Architectures d'Ordinateurs Quantiques — Devoirs
PHQ 598/PHY708 — Devoir #3
Date de remise: 17 novembre 2025 — Automne 2025
À remettre le: 8 décembre 2025

Dans ce devoir, on vise à réaliser un algorithme dans le contexte du calcul basé sur la mesure. Plus précisément, l'objectif est de préparer un état de type Greenberger–Horne–Zeilinger (GHZ),

$$|GHZ\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}},$$

sur les qubits numérotés 3,7,11 de l'état graphe ci-dessous.

```
0 — 1 — 2 — 3
|
4 — 5 — 6 — 7
|
8 — 9 — 10 — 11
```

Figure 1: État graphe utilisé dans le code.

La première partie du devoir décompose cet objectif en sous-parties à répondre de manière analytique.

1. Pour l'état graphe représenté par la chaine de qubits ci-dessous, quelle est la série de bases de mesures téléportant l'état du qubit 0 vers le qubit 3 en réalisant une porte Hadamard H ?

   0 — 1 — 2 — 3

   En d'autres mots, on cherche les bases de mesures $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, telles que $|\psi_{3,\text{final}}\rangle = H\,|\psi_{0,\text{initial}}\rangle$ à la fin des mesures. On suppose ici, par simplicité, que tous les résultats de mesures sont $m_j = 0$.

2. Pour le même état qu'en a), quelle est la série de bases de mesures réalisant une porte identité ? On suppose encore que tous les résultats de mesures sont $m_j = 0$.

3. Quel circuit quantique à 3 qubits permet de préparer un état $|GHZ\rangle$ à partir d'un état initial $|+\rangle^{\otimes 3}$? On se contraint à utiliser seulement des portes à deux qubits CZ. *Pour cette sous-question seulement, on considère le modèle de calcul quantique standard basé sur les portes, mais on cherche un circuit pouvant être traduit dans le modèle de calcul basé sur la mesure.*

4. Pour l'état graphe donné à la figure 1, donnez les bases de mesures nécessaires pour préparer l'état $|GHZ\rangle$ sur les qubits numérotés 3,7,11 en supposant que tous les résultats des mesures sont $m_j = 0$.

5. Comment doit-on ajuster les bases de mesures pour bien prendre en compte les résultats de mesures aléatoires $m_j = 0$ ou $m_j = 1$ pour les bases trouvées au numéro précédent ?

6. Montrez qu'un état $|GHZ\rangle$ est un état propre $+1$ des opérateurs ZZI, IZZ, XXX.

Pour la seconde partie de ce devoir l'objectif est de vérifier numériquement les calculs de la première partie. Plus précisément, vous devez préparer un état $|GHZ\rangle$ sur un ordinateur quantique (simulé) à l'aide de la librairie qiskit. *Note: le calcul basé sur la mesure est mal adapté aux qubits supraconducteurs. Ici on utilise qiskit principalement dans l'intérêt d'utiliser des outils connus.*

7. À l'aide la libraire qiskit, rédigez un circuit quantique préparant un état $|GHZ\rangle$ sur les qubits $\{3, 7, 11\}$. Dans le fichier python accompagnant ce devoir, le circuit préparant l'état graphe a déjà été préparé. Pour tous les qubits intermédiaires $(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10)$, la seule porte à laquelle vous avez accès est la porte thetaGate(θ) ainsi que des portes Rz(ϕ) conditionnées sur les résultats de mesures précédents. Pour les qubits finaux $\{3, 7, 11\}$, vous pouvez effectuer des portes X et Z conditionnées sur les résultats de mesures précédents. Pour montrer que vous avez effectivement obtenu un état GHZ, vous devez montrer que les valeurs moyennes des opérateurs ZZI, IZZ, XXX sont $+1$.

Pour ce devoir, vous devrez fournir:

- Les réponses analytiques aux questions 1 à 6.
- Le code demandé à la question 7.