Redução do Subset-Sum para o Set-Partition

Arthur, Douglas, Felipe, Luiz, Sandro
RA105422, RA103654, RA102845, RA103491, RA98397

[1]Departamento de Informática – Universidade Estadual de Maringá(UEM)

1. Breve descrição do Subset-Sum

Dado um conjunto (multiconjunto) $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de números naturais e um valor x, descobrir se existe um subconjunto $S' \subseteq S$ tal que $\sum_{a \in S'} a = x$. Uma instância do problema terá resposta $true$ ou $false$.

1.1. Recorrência

$$opt(S,x) \begin{cases} true & se\ s = 0 \\ false & se\ n = 0 \wedge s \neq 0 \\ opt(S-1,x) & se\ a_n \notin S' \\ opt(S-1,x-a_n) & se\ a_n \in S' \end{cases}$$

1.2. Algoritmo Força Bruta

```
SubsetSum(S,x,n)
if n = 0 then
|   if x = 0 then
|   |   ans ← true
|   else
|   |   ans ← false
|   end
else
|   ans ← SubsetSum(S,x-S[n],n-1)
|   if ans = false and S[n] ≤ x then
|   |   ans ← SubsetSum(S,x-S[n],n-1)
|   end
end
return ans
```

1.2.1. Análise de Complexidade

T(S,x) = T(S-1,x) + T(S-1,x-1) + $\Theta(1) \Rightarrow$ T(S,x) = $O(2^n)$

1.3. Algoritmo Programação Dinâmica

```
SubsetSumMemo (S,x,n)
if memo[n][x]=-1 then
    if n = 0 then
        if x = 0 then
            ans ← true
        else
            ans ← false
        end
    else
        ans ← SubsetSumMemo (S,x-S[n],n-1)
        if ans = false and S[n] ≤ x then
            ans ← SubsetSumMemo (S,x-S[n],n-1)
        end
    end
    ans ← memo[n][x]
end
return memo[n][x]
```

1.3.1. Análise de Complexidade

de subproblemas · tempo / subproblemas = (n·x)· Θ(1) = Θ(n·x)

2. Breve descrição do Set-Partition

Dado um vetor de inteiros não negativos $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, decidir se há como dividir o vetor P em dois subvetores, Q_1 e Q_2 tal que $\sum_{p' \in Q_1} p' = \sum_{p'' \in Q_2} p''$ e $Q_1 \cup Q_2 = P$. Uma instância do problema terá resposta $true$ ou $false$.

2.1. Recorrência

$$opt(P, sum, n) \begin{cases} false & se\ sum\%2 = 1 \\ SubsetSum(P, \frac{sum}{2}, n) & se\ sum\%2 = 0 \end{cases}$$

2.2. Algoritmo

```
Partition (arr,n)
sum ← 0
for i ← 1 to n do
    sum + = arr[i]
end
if sum% 2 ≠ 0 then
    return false
end
return SubSetSumMemo (arr, sum/2,n)
```

2.2.1. Análise de Complexidade

$$\begin{aligned} Complexidade &= n + \Theta(SubSetSumMemo) \\ &= (n + (n \cdot x)) \cdot \Theta(1) \\ &= O(n \cdot x) \end{aligned}$$

3. Set-Partition $\in NP$

$Certificado$: Subconjunto A tal que $A \subseteq S$. É possível verificar se os conjuntos A e $(S - A)$ têm somas iguais em tempo polinomial, bastando para isso somar os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto $(S - A)$ e comparar a soma. Se esses números forem iguais, podemos afirmar que é $verdadeiro$.

