DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICA

Princípio do Máximo e EDPs Elípticas

Luiz Fernando Bossa
Universidade Federal de Santa Catarina

7 de novembro de 2025

MTM

- Seja $R \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira ∂R suave.
- Considere a equação diferencial parcial

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = d(x,y,u,u_x,u_y) \qquad (4.1)$$

- A equação é dita elíptica em R se $b^2 - ac < 0$ em R.

- $R = [0, a] \times [0, b]$;

- $R = [0, a] \times [0, b]$;
- $x_i = i \cdot h$, $y_j = j \cdot k$;

- $R = [0, a] \times [0, b]$;
- $x_i = i \cdot h$, $y_j = j \cdot k$;
- R_δ e ∂R_δ são as versões discretizadas do interior e da borda de R;

- $R = [0, a] \times [0, b]$;
- $x_i = i \cdot h$, $y_j = j \cdot k$;
- R_δ e ∂R_δ são as versões discretizadas do interior e da borda de R;
- $U_{i,j}$ é a aproximação da solução em (x_i, y_j)

- $R = [0, a] \times [0, b]$;
- $x_i = i \cdot h$, $y_j = j \cdot k$;
- R_δ e ∂R_δ são as versões discretizadas do interior e da borda de R;
- $U_{i,j}$ é a aproximação da solução em (x_i, y_j)
- O laplaciano discreto é dado por

$$\Delta_\delta U_{i,j} := \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}$$

Teorema 4.1 (Princípio do Máximo)

Seja $V(x,y)$ uma função discreta (de malha) definida sobre $R_\delta \cup \partial R_\delta$.

(a) Se $\Delta_\delta V \geq 0$ em R_δ, então

$$\max_{(x,y)\in R_\delta} V(x,y) \leq \max_{(x,y)\in \partial R_\delta} V(x,y),$$

isto é, o máximo de V acontece na borda.

(b) Se $\Delta_\delta V \leq 0$ em R_δ,

$$\min_{(x,y)\in R_\delta} V(x,y) \geq \min_{(x,y)\in \partial R_\delta} V(x,y),$$

isto é, o mínimo de V acontece na borda.

Demonstração

- Demonstração por contradição para o caso (a).

- Demonstração por contradição para o caso (a).
- Suponha que o máximo geral acontece em

$$P_0 := (x_r, y_s) \in R_\delta.$$

- Demonstração por contradição para o caso (a).
- Suponha que o máximo geral acontece em

$$P_0 := (x_r, y_s) \in R_\delta.$$

- Denote por M_0 o valor de $V(P_0)$.

- Demonstração por contradição para o caso (a).
- Suponha que o máximo geral acontece em

$$P_0 := (x_r, y_s) \in R_\delta.$$

- Denote por M_0 o valor de $V(P_0)$.
- Temos que

$$\begin{aligned} M_0 &\geq V(P) & \forall P &\in R_\delta \\ M_0 &> V(P) & \forall P &\in \partial R_\delta \qquad \text{(H.P)} \end{aligned}$$

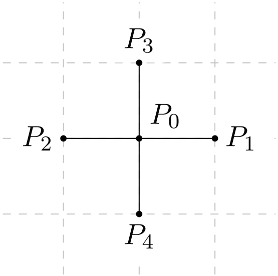
- Defina

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (x_{r+1}, y_s) \\
P_2 &= (x_{r-1}, y_s) \\
P_3 &= (x_r, y_{s+1}) \\
P_4 &= (x_r, y_{s-1})
\end{aligned}
$$

e veja que podemos escrever

- Defina

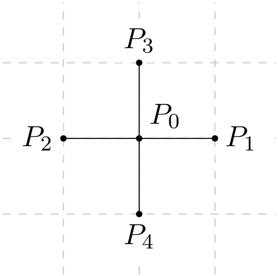
$$
\begin{aligned}
P_1 &= (x_{r+1}, y_s)\\
P_2 &= (x_{r-1}, y_s)\\
P_3 &= (x_r, y_{s+1})\\
P_4 &= (x_r, y_{s-1})
\end{aligned}
$$



e veja que podemos escrever

- Defina

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (x_{r+1}, y_s) \\
P_2 &= (x_{r-1}, y_s) \\
P_3 &= (x_r, y_{s+1}) \\
P_4 &= (x_r, y_{s-1})
\end{aligned}
$$



e veja que podemos escrever

$$\Delta_\delta V(P_0) = \frac{V(P_1) + V(P_2)}{h^2} + \frac{V(P_3) + V(P_4)}{k^2} - 2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) V(P_0)$$

