Ludovic Marcotte et Louis-Félix Vigneux

Devoir 3

Calcul basé sur la mesure

Dans le cadre du cours PHQ-598

8 décembre 2025

1.

On souhaite trouver les angles $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ qui permettent de téléporter l'état du qubit 0 vers le qubit 3 tout en réalisant une porte Hadamard.

Les qubits sont dans un état graphe qui est tout simplement une chaîne, et le qubit 0 est initialement dans l'état $|\psi_0\rangle$.

Utilisons la brique de base, soit un état graphe à deux qubits dont on mesure le premier qubit avec angle θ.

On considère le premier qubit dans un état $|\psi\rangle$. On sait déjà que cette brique de base va donner l'état suivant en sortie :

$$|\psi'\rangle = X^m H R_z(-\theta) |\psi\rangle \tag{1}$$

Dans notre cas, on utilise cette brique de base en chaîne afin de téléporter l'état du qubit 0 au qubit 3.
On commence par l'appliquer en mesurant le qubit 0 avec un angle θ_0. Son état est donc téléporter vers le qubit 1 en suivant la formule 1 pour le nouvel état de ce qubit. On mesure ensuite le qubit 1, dont l'état est cette fois téléporté vers le qubit 2, qui a un état qui suit de nouveau la formule 1. On mesure finalement le qubit 2, ce qui permet de téléporter l'état du qubit 2 vers le qubit 3, encore une fois en appliquant la formule 1.

Voici sous forme d'équation l'état obtenu du qubit 3 après ces 3 mesures.

$$|\psi_3\rangle = X^{m_2} H R_z(-\theta_2) \cdot X^{m_1} H R_z(-\theta_1) \cdot X^{m_0} H R_z(-\theta_0) |\psi_0\rangle$$

Prenons les 3 angles de mesure égales à zéro. Ceci nous permettra de faire la porte Hadamard.

$$\begin{aligned} \implies |\psi_3\rangle &= X^{m_2} H R_z(0) \cdot X^{m_1} H R_z(0) \cdot X^{m_0} H R_z(0) |\psi_0\rangle \\ &= X^{m_2} H \cdot X^{m_1} H \cdot X^{m_0} H |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

Mettons maintenant toutes les corrections à gauche grâce aux identités $HX = ZH$ et $HZ = XH$.

$$\begin{aligned} &= X^{m_2} Z^{m_1} H Z^{m_0} H H |\psi_0\rangle \\ &= X^{m_2} Z^{m_1} X^{m_0} H |\psi_0\rangle \end{aligned}$$

On suppose que les résultats de mesure sont tous zéro, ce qui simplifie grandement le résultat.

$$= H |\psi_0\rangle$$

Ainsi, on obtient la porte hadamard qui a été téléporté avec l'état du qubit 0 sur le qubit 3. ■
ME SUIS RENDU COMPTE APRÈS QU'ON POUVAIT SUPPOSER LES RÉSULTATS DE MESURE NULS... RIP

2.

On prend le même état qu'en 1. et on souhaite maintenant réaliser la porte identité. On suppose que les résultats de mesure sont tous de zéro.

Reprenons le calcul avant de déterminer les angles de mesure pour l'état du qubit 3 :

$$|\psi_3\rangle = X^{m_2} H R_z(-\theta_2) \cdot X^{m_1} H R_z(-\theta_1) \cdot X^{m_0} H R_z(-\theta_0) |\psi_0\rangle$$

On suppose les mesures nulles.

$$
\begin{aligned}
&= HR_z(-\theta_2)HR_z(-\theta_1)HR_z(-\theta_0)\,|\psi_0\rangle \\
&= HR_z(-\theta_2)R_x(-\theta_1)R_z(-\theta_0)\,|\psi_0\rangle \\
&= H\Big(\cos(-\theta_2/2) + i\sin(-\theta_2/2)Z\Big)\Big(\cos(-\theta_1/2) + i\sin(-\theta_1/2)X\Big)\Big(\cos(-\theta_0/2) + i\sin(-\theta_0/2)Z\Big)\,|\psi_0\rangle \\
&= H\Big(\cos(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2) + i\sin(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)Z + i\cos(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)X \\
&- \sin(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)ZX\Big)\cdot\Big(\cos(-\theta_0/2) + i\sin(-\theta_0/2)Z\Big)\,|\psi_0\rangle \\
&= H\Big(\cos(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2) + i\sin(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2)Z \\
&+ i\cos(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2)X - \sin(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2)ZX \\
&+ i\cos(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2)Z - \sin(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2) \\
&+ \cos(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2)XZ - i\sin(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2)ZXZ\Big)\,|\psi_0\rangle \\
&= H\Bigg[\Big(\cos(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2) - \sin(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2)\Big)\mathbb{1} \\
&+ \Big(i\sin(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2) + i\cos(-\theta_2/2)\cos(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2)\Big)Z \\
&+ \Big(i\cos(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2) + i\sin(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\sin(-\theta_0/2)\Big)X \\
&- \Big(i\sin(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2)\cos(-\theta_0/2) - i\cos(-\theta_2/2)\sin(-\theta_1/2/2)\sin(-\theta_0/2)\Big)Y\Bigg]\,|\psi_0\rangle
\end{aligned}
$$

On veut que tout le terme entre crochet donne H. On sait et on peut vérifier aisément sous forme matricielle que $H = 1/\sqrt{2}(X+Z)$. Ainsi, on doit choisir les angles de fonction à ce que les termes en identité et en Y soit nuls tandis que les termes en X et Z aient un coefficient $1/\sqrt{2}$.

