Sistemas de Control Automático

4. Modelado Matemático: Función de Transferencia

Profesor: **Luis Enrique González Jiménez**
Departamento de Electrónica, Sistemas e Informática (DESI)

Hora: ***Lu-Mi 18:00 - 20:00***

Aula: ***T-201***

¿Porqué modelar?

- ✓ Es una **abstracción** del sistema real.
- ✓ Permite **predecir comportamientos** sin necesidad de hacer evolucionar el sistema.
- ✓ Permite determinar **cómo modificar** al sistema.
- ✓ El **modelo no es único**, depende lo que que se quiera resaltar del sistema.
- ✓ Los diferentes modelos son “**congruencias dinámicas**” entre sí.
- ✓ El **modelo más simple** que captura lo que se requiere estudiar **es el mejor.**

Tipos de Modelos a Estudiar

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA: Es la relación **salida/entrada** en el **dominio de Laplace** que presenta el sistema, suponiendo que las **condiciones iniciales son iguales a cero.**

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) \qquad\qquad U(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

VARIABLES DE ESTADO: Es una representación del sistema donde se resalta el comportamiento interno del mismo. La representación común en sistemas lineales (SL) es:

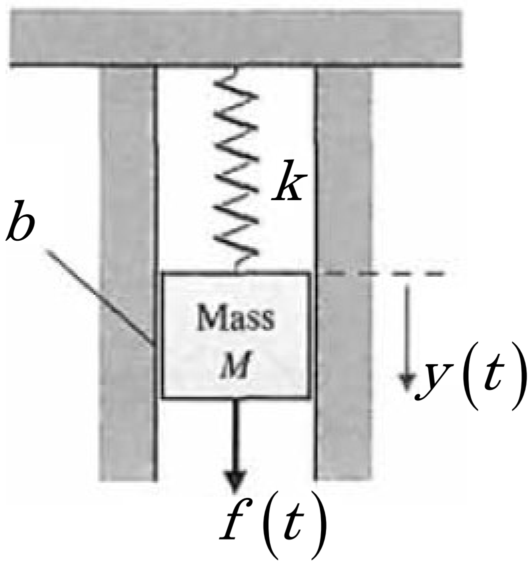
$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = Cx$$

x (***vector de estados***) es un vector de *n* variables que definen el sistema (estados), **A** (***matriz de transición***) es una matriz de *nxn*, **B** es una matriz de *nxq*, y **C** (***matriz de salida***) es una matriz de *pxn*.

Ejemplo de FDT:

Volvamos con nuestro familiar sistema **Masa-Resorte**. Supongamos que definimos como entrada la fuerza aplicada a la masa $f(t)$ y como salida la posición de la masa $y(t)$.



La transformada de Laplace (**con condiciones iniciales cero**) de las ecuaciones diferenciales del sistema resulta en

$$Ms^2Y(s)+bsY(s)+kY(s)=F(s)$$

Con lo que la función de transferencia del sistema queda como

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+bs+k}$$

OJO: En este caso obtuvimos la FDT del sistema (relación ***entrada-salida***) por lo que la entrada $f(t)$ no está definida. Antes, el objetivo era encontrar $y(t)$ por lo que había que definir primero $f(t)$.

¿Cómo se grafica la respuesta de una FDT?
Utilizamos el confiable Matlab y los comandos step(), impulse() o lsim().

Pero… ¿Porqué es importante esto de la función de transferencia?

Algunas características de la función de transferencia (FDT).

1.- La **FDT** es un **modelo matemático** porque es un método operacional para expresar la ecuación diferencial que relaciona la salida con la entrada del sistema.

2.- La **FDT** es una **propiedad inherente** de un sistema, **independiente de la magnitud y naturaleza** de la señal de entrada

3.- No proporciona información acerca de la estructura física de un sistema. **Sistemas físicamente diferentes pueden tener la misma FDT**.

4.- Si se conoce la **FDT** se pueden inferir características de la naturaleza del sistema, al estudiar la salida que se presenta para diversas señales de entrada.

5.- Si se desconoce la **FDT**, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y analizando las salidas correspondientes del sistema.

Considere cual sería la respuesta (salida) de un sistema para una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero.

Debido a que la transformada de Laplace del impulso unitario es la unidad, obtenemos

$$Y(s) = G(s)$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación anterior proporciona la **respuesta impulso del sistema**.

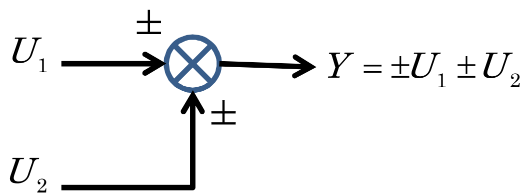
$$\mathscr{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

La respuesta-impulso es la respuesta de un sistema lineal a una entrada impulso unitario cuando las condiciones iniciales son cero. La transformada de Laplace de esta respuesta impulso define la FDT del sistema. Por lo tanto, la respuesta-impulso y la FDT contienen la misma información acerca de la dinámica del sistema.

