Universidad Jesuita de Guadalajara

Sistemas de Control Automático

6. Modelado Matemático: Espacio de Estados

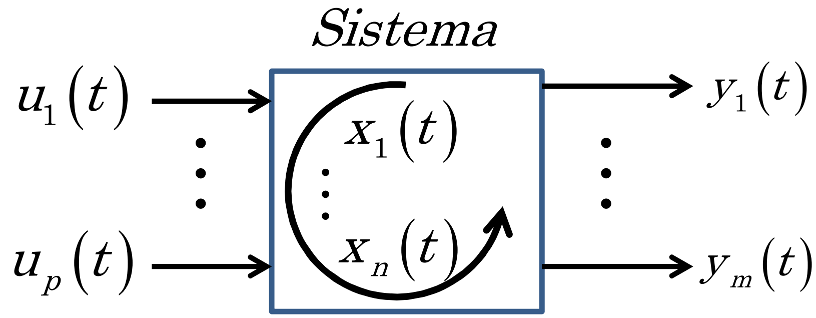
Profesor: **Luis Enrique González Jiménez**
Departamento de Electrónica, Sistemas e Informática (DESI)

Hora: ***Ma-Vi 16:00 - 18:00***

Aula: ***T-201***

¿Qué es el Estado de un Sistema?

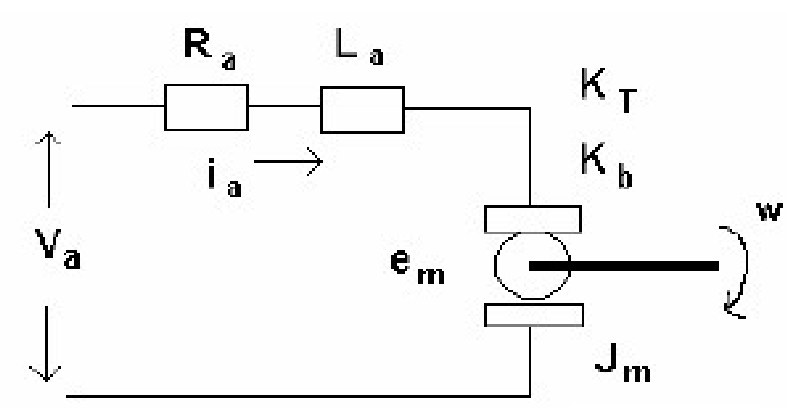
Imaginemos un sistema que tenga **p** entradas y **m** salidas.



Si utilizamos la FDT del sistema solo podemos expresar la relación entre la salida y la entrada. Sin embargo pueden haber otras variables que **definen** al sistema y no son ni entradas ni salidas.

*El **estado** de un sistema es un **conjunto de variables** cuyos valores, junto con la **entrada del sistema y las ecuaciones** del mismo, **permiten calcular la salida y futuros estados del sistema**.*

Ejemplo: Motor de CD



$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_m(t)$$

$$T(t) = J_m \frac{d\omega(t)}{dt} + B_m \omega(t) + T_L(t)$$

$$T(t) = K_T i_a(t)$$

$$e_m(t) = K_b \omega(t)$$

¿Estados?

Una vez definidas las variables de estado, las **ecuaciones diferenciales del sistema** se expresan en **función de los estados y las entradas**.

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{11}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1p}u_p(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n u_1(t) + \cdots + b_{np}u_p(t)$$

De la misma forma se expresan **las salidas** en función de los estados y entradas.

$$y_1(t) = c_{11}x_1(t) + \cdots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + \cdots + d_{1p}u_p(t)$$
$$\vdots$$
$$y_m(t) = c_{m1}x_1(t) + \cdots + c_{mn}x_n(t) + d_{m1}u_1(t) + \cdots + d_{mp}u_p(t)$$

Expresando en forma matricial obtenemos:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$\mathrm{y}(t) = Cx(t) + Du(t)$$

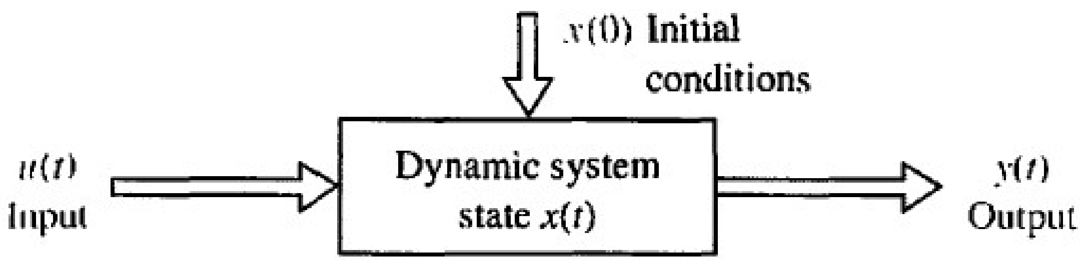
Directamente de la representación matricial podemos inferir la **definición** de variables de estado.