On pourrait alors développer le tout pour trouver ces angles en fonction des conditions énumérées ci-dessus. Cependant, il est assez simple de voir que les angles à choisir doivent tous être de $\pi/2$, car $\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ et $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.
Voyons le résultat (tout en utilisant la parité des fonctions cos et sin) :

$$
\begin{aligned}
&= H\Bigg[\Big(\cos(\pi/4)\cos(\pi/4)\cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)\Big)\mathbb{1} \\
&+ \Big(-i\sin(\pi/4)\cos(\pi/4)\cos(\pi/4) - i\cos(\pi/4)\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)\Big)Z \\
&+ \Big(-i\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) - i\sin(\pi/4)\sin(\pi/4)\sin(\pi/4)\Big)X \\
&- \Big(i\sin(\pi/4)\sin(\pi/4)\cos(\pi/4) - i\cos(\pi/4)\sin(\pi/4)\sin(\pi/4)\Big)Y\Bigg]\,|\psi_0\rangle \\
&= H\Bigg[\Big((1/\sqrt{2})^3 - (1/\sqrt{2})^3\Big)\mathbb{1} + \Big(-i(1/\sqrt{2})^3 - i(1/\sqrt{2})^3\Big)Z \\
&+ \Big(-i(1/\sqrt{2})^3 - i(1/\sqrt{2})^3\Big)X - \Big(i(1/\sqrt{2})^3 - i(1/\sqrt{2})^3\Big)Y\Bigg]\,|\psi_0\rangle \\
&= H\Bigg[\Big(0\Big)\mathbb{1} + \Big(-2i(1/\sqrt{2})^3\Big)Z \\
&+ \Big(-2i(1/\sqrt{2})^3\Big)X - \Big(0\Big)Y\Bigg]\,|\psi_0\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= H\Bigg[\Big((1/\sqrt{2})^3 - (1/\sqrt{2})^3\Big)\mathbb{1} + \Big(-i(1/\sqrt{2})^3 - i(1/\sqrt{2})^3\Big)Z \\
&+ \Big(-i(1/\sqrt{2})^3 - i(1/\sqrt{2})^3\Big)X - \Big(i(1/\sqrt{2})^3 - i(1/\sqrt{2})^3\Big)Y\Bigg]\left|\psi_0\right\rangle \\
&= H\Bigg(-2i(1/\sqrt{2})^3 Z - 2i(1/\sqrt{2})^3 X\Bigg)\left|\psi_0\right\rangle \\
&= -iH\Big(1/\sqrt{2}Z + 1/\sqrt{2}\Big)\left|\psi_0\right\rangle \\
&= -iHH\left|\psi_0\right\rangle \\
&= -i\left|\psi_0\right\rangle
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a obtenu une porte identité sur l'état initiale du qubit 0 pour l'état final du qubit 3. Cette porte est bonne à une phase globale près : $e^{-i\pi/2} = -i$. ■

3.

4.

Avec les éléments des précédentes questions, il est simple de choisir les bases de mesure sur les différents qubits. On souhaite obtenir Hadamard sur l'état du qubit 3 dans le qubit 0. Même chose, on veut Hadamard sur l'état du qubit 11 dans le qubit 8. On a ensuite une Cz entre 0 et 4 et une autre Cz entre 8 et 4. Il suffit donc d'obtenir l'état du qubit 7 dans le qubit 4 en appliquant l'identité.

De cette façon, on implémente exactement le circuit montré plus haut. Voici donc les angles de mesure conformément aux questions 1 et 2 :

$$
\begin{aligned}
\theta_0 &= \theta_1 = \theta_2 = 0 \\
\theta_4 &= \theta_5 = \theta_6 = \pi/2 \\
\theta_8 &= \theta_9 = \theta_{10} = 0.
\end{aligned}
$$

5.

6.

On souhaite montrer que l'état GHZ est un état propre $+1$ des opérateurs ZZI, IZZ et XXX. Pour le montrer, il suffit d'appliquer ces opérateurs sur $\left|GHZ\right\rangle$.

$$
\begin{aligned}
ZZI\left|GHZ\right\rangle &= 1/\sqrt{2}ZZI(\left|000\right\rangle + \left|111\right\rangle) \\
&= 1/\sqrt{2}(ZZI\left|000\right\rangle + ZZI\left|111\right\rangle) \\
&= 1/\sqrt{2}(\left|000\right\rangle + --\left|111\right\rangle) \\
&= 1/\sqrt{2}(\left|000\right\rangle + \left|111\right\rangle) \\
&= +1\left|GHZ\right\rangle \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1/\sqrt{2}IZZ(\left|000\right\rangle + \left|111\right\rangle) &= 1/\sqrt{2}(IZZ\left|000\right\rangle + IZZ\left|111\right\rangle) \\
&= 1/\sqrt{2}(\left|000\right\rangle + \left|111\right\rangle) \\
&= +1\left|GHZ\right\rangle \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1/\sqrt{2}XXX(\left|000\right\rangle + \left|111\right\rangle) &= 1/\sqrt{2}(XXX\left|000\right\rangle + XXX\left|111\right\rangle) \\
&= 1/\sqrt{2}(\left|111\right\rangle + \left|000\right\rangle) \\
&= +1\left|GHZ\right\rangle \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

7.