- Isolando tudo o que depende de P_0 temos

- Isolando tudo o que depende de P_0 temos

$$2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)V(P_0)+\Delta_\delta V(P_0)=\frac{V(P_1)+V(P_2)}{h^2}+\frac{V(P_3)+V(P_4)}{k^2}$$

- Isolando tudo o que depende de P_0 temos

$$2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)V(P_0)+\Delta_\delta V(P_0)=\frac{V(P_1)+V(P_2)}{h^2}+\frac{V(P_3)+V(P_4)}{k^2}$$

- Como $\Delta_\delta V(P_0)\geq 0$, temos

$$2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)V(P_0)\leq\frac{V(P_1)+V(P_2)}{h^2}+\frac{V(P_3)+V(P_4)}{k^2}$$

- Isolando tudo o que depende de P_0 temos

$$2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)V(P_0)+\Delta_\delta V(P_0)=\frac{V(P_1)+V(P_2)}{h^2}+\frac{V(P_3)+V(P_4)}{k^2}$$

- Como $\Delta_\delta V(P_0)\geq 0$, temos

$$2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)V(P_0)\leq\frac{V(P_1)+V(P_2)}{h^2}+\frac{V(P_3)+V(P_4)}{k^2}$$

- Isolando $V(P_0)=M_0$

$$M_0\leq\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{h^2}\frac{V(P_1)+V(P_2)}{2}+\frac{1}{k^2}\frac{V(P_3)+V(P_4)}{2}\right) \quad (4.19)$$

- Como M_0 é o máximo no interior (e por hipótese também na borda), em particular:

$$V(P_i) \leq M_0 \quad i = 1, \ldots, 4 \qquad (\star)$$

Assim

$$\frac{V(P_1) + V(P_2)}{2} \leq M_0 \quad \text{e} \quad \frac{V(P_3) + V(P_4)}{2} \leq M_0$$

- Como M_0 é o máximo no interior (e por hipótese também na borda), em particular:

$$V(P_i) \leq M_0 \quad i = 1, \ldots, 4 \qquad (\star)$$

Assim

$$\frac{V(P_1) + V(P_2)}{2} \leq M_0 \quad \text{e} \quad \frac{V(P_3) + V(P_4)}{2} \leq M_0$$

- Supondo que a desigualdade é estrita para algum i, então uma das desigualdades acima também vira estrita e vale:

$$\frac{1}{h^2}\frac{V(P_1) + V(P_2)}{2} + \frac{1}{k^2}\frac{V(P_3) + V(P_4)}{2} <$$

$$< \frac{1}{h^2}M_0 + \frac{1}{k^2}M_0 = \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) M_0$$

- Substituindo a desigualdade estrita em (4.19)

$$M_0 \leq \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{h^2}\frac{V(P_1) + V(P_2)}{2} + \frac{1}{k^2}\frac{V(P_3) + V(P_4)}{2}\right) <$$

$$< \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) M_0 = M_0$$

chegamos em uma contradição $M_0 < M_0$.

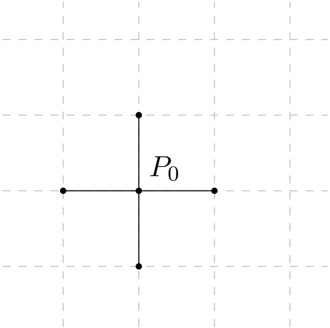
- Substituindo a desigualdade estrita em (4.19)

$$M_0 \leq \left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{h^2}\frac{V(P_1)+V(P_2)}{2}+\frac{1}{k^2}\frac{V(P_3)+V(P_4)}{2}\right) <$$
$$< \left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)M_0 = M_0$$

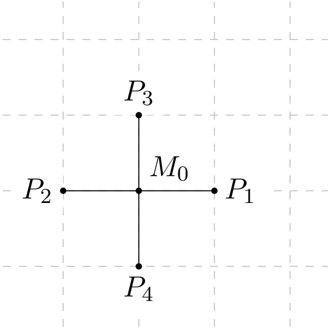
chegamos em uma contradição $M_0 < M_0$.

- Logo, em $(\star)$ só pode valer a igualdade, e para todo $i = 1, \ldots, 4$ tem que valer $V(P_i) = M_0$.

