Sistemas de Control Automático

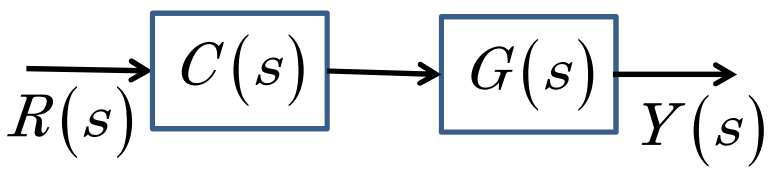
7. Características de los Sistemas Retroalimentados

Profesor: Luis Enrique González Jiménez
Departamento de Electrónica, Sistemas e Informática (DESI)

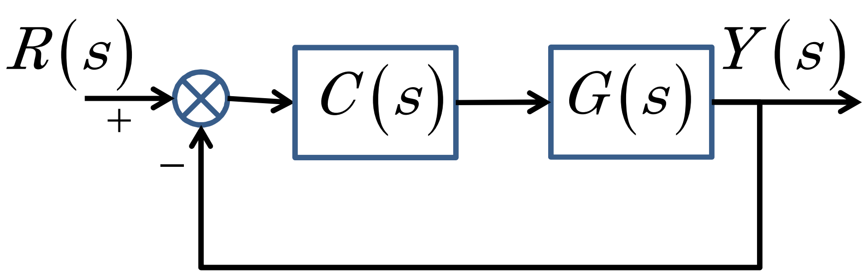
Hora: ***Ma-Vi 16:00 - 18:00***

Aula: ***T-201***

<u>Sistemas de control en lazo abierto:</u> son aquellos en los cuales la acción de control es independiente de la salida.



<u>Sistemas de control en lazo cerrado:</u> la acción de control depende de la salida. Se conocen también como sistemas retroalimentados.



Los usos comunes de un sistema retroalimentado en ingeniería son:

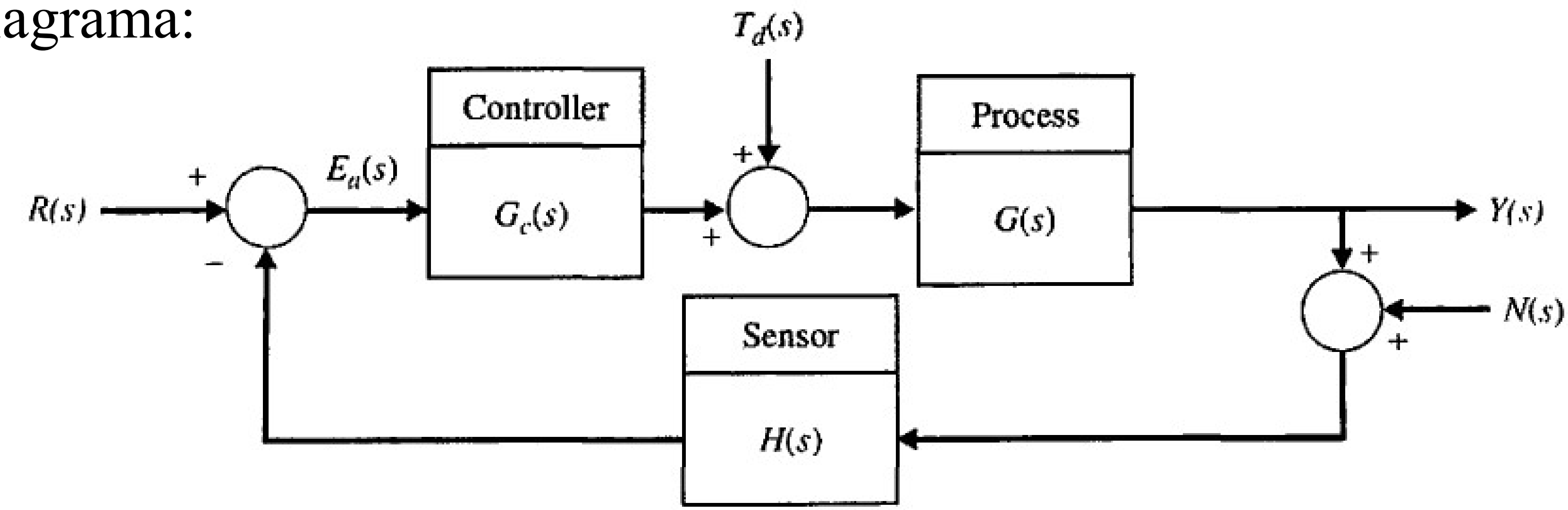
INSTRUMENTACIÓN

- Reducción de la sensibilidad a las variaciones de los parámetros de la planta. (Se usa la función de sensibilidad)
- Reducir el efecto del ruido (externo e interno) y perturbaciones externas.
- Reducir la distorsión no lineal.
- Modificar el **Bandwidth** del sistema. (Amplificador)
- Controlar la impedancia de entrada y de salida. (Depende de la topología)

CONTROL AUTOMÁTICO

- Estabilización de un sistema inestable.
- Capacidad para controlar la respuesta transitoria del sistema. (Ubicación de Polos)

Un sistema retroalimentado "real" presenta elementos del siguiente diagrama:

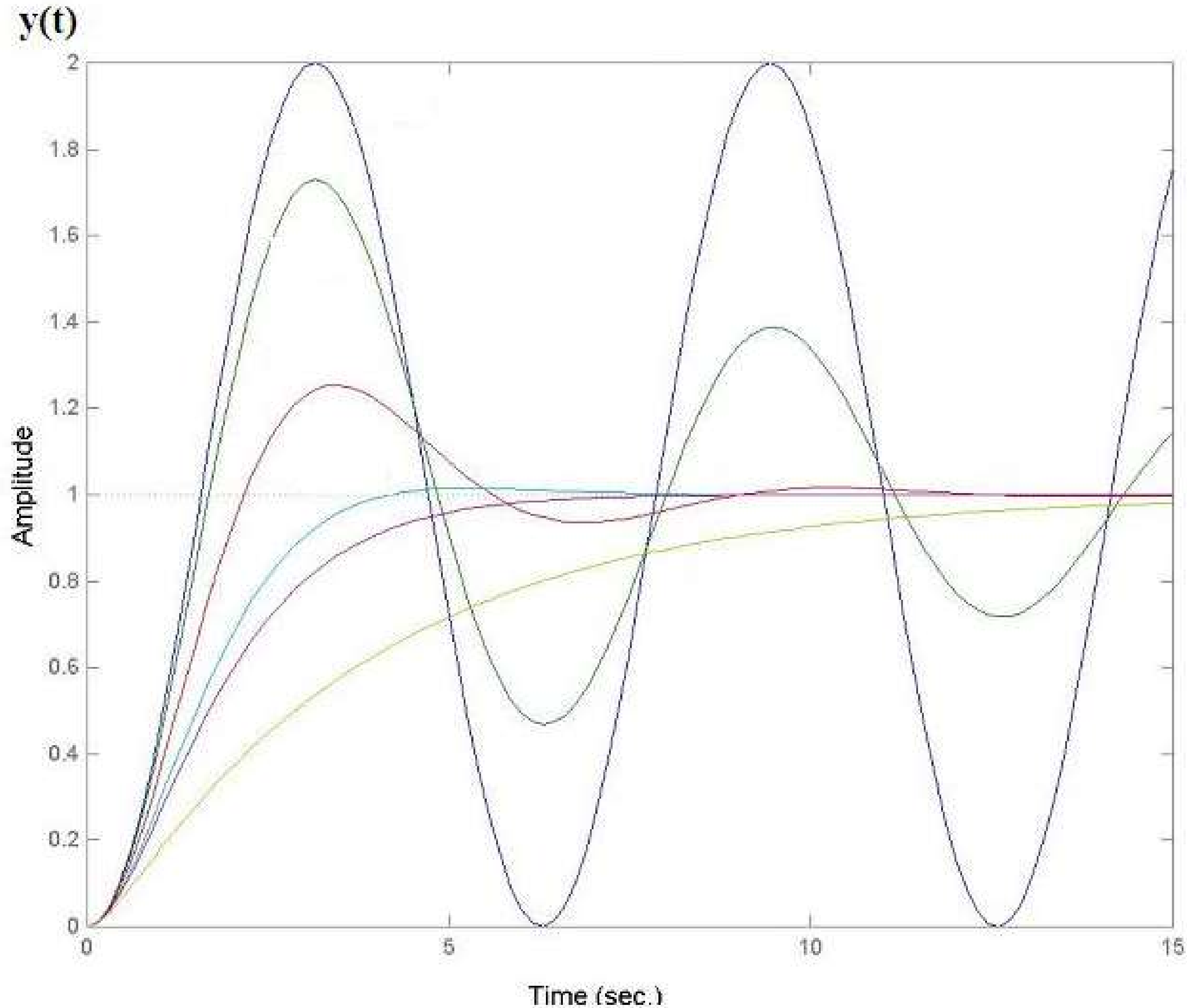


Las características deseadas a lograr diseñando el controlador son:

- ✓ **Baja Sensibilidad a Incertidumbre en Modelado.**
- ✓ **Rechazo de Ruido y Perturbaciones.**
- ✓ **Respuesta Transitoria.**
- ✓ **Error en Estado Estable.**

En un sistema retroalimentado, hay dos características fundamentales a analizar: **su respuesta en el tiempo y su estabilidad.**

Diferentes Tipos de Respuestas Transitorias a una Entrada Escalón



El tipo de respuesta está definido por los polos del sistema.

