



## Trabalho 1

1. Para cada par de funções  $f(n)$  e  $g(n)$  na tabela a seguir, indique se  $f(n)$  pertence a  $O(g(n))$ ,  $\Omega(g(n))$  ou  $\Theta(g(n))$ . Considere que  $k \geq 1$ ,  $\epsilon > 0$  e  $c > 1$ . Justifique sua resposta.

	$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))?$	$f(n) = \Omega(g(n))?$	$f(n) = \Theta(g(n))?$
a)	$\lg^k n$	$n^\epsilon$		X	
b)	$n^k$	$c^n$	X		
c)	$2^n$	$2^{n/2}$		X	
d)	$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$			X

### Solução:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg^k n}{n^\epsilon} = 0 \rightarrow f(n) = O(g(n))$   
b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0 \rightarrow f(n) = O(g(n))$   
c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n/2}} = \infty \rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$   
d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\lg c}}{c^{\lg n}} = 1 \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

2. Para cada item a seguir, assinale **Verdadeiro** ou **Falso**. **Justifique** sua resposta usando as definições de notação assintótica.

- (a) ☒ V ☐ F Se  $f(n) = \log_{16} n$  então  $f(n) = \Theta(\lg n)$ ?  
(b) ☐ V ☒ F  $2^{n+a} = \Theta(2^{2n})$ ? Onde  $a \in \mathbb{N}$  é uma constante.  
(c) ☒ V ☐ F  $\frac{n^2}{4} - 3n - 16 = \Omega(n^2)$ ?  
(d) ☒ V ☐ F  $7n^2 + 13n = O(n^2)$ .

### Solução:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_{16} n}{\lg n} = \frac{1}{4} \rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$   
b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+a}}{2^{2n}} = 0 \rightarrow f(n) = 2^{n+a} \in O(2^{2n})$   
c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{4} - 3n - 16}{n^2} = \frac{1}{4} \rightarrow f(n) = \frac{n^2}{4} - 3n - 16 \in \Theta(n^2) = O(n^2) \wedge \Omega(n^2)$   
d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 13n}{n^2} = 7 \rightarrow f(n) = \frac{7n^2 + 13n}{n^2} \in \Theta(n^2) = O(n^2) \wedge \Omega(n^2)$

3. Mostre usando as definições de notação assintótica:

- (a)  $\frac{n}{2} \lg(\frac{n}{2}) = \Omega(n \lg n)$ .  
(b)  $n^2 + 1000n = O(n^2)$ .  
(c)  $2^{n+1} = \Theta(2^n)$ .

### Solução:

Escreva a solução aqui.

4. Expresse as seguintes funções em termos da notação  $\Theta$ .

- (a)  $2n + 3 \log^{100} n$ .  
(b)  $7n^3 + 1000n \log n + 3n$ .  
(c)  $3n^{1.5} + (\sqrt{n})^3 \log n$ .  
(d)  $2^n + 100^n + n!$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

5. É comum usar a notação  $f(n) \prec g(n)$  para denotar que  $f(n) \in o(g(n))$ . Use esta notação para expressar a hierarquia de classes de complexidade das seguintes funções:  $\sqrt{n}$ ,  $2^{n^2}$ ,  $n$ ,  $\lg n$ ,  $1$ ,  $\lg \lg n$ ,  $n!$ ,  $n^2$ ,  $n^{3/4}$ ,  $2^n$ ,  $n \lg n$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

6. Sejam  $f(n)$  e  $g(n)$  funções positivas. Informe se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique.

- (a)  $f(n) = O(g(n))$  implica  $g(n) = O(f(n))$ .
- (b)  $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$
- (c)  $f(n) = O(g(n))$  implica  $g(n) = \Omega(f(n))$
- (d)  $f(n) = \Theta(f(n/2))$

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

7. Mostre uma função  $f(n)$  tal que  $f(n) \notin \Omega(f(n+1))$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

8. Mostre que  $\sum_{i=1}^n \lg i = \Theta(n \lg n)$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

9. Mostre que  $n! = O(2^{n^2})$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

10. Seja  $p(n) = \sum_{i=0}^k a_i n^i$  (polinômio em  $n$  de grau  $k$ ), onde  $k$  é um inteiro não-negativo,  $a_i$  é uma constante e  $a_k > 0$ , mostre que  $p(n) = \Theta(n^k)$ .

**Solução:**

Usando limite, devemos mostrar que:  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{n^k}, 0 < L < \infty$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \dots + a_k n^k}{n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^0}{n^k} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^1}{n^k} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 n^2}{n^k} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{n^k} \\ &= 0 + 0 + 0 + a_k \\ &= a_k. \end{aligned}$$

Como  $a_k > 0 \Rightarrow p(n) = \Theta(n^k)$ .

