Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Informática – Projeto e Análise de Algoritmos
Prof. Daniel Kikuti

Trabalho 1

1. Para cada par de funções $f(n)$ e $g(n)$ na tabela a seguir, indique se $f(n)$ pertence a $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$ ou $\Theta(g(n))$. Considere que $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ e $c > 1$. Justifique sua resposta.

	$f(n)$	$g(n)$	$f(n) = O(g(n))$?	$f(n) = \Omega(g(n))$?	$f(n) = \Theta(g(n))$?
a)	$\lg^k n$	n^ϵ		X	
b)	n^k	c^n	X		
c)	2^n	$2^{n/2}$		X	
d)	$n^{\lg c}$	$c^{\lg n}$			X

Solução:

Usando limite para analisar qual complexidade $f(n)$ corresponde em $g(n)$ aplicamos: $\mathrm{L} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lg^k n}{n^\epsilon} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\epsilon} \lg^k n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{-\epsilon}. \lim\limits_{n\to\infty} \lg^k n = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{c^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_n n^k}{\log_n c^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{\log_n c^n}$

$Como \lim\limits_{n\to\infty} \log_n c^n = \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k}{\log_n c^n} = 0 \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{2^{n/2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^n.2^{-\frac{n}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{2}} = \infty \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\lg c}}{c^{\lg n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\lg c}}{n^{\lg c}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$

2. Para cada item a seguir, assinale **V**erdadeiro ou **F**also. **Justifique** sua resposta usando as definições de notação assintótica.

   (a) ■ **V** ☐ F Se $f(n) = \log_{16} n$ então $f(n) = \Theta(\lg n)$?

   (b) ☐ V ■ **F** $2^{n+a} = \Theta(2^{2n})$? Onde $a \in \mathbb{N}$ é uma constante.

   (c) ■ **V** ☐ F $\frac{n^2}{4} - 3n - 16 = \Omega(n^2)$?

   (d) ■ **V** ☐ F $7n^2 + 13n = O(n^2)$.

Solução:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_{16} n}{\lg n} = \dfrac{1}{4} \to f(n) = \Theta(g(n))$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+a}}{2^{2n}} = 0 \Rightarrow f(n) = 2^{n+a} \in O(2^{2n})$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n^2}{4} - 3n - 16}{n^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow f(n) = \dfrac{n^2}{4} - 3n - 16 \in \Theta(n^2) = O(n^2) \wedge \Omega(n^2) \Rightarrow f(n) \in \Omega(n^2)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n^2 + 13n}{n^2} = 7 \to f(n) = 7n^2 + 13n \in \Theta(n^2) = O(n^2) \wedge \Omega(n^2) \Rightarrow f(n) \in O(n^2)$

3. Mostre usando as definições de notação assintótica:

   (a) $\frac{n}{2} \lg(\frac{n}{2}) = \Omega(n \lg n)$.

   (b) $n^2 + 1000n = O(n^2)$.

   (c) $2^{n+1} = \Theta(2^n)$.

Solução:

Escreva a solução aqui.

4. Expresse as seguintes funções em termos da notação Θ.
   (a) $2n + 3\log^{100} n$.
   (b) $7n^3 + 1000n \log n + 3n$.
   (c) $3n^{1.5} + (\sqrt{n})^3 \log n$.
   (d) $2^n + 100^n + n!$.

Solução:

Escreva a solução aqui.

5. É comum usar a notação $f(n) \prec g(n)$ para denotar que $f(n) \in o(g(n))$. Use esta notação para expressar a hierarquia de classes de complexidade das seguintes funções: $\sqrt{n}$, 2^{n^2}, n, $\lg n$, 1, $\lg\lg n$, $n!$, n^2, $n^{3/4}$, 2^n, $n \lg n$.

Solução:

Escreva a solução aqui.

6. Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções positivas. Informe se a afirmação é verdadeira ou falsa e justifique.
   (a) $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = O(f(n))$.
   (b) $f(n) + g(n) = \Theta(min(f(n), g(n)))$
   (c) $f(n) = O(g(n))$ implica $g(n) = \Omega(f(n))$
   (d) $f(n) = \Theta(f(n/2))$

Solução:

Escreva a solução aqui.