Forma Matricial

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

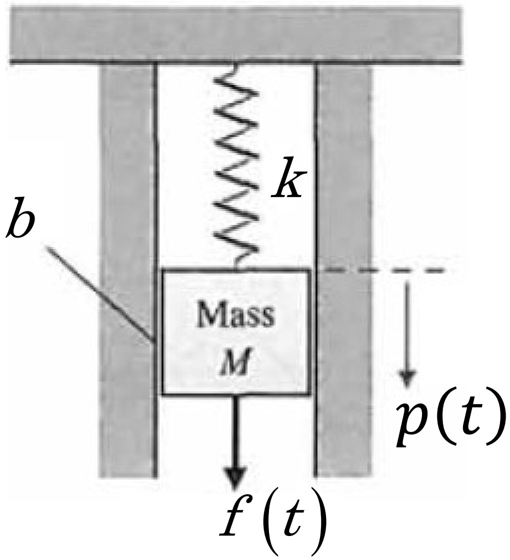
Sistema con **n** estados $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, **m** salidas $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$ y **p** entradas $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$

Y definido por la **matriz de transición** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$**, la matriz de entrada** $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ y las **matrices de salida** $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$**,** $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$**.**



Nota: El sistema representado es uno **lineal e invariante en el tiempo.** Sin embargo, espacio de estados permite representar muchos otros tipos de sistemas (a diferencia de la **FDT**).

Ejemplo: No nos cansamos del Masa-Resorte ☺



Ecuación Diferencial del Sistema.

$$M\ddot{p}(t) + b\dot{p}(t) + kp(t) = f(t)$$

Entrada del Sistema: $u(t) = f(t)$

Salida del Sistema: $y(t) = p(t)$

Estados?: $x_1(t) = p(t), x_2(t) = \dot{p}(t)$ ¿Porqué estos estados?

Obtenemos las ecuaciones diferenciales de los estados:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M}x_2(t) - \frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

Pasamos a su Forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

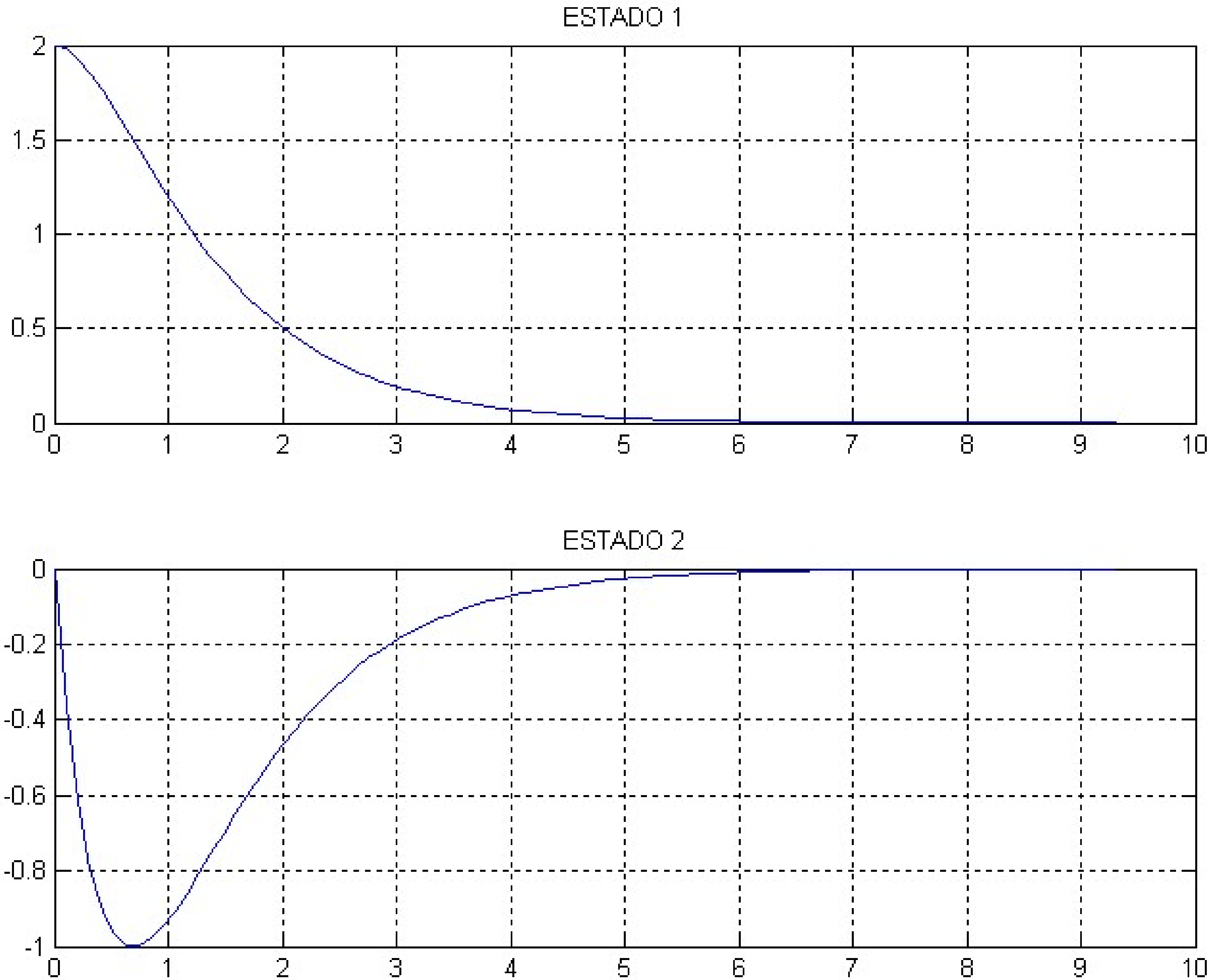
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

