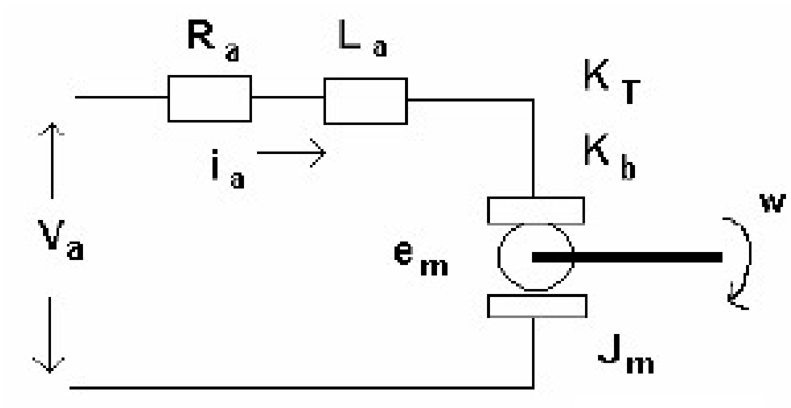
Y que la forma de obtener la FDT es con $G(s)=C\left[sI-A\right]^{-1}B+D$, sustituyendo

$$G(s)=\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\left[s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}+0$$
$$=\begin{bmatrix}-1 & 2\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 3 & -5\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}+0$$

Resultando en:

$$G(s)=\frac{5s+4}{s^2+6s+2}$$

TPE 1.3: Obtener una representación de estados para el motor de CD



$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_m(t)$$

$$T(t) = J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + B_m\omega(t) + T_L(t)$$

$$T(t) = K_T i_a(t)$$

$$e_m(t) = K_b\omega(t)$$

¡¡¡Grazie Mille!!!