Resolução de Recorrências: Árvore de Recursão

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

Algumas fórmulas importantes

Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, temos a seguinte fórmula fechada para a *série geométrica*:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Quando a soma é infinita e $x < 1$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

Método Iterativo

Consiste em:

1. Iterar a recorrência até a condição inicial ser encontrada;
2. Encontrar um somatório e tentar limitá-lo usando uma série conhecida.

Exemplo (suponha $n = 2^k$):

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2\,T(n/2) + n \\
&= 2(2\,T(n/4) + n/2) + n \\
&= 4\,T(n/4) + n + n \\
&= 4(2\,T(n/8) + n/4) + n + n \\
&\vdots \\
&= 2^k\,T(1) + kn \\
&= n + n \lg n
\end{aligned}
$$

Árvore de Recursão

O que é?

Método para resolver recorrências. Útil para visualizar o que ocorre quando a recursão é iterada.

O método

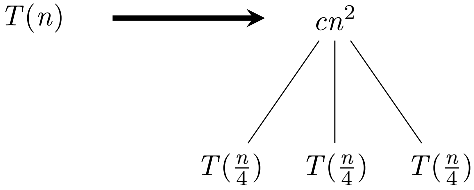
1. Expandimos a recorrência em uma árvore;
2. Calculamos o custo em cada nível;
3. Somamos os custos de todos os níveis para determinar o custo total;
4. Verificamos a solução usando o método da substituição (quando toleramos um pouco de "desleixo" durante o processo).

Um exemplo

Considere a recorrência (assuma $n = 4^k$):

$$T(n) = 3\,T(n/4) + cn^2$$

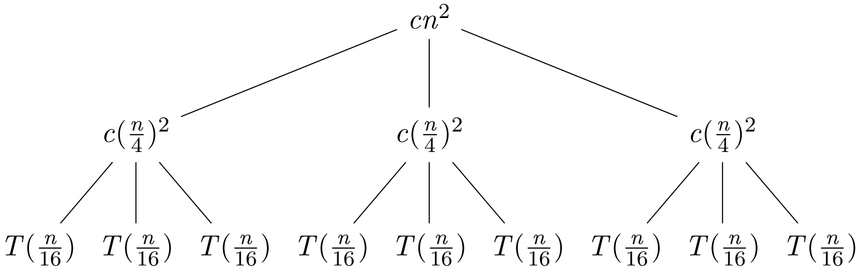
Expandindo a recorrência em uma árvore



Um exemplo

$$T(n) = 3\,T(n/4) + cn^2$$

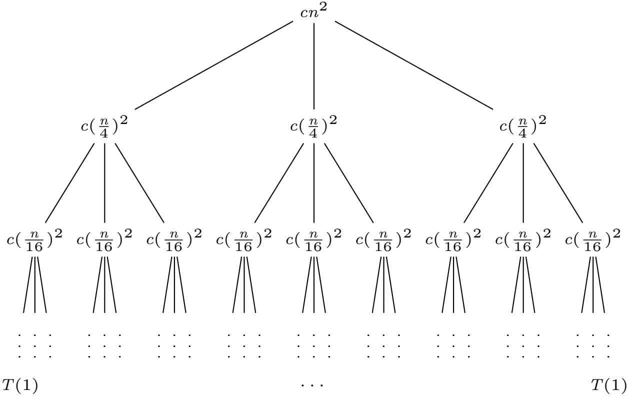
Expandindo agora $T(n/4)$



Um exemplo

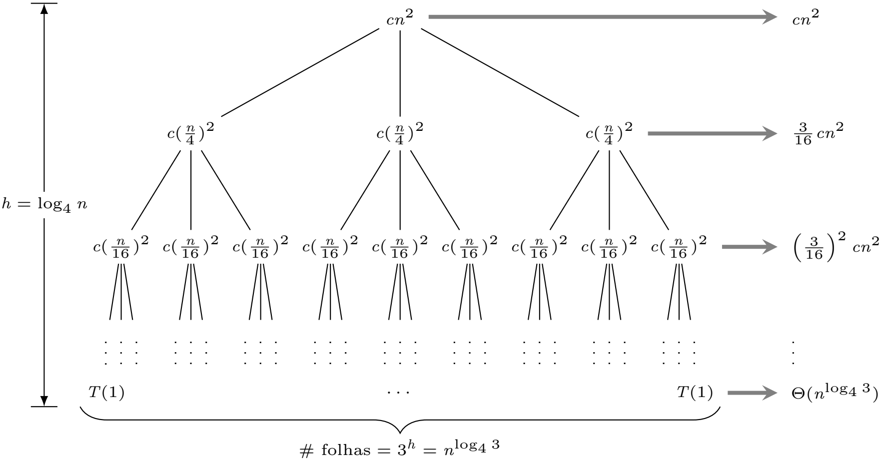
$$T(n) = 3\,T(n/4) + cn^2$$

Expandindo até o caso base



Um exemplo: $T(n) = 3\,T(n/4) + cn^2$

Custo por nível



Um exemplo: $T(n) = 3\,T(n/4) + cn^2$

Somando tudo

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{(\log_4 n)-1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= cn^2 \left(\left(\frac{3}{16}\right)^0 + \left(\frac{3}{16}\right)^1 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{(\log_4 n)-1} \right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \left(cn^2 \sum_{i=0}^{(\log_4 n)-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i \right) + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= cn^2 \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} + \Theta(n^{\log_4 3}).
\end{aligned}
$$

Para remover o $\log_4 n$ considere que:

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq cn^2 \sum_{i=0}^{\infty} (3/16)^i + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= cn^2 \frac{1}{1 - (3/16)} + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= O(n^2).
\end{aligned}
$$

Um exemplo: $T(n) = 3\,T(n/4) + cn^2$

Usando substituição para comprovar que $T(n) = O(n^2)$

Hipótese: $T(k) \leq dk^2$ para todo $1 < k < n$ (em particular para $k = n/4$)

$$\begin{aligned} T(n) &= 3\,T(n/4) + cn^2 \\ &\leq 3d(n/4)^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \\ &\leq dn^2. && \text{(para } d \geq (16/13)c\text{)} \end{aligned}$$

Mais um exemplo

Considere a recorrência:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + O(n).$$

Mais um exemplo

Considere a recorrência:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + O(n).$$

Resolvendo temos $T(n) = O(n \lg n)$.