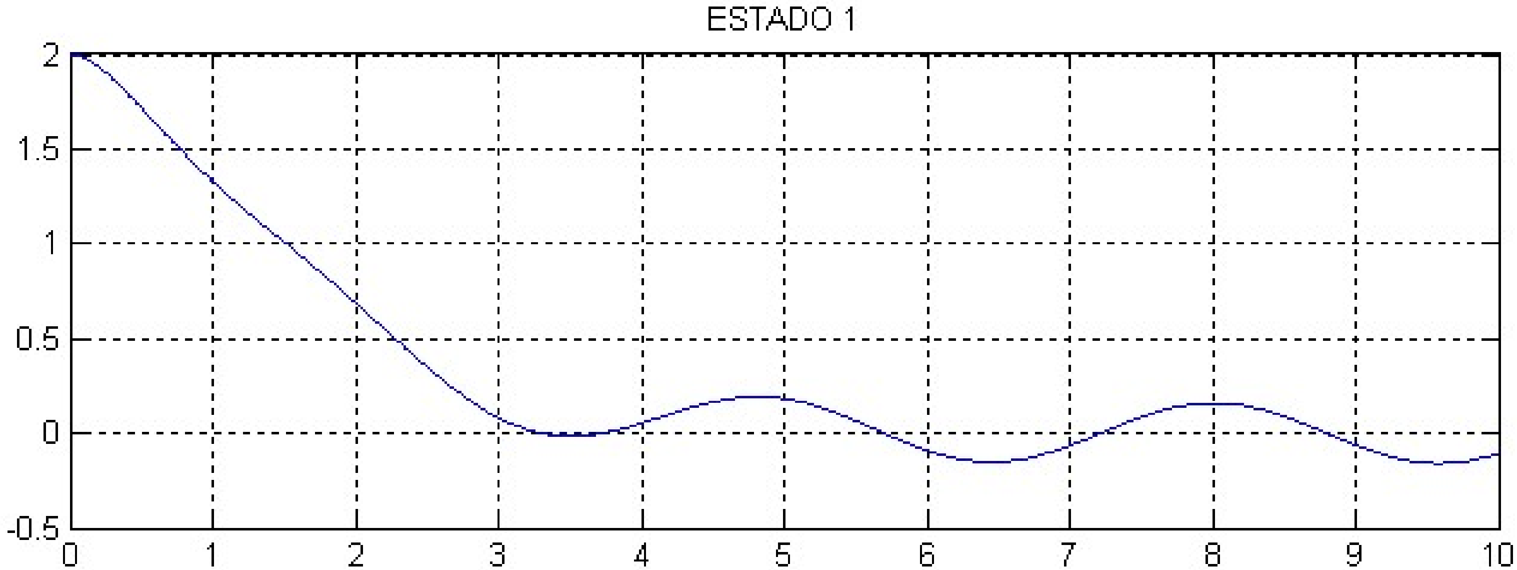
Código .m (Masa – Resorte)