En una FDT, los polos del sistema son las raíces de la ecuación característica.

$$G(s)=\frac{s-2}{s+4}$$

$$\boxed{p_1=-4}$$

$$G(s)=\frac{2}{(s-4)(s+3)}$$

$$\boxed{p_1=4,\quad p_2=-3}$$

$$G(s)=\frac{7}{s^6-s^4+2s^3-5s^2+3s+2}$$

$$p_1=-1.9,\qquad p_{2,3}=0.04\pm 1.4i,$$
$$p_{4,5}=1.1\pm 0.4i,\qquad p_6=-0.38,$$

En Matlab…

```
>> roots([1 0 -1 2 -5 3 2])

ans =

  -1.9181
   0.0442 + 1.4056i
   0.0442 - 1.4056i
   1.1055 + 0.4008i
   1.1055 - 0.4008i
  -0.3813
```

<u>NOTA:</u> El **orden de un sistema** es igual a la cantidad de polos que posea.

En una representación de espacio de estados, los polos del sistema son los valores propios de la matriz A .

¿Cómo obtener polos de una representación en espacio de estados?

- **Raíces del determinante** $\det(\lambda I - A)$.
- **En Matlab** $eigs(A)$.
- **Soluciones de la ecuación característica del sistema**

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

```
>> A=[2 4;0 3];
>> eigs(A)

ans =

     3
     2
```

$p_1 = 3, \quad p_2 = 2$

2do Orden

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$p_1 = -3.56, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 0.56,$

3^{er} Orden

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} x$$

$p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 3,$

3^{er} Orden

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

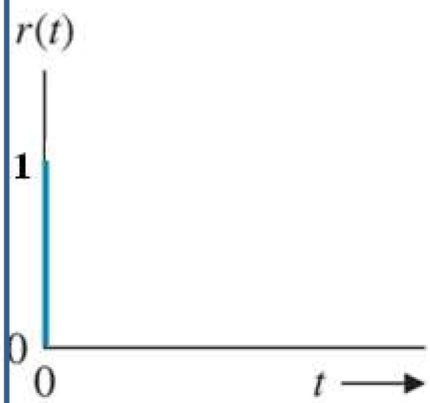
$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x$$

$p_1 = -5, \quad p_2 = -4, \quad p_3 = -3, \quad p_4 = -2,$

4^{to} Orden

Nota: En matrices **diagonales** o **triangulares**, los polos son los elementos de su **diagonal** principal.

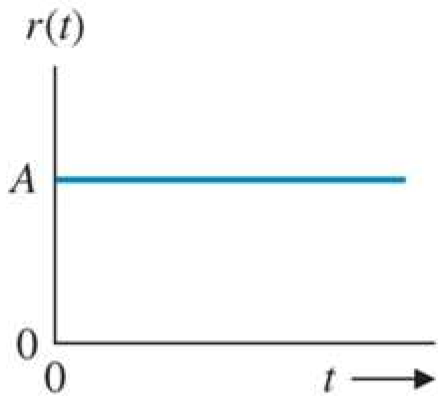
PARA VISUALIZAR RESPUESTAS DEL SISTEMA…SEÑALES DE ENTRADA



Impulso Unitario

$$r(t) = \delta(t)$$

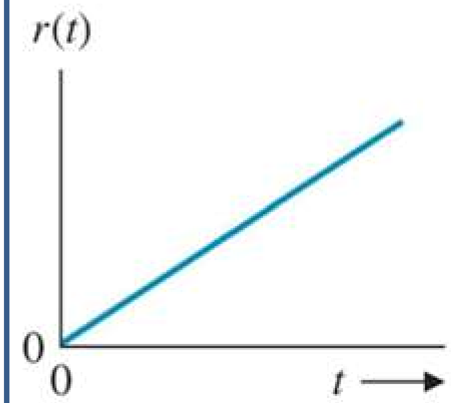
$$R(s) = 1$$



Escalón

$$r(t) = A\mu(t), \quad t > 0$$

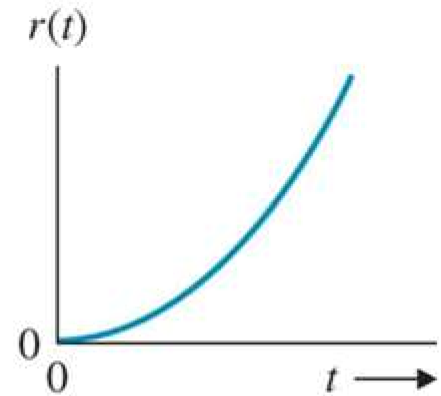
$$R(s) = \frac{A}{s}$$



Rampa

$$r(t) = At, \quad t > 0$$

$$R(s) = \frac{A}{s^2}$$



Parabólica

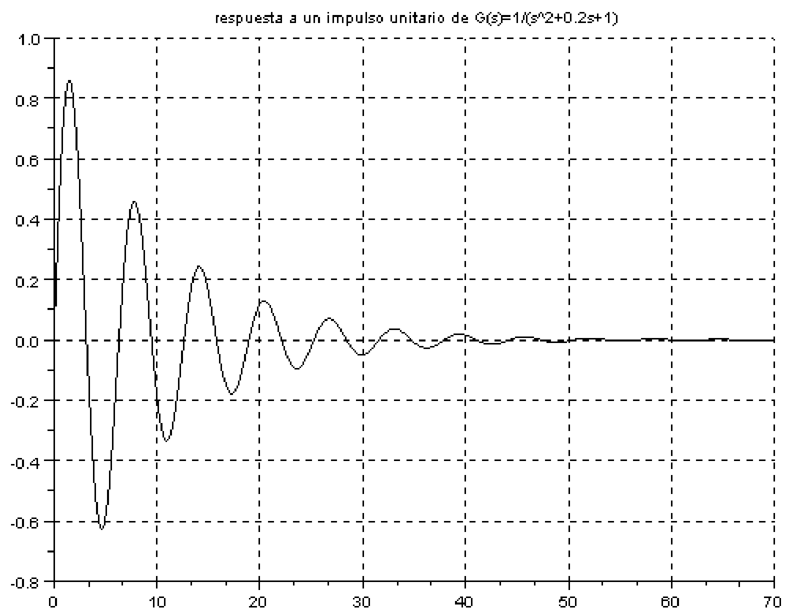
$$r(t) = At^2, \quad t > 0$$

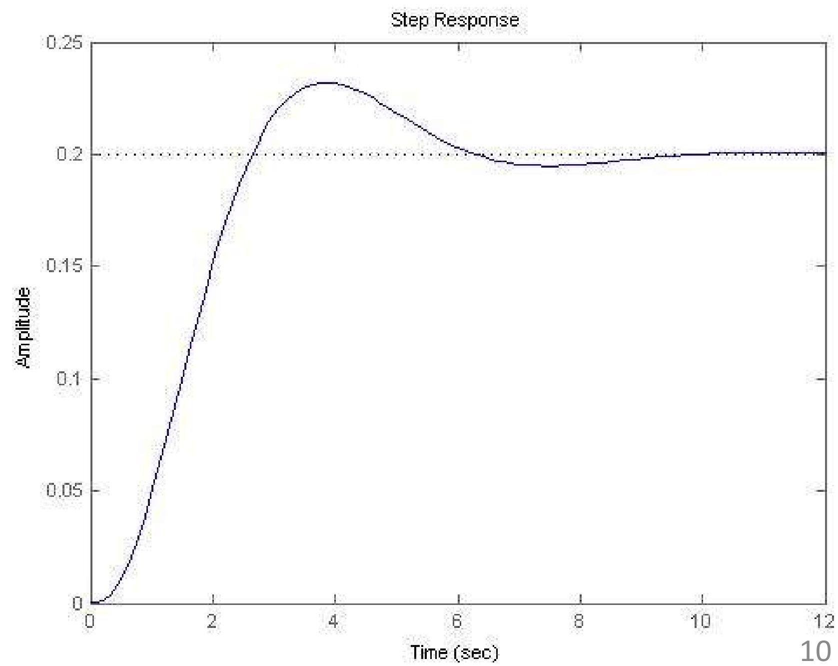
$$R(s) = \frac{2A}{s^3}$$

La respuesta en el tiempo de un sistema consiste de 2 partes:

• **Respuesta transitoria**: parte de la respuesta total que tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito.

