Resquício da aula anterior: Método da substituição

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

Provar complexidade usando o Método da Substituição

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 4T(n/2) + n^2 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Demostração de que $T(n) = O(n^2 \lg n)$

Pela definição, devemos mostrar que existem constantes $c > 0$ e $n_0 > 0$ tal que $T(n) \leq cn^2 \lg n$, $\forall n \geq n_0$.

Caso base: Para $n = 1$, $T(1) = 1 > c(1)^2 \lg 1 = 0$, ou seja, não é possível definir um c que satisfaça a definição. [fail]

Sem problemas, pois não somos obrigados a usar $n_0 = 1$.

Caso base: Considere $n > 3$ e os novos casos base
$T(2) = 4T(1) + 2^2 = 8$ e $T(3) = 4.T(1) + 3^2 = 13$.
Para $n = 2$, $T(2) \leq c2^2 \lg 2 = 4c$ para $c \geq 2$.
Para $n = 3$, $T(3) \leq c3^2 \lg 3 \approx 14.26c$ para $c \geq 2$. [ok]

Provar complexidade usando o Método da Substituição

Demostração de que $T(n) = O(n^2 \lg n)$ (continuação)

Hipótese: Assuma que $T(k) \leq ck^2 \lg k$ (para todo $k < n$, em particular para $k = n/2$). Queremos mostrar que quando $k = n$, $T(n) \leq cn^2 \lg n$.

Passo:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n/2) + n^2 \\
&\leq 4c(n/2)^2 \lg(n/2) + n^2 \\
&= cn^2(\lg n - \lg 2) + n^2 \\
&= cn^2 \lg n - cn^2 + n^2 \\
&\leq cn^2 \lg n.
\end{aligned}
$$

Note que para $c \geq 2$, $-cn^2 + n^2 \leq 0$; então se deixarmos de subtrair este residual teremos $T(n) \leq cn^2 \lg n$, concluindo a demonstração.

Método da substituição

Sutilezas...

- Considere a recorrência: $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$.
- Vamos supor que $T(n) = O(n)$.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

- Aplicando o método da substituição, não conseguimos chegar na forma exata da indução (isto é, não chegamos em $T(n) \leq cn$).
- Chute parece correto, mas as continhas não estão ajudando... Tentaremos subtrair um termo de menor ordem.

Método da substituição

Dada a recorrência:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

Nova tentativa com uma hipótese mais forte

- **Hipótese:** $T(n) \leq cn - d$, onde $d \geq 0$ é uma constante.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c\lfloor n/2 \rfloor - d + c\lceil n/2 \rceil - d + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \\ &\leq cn - d \text{ (para d } \geq 1). \end{aligned}$$

- Portanto, podemos concluir que $T(n) \in O(n)$.

Método da substituição

Dada a recorrência:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

Nova tentativa com uma hipótese mais forte

- **Hipótese:** $T(n) \leq cn - d$, onde $d \geq 0$ é uma constante.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 \\ &\leq c\lfloor n/2 \rfloor - d + c\lceil n/2 \rceil - d + 1 \\ &= cn - 2d + 1 \\ &\leq cn - d \text{ (para d } \geq 1). \end{aligned}$$

- Portanto, podemos concluir que $T(n) \in O(n)$.

Alternativamente poderíamos provar que $T(n) \in O(n-1)$ e concluir (por transitividade) que como $n - 1 \in O(n)$ então $T(n) \in O(n)$.

Sua vez

Exercício

1. $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$. Mostre que $T(n) = O(n^3)$.
2. $T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n^2)$. Mostre que $T(n) = O(n^2)$ [Exercício 4.3-8 do Cormen – tricky].