CLIQUE $\in$ NP-COMPLETO

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

CLIQUE

Definição

- Dado um grafo não direcionado $G = (V, E)$, um **clique** é um subconjunto $V' \subseteq V$ tal que todos os vértices de V' estão conectados por arestas em E (subgrafo completo).
- **Tamanho de um clique:** número de vértices que ele contém.

Problemas

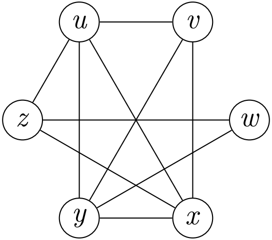
- **Otimização:** encontre um clique de tamanho máximo.
- **Decisão:** G possui um clique de tamanho k?

Linguagem formal

$$\textsc{Clique} = \{\langle G, k\rangle : G \text{ contém um clique de tamanho k}\}.$$

Exemplo

Dado $G = (V, E)$ a seguir:

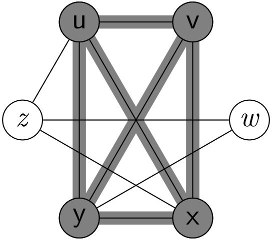


Problema de decisão

- Existe um clique de tamanho 4?
- Existe um clique de tamanho 5?

Exemplo

Dado $G = (V, E)$ a seguir:



Problema de decisão

- Existe um clique de tamanho 4? Sim.
- Existe um clique de tamanho 5? Não.

$\textsc{Clique} \in NP$-Completo

1 - Mostrar que $\textsc{Clique} \in NP$

Dado um grafo $G = (V, E)$, usaremos o conjunto $V' \subseteq V$ de vértices no clique como um certificado para G. Podemos comprovar se V' é um clique em tempo polinomial fazendo a verificação se para todo par $u, v \in V'$, a aresta (u, v) pertence a E.

2 - Escolher um problema NP-Completo

- Usaremos o problema $3\text{-}\textsc{Sat}$: "Dada uma fórmula booleana ϕ na FNC, em que cada cláusula possui exatamente três literais distintos, existe uma atribuição de valores verdade para as variáveis desta fórmula tal que sua saída seja 1, isto é, a fórmula ϕ é satisfazível?"
- $3\text{-}\textsc{Sat} = \{\langle\phi\rangle : \phi$ é uma fórmula booleana satisfazível$\}$.

CLIQUE $\in NP$-Completo

3 - Mostrar que 3-SAT $\preceq_p$ CLIQUE

Como reduzir qualquer instância de 3-SAT para uma instância de CLIQUE em tempo polinomial?

- Seja $\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k$ uma fórmula booleana em 3-SAT com k cláusulas.
- Para cada cláusula $C_r = (l_1^r, l_2^r, l_3^r)$ em ϕ, adicionaremos uma tripla de vértices v_1^r, v_2^r e v_3^r em V.
- Colocaremos uma aresta entre dois vértices v_i^r e v_j^s quando:
  - v_i^r e v_j^s estão em triplas diferentes, isto é, $r \neq s$, e
  - os correspondentes literais são consistentes, isto é, l_i^r não é a negação de l_j^s.

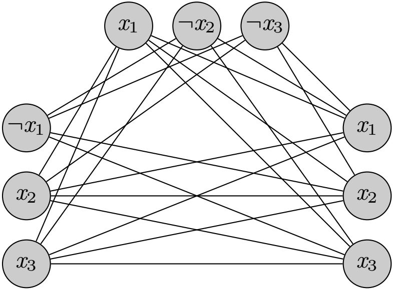
CLIQUE $\in NP$-Completo

Exemplo

Considere a instância ϕ de 3-SAT e a construção do grafo a seguir.

$$\phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$C_1 = x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$



$C_2 = \neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$

$C_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

CLIQUE $\in$ NP-Completo

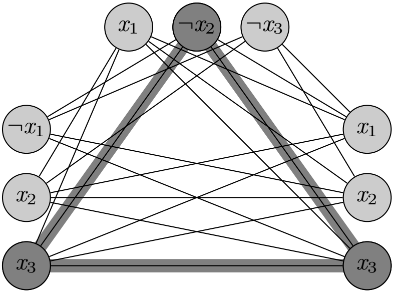
Exemplo

Considere a instância ϕ de 3-SAT e a construção do grafo a seguir.

$$\phi = (x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_3) \land (\neg x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (x_1 \lor x_2 \lor x_3)$$

$C_1 = x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_3$

$C_2 = \neg x_1 \lor x_2 \lor x_3$



$C_3 = x_1 \lor x_2 \lor x_3$

CLIQUE $\in NP$-Completo

Proposição: ϕ é satisfazível se e somente se G tem um clique de tamanho k.

($\Rightarrow$) Suponha que ϕ tem uma atribuição que satisfaça a fórmula. Então cada cláusula C_r possui ao menos um literal l_i^r com valor 1, e cada um dos literais correspondem a um vértice v_i^r. Selecionando um destes literais "verdadeiros" de cada cláusula leva a um conjunto V' com k vértices. V' é um clique, pois para quaisquer dois vértices v_i^r e v_j^s, com $r \neq s$, ambos literais correspondentes são verdadeiros, e portanto não podem ser complementares. Portanto, pela construção de G, a aresta $(v_i^r, v_j^s) \in E$.

($\Leftarrow$) Suponha que G possui um clique V' de tamanho k. Nenhuma aresta em G conecta vértices na mesma tripla. Portanto, V' contém apenas um vértice por tripla. Podemos atribuir 1 para cada literal l_i^r tal que $v_i^r \in V'$ sem temer atribuir 1 a um literal e seu complemento, pois G não possui arestas entre literais inconsistentes. Cada cláusula é satisfeita, e portanto, ϕ é satisfeita.

Referências

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. 2009. **Introduction to Algorithms**, Third Edition. The MIT Press. Chapter 34.
- Kleinberg J., and Tardos E. **Algorithm Design**. 2005. Pearson. Chapter 8.