• **Respuesta estacionaria o permanente**: parte de la respuesta total que no tiende a cero a medida que el tiempo tiende a infinito.





Considere un sistema de **primer orden** definido por

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

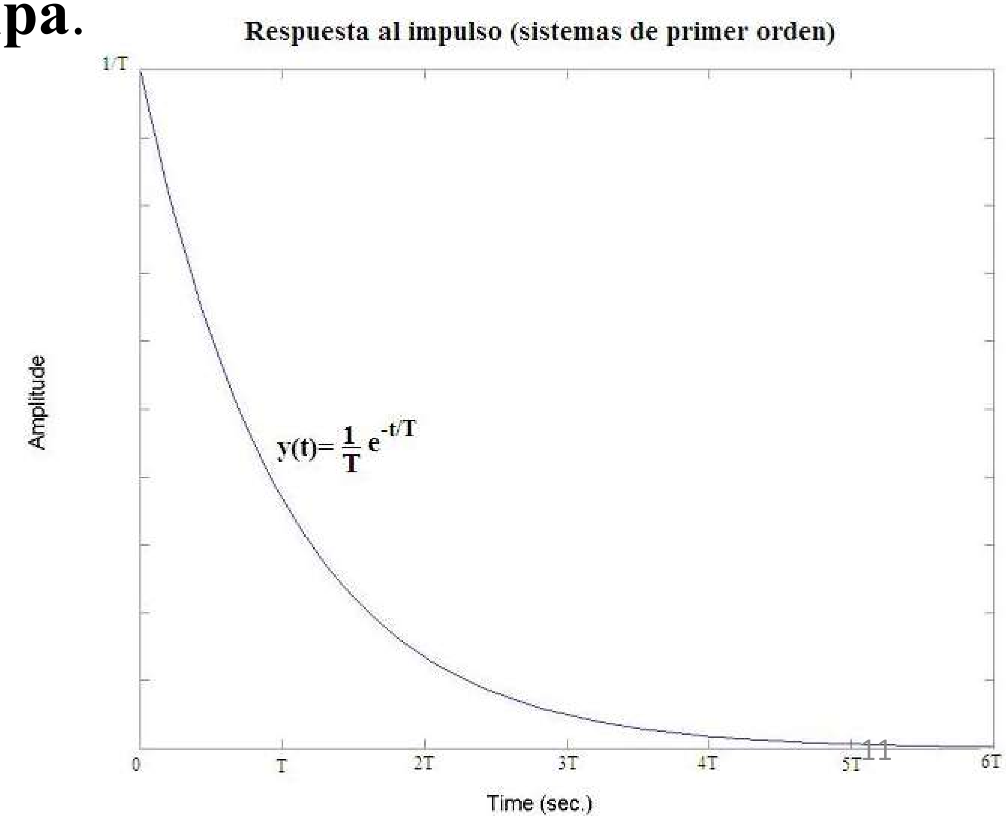
$$\dot{x}(t)=-\frac{x(t)}{T}+u(t)$$
$$y(t)=x(t)$$

Analicemos su respuesta a las entradas de prueba comunes: **impulso unitario**, **escalón unitario** y **rampa**.

a) Respuesta al impulso

$$u(t)=\delta(t)\Rightarrow U(s)=1$$

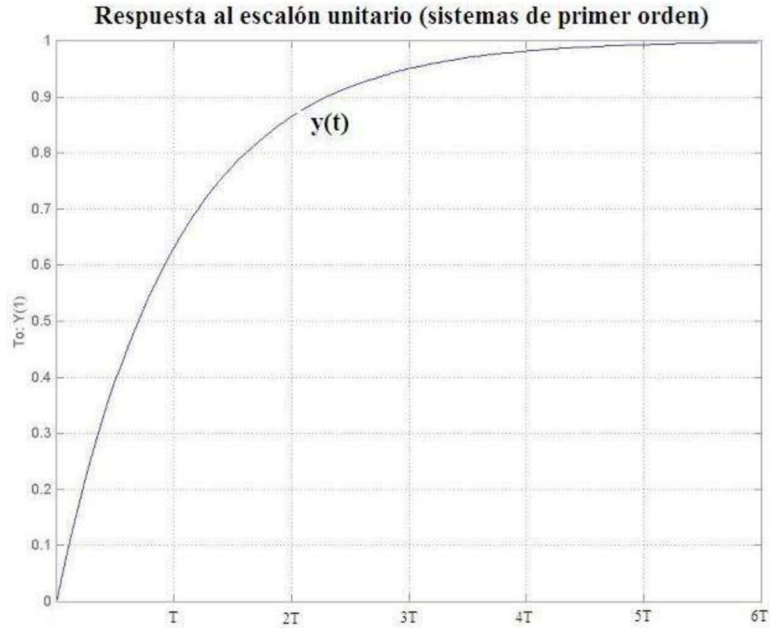
$$\boxed{y(t)=\frac{1}{T}e^{-t/T}}$$



b) Respuesta al Escalón Unitario

$$u(t)=1, t\geq 0 \Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$$

$$\boxed{y(t)=1-e^{-t/T}}$$

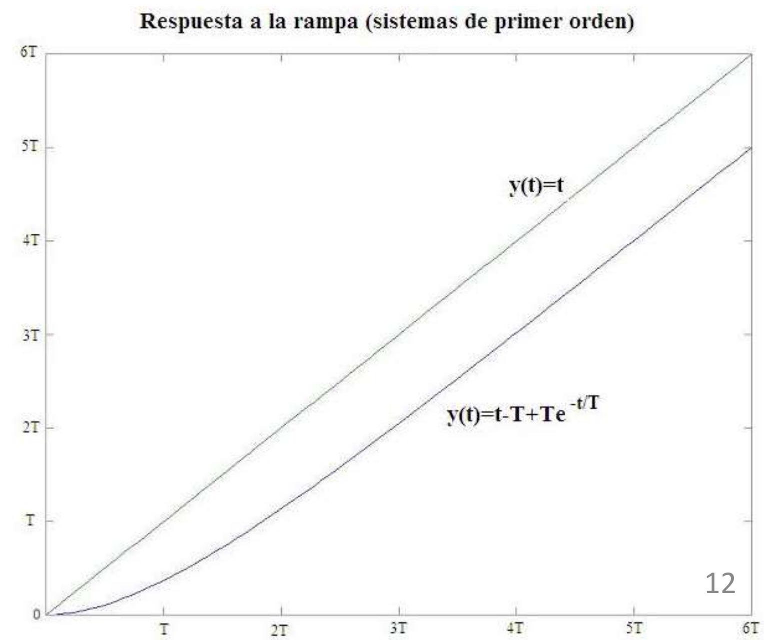


A la constante T se le conoce como la **constante de tiempo del sistema.**

b) Respuesta a la Rampa

$$u(t)=t \Rightarrow U(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{y(t)=t-T+Te^{-t/T}}$$



Considere un sistema de **segundo orden** definido por la siguiente función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_s \cdot \omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

donde ω_n es conocida como la ***frecuencia natural*** del sistema, y ζ es el ***coeficiente de amortiguamiento***.

La **dinámica del sistema** (evolución de la salida en el tiempo para determinada entrada) depende de los **polos del sistema**, en este caso están dados por:

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Existen 3 posibilidades dependiendo del valor de ζ .

1. **0 <ζ< 1**, ***polos complejos conjugados*** en la parte izquierda del plano complejo. En este caso se dice que el **sistema es subamortiguado.**

$$p_{1,2} = -a \pm ib$$

2. **ζ =1**, ***polo real repetido***. Se dice que el sistema tiene **amortiguamiento crítico**.

$$p_1 = p_2 = -a$$

3. **ζ > 1,** ***polos reales distintos***. El sistema se dice sobreamortiguado.

$$p_1 = -a_1, \quad p_2 = -a_2$$

1. *Caso subamortiguado ($0 < \zeta < 1$, polos complejos conjugados).*

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, sen\ \omega_d t\right]$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ es conocida como la frecuencia natural amortiguada del sistema.