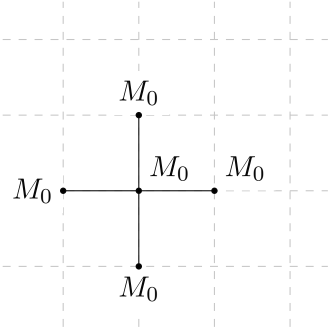
- Agora basta repetir o argumento para cada um dos P_i



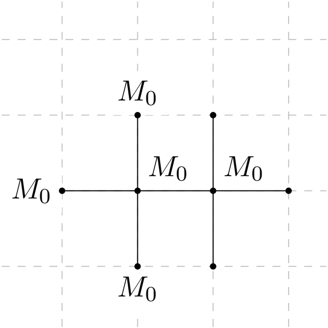
- Agora basta repetir o argumento para cada um dos P_i



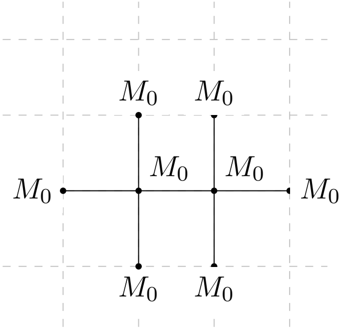
- Agora basta repetir o argumento para cada um dos P_i



- Agora basta repetir o argumento para cada um dos P_i



- Agora basta repetir o argumento para cada um dos P_i



- Chegamos assim a conclusão de que $V \equiv M_0$ em todo o domínio, incluindo a borda.
- Mas isso entra em contradição com a hipótese principal (H.P), de que M_0 é estritamente maior que os valores na borda.
- Segue que o máximo da função deve acontecer na borda.

Demonstração

- Suponha que V satisfaz as hipóteses de (b), defina $G := -V$

- Suponha que V satisfaz as hipóteses de (b), defina $G := -V$
- Note que vale

$$\Delta_\delta G = \Delta_\delta(-V) = -\Delta_\delta V \geq 0$$

- Suponha que V satisfaz as hipóteses de (b), defina $G := -V$
- Note que vale

$$\Delta_\delta G = \Delta_\delta(-V) = -\Delta_\delta V \geq 0$$

- Logo, por (a), temos

$$\max_{R_\delta} G(x,y) \leq \max_{\partial R_\delta} G(x,y)$$

- Suponha que V satisfaz as hipóteses de (b), defina $G := -V$
- Note que vale

$$\Delta_\delta G = \Delta_\delta(-V) = -\Delta_\delta V \geq 0$$

- Logo, por (a), temos

$$\max_{R_\delta} G(x,y) \leq \max_{\partial R_\delta} G(x,y)$$

- Como $\max G = \max -V = -\min V$, temos

$$-\min_{R_\delta} V(x,y) \leq -\min_{\partial R_\delta} V(x,y)$$

e segue (b).

Teorema 4.2

Seja $V(x,y)$ uma função discreta (de malha) definida sobre $R_\delta \cup \partial R_\delta$. Então

$$\max_{R_\delta} |V(x,y)| \leq \max_{\partial R_\delta} |V(x,y)| + \frac{a^2}{2} \max_{\partial R_\delta} |\Delta_\delta V(x,y)| \qquad (4.20)$$

- Considere $\phi(x, y) = x^2/2$

- Considere $\phi(x, y) = x^2/2$
- Veja que dentro do domínio,

$$0 \leq \phi(x, y) \leq a^2/2 \quad \text{e} \quad \Delta_\delta \phi(x, y) = 1$$

- Considere $\phi(x, y) = x^2/2$
- Veja que dentro do domínio,

$$0 \leq \phi(x, y) \leq a^2/2 \quad \text{e} \quad \Delta_\delta \phi(x, y) = 1$$

- Seja $N_0 := \max_{R_\delta} |\Delta_\delta V(x, y)|$

- Considere $\phi(x,y) = x^2/2$
- Veja que dentro do domínio,

$$0 \leq \phi(x,y) \leq a^2/2 \quad \text{e} \quad \Delta_\delta \phi(x,y) = 1$$

- Seja $N_0 := \max_{R_\delta} |\Delta_\delta V(x,y)|$
- Defina V_+ e V_- por

$$V_\pm(x,y) := \pm V(x,y) + N_0 \phi(x,y)$$

- Calculando o laplaciano e usando a linearidade

$$\begin{aligned}\Delta_\delta V_\pm(x,y) &= \Delta_\delta\big(\pm V(x,y) + N_0\phi(x,y)\big) = \\ &= \pm\Delta_\delta V(x,y) + N_0\Delta_\delta\phi(x,y) = \pm\Delta_\delta V(x,y) + N_0\end{aligned}$$

- Calculando o laplaciano e usando a linearidade

$$\begin{aligned}\Delta_\delta V_\pm(x,y) &= \Delta_\delta\big(\pm V(x,y) + N_0\phi(x,y)\big) = \\ &= \pm\Delta_\delta V(x,y) + N_0\Delta_\delta\phi(x,y) = \pm\Delta_\delta V(x,y) + N_0\end{aligned}$$