11. Papai Noel resolveu antecipar seu presente de Natal. Sabendo que você foi um(a) bom(a) menino(a), ele escreveu um algoritmo para que você analise e ganhe uns pontinhos na prova de PAA. Sua tarefa é simples. Dado um inteiro  $n$  como entrada, expresse por meio de notação assintótica a quantidade de “Ho!”s que será impressa pelo algoritmo (use a notação  $\Theta$ ).

FELIZ-NATAL( $n$ )

```
1  $i \leftarrow 1$ 
2 while  $i \leq n$  do
3   | for  $j \leftarrow i$  to  $2i - 1$  do
4   |   | print "Ho!";
5   |    $i \leftarrow 2i$ 
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

12. Dado um inteiro  $n$  (assuma que  $n = 2^k$ , tal que  $k$  é um número inteiro positivo) e  $expr$  (que corresponde a uma expressão a ser impressa), informe, por meio de notação assintótica, a quantidade de mensagens que o algoritmo a seguir irá imprimir. Dê sua resposta em função de  $n$ .

PROG( $n, expr$ )

```
1 while  $n \geq 1$  do
2   | for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
3   |   | print  $expr$ 
4   |    $n \leftarrow n/2$ 
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

13. Seja  $count$  o número total de iterações feitas pelo algoritmo a seguir para uma entrada  $n$ . Informe, usando notação assintótica, o valor de  $count$  em função de  $n$ .

COUNT( $n$ )

```
1  $count \leftarrow 0$ 
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3   | for  $j \leftarrow 1$  to  $\lfloor n/i \rfloor$  do
4   |   |  $count \leftarrow count + 1$ 
5 return  $count$ 
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

14. Seja  $count$  o número total de iterações feitas pelo algoritmo a seguir para uma entrada  $n$  (considere que  $n = 2^{2^k}$ , para algum inteiro positivo  $k$ ). Informe, usando notação assintótica, o valor de  $count$  em função de  $n$ .

COUNT( $n$ )

```
1  $count \leftarrow 0$ 
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3   | for  $j \leftarrow 2; j \leq n; j \leftarrow j^2$  do
4   |   |  $count \leftarrow count + 1$ 
5 return  $count$ 
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

15. Dado um inteiro  $n \geq 0$  como entrada, muitos afirmam que o algoritmo a seguir é capaz de medir o desespero na prova de PAA. Outros afirmam que o algoritmo mede a alegria. Para o professor, não interessa o que o algoritmo mede. O objetivo desta questão é avaliar se o aluno é capaz de encontrar uma fórmula fechada que representa o valor final de  $x$  em função do valor de entrada  $n$ . Em outras palavras, uma função que representa quantas vezes a linha 5 será executada.

PROG( $n$ )

```
1  $x \leftarrow 0$ 
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3   | for  $j \leftarrow i + 1$  to  $n$  do
4   |   | for  $k \leftarrow 1$  to  $j - i$  do
5   |   |   |  $x \leftarrow x + 1$ 
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

16. Resolva as seguintes recorrências (use o método da substituição):

- (a)  $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
- (b)  $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$
- (c)  $T(n) = T(n/4) + 1$
- (d)  $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

17. Use árvore de recorrência para estimar um limite superior para as seguintes recorrências. Assuma que  $T(n)$  é uma constante para  $n \leq 2$ . Depois comprove usando o método de substituição.

- (a)  $T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$
- (b)  $2T(n/4) + \sqrt{n}$

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

18. Utilize o método de árvore de recursão para supor um limite assintótico superior para a recorrência  $T(n) = 3T(n-1) + 1$ . Depois verifique pelo método de substituição que este limite está correto.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

19. Utilize o método de árvore de recursão para supor um limite assintótico superior para a recorrência  $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$ . Depois verifique pelo método de substituição que este limite está correto.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

20. Utilize o método de árvore de recursão para supor um limite assintótico superior para a recorrência  $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + \Theta(n)$ . Depois verifique pelo método de substituição que este limite está correto.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

21. A recorrência  $T(n) = 7T(n/2) + n^2$  descreve o tempo de execução de um algoritmo  $A$ . Um algoritmo alternativo  $A'$  tem um tempo de execução  $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$ . Qual é o maior inteiro  $a$  que faz com que  $A'$  seja assintoticamente mais rápido que  $A$ ?

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

22. Use o método mestre para resolver as seguintes recorrências:

- (a)  $T(n) = 3T(n/2) + n \lg n$
- (b)  $T(n) = 3T(n/2) + n^2$
- (c)  $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
- (d)  $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \sqrt{n}$
- (e)  $T(n) = 5T(n/5) + n$
- (f)  $T(n) = 6T(n/3) + n^2$
- (g)  $T(n) = 9T(n/2) + n^3$

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

23. Dadas as recorrências dos algoritmos  $A$  e  $B$ , determine a complexidade de cada um deles e compare-os (informe se  $A$  é assintoticamente mais rápido que  $B$ ,  $B$  é assintoticamente mais rápido que  $A$ , ou ambos possuem a mesma complexidade assintótica).

- $T_A(n) = 27T_A(n/3) + n$
- $T_B(n) = 4T_B(n/2) + n^3$

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

24. Os três algoritmos a seguir resolvem um problema de tamanho  $n$  por meio da técnica de divisão e conquista. Analise a complexidade de cada um deles e informe qual algoritmo é assintoticamente mais eficiente.

- Algoritmo  $A$  resolve problemas dividindo-os em cinco subproblemas de tamanho  $n/2$ , recursivamente resolve cada subproblema e combina suas soluções em tempo linear para obter uma solução do problema original.
- Algoritmo  $B$  resolve problemas dividindo-os em dois subproblemas de tamanho  $n - 1$ , recursivamente resolve cada um dos subproblemas e combina as soluções em tempo constante para obter a solução do problema original.
- Algoritmo  $C$  resolve problemas dividindo-os em nove subproblemas de tamanho  $n/3$ , recursivamente resolve cada subproblema e combina suas soluções em tempo  $O(n^2)$  para obter uma solução do problema original.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

25. Os três algoritmos a seguir computam corretamente  $x^n$  para  $x > 0$  e  $n \geq 0$ . Mostre que os três algoritmos estão corretos e analise a complexidade assintótica de cada um deles (em função de  $n$ ) e informe qual deles é mais eficiente.

POWER1( $x, n$ )