2. *Amortiguamiento crítico ($\zeta = 1$, polo real repetido en $-\omega_n$)*

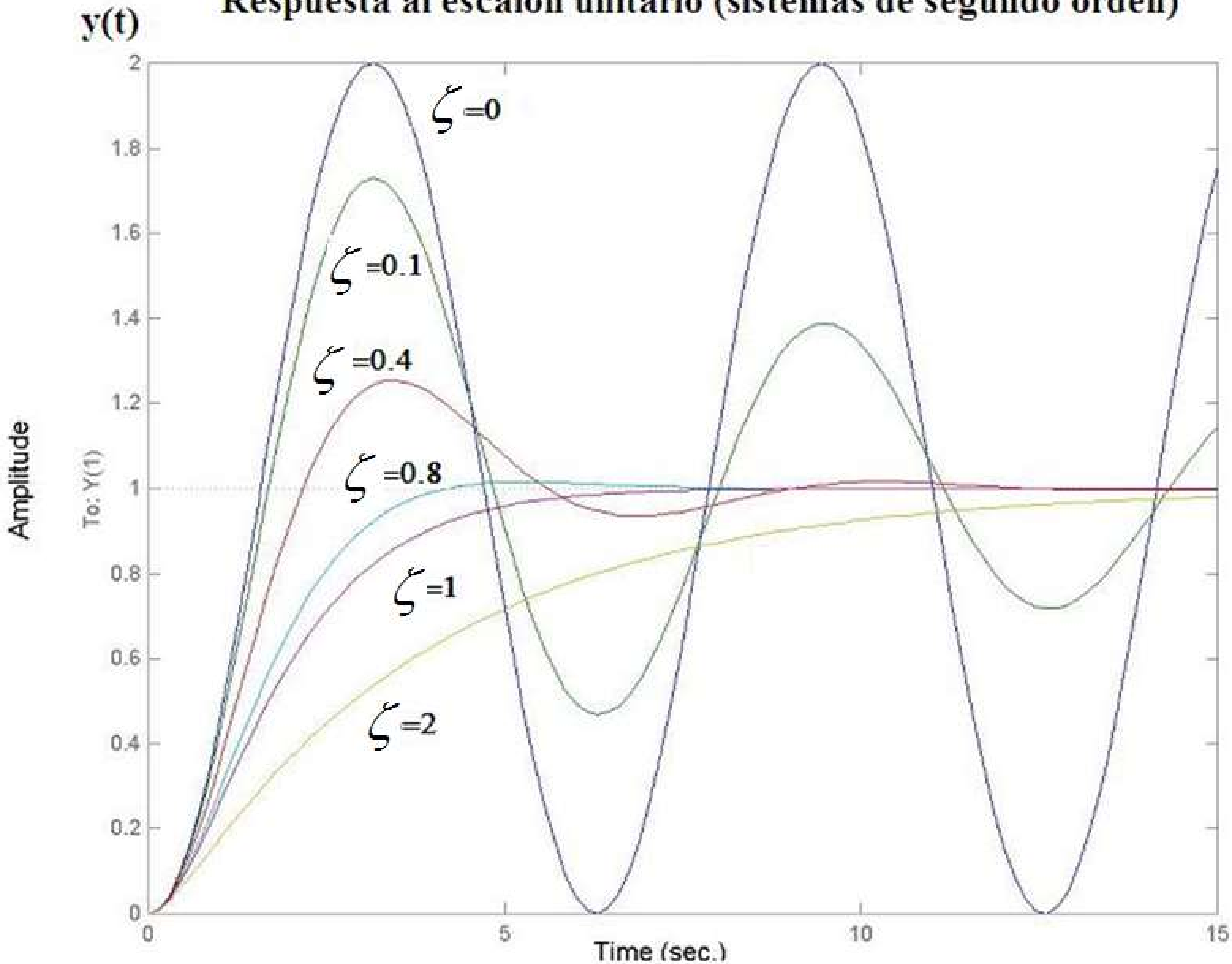
$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)$$

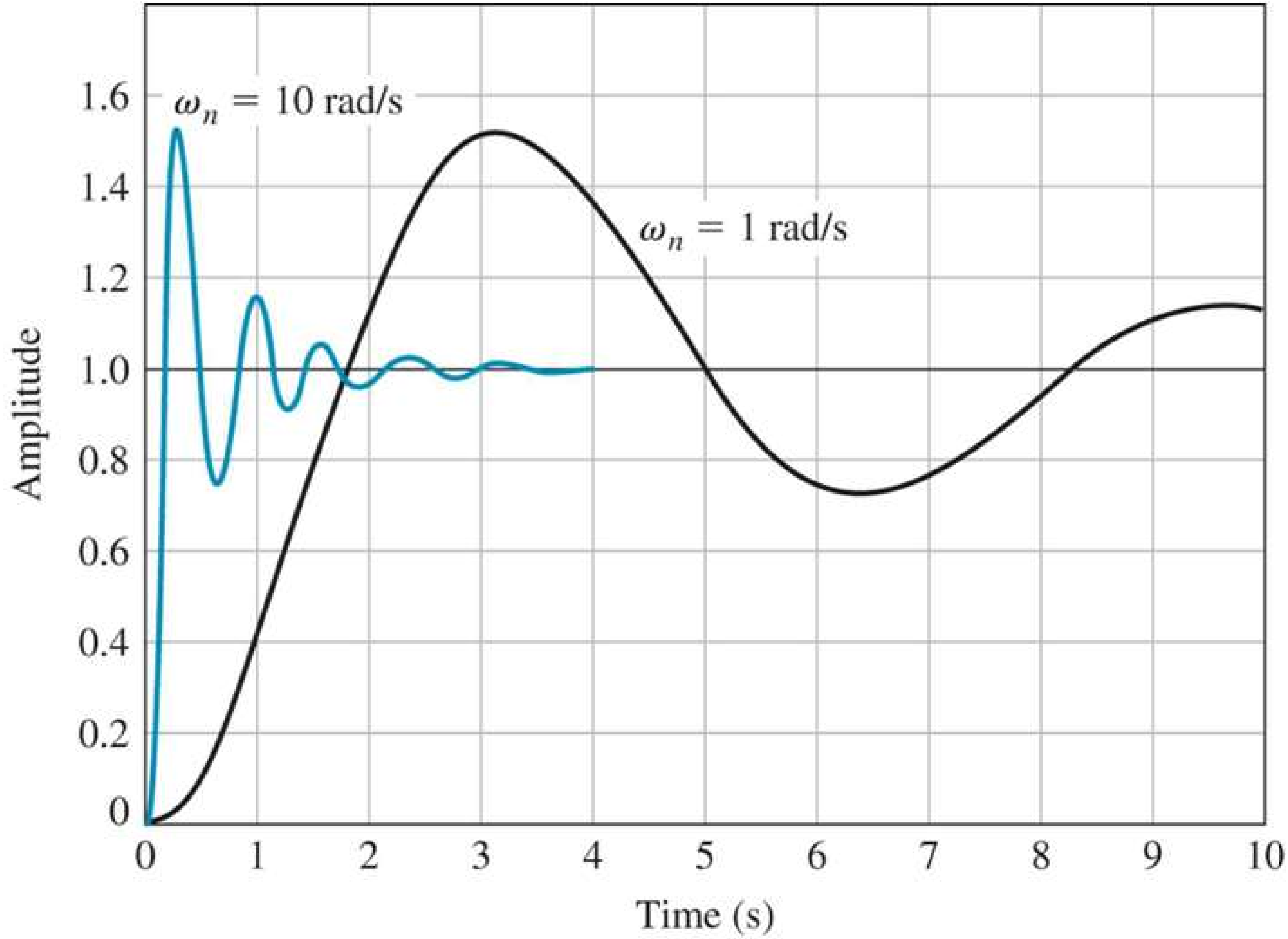
3. *Caso sobreamortiguado ($\zeta > 1$, polos reales distintos)*

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left[\frac{e^{-s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{-s_2 t}}{s_2}\right]$$