3.1. Algoritmo verificador

```
Verificador(S,A)
Soma ← soma dos elementos de A
for i ← 1 to A.lenght do
    Flag ← False
    for j ← 1 to S.lenght do
        if A[i] = S[j] then
            retire o elemento do vetor S
            Flag ← True
        end
    end
    if !Flag then
        return False
    end
end
Soma2 ← soma dos elementos de S
if Soma = Soma2 then
    return True
else
    return False
end
```

4. Primeira redução

Dado um vetor S e um valor x, onde há um subconjunto $S' \subseteq S$ em que a soma de seus elementos é igual a x, assuma que k é a soma de todos os elementos do conjunto S. Redução de instâncias do $SubsetSum$ a instâncias do $SetPartition$: Dado um vetor S e um valor x, entrada do $SubsetSum$, a entrada para o $Partition$ será $P = S \cup \{k - 2x\}$ (realizar a união leva tempo polinomial). Devemos provar que a instância $\{S, x\} \in SubsetSum$ retorna verdadeiro se, e somente se, $\{P\} \in SetPartition$ também for verdadeiro.

4.1. Ida

Se há em S um subconjunto S', cuja soma de seus elemento resulta no valor x, é possível particionar o conjunto P em dois subconjuntos de mesma soma. Seja o conjunto $S'' =$

$S - S'$ e a soma de seus elementos igual a $k - x$. A soma dos elementos de S' com o elemento $k - 2x$ é igual a $(k - 2x)$ $+x = k - x$. Portanto, é possível formar dois subconjuntos com soma igual a $k - x$.

4.2. Volta

Se P pode ser particionado em dois subconjuntos de somas iguais (S'' e $S' \cup \{k - 2x\}$), então é possível identificar um subconjunto de S cuja soma seja x. Ao retirar o elemento $k - 2x$ do subconjunto $P - S''$, obtemos um subconjunto de S' que possui soma x, que queríamos demonstrar.

4.3. Casos de teste

Seja 'k' a soma do conjunto S do $SubsetSum$, x o $target$ para este problema, s' o subconjunto cuja soma resulta no valor x, $s'' = S - s'$. P representa o vetor do $SetPartition$ com a redução aplicada.

4.3.1. Exemplo 1

Primeiro devemos definir uma instância de $SubsetSum$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$ cuja soma é 10, selecionando o subconjunto $\{3, 4\}$ em que a soma é 7, ou seja, $x = 7$. Dessa maneira, precisamos calcular $\{k - 2x\}$.
$k = 10$;
$x = 7$;
$s' = \{3, 4\}$;
$s'' = \{1, 2\}$;
$k - 2x = -4$
Aplicando o algoritmo de redução, obtemos o conjunto P.

$$\begin{aligned} P &= S \cup \{k - 2x\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-4\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, -4\} \\ &= s'' \cup (s' \cup \{k - 2x\}) \\ &= \{1, 2\} \cup \{3, 4, -4\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Note que há dois subconjuntos que resultam em $k - x = 3$, $s'' = \{1, 2\}$ e $s' \cup \{k - 2x\} = \{3, 4, -4\}$, pois a soma dos elementos de s'' será sempre $k - x$, visto que x é a soma dos elementos de s' e $s'' = S - s'$. A soma do conjunto restante, isto é, $P - s'' = s' \cup \{k - 2x\} = \{3, 4, -4\}$ que resulta no valor $x + k - 2x = k - x = 7 + 10 - 2 \cdot 7 = 3$. Portanto, podemos afirmar que existem dois subconjuntos que satisfazem o requisito do $SetPartition$.

$\Leftarrow$ Agora partindo do conjunto P, vamos mostrar que existe um subconjunto que somado dê o valor de x. Dentro do conjunto P temos dois subconjuntos com somas iguais a $k - x = 3$. $P = s'' \cup (s' \cup \{k - 2x\}) = \{1, 2\} \cup \{3, 4, -4\}$, e ao retirarmos o elemento $k - 2x = -4$ do subconjunto $P - s'' = \{3, 4 - 4\}$, obtém-se o subconjunto $s' = \{3, 4\}$ que como definido anterior, tem soma igual a $x = 7$.

