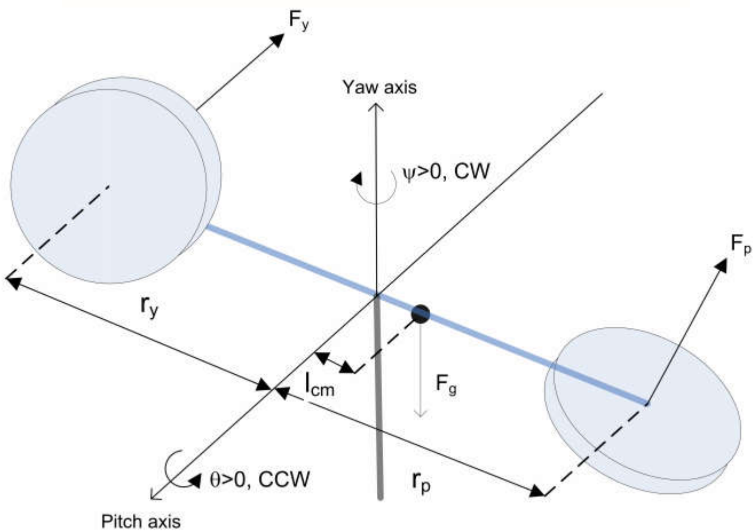
EJEMPLO 6: Un Sistema No Lineal… Helicóptero de 2DOF



Análisis de cuerpo libre

ODEs

$$(J_p + m_h l_{cm}^2)\ddot{\theta} = K_{pp}\omega_p + K_{py}\omega_y - m_h g l_{cm}\cos\theta - b_p\dot{\theta} - m_h l_{cm}^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}^2$$

$$(J_y + m_h l_{cm}^2 \cos^2\theta)\ddot{\psi} = K_{yy}\omega_y + K_{yp}\omega_p - b_y\dot{\psi} + 2 m_h l_{cm}^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}\dot{\theta}$$

Diseñe un controlador para que los ángulos θ y ψ sigan las referencias

$\theta_{ref} = \cos(2t)$ **y** $\psi_{ref} = \sin(2t)$

https://www.made-for-science.com/de/quanser/?df=made-for-science-quanser-2-dof-helicopter-coursewarestud-labview.pdf

Obteniendo una representación en espacio de estados… No lineal

Echémosle un ojo a las ecuaciones diferenciales…

$$\left(J_p + m_h l_{cm}^2\right)\ddot{\theta} = K_{pp}\omega_p + K_{py}\omega_y - m_h g l_{cm}\cos\theta - b_p\dot{\theta} - m_h l_{cm}^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}^2$$

$$\left(J_y + m_h l_{cm}^2\cos^2\theta\right)\ddot{\psi} = K_{yy}\omega_y + K_{yp}\omega_p - b_y\dot{\psi} + 2m_h l_{cm}^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot{\psi}\dot{\theta}$$

¿Cuáles variables de estado propondrían y porqué? ¿cuáles serían las entradas del sistema?

Usando el criterio de las variables con derivadas y las variables que inyectan energía al sistema, podemos proponer

$$\boldsymbol{x_1 = \theta, x_2 = \psi, x_3 = \dot{\theta}, x_4 = \dot{\psi}, u_1 = \omega_p, u_2 = \omega_y, y_1 = x_1, y_2 = x_2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones originales resulta en:

$$\left(J_p + m_h l_{cm}^2\right)\dot{x}_3 = K_{pp}u_1 + K_{py}u_2 - m_h g l_{cm}\cos x_1 - b_p x_3 - m_h l_{cm}^2 \sin x_1\cos x_1\,x_4^2$$

$$\left(J_y + m_h l_{cm}^2\cos^2 x_1\right)\dot{x}_4 = K_{yy}u_2 + K_{yp}u_1 - b_y x_4 + 2m_h l_{cm}^2 \sin x_1\cos x_1\,x_4 x_3$$

Lo que nos da un **modelo no lineal** en espacio de estados como:

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_3\\
\dot{x}_2 &= x_4\\
\dot{x}_3 &= \frac{-m_h g l_{cm}\cos x_1 - b_p x_3 - m_h l_{cm}^2\sin x_1\cos x_1\,x_4^2}{J_p + m_h l_{cm}^2} + \frac{K_{pp}u_1 + K_{py}u_2}{J_p + m_h l_{cm}^2}\\
\dot{x}_4 &= \frac{-b_y x_4 + 2m_h l_{cm}^2\sin x_1\cos x_1\,x_4 x_3}{J_y + m_h l_{cm}^2\cos^2 x_1} + \frac{K_{yy}u_2 + K_{yp}u_1}{J_y + m_h l_{cm}^2\cos^2 x_1}
\end{aligned}}$$

Podemos organizar el sistema en forma matricial como

$$\textit{Primer Bloque}\rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$\textit{Segundo Bloque}\rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_3(X)\\ f_4(X)\end{bmatrix}+G(X)\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

donde

$$f_3(X)=\frac{-m_h g l_{cm}\cos x_1-b_p x_3-m_h l_{cm}^2\sin x_1\cos x_1 x_4^2}{J_p+m_h l_{cm}^2},\ f_3(X)=\frac{-b_y x_4+2m_h l_{cm}^2\sin x_1\cos x_1 x_4 x_3}{J_y+m_h l_{cm}^2\cos^2 x_1}$$

y $G(X)=\begin{bmatrix}\dfrac{K_{pp}}{J_p+m_h l_{cm}^2} & \dfrac{K_{py}}{J_p+m_h l_{cm}^2}\\ \dfrac{K_{yp}}{J_y+m_h l_{cm}^2\cos^2 x_1} & \dfrac{K_{yy}}{J_y+m_h l_{cm}^2\cos^2 x_1}\end{bmatrix}$.

De sistema a bloques podemos ver que **no se puede usar retro. de error** porque las entradas $\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$ no afectan directamente a las salidas $\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$.

Pero, si podemos usar control por bloques si plantemos que:

- Con $\begin{bmatrix}\boldsymbol{u_1}\\ \boldsymbol{u_2}\end{bmatrix}$ controlaremos a $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{x_4}\end{bmatrix}$ (**bloque 2**).
- Con $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x_3}\\ \boldsymbol{x_4}\end{bmatrix}$ controlaremos a $\begin{bmatrix}\boldsymbol{x_1}\\ \boldsymbol{x_2}\end{bmatrix}$ (**bloque 1**).

Ahora sí, empezamos el diseño de control por bloques ☺

Definimos la variable de error para el primer bloque como $\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_{1ref}} \\ \boldsymbol{y_{2ref}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \end{bmatrix}$. Luego, obtenemos su dinámica y la igualamos a la dinámica deseada $\dot{e}_1 = K_1 e_1$, resultando en:

$$\boldsymbol{\dot{e}_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{y}_{1ref}} \\ \boldsymbol{\dot{y}_{2ref}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{x}_1} \\ \boldsymbol{\dot{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{y}_{1ref}} \\ \boldsymbol{\dot{y}_{2ref}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{bmatrix} = K_1 e_1,$$

definimos $K_1 < 0$ para tener una dinámica estable y que $\dot{e}_1 \to 0$.

Después, despejamos $\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, los cuales se convertirán en la referencia del siguiente bloque

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{3ref}} \\ \boldsymbol{x_{4ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{x}_{1ref}} \\ \boldsymbol{\dot{x}_{2ref}} \end{bmatrix} - \boldsymbol{K_1 e_1}.$$

Entonces, definimos el error para el segundo bloque como $\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_{3ref}} \\ \boldsymbol{x_{4ref}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_3} \\ \boldsymbol{x_4} \end{bmatrix}$, e igualamos su dinámica con la dinámica deseada $\dot{e}_2 = K_2 e_2$ con $K_2 < 0$, resultando en

$$\dot{e}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{3ref} \\ \dot{x}_{4ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{3ref} \\ \dot{x}_{4ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_3(X) \\ f_4(X) \end{bmatrix} - G(X) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = K_2 e_2.$$

De aquí, despejamos las señales de control como

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1} \\ \boldsymbol{u_2} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G(X)^{-1}} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{x}_{3ref}} \\ \boldsymbol{\dot{x}_{4ref}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{f_3(X)} \\ \boldsymbol{f_4(X)} \end{bmatrix} - \boldsymbol{K_2 e_2} \right)$$

Podemos ver que nos hace falta obtener $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\dot{x}_{3ref}} \\ \boldsymbol{\dot{x}_{4ref}} \end{bmatrix}$, lo calculamos en seguida…

