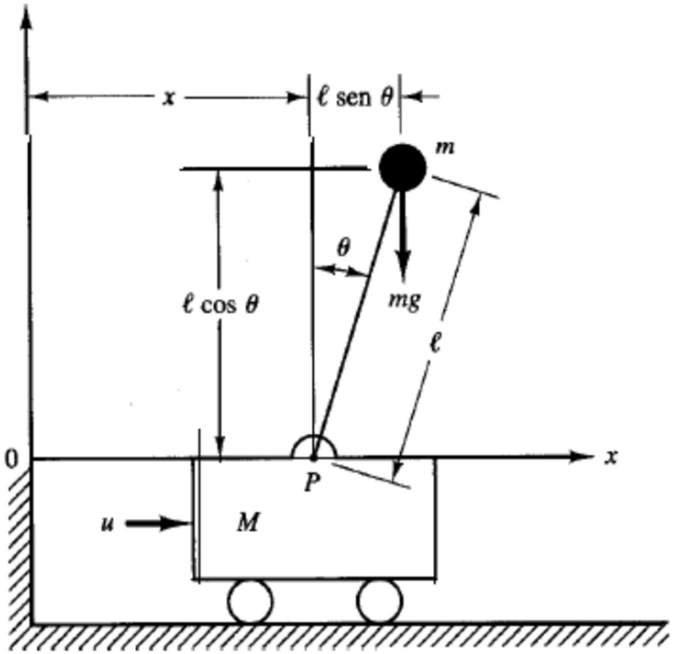
Retomaremos el problema del péndulo invertido, pero ahora asumimos que solo podemos medir la salida, entonces necesitamos un observador.



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t)$$

Elija un sensor (solo uno) y diseñe un observador de orden completo para este sistema.

Solución: **Evidentemente, la primera cuestión a resolver es ¿Qué sensor elegir?**

Veamos…

Si $y(t)=x_1(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}X(t)\Rightarrow \quad M_O=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 20.6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 20.6 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rank(M_O)=2$

¡ Sistema No Observable !

Si $y(t)=x_2(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}X(t)\Rightarrow \quad M_O=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 20.6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 20.6 & 0 & 0\\ 424.4 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rank(M_O)=2$

¡ Sistema No Observable !

Si $y(t)=x_3(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}X(t)\Rightarrow \quad M_O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -0.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.5 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow rank(M_O)=4$

¡ Sistema Observable !

Definiendo la última opción (por razones obvias) y definimos los polos deseados del observador como:

$$p_{do} = \{-4 \quad -4 \quad -4 \quad -4\}$$

Obtenemos $H(A) = (A + 4I)^4$

Entonces, las ganancias del observador resultan como:

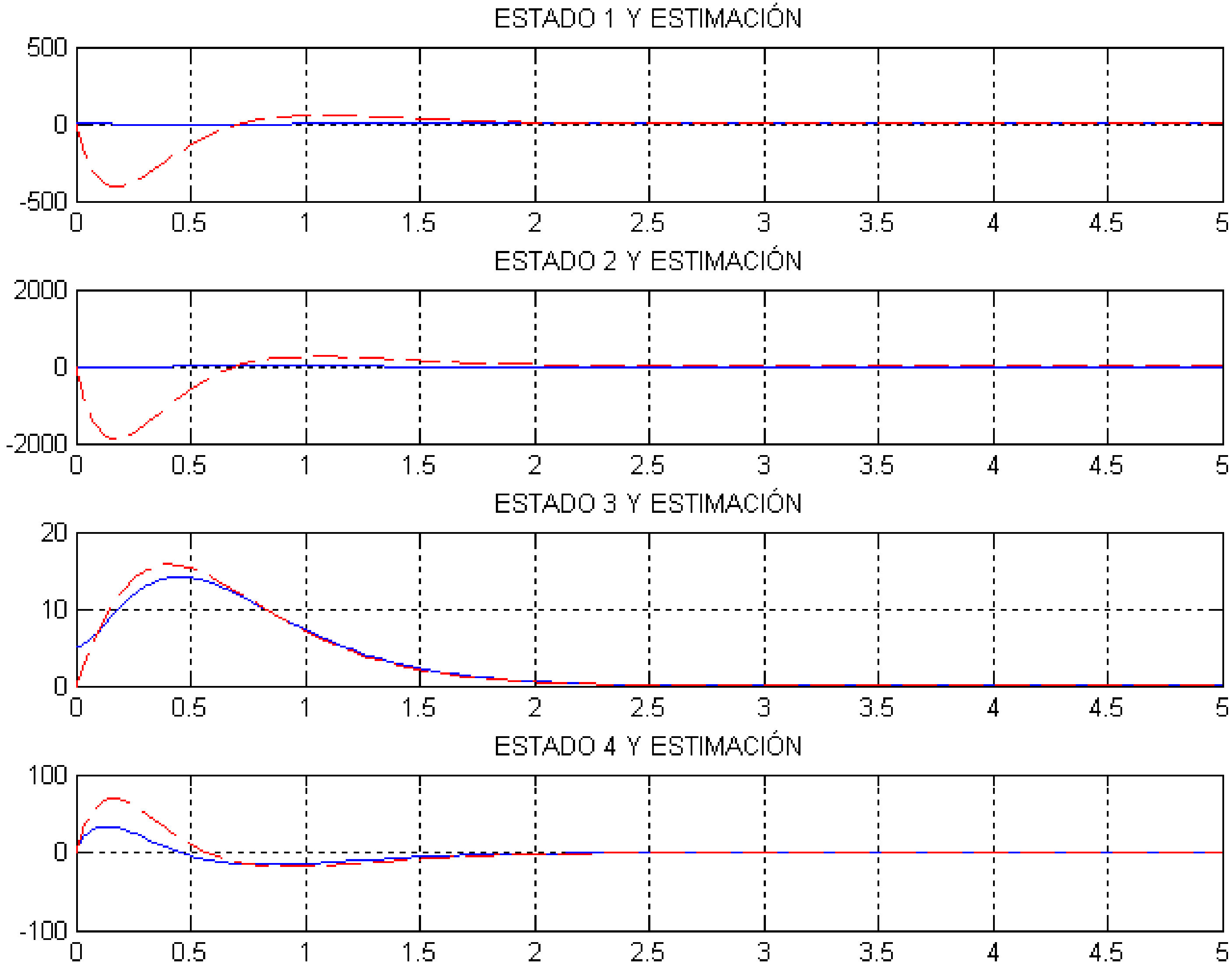
$$L = -H_o(A) M_0^{-1} [0\ 0\ \ldots\ 1]^T = \begin{bmatrix} 1193.9 \\ 5419.2 \\ -16 \\ -116.6 \end{bmatrix}$$