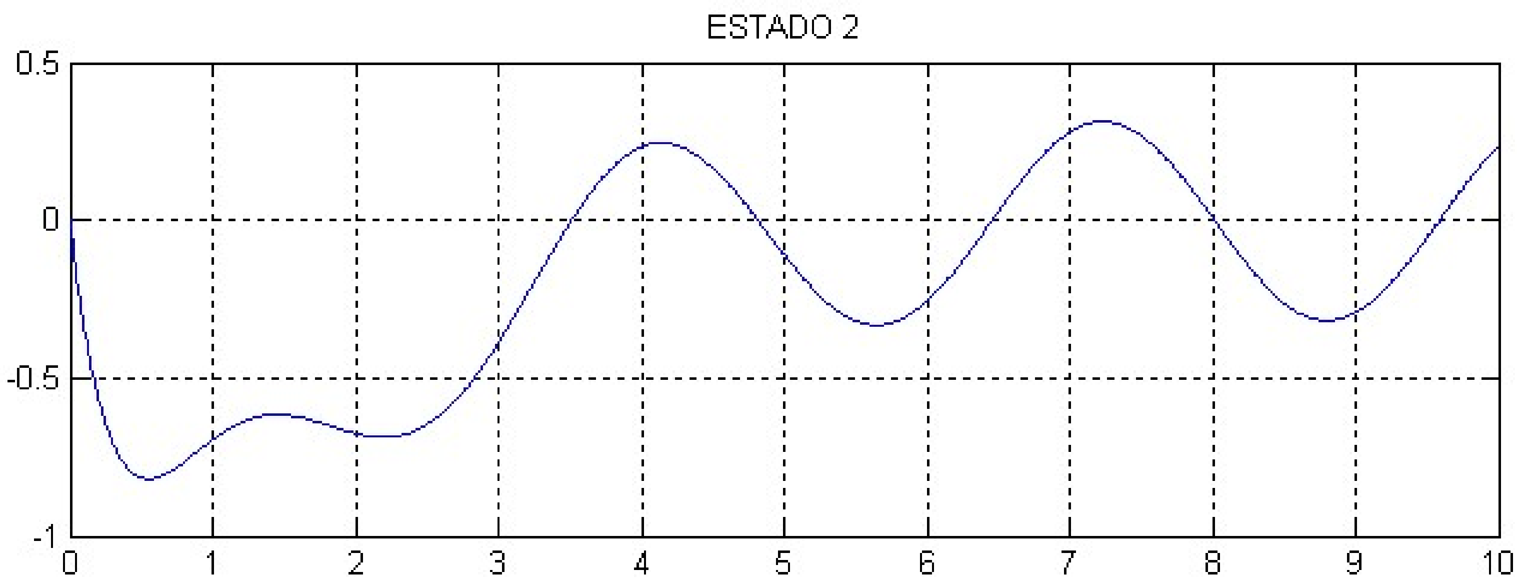
```matlab
function MassSpring_SS(x0)

%Parámetros del sistema
M = 2; b = 6; k = 4;

%Matrices del sistema
A = [0 1; -k/M -b/M];
B = [0; 1/M];
C = [1 0];
D = 0;

%Definimos el modelo en SS
MassSpring_sys = ss(A,B,C,D)

% GRAFICANDO
% Condiciones iniciales
[y,t,X] = initial(MassSpring_sys, x0);
figure;
subplot(2,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(2,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;

% Entrada senoidal
t = (0:0.01:10);
u = 2*sin(t);
[y,t,X] = lsim(MassSpring_sys, u, t, x0);
figure;
subplot(2,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(2,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;

end
```