Calculamos los términos que nos faltan:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{3ref} \\ \dot{x}_{4ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1ref} \\ \ddot{x}_{2ref} \end{bmatrix} - K_1 \dot{e}_1 = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1ref} \\ \ddot{x}_{2ref} \end{bmatrix} - K_1 \left(\begin{bmatrix} \dot{x}_{1ref} \\ \dot{x}_{2ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right)$$

Finalmente, obtenemos las derivadas de las referencias (recuerden que necesitamos tantas derivadas como bloques utilizados)

$$\begin{bmatrix} x_{1ref} \\ x_{2ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_{1ref} \\ \dot{x}_{2ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \ddot{x}_{1ref} \\ \ddot{x}_{2ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\cos(2t) \\ -4\sin(2t) \end{bmatrix}.$$

Ahora vamos a Matlab…

Implementación en Matlab

```
function Heli2DOF_BLOQUES_plot( tspan, x0, K)
    global K1 K2

    K1=K(1);    K2=K(2);
    %RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
    [t, X] = ode45(@Heli2DOF_BLOQUES_sys, tspan, x0);

%Grafico los estados
    figure; subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
    subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
    subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
    subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;
%Grafico salida y referencia
    figure; subplot(2,1,1); plot(t,X(:,1),t,pi*sin(t)/4,'r'); title('SALIDA 1 Y REF');    grid;
            subplot(2,1,2); plot(t,X(:,2),t,pi*cos(t)/4,'r'); title('SALIDA 2 Y REF');    grid;
%Gráfica en 3D
    Draw_Heli2DOF(t,X(:,1:2),0);
end
```

```
function dX = Heli2DOF_BLOQUES_sys( t, X)
    global K1 K2
    %Parámetros del sistema
    m=2;l=0.3;g=9.81;Jy=0.02;Jp=0.02;by=0.005;bp=0.005; Kpp=1;Kyy=1;Kyp=0.1;Kpy=0.1;
    %Funciones del sistema
    f3=(-m*g*l*cos(X(1))-bp*X(3)-m*l^2*sin(X(1))*cos(X(1))*X(4)^2)/(Jp+m*l^2);
    f4=(-by*X(4)+2*m*l^2*sin(X(1))*cos(X(1))*X(4)*X(3))/(Jy+m*l^2*cos(X(1))^2);
    G=[Kpp/(Jp+m*l^2) Kpy/(Jp+m*l^2);Kyp/(Jy+m*l^2*cos(X(1))^2) Kyy/(Jy+m*l^2*cos(X(1))^2)];
    %Referencias y sus derivadas
    Y1r = pi*sin(t)/4;   dY1r = pi*cos(t)/4;   ddY1r =-pi*sin(t)/4;
    Y2r = pi*cos(t)/4;  dY2r = -pi*sin(t)/4;   ddY2r =-pi*cos(t)/4;
    %1er Bloque
    e1 =[Y1r;Y2r]-[X(1);X(2)];
    de1=[dY1r;dY2r]-[X(3);X(4)];
    aux=[dY1r;dY2r]-K1*e1;
    x3ref=aux(1);   x4ref=aux(2);
    % 2do bloque
    e2 =[x3ref;x4ref]-[X(3);X(4)];
    aux2=[ddY1r;ddY2r]-K1*de1;
    dx3ref=aux2(1); dx4ref=aux2(2);
    U = G^-1*([dx3ref;dx4ref]-[f3;f4]-K2*e2);

    %ODE's
    dX = [X(3);X(4);f3;f4]+[0 0;0 0;G]*U;
end
```

Veamos los resultados de simulación en clase ☺

Problema: Considere el siguiente sistema:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X$$

Diseñe un controlador para que la salida siga la referencia

$$y_{ref}(t) = -3 + 2\cos(2t)$$

Solución:

¿Podemos utilizar retroalimentación de error en este caso?

No ya que $CB = 0$

Entonces, control por bloques suena a una buena opción ☺

¿Cuáles bloques sería conveniente definir?

¿Es una opción única la elección de los bloques?

Identificamos 4 bloques de la siguiente manera (recordemos que $y = x_1$)

(BLOQUE 1) $\dot{x}_1 = -4x_1 + 4x_2 + 2x_4$

(BLOQUE 2) $\dot{x}_2 = -3x_2 + 3x_3$

(BLOQUE 3) $\dot{x}_3 = 2x_2 - 5x_3 + 10u$

(BLOQUE 4) $\dot{x}_4 = x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4$

Opción 1 de Control por Bloques [**3 bloques**]

A x_1 lo controlamos con x_4, a x_4 con x_3, y a x_3 con u.