Y el observador queda terminado…

```
function dX = PInv_ODE_OBS_sys( t, X )

global A B C K L

x  = X(1:4); %ESTADOS DEL SISTEMA
xo = X(5:8); %ESTADOS DEL OBSERVADOR

U = K*xo; %CONTROL POR RETRO

%Observador
Y = C*x;
Ye = Y - C*xo;

%ODE's
dx   = A*x  + B*U;
dxo  = A*xo + B*U - L*Ye;

dX = [dx ; dxo];
```

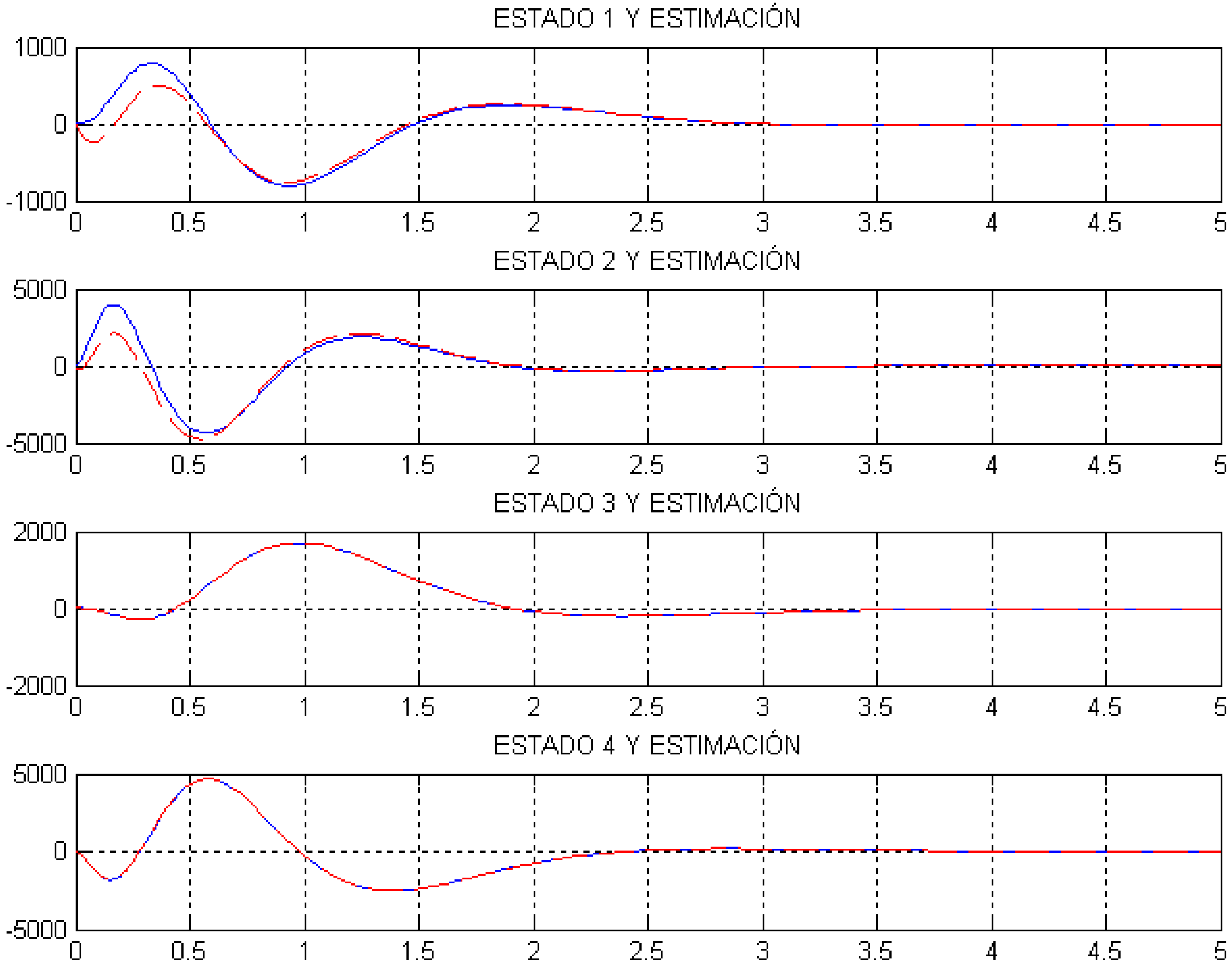
```
function PInv_ODE_OBS_plot( tspan, x0, Pdo, Pdc)

global A B C K L

%MATRICES DEL SISTEMA
A=[0 1 0 0;20.601 0 0 0;0 0 0 1;-.4905 0 0 0];
B=[0;-1;0;0.5];     C=[0 0 1 0];

%DISEÑO DEL OBSERVADOR
Mo = [C; C*A; C*A^2; C*A^3]; %Matriz de Observabilidad
Ho = (A-Pdo(1)*eye(4))*(A-Pdo(2)*eye(4))*(A-Pdo(3)*eye(4))*(A-Pdo(4)*eye(4));
L  = -Ho*Mo^-1*[0;0;0;1];

%DISEÑO DEL CONTROLADOR
Mc = [B A*B A^2*B A^3*B];
Hc = (A - Pdc(1)*eye(4))*(A - Pdc(2)*eye(4))*(A - Pdc(3)*eye(4))*(A - Pdc(4)*eye(4));
K  = -[0 0 0 1]*Mc^-1*Hc;

%RESUELVE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (ODE'S)
[t, X] = ode45(@PInv_ODE_OBS_sys, tspan, [x0 0 0 0 0]);

%Graficando
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1), t, X(:,5), '--r');  title('ESTADO 1 Y ESTIMACIÓN');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2), t, X(:,6), '--r');  title('ESTADO 2 Y ESTIMACIÓN');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3), t, X(:,7), '--r');  title('ESTADO 3 Y ESTIMACIÓN');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4), t, X(:,8), '--r');  title('ESTADO 4 Y ESTIMACIÓN');  grid;
figure;