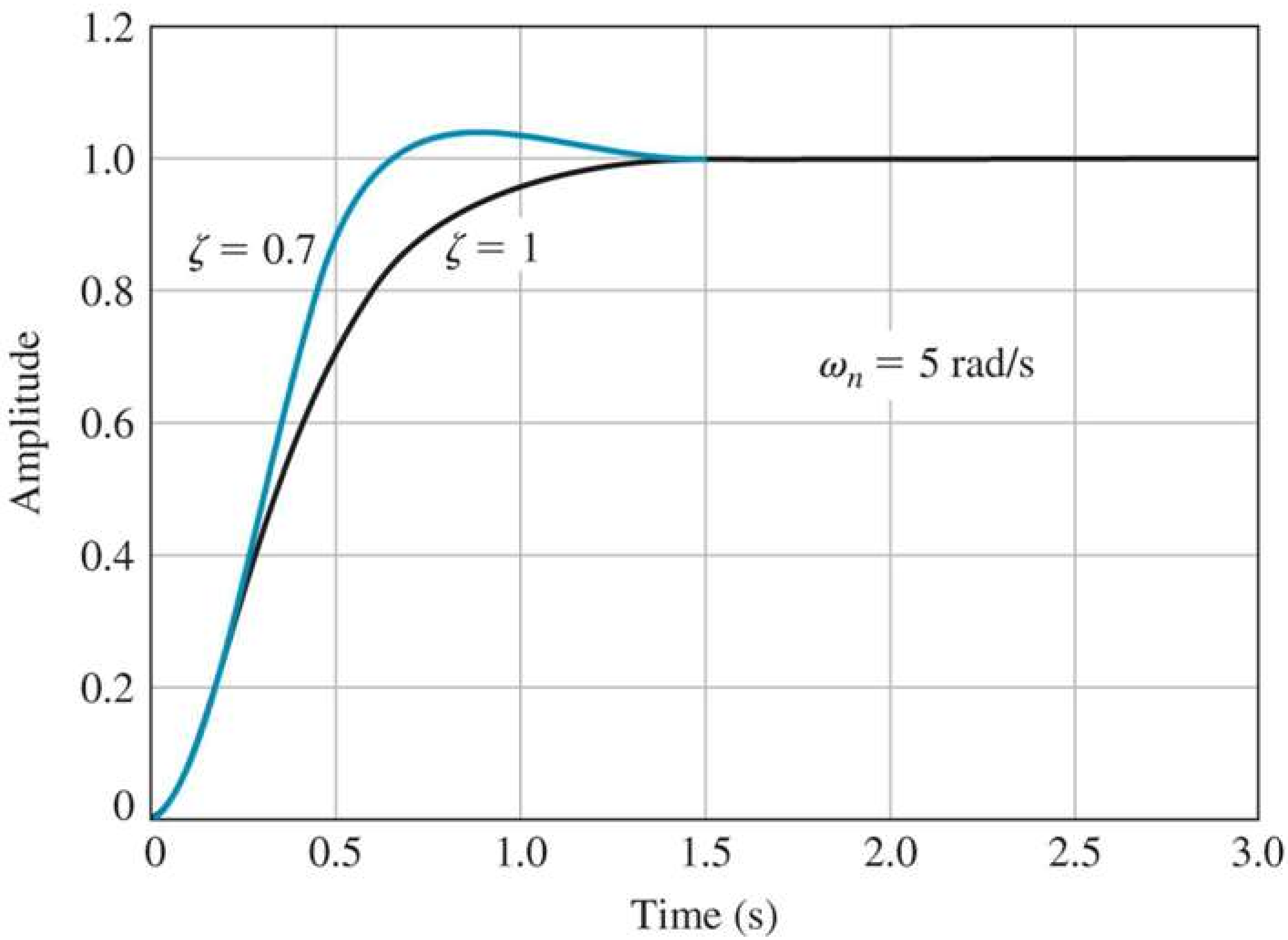
donde $s_1 = \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$, $s_2 = \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n$

Respuesta al escalón unitario (sistemas de segundo orden)



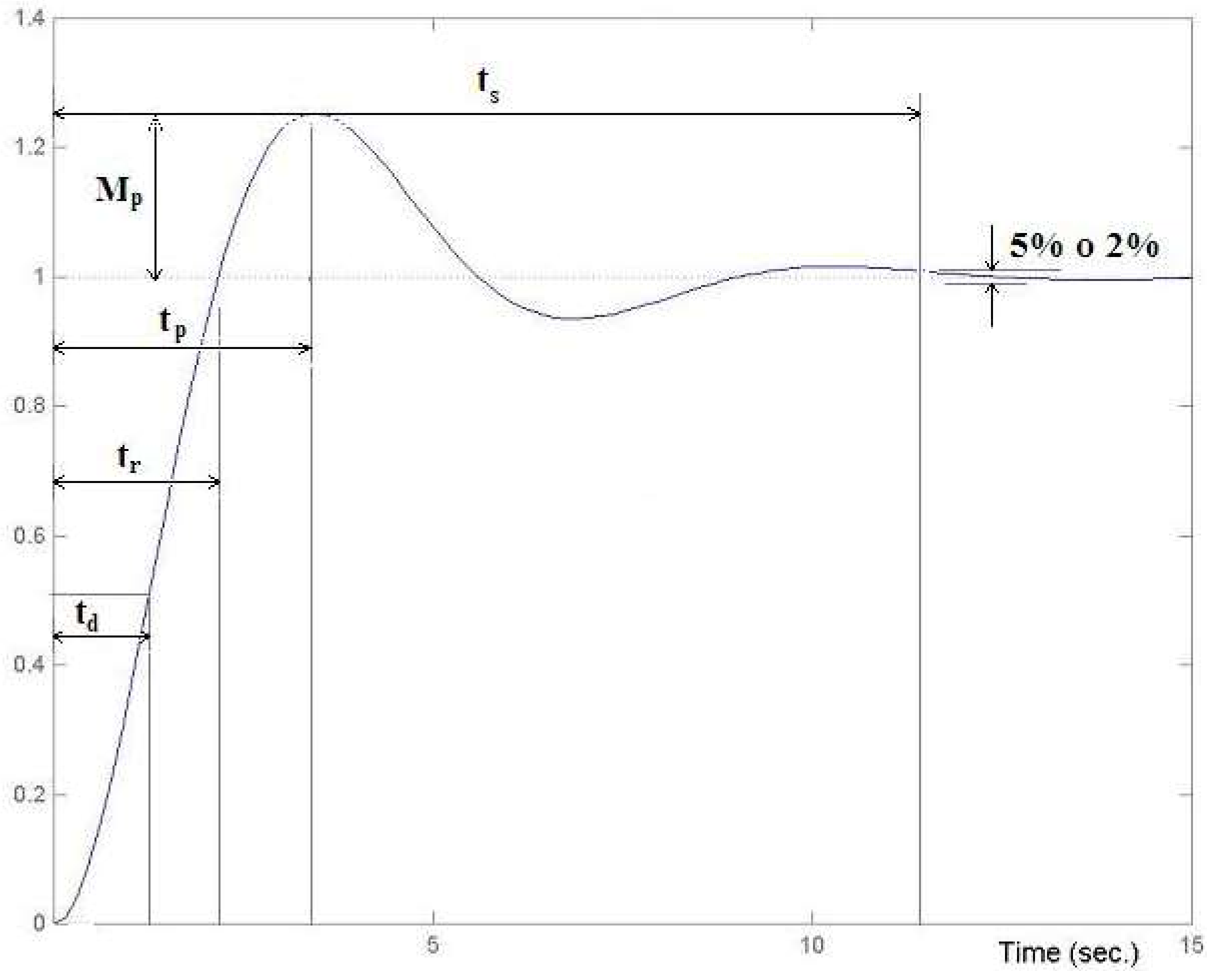


¿Qué podemos concluir de las gráficas?



¿Y que tal de estas?

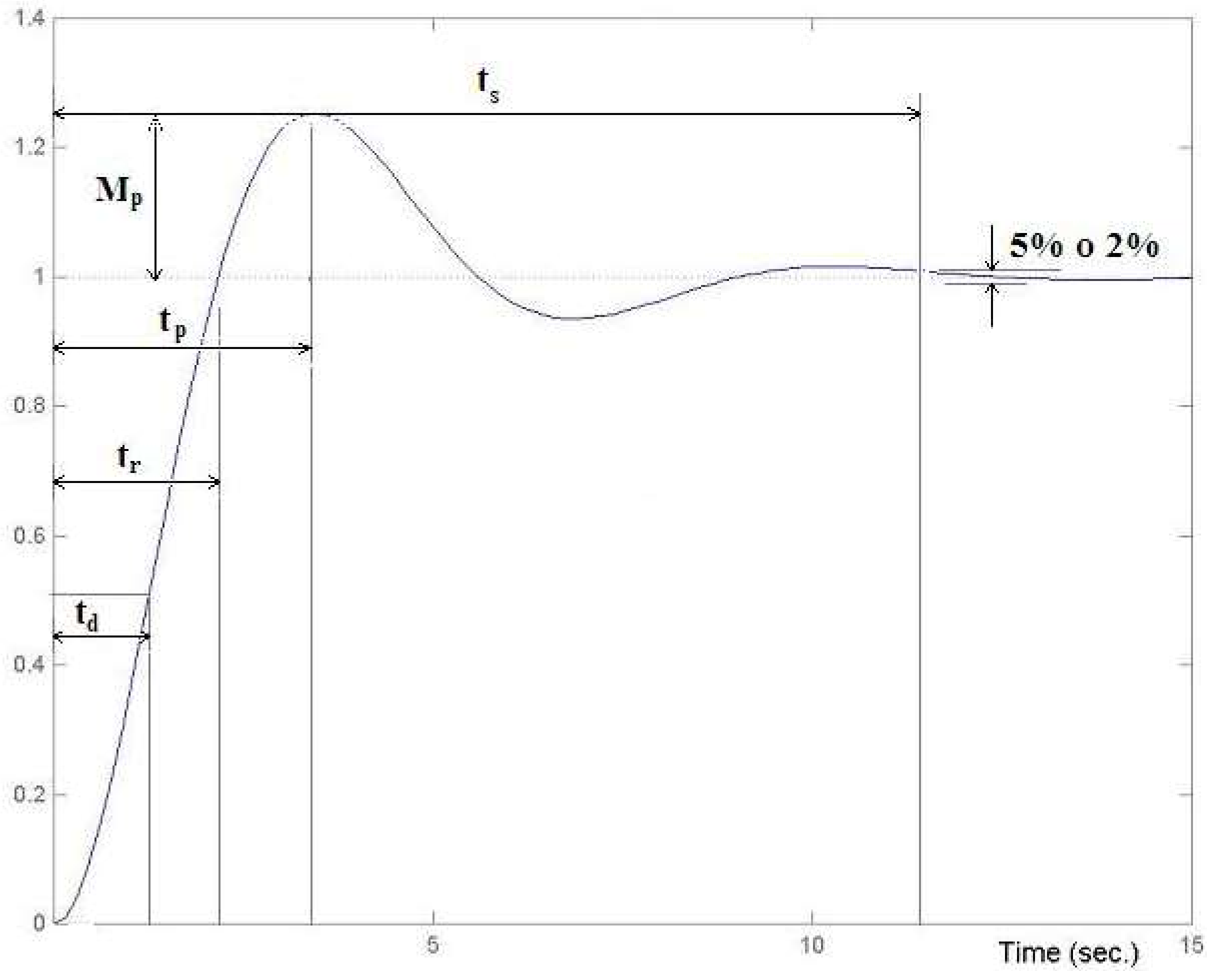
ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA EN EL TIEMPO