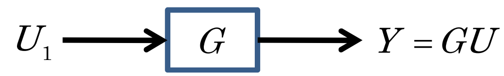
Conclusión: Si se excita el sistema con una entrada impulso y se mide la salida es posible obtener una información completa de sus características dinámicas (**entrada/salida**).

Los bloques sirven para representar relaciones entrada-salida de **los elementos de un sistema**, y mediante reglas sistemáticas construir **una función de transferencia global del sistema.**

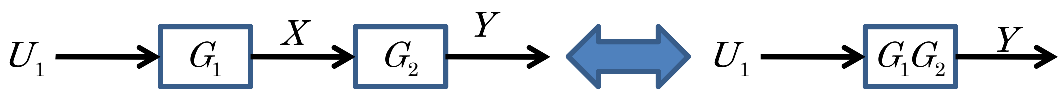
<u>REGLAS BÁSICAS</u>



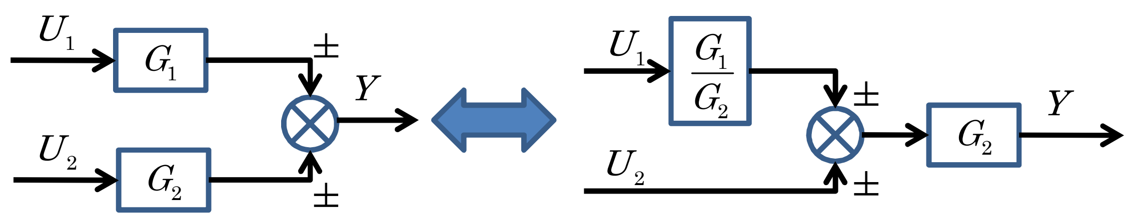
Punto de Suma



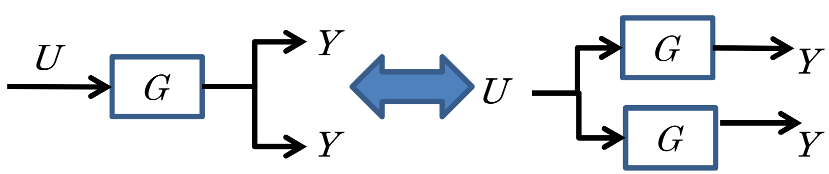
Bloque



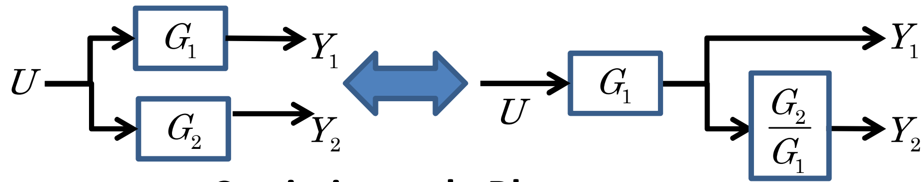
Bloques en cascada



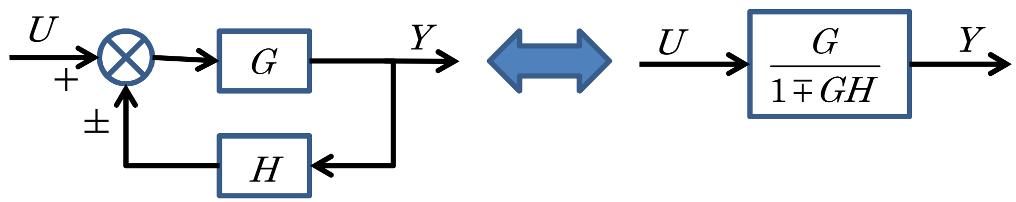
Corrimiento de Punto de Suma



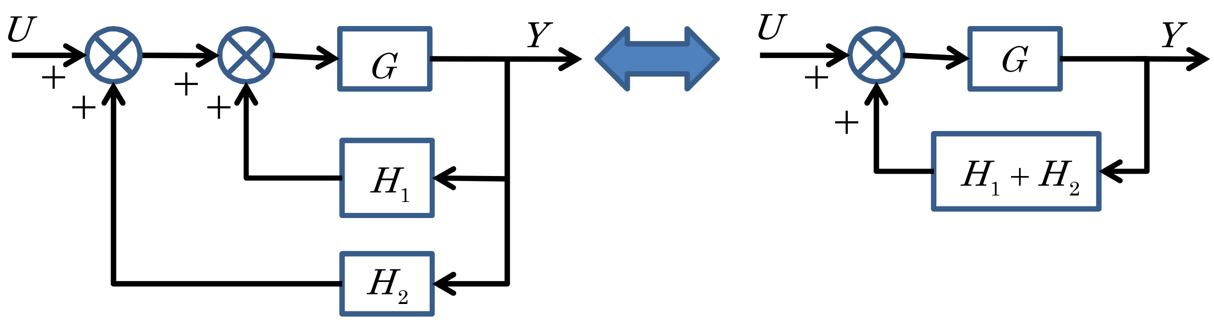
Corrimiento de Bifurcación



Corrimiento de Bloque



Bloque de Retroalimentación



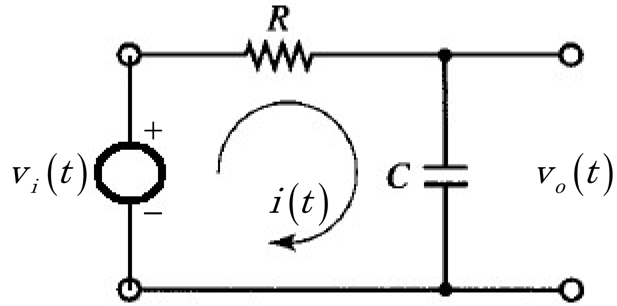
Unión de Puntos de Suma

Funciones de transferencia para elementos comunes de sistemas eléctricos.

Elemento	Voltaje v(t)	Corriente i(t)	Voltaje V(s)	Corriente I(s)
Resistencia	$v(t) = R \cdot i(t)$	$i(t) = v(t)/R$	$V(s) = R \cdot I(s)$	$I(s) = V(s)/R$