```
1 resp ← 1
2 i ← 0
3 while i < n do
4   | resp ← resp * x
5   | i ← i + 1
6 return resp
```

POWER2( $x, n$ )

```
1 if n = 0 then
2   | return 1
3 else
4   | return POWER2(x, n - 1) * x
```

POWER3( $x, n$ )

```
1 if n = 0 then
2   | return 1
3 else if (n mod 2) = 0 then
4   | aux ← POWER3(x, n/2)
5   | return aux * aux
6 else
7   | return POWER3(x, n - 1) * x
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

26. Considere o algoritmo HEAPSORT descrito a seguir. Mostre que o algoritmo está correto usando o seguinte invariante de laço: “No começo de cada iteração do laço **for** das linhas 2–5, o subvetor  $A[1 \dots i]$  contém os  $i$  menores elementos de  $A[1 \dots n]$ , e o subvetor  $A[i+1 \dots n]$  contém os  $n - i$  maiores elementos de  $A[1 \dots n]$  em ordem.

HEAPSORT( $A$ )

```
1 BUILD-MAX-HEAP( $A$ )
2 for i ← A.length to 2 do
3   | SWAP( $A[1]$ ,  $A[i]$ )
4   | A.heap-size ← A.heap-size - 1
5   | MAX-HEAPIFY( $A$ , 1)
```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

27. Analise a complexidade dos seguintes algoritmos:

```

F(n)
1 if n = 1 then
(a) 2 | return 1
3 else
4 | return F(n - 1) + F(n - 1)

```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

```

BUSCA(A[], key, min, max)
1 if max < min then
2 | return -1
3 mid ← min + ((max - min)/2)
(b) 4 if A[mid] > key then
5 | return BUSCA(A, key, min, mid - 1)
6 else if A[mid] < key then
7 | return BUSCA(A, key, mid + 1, max)
8 else
9 | return mid

```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

```

RECURSIVE(n)
1 if n > 1 then
(c) 2 | for i ← 1 to n3 do
3 | | Faz algo (custo Θ(1))
4 | RECURSIVE(n/3)