Tiempo de retardo t_d **:** Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la mitad del valor final.

Tiempo de crecimiento t_r **:** Tiempo requerido para que la respuesta crezca del 10% al 90% (sobreamortiguado), del 5% al 95%, o del 0 al 100% (subamortiguado) de su valor final.

Tiempo de pico t_p **:** Tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobreimpulso.



Máximo Sobreimpulso M_p **:** Es el valor pico máximo de la curva de respuesta medido desde la unidad.

Si el valor final de la respuesta es diferente de 1, se utiliza el máximo sobreimpulso porcentual, que está dado por

$$\frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

Tiempo de establecimiento t_s **:** Tiempo requerido por la curva de respuesta para alcanzar y mantenerse dentro de determinado rango alrededor del valor final, especificado en porcentaje absoluto del valor final (se usa el 5% o el 2%).

¿Es posible saber las especificaciones usando solo ω_d, ζ ?

Tiempo de Crecimiento $t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left[-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right]$

Tiempo Pico $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$

Máximo Sobreimpulso

$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Máximo Sobreimpulso Porcentual

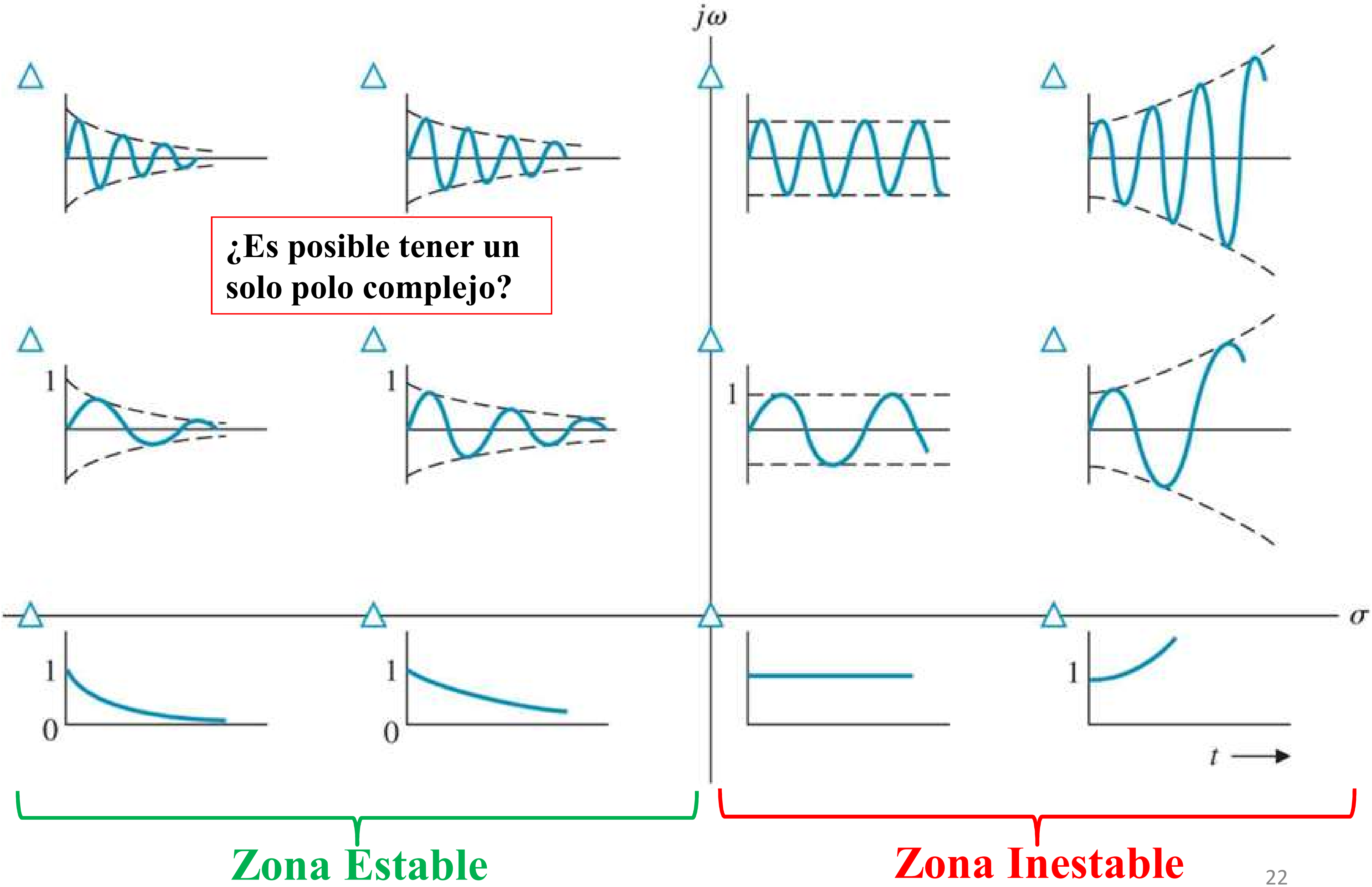
$$M_p = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi} \times 100\%$$

Tiempo de Establecimiento

Criterio del 2% $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

Criterio del 5% $t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

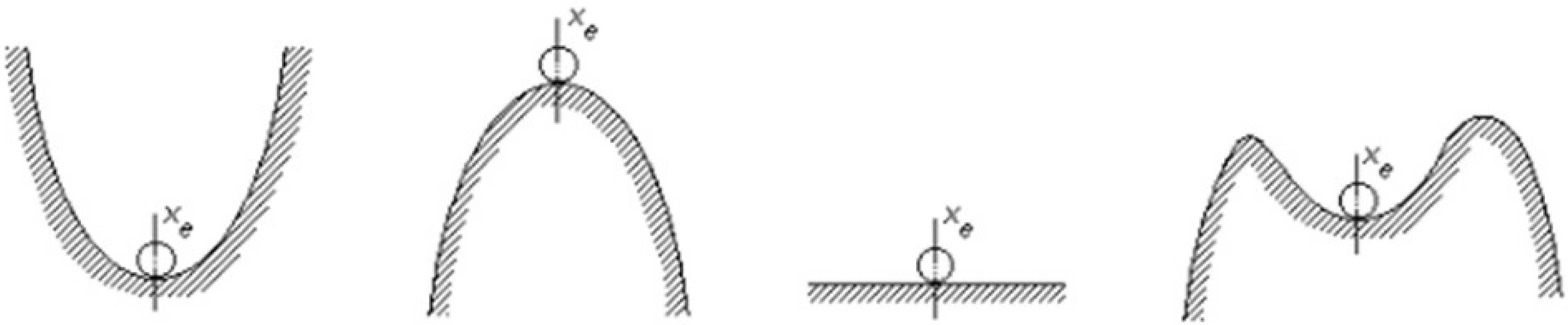
RESPUESTAS AL IMPULSO PARA DIFERENTES POLOS (PLANO COMPLEJO – S)



Un **sistema dinámico lineal e invariante en el tiempo** se dice estable si cualquier **entrada acotada** produce una **salida acotada.**

$$|u(t)| < M_1, \quad t \geq t_0, \qquad\qquad |y(t)| < M_2, \quad t \geq t_0.$$

EJEMPLO: **ENTRADA**: Fza. aplicada a la bola. **SALIDA:** Posición de la bola.