Opción 2 de Control por Bloques [**3 bloques**]

A x_1 lo controlamos con x_2, a x_2 con x_3, y a x_3 con u.

Opción 3 de Control por Bloques [**4 bloques**]

A x_1 lo controlamos con x_4, a x_4 con x_2, a x_2 con x_3, y a x_3 con u.

¿Cuál creen que convenga utilizar?

Entre menos bloques, mejor ☺

<u>Usando la opción 2</u>:

$$\text{(BLOQUE 1) } \dot{x}_1 = -4x_1 + 4x_2 + 2x_4$$
$$\text{(BLOQUE 2) } \dot{x}_2 = -3x_2 + 3x_3$$
$$\text{(BLOQUE 3) } \dot{x}_3 = 2x_2 - 5x_3 + 10u$$
$$\text{(BLOQUE 4) } \dot{x}_4 = x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4$$

Empecemos con nuestro procedimiento de control por bloques.

Definimos el error para la salida como: $e_1 = y_{ref} - x_1$.

Su dinámica se obtiene como:

$$\dot{e}_1 = \dot{y}_{ref} - \dot{x}_1 = \boldsymbol{\dot{y}_{ref} + 4x_1 - 4x_2 - 2x_4}$$

De aquí hay dos opciones: usar x_2 para controlar este bloque o usar x_4 ¿Cuál es más conveniente? ¿Porqué?

Supongamos que elegimos x_2 , entonces definimos la dinámica que queremos en el error e_1 como:

$$\dot{e}_1 = \dot{y}_{ref} + 4x_1 - 4x_2 - 2x_4 \boldsymbol{= k_1 e_1}$$

Entonces, la referencia para el siguiente bloque sería:

$$\boldsymbol{x_{2,ref} = \frac{1}{4}\left(\dot{y}_{ref} + 4x_1 - 2x_4 - k_1 e_1\right)}$$

Entonces ya tenemos la referencia para el siguiente bloque, por lo que podemos definir la siguiente variable de error como: $e_2 = x_{2,ref} - x_2$.

Su dinámica se obtiene como:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_{2,ref} - \dot{x}_2 = \boldsymbol{\dot{x}_{2,ref} + 3x_2 - 3x_3}$$

Aquí solo queda usar x_3 para controlar este bloque. Entonces definimos la dinámica que queremos en el error e_2 como:

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_{2,ref} + 3x_2 - 3x_3 \boldsymbol{= k_2 e_2}$$

Entonces, la referencia para el siguiente bloque sería:

$$\boldsymbol{x_{3,ref} = \frac{1}{3}\left(\dot{x}_{2,ref} + 3x_2 - k_2 e_2\right)}$$

Sin embargo, no hemos calculado aún $\dot{x}_{2,ref}$, derivando el término obtenido en el paso anterior obtenemos

$$\dot{x}_{2,ref} = \frac{1}{4}\left(\ddot{y}_{ref} + 4\dot{x}_1 - 2\dot{x}_4 - k_1\dot{e}_1\right)$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}\left(\ddot{y}_{ref} - k_1\dot{y}_{ref} + (4 + k_1)\dot{x}_1 - 2\dot{x}_4\right)}$$

Y terminamos con el segundo bloque ☺.

Finalmente, definimos la variable de error del siguiente bloque como: $e_3 = x_{3,ref} - x_3$.

Su dinámica se obtiene como:

$$\dot{e}_3 = \dot{x}_{3,ref} - \dot{x}_3 = \boldsymbol{\dot{x}_{3,ref} - 2x_2 + 5x_3 - 10u}$$

Sabemos que este es el último bloque porque ya apareció la señal de control u. Entonces definimos la dinámica que queremos en el error e_3 como:

$$\dot{e}_3 = \dot{x}_{3,ref} - 2x_2 + 5x_3 - 10u \boldsymbol{= k_3 e_3}$$

Entonces, la señal de control del sistema quedaría como:

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{10}\left(\dot{x}_{3,ref} - 2x_2 + 5x_3 - k_3 e_3\right)}$$