```

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

28. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F). **Justifique**

- (a) ☒ V ☐ F O limite assintótico inferior para algoritmos de ordenação baseados em comparação é  $\Omega(n \lg n)$ . Um algoritmo de ordenação por comparação que faz  $2T(n/2) + \Theta(1)$  comparações no pior caso com certeza não efetua corretamente a ordenação para algumas instâncias.
- (b) ☐ V ☒ F Suponha que iremos gerar  $n$  números aleatórios no intervalo  $[0 \dots n^2]$ . Considerando base decimal (isto é, um número  $x$  possui  $\lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$  dígitos na base 10), é correto afirmar que o algoritmo RADIX SORT faz a ordenação destes  $n$  números em tempo  $O(n)$ .
- (c) ☐ V ☒ F Visto que o limite assintótico inferior para algoritmos de ordenação baseados em comparação é  $\Omega(n \lg n)$ , não seria possível o desenvolvimento de um algoritmo de ordenação correto com complexidade de tempo  $O(n\sqrt{n})$  no pior caso.
- (d) ☐ V ☒ F Suponha que iremos gerar  $n$  números aleatórios no intervalo  $[0 \dots n^2]$ . É correto afirmar que o algoritmo COUNTING SORT faz a ordenação destes  $n$  números em tempo  $O(n)$ .
- (e) ☒ V ☐ F Suponha que iremos gerar  $n$  números aleatórios no intervalo  $[0 \dots n^2]$ . É correto afirmar que o algoritmo MERGESORT faz a ordenação destes  $n$  números em tempo  $O(n \lg n)$ .
- (f) ☐ V ☒ F Não é possível construir um heap máximo com  $n$  elementos em tempo  $O(n)$ . Pois para inserir um elemento no heap temos custo  $O(\lg n)$  e, como temos  $n$  elementos a serem inseridos, o custo total seria pelo menos  $O(n \lg n)$ .
- (g) ☒ V ☐ F Em um heap binário, metade dos elementos do vetor são folhas. Se aplicarmos o procedimento MAXHEAPFY para cada elemento da metade até o primeiro, então ao fim teremos um Heap Máximo.
- (h) ☒ V ☐ F É correto afirmar que: no melhor caso, o algoritmo INSERTION SORT é mais eficiente que os algoritmos MERGESORT e HEAPSORT.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

29. Use o modelo de árvore de decisão para representar as comparações efetuadas pelo algoritmo INSERTION-SORT para uma instância de entrada com quatro elementos.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

30. Use o modelo de árvore de decisão para representar as comparações efetuadas pelo algoritmo MERGESORT para uma instância de entrada com três elementos.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

31. Use o modelo de árvore de decisão para representar as comparações efetuadas pelo algoritmo QUICKSORT para uma instância de entrada com três elementos.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

32. Dado um vetor de inteiros distintos e ordenados em ordem crescente  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ :

- (a) Descreva um algoritmo que determina se existe um índice  $i$  tal que  $a_i = i$  em tempo  $O(\lg n)$ . Por exemplo, em  $\{-10, -3, 3, 5, 7\}$ ,  $a_3 = 3$ . Em  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  não existe tal  $i$ . Argumente que seu algoritmo está correto.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

- (b) Explique por que sua solução leva tempo  $O(\lg n)$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

33. Descreva um algoritmo baseado no paradigma de Divisão e Conquista que encontra o mínimo de um conjunto de  $n$  números. Assuma que os elementos estão em um vetor  $A = [1 \dots n]$ . Mostre que o algoritmo está correto e analise sua complexidade.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

34. Descreva um algoritmo baseado no paradigma de Divisão e Conquista que encontra o segundo maior elemento de um conjunto de  $n$  números. Assuma que os elementos estão em um vetor  $A = [1 \dots n]$ . Mostre que o algoritmo está correto e analise sua complexidade.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

35. Descreva um algoritmo que faz uso do procedimento PARTITION para encontrar o  $k$ -ésimo menor elemento. Isto é, o algoritmo recebe como entrada um vetor  $A[1 \dots n]$  e um valor  $1 \leq k \leq n$  e devolve qual seria este  $k$ -ésimo menor elemento. Por exemplo, se  $k = 1$  o algoritmo deveria devolver o mínimo do vetor; se  $k = n$  o algoritmo deveria devolver o máximo; para um  $k = 3$  devolveria o terceiro menor elemento. Analise seu algoritmo no pior e no melhor caso.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

36. Assuma que você possui  $k$  vetores ordenados, cada um com  $n$  elementos, e você precisa combiná-los em um único vetor ordenado com  $kn$  elementos.
- (a) Usando o procedimento MERGE, faça a intercalação do primeiro vetor com o segundo, então intercale o terceiro, depois o quarto e assim por diante. Qual a complexidade de tempo deste algoritmo, em função de  $k$  e  $n$ ?

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

- (b) Apresente uma solução mais eficiente para este problema, por meio da técnica de Divisão e Conquista. Qual a complexidade de tempo de sua solução, em função de  $k$  e  $n$ ?

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

37. Dado um vetor de números inteiros  $A[1 \dots n]$ , determine quais elementos do vetor são únicos. Apresente um algoritmo eficiente. Faça uma análise de complexidade.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

38. Descreva um algoritmo de tempo  $\Theta(n \lg n)$  que, dado um conjunto  $S$  de  $n$  números inteiros e outro número  $x$ , determine se existe dois elementos em  $S$  cuja soma é exatamente  $x$ .

**Solução:**

Escreva a solução aqui.

39. Problema da moeda falsa. Dado um conjunto de  $n$  moedas,  $n - 1$  delas verdadeiras (com mesmo peso) e uma falsa (mais leve), descreva um algoritmo eficiente (com tempo  $o(n)$ ) para encontrar a moeda falsa.

**Solução:**

Escreva a solução aqui.