subplot(4,1,1); plot(t, X(:,1) - X(:,5));  title('Error de Observador X1');  grid;
subplot(4,1,2); plot(t, X(:,2) - X(:,6));  title('Error de Observador X2');  grid;
subplot(4,1,3); plot(t, X(:,3) - X(:,7));  title('Error de Observador X3');  grid;
subplot(4,1,4); plot(t, X(:,4) - X(:,8));  title('Error de Observador X4');  grid;

end
```

USANDO ESTADOS DEL SISTEMA…



$$x(0) = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad P_{dc} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad P_{do} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

USANDO ESTADOS DEL OBSERVADOR…



$$x(0)=\begin{bmatrix}5 & 5 & 5 & 5\end{bmatrix}^T, \quad P_{dc}=\begin{bmatrix}-4 & -4 & -4 & -4\end{bmatrix}, \quad P_{do}=\begin{bmatrix}-4 & -4 & -4 & -4\end{bmatrix}$$

Diseñe un CONTROLADOR IMPLEMENTABLE para que cualquier salida del siguiente sistema siga a la referencia $y = 2\sin(3t)$ con $|u| < 20$.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X$$

a) Diseñe un CONTROLADOR IMPLEMENTABLE para que cualquier salida del siguiente sistema siga a la referencia $y = 2\sin(3t)$ con $t_s < 2$ s.

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} X$$

b) Considere que se modifican los sensores del sistema, de tal forma que la nueva matriz de salida es $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ¿se tendría que modificar algo la solución del inciso anterior?

¡ Adiós !

¡ Good Bye !

¡ Adieu !

¡ Aloha !

¡ Auf Wiedersehen !

¡再见!

¡さようなら!

¡ прощайте !