De nuevo, no hemos calculado aún $\dot{x}_{3,ref}$, derivando el término obtenido en el paso anterior obtenemos

$$\dot{x}_{3,ref} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\ddot{x}_{2,ref} + 3\dot{x}_2 - k_2 \dot{e}_2\right)}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{3}\left(\ddot{x}_{2,ref} + 3\dot{x}_2 - k_2\left(\dot{x}_{2,ref} - \dot{x}_2\right)\right)}$$

Pero nos falta $\ddot{x}_{2,ref}$ la cual obtenemos del bloque anterior como:

$$\boldsymbol{\ddot{x}_{2,ref} = \frac{1}{4}\left(\dddot{y}_{ref} - k_1\ddot{y}_{ref} + (4 + k_1)\ddot{x}_1 - 2\ddot{x}_4\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\dddot{y}_{ref} - k_1\ddot{y}_{ref} + (4 + k_1)(-4\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 2\dot{x}_4) - 2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 4\dot{x}_3 - 5\dot{x}_4)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\dddot{y}_{ref} - k_1\ddot{y}_{ref} + (4 + k_1)(-4\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 2\dot{x}_4) - 2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 4(2x_2 - 5x_3 + 10u) - 5\dot{x}_4)\right)$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{4}\left(\dddot{y}_{ref} - k_1\ddot{y}_{ref} + (4 + k_1)(-4\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 2\dot{x}_4) - 2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 4(2x_2 - 5x_3) - 5\dot{x}_4)\right) + 20u}$$

$$= \Delta + \boldsymbol{20u}$$

donde $\Delta = \frac{1}{4}\left(\dddot{y}_{ref} - k_1\ddot{y}_{ref} + (4 + k_1)(-4\dot{x}_1 + 4\dot{x}_2 + 2\dot{x}_4) - 2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 4(2x_2 - 5x_3) - 5\dot{x}_4)\right)$.

Como apareció $\boldsymbol{u}$ en $\ddot{x}_{2,ref}$, sustituimos en $\dot{x}_{3,ref}$

$$\dot{x}_{3,ref} = \frac{1}{3}(\Delta + 20u + 3\dot{x}_2 - k_2\dot{e}_2)$$
$$= \frac{1}{3}(\Delta + 3\dot{x}_2 - k_2\dot{e}_2) + \frac{20}{3}u$$

Y luego sustituimos $\dot{x}_{3,ref}$ en $\boldsymbol{u}$

$$u = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}(\Delta + 3\dot{x}_2 - k_2\dot{e}_2) + \frac{20}{3}u - 2x_2 + 5x_3 - k_3e_3\right)$$
$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3}(\Delta + 3\dot{x}_2 - k_2\dot{e}_2) - 2x_2 + 5x_3 - k_3e_3\right) + \frac{2}{3}u$$

De donde despejamos nuestra $\boldsymbol{u}$ final como

$$\boxed{u = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}(\Delta + 3\dot{x}_2 - k_2\dot{e}_2) - 2x_2 + 5x_3 - k_3e_3\right)}$$

Con lo que concluimos el diseño de nuestro controlador a bloques. Veamos que dice Matlab.

UPSSS … debido a razones injustificadas no tengo simulaciones hechas, pero…

TPE 2.2: Implementación y simulación de Control con 3 bloques

RESUMEN: Controladores en Lazo Cerrado

Tipo de Control	Condiciones	Ventajas	Desventajas
Retro. de Edos. $u = Kx$	- Sistema Controlable $\text{rank}(M_C) = n$ - Requiere conocer todo x.	- Ubicar Polos - Estabilizar Todos los Estados - Definir transitorio (t_s y M_P) - Puedo usar Ackerman y LQR	- Solo estabiliza, no sigue referencias.
Seg. de Ref. Cte. $u = Kx + Fr$	- Igual que anterior. - SISO	- Igual que anterior. - Seg. de Ref. Ctes.	- Solo ref. ctes.
Retro. de Error $u = (CB)^{-1}\left[\dot{y}_{ref} - CAx - Ke\right]$	- Que $(CB)^{-1}$ exista. - Requiere sensar todo x. - Mismo no. de entradas y salidas.	- MIMO - Seg. Ref. Var.	- No controlo todos los sistemas. - Controla solo las salidas.
Cont. por Bloques	- Requiere encontrar camino entre u y y.	- Seg. Ref Var. - MIMO	- No controlo todos los sistemas. - Controla solo las salidas.