Capacitancia	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$	$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$	$V(s) = \frac{1}{sC}I(s)$	$I(s) = sCV(s)$
Inductancia	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L}\int v(t)dt$	$V(s) = sLI(s)$	$I(s) = \frac{1}{sL}V(s)$
Transformador	$v_2(t) = v_1(t)\frac{n_2}{n_1}$		$V_2(s) = V_1(s)\frac{n_2}{n_1}$	$n_1 = \#$ de espiras en primario $n_2 = \#$ de espiras en secundario

La interconexión y manejo de estos elementos, y su manejo con álgebra de bloques, permite definir la **relación entre los elementos de un sistema** y la **obtención de una FDT global**.

Ejemplo:

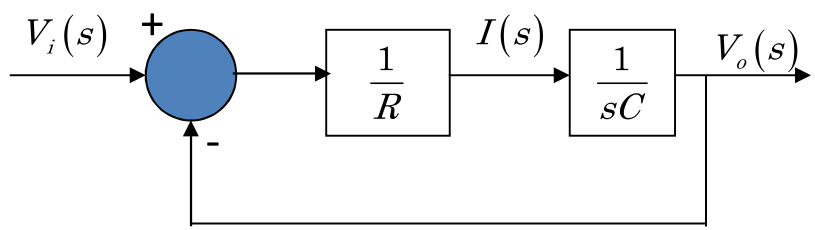


Encontrar la FDT del sistema con entrada $v_i(t)$ y salida $v_o(t)$.

Solución: De cada elemento del circuito tenemos

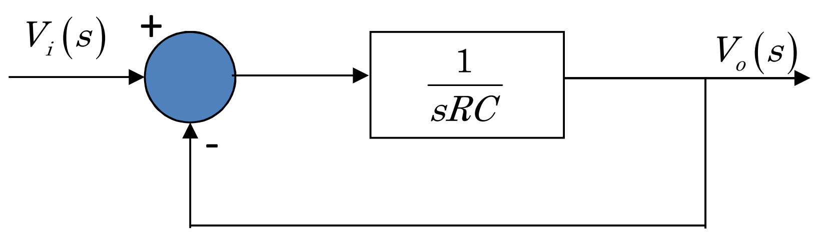
$$V_0(s)=\frac{1}{sC}I(s) \qquad I(s)=\frac{1}{R}\left[V_i(s)-V_0(s)\right]$$

Entonces, podemos construir el diagrama a bloques del circuito como:

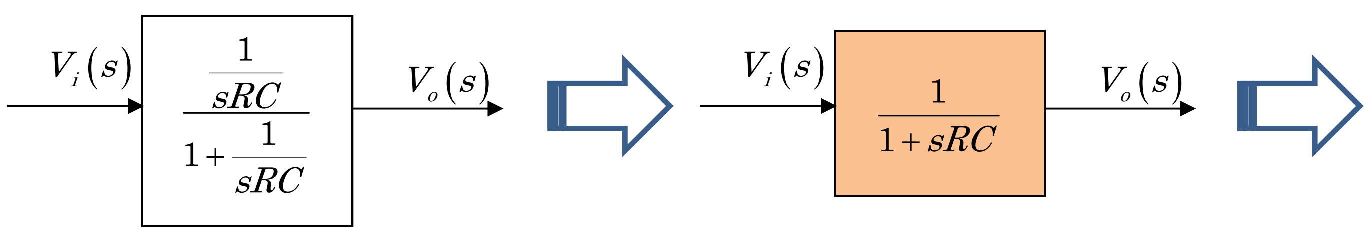


Bloques en cascada

Visto en Instrumentación ☺



Lazo de Retro



$$\boxed{\frac{V_o(s)}{V_1(s)}=\frac{1}{1+sRC}}$$