- Para qualquer $\zeta \in \mathbb{R}$ vale $\mp\zeta \leq |\zeta|$, logo pela definição de N_0

$$\begin{aligned}\mp\Delta_\delta V(x,y) \leq |\Delta_\delta V(x,y)| &\leq N_0 \\ \mp\Delta_\delta V(x,y) \pm \Delta_\delta V(x,y) &\leq N_0 \pm \Delta_\delta V(x,y) \\ 0 &\leq \Delta_\delta V(x,y) + N_0\end{aligned}$$

- Aplicando o Princípio do Máximo para $V_\pm$, temos que o máximo acontece na borda, ou seja

$$\begin{aligned} V_\pm(x,y) \leq \max_{\partial R_\delta} V_\pm(x,y) &= \max_{\partial R_\delta} \big(\pm V(x,y) + N_0 \phi(x,y) \big) \\ &\leq \max_{\partial R_\delta} \big(\pm V(x,y) \big) + N_0 \frac{a^2}{2} \\ &\leq \max_{\partial R_\delta} \big| V(x,y) \big| + N_0 \frac{a^2}{2} \quad (\dagger) \end{aligned}$$

pois $\pm V \leq |V|$

- Note que $N_0, \phi \geq 0$, logo

$$\pm V(x,y) \leq \pm V(x,y) + N_0\phi(x,y) = V_{\pm}(x,y)$$

- Note que $N_0, \phi \geq 0$, logo

$$\pm V(x,y) \leq \pm V(x,y) + N_0\phi(x,y) = V_{\pm}(x,y)$$

- Colando a desigualdade acima com (†) temos

$$\pm V(x,y) \leq \max_{\partial R_\delta} \left| V(x,y) \right| + N_0 \frac{a^2}{2}$$

- Note que $N_0, \phi \geq 0$, logo

$$\pm V(x,y) \leq \pm V(x,y) + N_0\phi(x,y) = V_\pm(x,y)$$

- Colando a desigualdade acima com (†) temos

$$\pm V(x,y) \leq \max_{\partial R_\delta} \left| V(x,y) \right| + N_0 \frac{a^2}{2}$$

- O lado direito não depende de R_δ, então podemos tomar o máximo do lado esquerdo sobre o interior do domínio, segue o teorema.

Corolário 4.1

O sistema de equações lineares formado pela discretização da EDP elípica

$$AU = r$$

tem uma única solução.

- Vamos provar que $AU = 0$ tem somente a solução zero, o que prova A injetora. Como A é quadrada, injetora implica inversível.

- Vamos provar que $AU = 0$ tem somente a solução zero, o que prova A injetora. Como A é quadrada, injetora implica inversível.
- Considere o sistema homogêneo

$$-\Delta_\delta U_{i,j} = 0 \qquad \text{em } R_\delta \tag{4.9}$$

$$U_{i,j} = 0 \qquad \text{em } \partial R_\delta \tag{4.10}$$

- Aplicando o Teorema 4.2 para $U_{i,j}$ temos

$$\max_{R_\delta} |U_{i,j}| \leq \underbrace{\max_{\partial R_\delta} |U_{i,j}|}_{(4.10)} + \frac{a^2}{2} \underbrace{\max_{R_\delta} |\Delta_\delta U_{i,j}|}_{(4.9)} = 0 + \frac{a^2}{2} 0 = 0$$

- Aplicando o Teorema 4.2 para $U_{i,j}$ temos

$$\max_{R_\delta} |U_{i,j}| \leq \underbrace{\max_{\partial R_\delta} |U_{i,j}|}_{(4.10)} + \frac{a^2}{2} \underbrace{\max_{R_\delta} |\Delta_\delta U_{i,j}|}_{(4.9)} = 0 + \frac{a^2}{2} 0 = 0$$

- Segue que $|U_{i,j}| = 0$ e logo $U_{i,j} = 0$.

- Sabemos que $\Delta_\delta U_{i,j} = 0$ em R_δ;

- Sabemos que $\Delta_\delta U_{i,j} = 0$ em R_δ;
- Aplicando o Princípio do Máximo, podemos usar tanto (a) quanto (b), logo o máximo e o mínimo de $U_{i,j}$ acontecem na borda;

- Sabemos que $\Delta_\delta U_{i,j} = 0$ em R_δ;
- Aplicando o Princípio do Máximo, podemos usar tanto (a) quanto (b), logo o máximo e o mínimo de $U_{i,j}$ acontecem na borda;
- Mas isso significa que $\max U_{i,j} = \min U_{i,j} = 0$, de modo que U é zero.