4.3.2. Exemplo 2

Vamos utilizar outra instância do $Subsetsum$ $S = \{6, 2, 5, 10\}$ em que a soma de todos elementos é 23, e $x = 15$, o subconjunto cuja soma é x é $s' = \{5, 10\}$. Novamente, precisamos calcular $k - 2x$.
$K = 23;$
$x = 15;$
$s' = \{5, 10\};$
$s'' = \{6, 2\};$
$k - 2x = -7$
Aplicando o algoritmo de redução, temos:

$$\begin{aligned} P &= S \cup \{k - 2x\} \\ &= \{6, 2, 5, 10\} \cup \{-7\} \\ &= \{6, 2, 5, 10, -7\} \\ &= s'' \cup (s' \cup \{k - 2x\}) \\ &= \{6, 2\} \cup \{5, 10, -7\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Note que novamente há dois subconjuntos que resultam em $k - x = 8$, $s'' = \{6, 2\}$ e $s' \cup \{k - 2x\} = \{5, 10, -7\}$. O motivo é análogo ao exemplo anterior. Portanto, podemos afirmar que existem dois subconjuntos que satisfazem o requisito do $SetPartition$ para retornar verdadeiro.

$\Leftarrow$ Partindo do conjunto P, verificaremos se existe um subconjunto somado que resulta no valor de x. Dentro do conjunto P temos dois subconjuntos com somas iguais a $k - x = 8$. $P = s'' \cup (s' \cup \{k - 2x\}) = \{6, 2\} \cup \{5, 10, -7\}$, e ao retirarmos o elemento $k - 2x = -7$ do subconjunto $P - s'' = \{5, 10 - 7\}$, obtém-se o subconjunto $s' = \{5, 10\}$ que, como definido anterior, tem soma igual a $x = 15$.

5. Segunda redução

Seja (S, x) uma instância qualquer do $SubsetSum$. Vamos transformar esta instância em uma instância do $Partition$. Seja k igual a soma dos elementos de S e $P = S \cup a_1 \cup a_2$, onde a_1 e a_2 são:
$a_1 = 2k + x$
$a_2 = 3k - x$
A inserção desses dois elementos em P pode ser feita em tempo polinomial.

5.1. Ida

Assuma que para uma entrada (S, x) o $SubsetSum$ retorne $verdadeiro$, portanto, existe um subvetor $S' \subseteq S$, tal que a soma de seus elementos é igual a x. Então, existe um conjunto $P = \{\{S - S'\} \cup \{a_1\}, S' \cup a_2\}$ que retorna verdadeiro para o $SetPartition$. Calculando $(k - x) + (2k + x)$, $(x) + (3k - x)$ fazemos as operações de união,em tempo polinomial, que resulta em dois subconjuntos cujo a soma de seus elementos é $3k$. Com isso podemos afirmar que haverá dois subconjuntos em P que contém a mesma soma.

5.2. Volta

Agora assumimos que existem dois subconjuntos $P_1 \subseteq P$ e $P_2 \subseteq P$ tal que $P_1 \neq P_2$ e $\{P_1\} \cup \{P_2\} = P$, cujas somas possuem o mesmo valor. Como $P = \{\{S\}, a_1, a_2\}$, a soma de todos os elementos contidos em P é igual a $6k$. E com isso podemos garantir que a_1 e a_2 não podem aparecer no mesmo subconjunto, sendo assim, podemos supor que $a_1 \in P_1$ e $a_2 \in P_2$. Então, se fizermos $\{P_2\} - a_2$, é equivalente a fazermos $3k-(3k - x)$, que resulta em x. Portanto, está demonstrado que existe um valor $x \in P$ que satisfaz o problema do $SubsetSum$.

5.3. Caso de teste

Nesses exemplos, utilizaremos k como a soma dos elementos do nosso conjunto inicial S, a variável x será o $target$ do problema $SubsetSum$ e o vetor s' é o subconjunto cuja soma resulta no valor x.