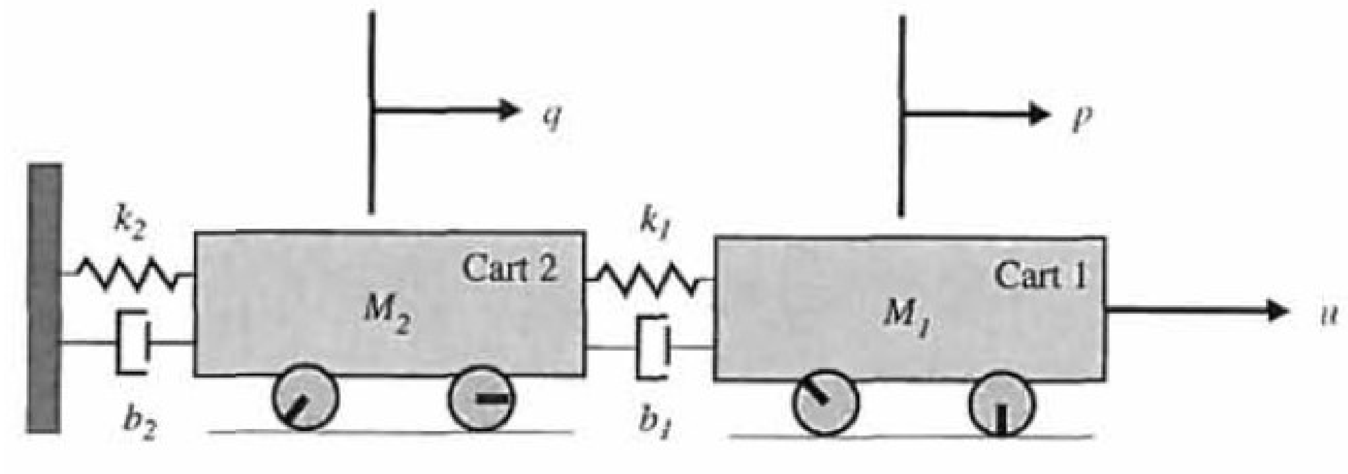
Resultados de simulación para $x(0) = [2 \quad 0]^T, \quad u(t) = 0 \text{ N}$



Resultados de simulación para $x(0)=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}^T, \quad u(t)=2\sin(2t)$ N







Ecuaciones Diferenciales del Sistema.

$$M_1\ddot{p} = u + f_s + f_d = u - k_1(p - q) - b_1(\dot{p} - \dot{q})$$
$$M_2\ddot{q} = k_1(p - q) + b_1(\dot{p} - \dot{q}) - k_2 q - b_2\dot{q}$$

Entrada del Sistema: u **Salida del Sistema:** p

Estados?: $x_1 = p, \quad x_3 = \dot{x}_1 = \dot{p}$
$x_2 = q, \quad x_4 = \dot{x}_2 = \dot{q}$

¿Porqué estos estados?

Obtenemos las ecuaciones diferenciales de los estados:

$$\dot{x}_1 = \dot{p}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{q}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{p} = -\frac{b_1}{M_1}\dot{p} - \frac{k_1}{M_1}p + \frac{b_1}{M_1}\dot{q} + \frac{k_1}{M_1}q + \frac{1}{M_1}u$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{q} = \frac{b_1}{M_2}\dot{p} + \frac{k_1}{M_2}p - \frac{b_1 + b_2}{M_2}\dot{q} - \frac{k_1 + k_2}{M_2}q$$

Y expresamos las ecuaciones en función de los estados y la entrada.

$$\dot{x}_1 = x_3 \qquad \dot{x}_3 = -\frac{k_1}{M_1}x_1 + \frac{k_1}{M_1}x_2 - \frac{b_1}{M_1}x_3 + \frac{b_1}{M_1}x_4 + \frac{1}{M_1}u$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \qquad \dot{x}_4 = \frac{k_1}{M_2}x_1 - \frac{k_1 + k_2}{M_2}x_2 + \frac{b_1}{M_2}x_3 - \frac{b_1 + b_2}{M_2}x_4$$

Pasamos a su Forma Matricial:

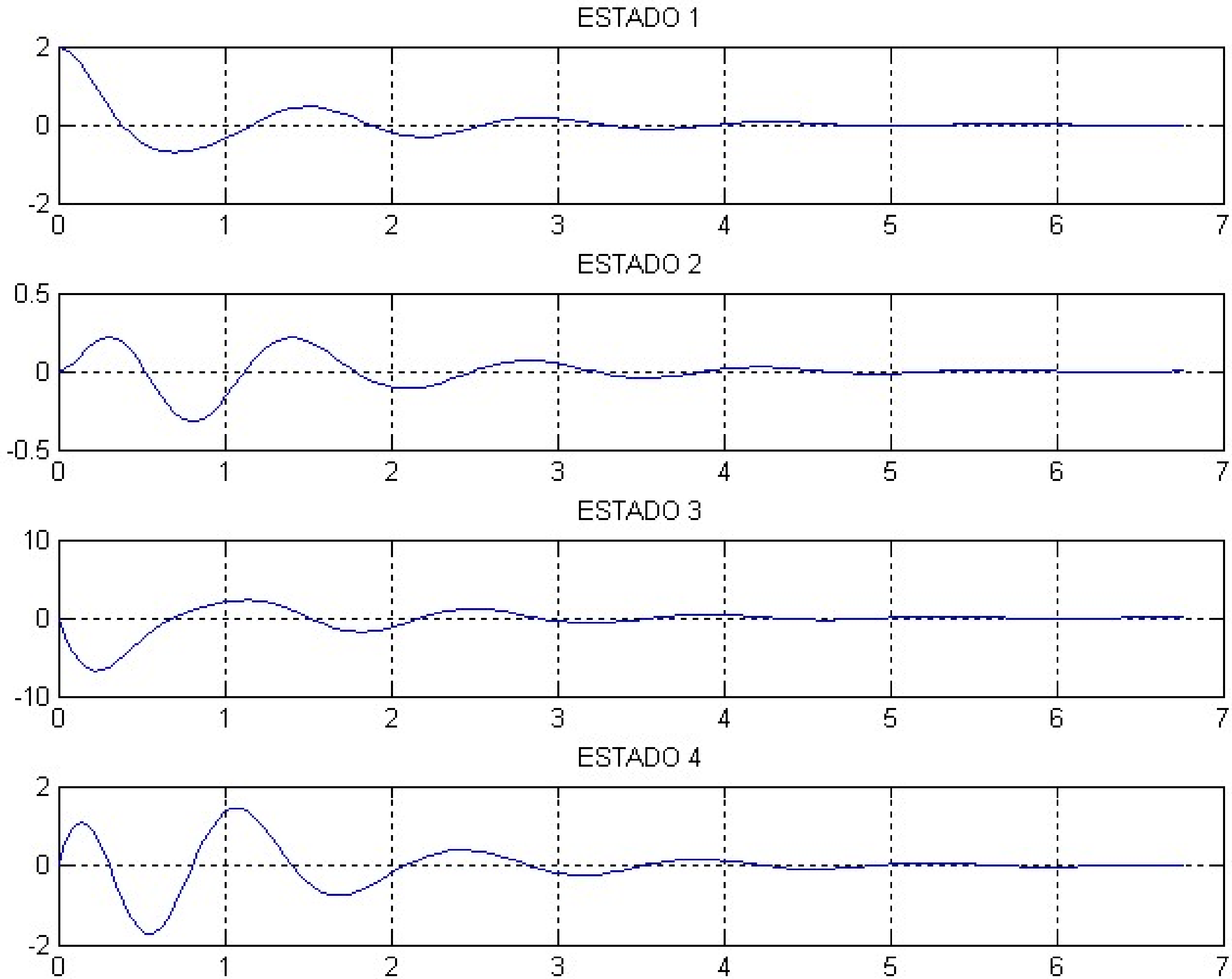
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & -\frac{k_1 + k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & -\frac{b_1 + b_2}{M_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u}$$

```matlab
function carritos_SS(x0)

%Parámetros del sistema
k1 = 150; k2 = 700; b1 = 15; b2 = 30; M1 = 5; M2 = 20;

%Matrices del sistema
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1;-k1/M1 k1/M1 -b1/M1 b1/M1; k1/M2 -(k1+k2)/M2 b1/M2 -(b1+b2)/M2];
B = [0; 0; 1/M1; 0];
C = [1 0 0 0];
D = 0;

%Definimos el modelo en SS
carritos_sys = ss(A,B,C,D)

% GRAFICANDO
% Condiciones iniciales
[y,t,X] = initial(carritos_sys, x0);
figure;
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;

% Entrada senoidal
t = (0:0.01:10);
u = 20*sin(5*t);
[y,t,X] = lsim(carritos_sys, u, t, x0);
figure;
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1));  title('ESTADO 1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2));  title('ESTADO 2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3));  title('ESTADO 3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4));  title('ESTADO 4');  grid;

end
```

Resultados de simulación para $x(0)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \quad u(t)=0\,\mathrm{N}$



Resultados de simulación para $u(t) = 20\sin(5t)$ N