Estable Inestable Neutralmente Estable Localmente Estable

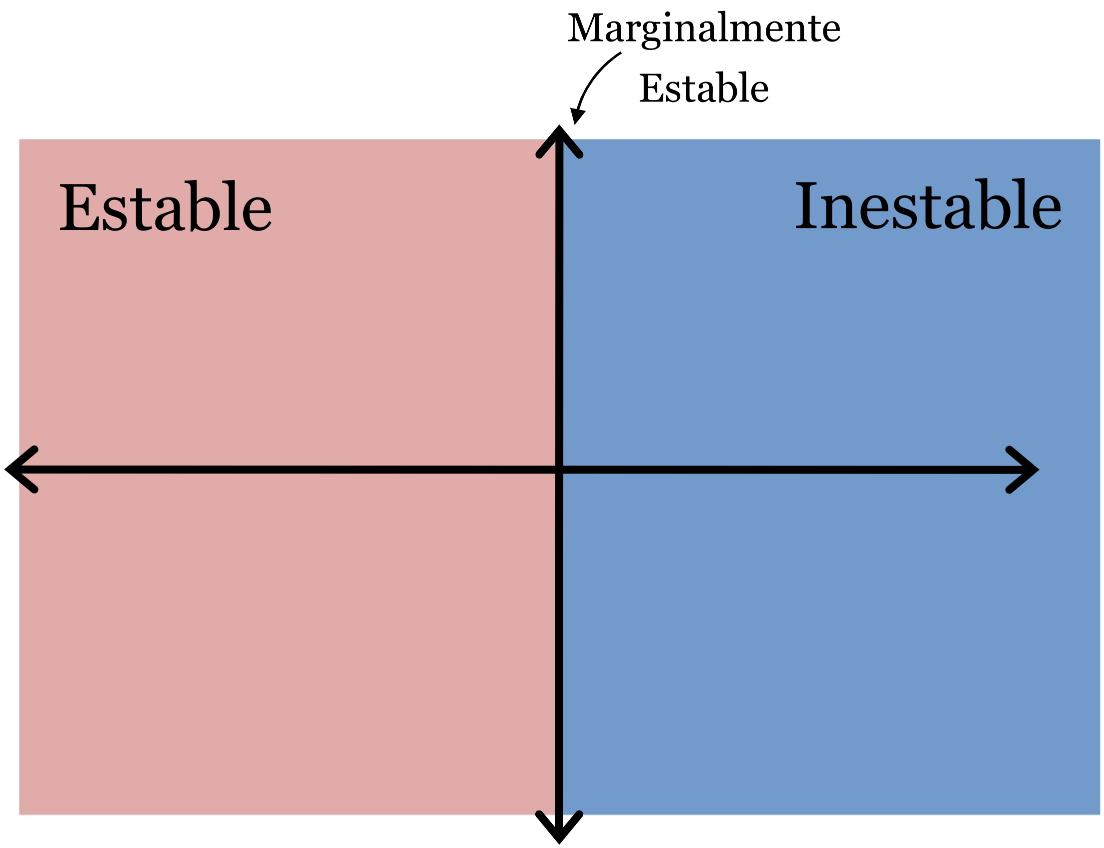
Ahora definiremos las condiciones de estabilidad de un sistema de forma analítica.

Condiciones de estabilidad: Caso Continuo

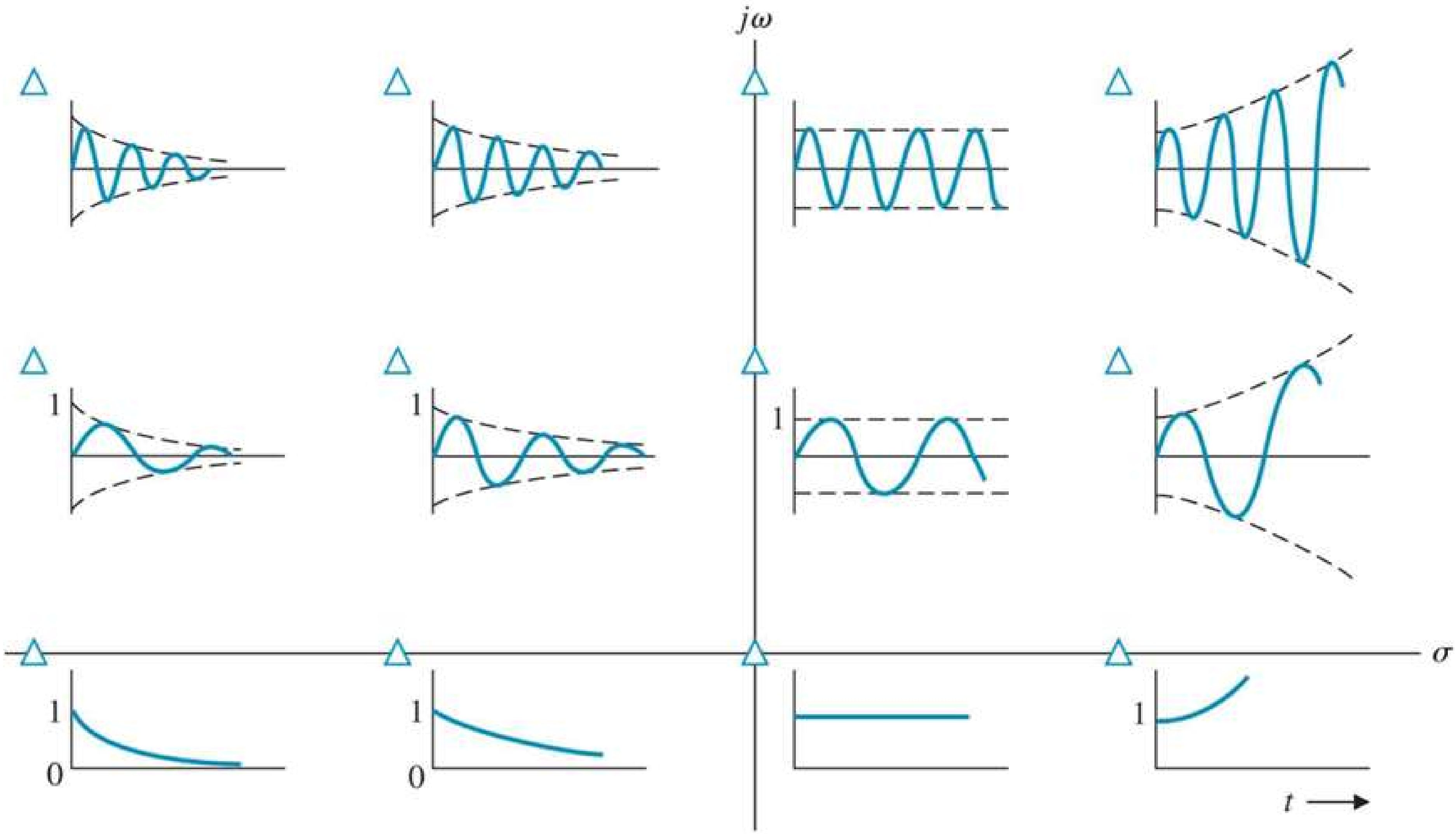
Sistema Estable: Todos los polos tienen parte real negativa.

Marginalmente Estable: Hay uno o mas polos sobre el eje imaginario y todos los demás polos tienen parte real negativa.

Inestable: Uno o más polos tienen parte real positiva.



RESPUESTAS AL IMPULSO

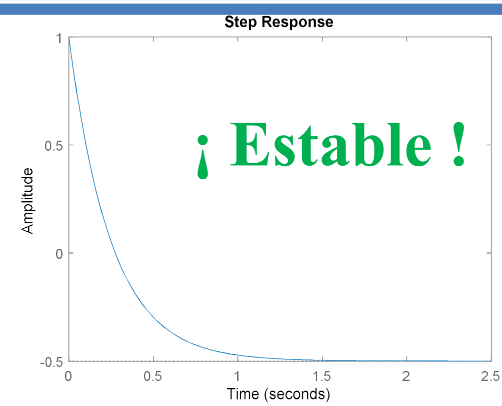


ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS (EJEMPLOS)