5.3.1. Exemplo 1

Utilizaremos uma instância de $SubsetSum$, pegando o vetor $S = \{2, 5, 3, 9\}$, onde a soma de todos elementos é 19, selecionamos o subvetor $\{2, 5\}$ em que a soma é 7. A partir do vetor S vamos criar dois elementos a_1 e a_2.
$K = 19$;
$x = 7$;
$s' = \{2, 5\}$;
$a_1 = 2k + x = 45$;
$a_2 = 3k - x = 50$
Aplicando o algoritmo de redução, obtemos o vetor P.

$$
\begin{aligned}
P &= \{\{S - s'\} \cup \{a_1\}, \{s' \cup a_2\}\} \\
&= \{\{S - s'\} \cup \{a_1\}, \{s' \cup a_2\}\} \\
&= \{\{\{2, 5, 3, 9\} - \{2, 5\} \cup \{45\}\}, \{\{2, 5\} \cup \{50\}\}\} \\
&= \{\{3, 9, 45\}, \{2, 5, 50\}\}
\end{aligned}
$$

Note que a soma de S é 19, ou seja, com a soma ímpar seria impossível o $SetPartition$ retornar verdadeiro. Mas após a redução, a soma do vetor P é igual a 114. Além disso dentro do vetor P há dois vetores possuem soma igual a 57, sendo assim o $SetPartition$ é verdade.
Agora partindo do vetor P, vamos mostrar que existe um x válido. Dentro do vetor P temos dois vetores com soma igual que vamos denominar $s_1 = \{3, 9, 45\}$ e $s_2 = \{2, 5, 50\}$.
Aplicando o algoritmo de redução, obtemos o vetor s':

$$
\begin{aligned}
s' &= \{\{s_2\} - \{a_2\}\} \\
&= \{2, 5, 50\} - \{50\} \\
&= \{2, 5\}
\end{aligned}
$$

Em que a soma do vetor s' é igual a 7, que é o valor de x que queríamos.

5.3.2. Exemplo 2

Vamos pegar outra instância do $SubsetSum$, o vetor $S = \{3, 7, 4, 16, 8\}$ onde a soma de todos elementos é 38, o subvetor {3,7} que a soma resulta em 10. Vamos criar os dois elementos para adicionarmos ao vetor.
$K = 38$;
$x = 10$;

$s' = \{3, 7\}$;
$a_1 = 2k + x = 86$;
$a_2 = 3k - x = 104$
Aplicando o algoritmo de redução, temos:

$$\begin{aligned} P &= \{\{S - s'\} \cup \{a_1\}, \{s' \cup a_2\}\} \\ &= \{\{3, 7, 4, 16, 8\} - \{3, 7\} \cup \{86\}, \{3, 7\} \cup \{104\}\} \\ &= \{\{4, 16, 8, 86\}, \{3, 7, 104\}\} \end{aligned}$$

Vemos que o vetor P possui soma equivalente a 228, além disso dentro do vetor existem dois subvetores $s_1 = \{4, 16, 8, 86\}$ e $s_2 = \{3, 7, 104\}$ em que ambos possuem a mesma soma. Sendo assim o vetor P retorna verdade para esse vetor.
Novamente, partindo do vetor P vamos provar que existe um subvetor que tem a soma exata de x. Aplicando o algoritmo de redução, temos:

$$\begin{aligned} s' &= \{\{s_2\} - \{a_2\}\} \\ &= \{3, 7, 104\} - \{104\} \\ &= \{3, 7\} \end{aligned}$$

Referências

Answers to assignment 4. https://www.cs.mcgill.ca/~jmerce1/a4ans.html.

Partition problem. https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_problem.

Nakayama, M. Homework 13 solutions. https://web.njit.edu/~marvin/cs341/hw/hwsoln13.pdf.

[Nakayama]. [cs3]. [wik].