



Exercícios sobre árvore de recursão

Árvore de recursão é um método útil para se estimar uma fórmula fechada de uma recorrência. É um método que mostra o que ocorre quando uma recorrência é iterada. Sua representação visual mostra as chamadas recursivas e a quantidade de trabalho realizada em cada chamada. Basicamente são calculados os custos por níveis¹ e então somados para se obter o custo total.

Este processo, em geral, envolve a resolução de um somatório. As fórmulas a seguir serão úteis.

Para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, temos a seguinte fórmula fechada para a *série geométrica*:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \quad (1)$$

Quando a soma é infinita e $x < 1$, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}. \quad (2)$$

Exercícios

1. Considere as recorrências a seguir (assuma que $T(1) = \Theta(1)$).

1. $T(n) = 3T(n/2) + n$.
2. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.
3. $T(n) = 2T(n-1) + 1$.
4. $T(n) = T(n/2) + n$.

Para cada uma delas, responda os seguintes itens:

- (a) Desenhe a árvore de recursão.
- (b) Qual o tamanho de cada (sub)problema para um nó na profundidade i ?
- (c) Quantos níveis tem a árvore?
- (d) Qual o número de folhas?
- (e) Qual é o custo em cada nível da árvore? Este custo é crescente ou decrescente?
- (f) Estime um limite assintótico superior.

2. (CLRS 4.4-3) Estime um limite assintótico superior para a recorrência

$$T(n) = 4T(\lfloor n/2 \rfloor + 2) + n.$$

3. (CLRS 4.4-5) Usando árvore de recursão, estime um limite assintótico superior para a recorrência

$$T(n) = T(n-1) + T(n/2) + n.$$

Mostre pelo método da substituição que $T(n) = O(2^n)$.

¹A *altura de um nó* x é o comprimento do caminho mais longo que leva x até uma folha (a altura de um nó folha é zero). A *altura de uma árvore* é a altura de sua raiz. A *profundidade* de um nó x é o comprimento do caminho que vai da raiz até x (a profundidade da raiz é zero; os filhos da raiz têm profundidade um). Um conjunto de nós com a mesma profundidade é denominado *nível* da árvore.