$$\boxed{G(s)=\frac{s-2}{s+4}}$$

$$Polos=\{-4\}$$

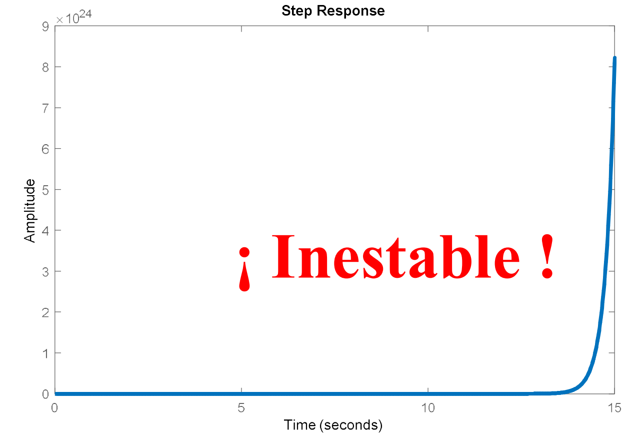
```
>> step(tf([1 -2],[1 4]));
```



$$\boxed{G(s)=\frac{2}{(s-4)(s+3)}}$$

$$Polos=\{4,-3\}$$

```
>> step(tf([2],[1 -1 -12]));
```

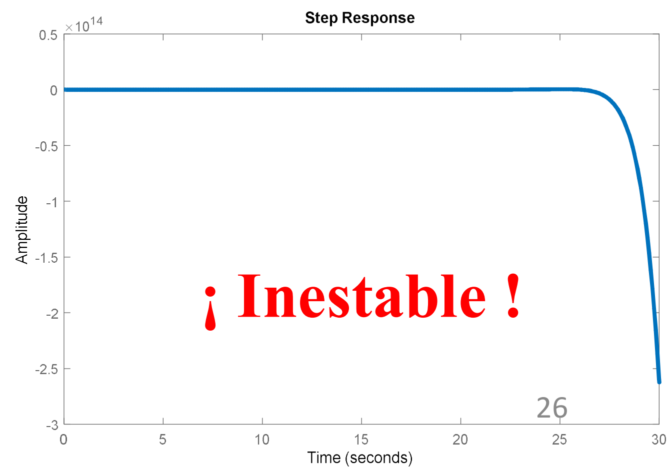


$$\boxed{G(s)=\frac{7}{s^6-s^4+2s^3-5s^2+3s+2}}$$

```
>> roots([1 0 -1 2 -5 3 2])
```

$$Polos=\begin{Bmatrix}-0.3813\\ 1.1055\pm 0.4008i\\ 0.0442\pm 1.4056i\\ -1.9181\end{Bmatrix}$$

```
>> step(tf([7],[1 0 -1 2 -5 3 2]));
```



ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS (MÁS EJEMPLOS)

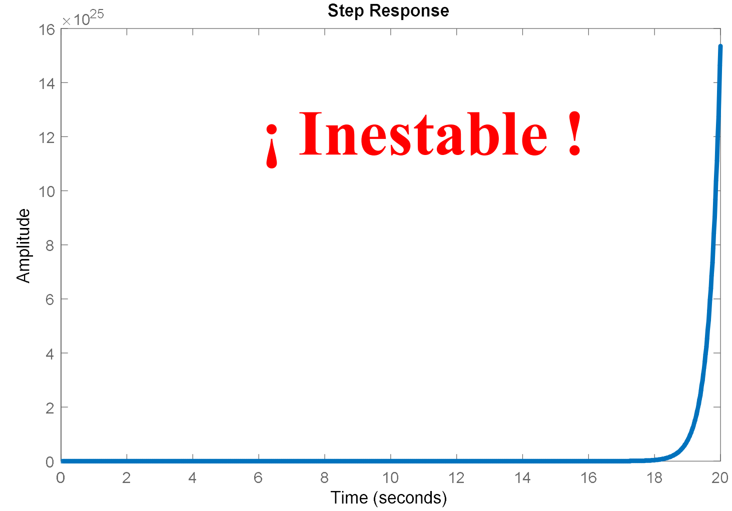
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

```
>> eigs([2 4;0 3])
```

Polos$=\{3\ ,\ 2\}$

```
>> step(ss([2 4;0 3],[0;1],[1 0],[0]));
```



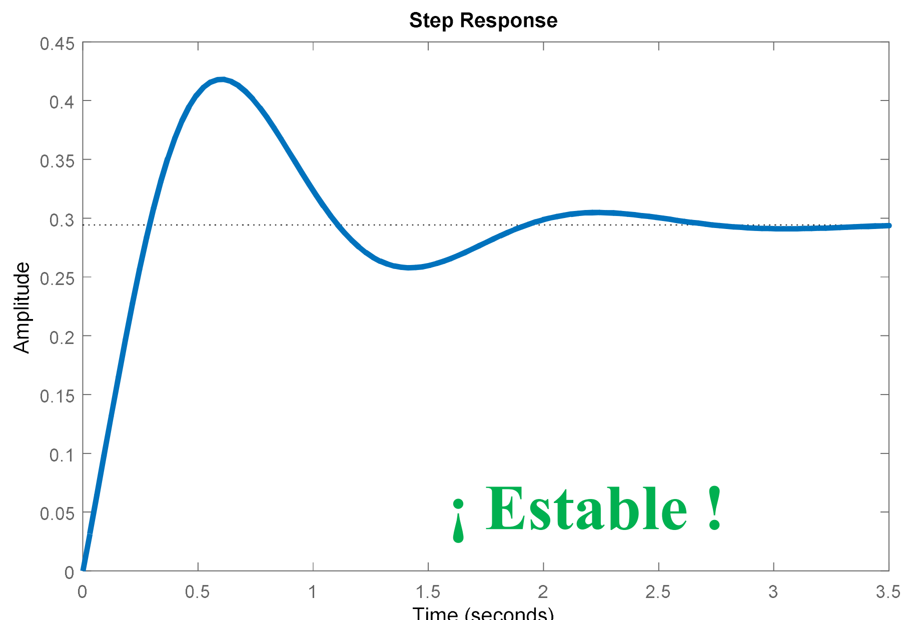
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

```
>> eigs([-2 0 3;1 -1 4;-5 0 -1])
```

Polos$=\{-1.5-3.84i\ ,\ -1.5+3.84i,\ \ -1\}$

```
>> step(ss([-2 0 3;1 -1 4;-5 0 -1],[0;1;1],[1 0 1],[0]));
```



Y aún más ejemplos:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

```
>> eigs([0 1 -2;0 0 4;0 0 3])
```

Polos $=\{0\ ,\ 0,\ \ 3\}$

```
>> step(ss([0 1 -2;0 0 4;0 0 3],[4;3;0],[1 0 3],[0]));
```

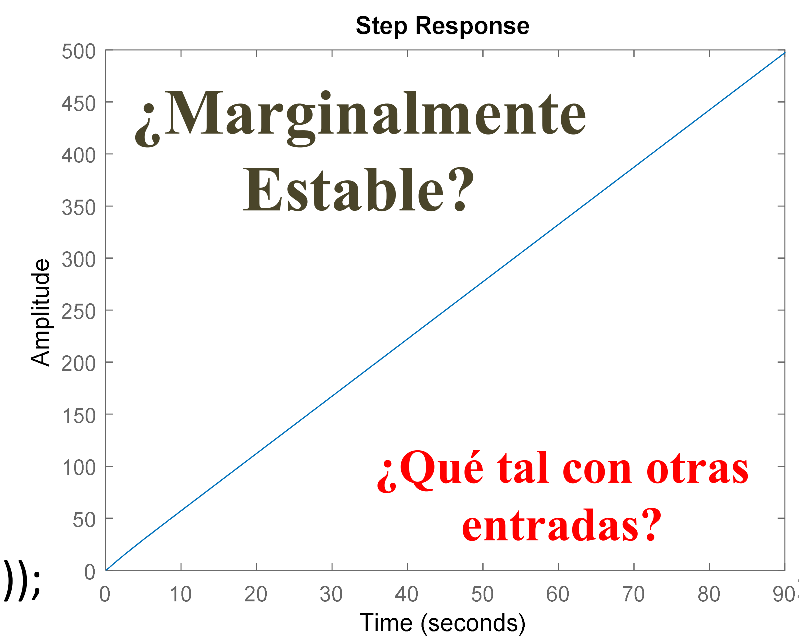
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

```
>> eigs([0 1 -2;0 -2 4;0 1 -3])
```

Polos $=\{-4.561\ ,\ -0.438,\ \ 0\}$

```
>> step(ss([0 1 -2;0 -2 4;0 1 -3],[4;3;0],[1 0 3],[0]));
```



- La ubicación de los polos de un sistema (y su cantidad) determinan la respuesta transitoria de un sistema.

- Para sistemas de segundo orden (o aproximables a 2do orden) hay una relación directa entre características de la respuesta a un escalón y la ubicación de los polos del sistema.

- Los polos del sistema determinan la estabilidad de un sistema.

- Dependiendo de la ubicación de los polos el sistema puede ser: **Estable**. **Marginalmente Estable** o **Inestable**.

Entonces…¿Cómo diseñar un controlador que modifique los polos de un sistema y obtener el comportamiento deseado?

TAREA (T1.4): **Investigar el modelo en espacio de estados de un sistema que les parezca interesante.**

- **Describir las variables involucradas**
- **Expresar las ecuaciones que componen el modelo**
- **Elegir una variable del sistema que les gustaría controlar y explicar porqué.**
- **Incluir las referencias usadas (libros, internet, artículos, etc.)**

NOTA: **No debe ser un modelo visto en clase o de sus proyectos.**

Colorín Colorado…