7. Mostre uma função $f(n)$ tal que $f(n) \notin \Omega(f(n+1))$.

Solução:

Escreva a solução aqui.

8. Mostre que $\sum_{i=1}^{n} \lg i = \Theta(n \lg n)$.

Solução:

Escreva a solução aqui.

9. Mostre que $n! = O(2^{n^2})$.

Solução:

Escreva a solução aqui.

10. Seja $p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$ (polinômio em n de grau k), onde k é um inteiro não-negativo, a_i é uma constante e $a_k > 0$, mostre que $p(n) = \Theta(n^k)$.

Solução:

Usando limite, devemos mostrar que: L $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{n^k}, 0 < L < \infty$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{n^k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + ... + a_k n^k}{n^k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^0}{n^k} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 n^1}{n^k} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_2 n^2}{n^k} + ... + \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{n^k}$$
$$= 0 + 0 + 0 + a_k$$
$$= a_k.$$

Como $a_k > 0 \Rightarrow p(n) = \Theta(n^k)$.

11. Papai Noel resolveu antecipar seu presente de Natal. Sabendo que você foi um(a) bom(a) menino(a), ele escreveu um algoritmo para que você analise e ganhe uns pontinhos na prova de PAA. Sua tarefa é simples. Dado um inteiro n como entrada, expresse por meio de notação assintótica a quantidade de "Ho!"s que será impressa pelo algoritmo (use a notação Θ).

```
FELIZ-NATAL(n)
i ← 1
while i ≤ n do
    for j ← i to 2i − 1 do
        print "Ho!";
    i ← 2i
```

Solução:

Escreva a solução aqui.

12. Dado um inteiro n (assuma que $n = 2^k$, tal que k é um número inteiro positivo) e *expr* (que corresponde a uma expressão a ser impressa), informe, por meio de notação assintótica, a quantidade de mensagens que o algoritmo a seguir irá imprimir. Dê sua resposta em função de n.

```
PROG(n, expr)
while n ≥ 1 do
    for j ← 1 to n do
        print expr
    n ← n/2
```

Solução:

Escreva a solução aqui.

13. Seja *count* o número total de iterações feitas pelo algoritmo a seguir para uma entrada n. Informe, usando notação assintótica, o valor de *count* em função de n.

```
COUNT(n)
count ← 0
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to ⌊n/i⌋ do
        count ← count + 1
return count
```

Solução:

Escreva a solução aqui.

14. Seja *count* o número total de iterações feitas pelo algoritmo a seguir para uma entrada n (considere que $n = 2^{2^k}$, para algum inteiro positivo k). Informe, usando notação assintótica, o valor de *count* em função de n.

```
COUNT(n)
count ← 0
for i ← 1 to n do
    for j ← 2; j ≤ n; j ← j^2 do
        count ← count + 1
return count
```

Solução:

Escreva a solução aqui.

15. Dado um inteiro $n \geq 0$ como entrada, muitos afirmam que o algoritmo a seguir é capaz de medir o desespero na prova de PAA. Outros afirmam que o algoritmo mede a alegria. Para o professor, não interessa o que o algoritmo mede. O objetivo desta questão é avaliar se o aluno é capaz de encontrar uma fórmula fechada que representa o valor final de x em função do valor de entrada n. Em outras palavras, uma função que representa quantas vezes a linha 5 será executada.

```
Prog(n)
x ← 0
for i ← 1 to n do
    for j ← i + 1 to n do
        for k ← 1 to j − i do
            x ← x + 1
```

Solução:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k+1)(n-k)}{2} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^2 + (n-k)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right] + \frac{1}{2}\left[n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right] + \frac{n(n-1)}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right] + \frac{n^2-n}{4}
\end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ é a soma das $n-1$ primeiras linha do triângulo de pascal, podemos concluir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k+1)(n-k)}{2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right] + \frac{n^2+n}{4} \\
&= \frac{(n^2-n)(2n-1)}{12} + \frac{n^2-n}{4} \\
&= \frac{2n^3-3n^2+n}{12} + \frac{3n^2-3n}{12} \\
&= \frac{2n^3-2n}{12} \\
&= \frac{n^3-n}{6}
\end{aligned}$$

16. Resolva as seguintes recorrências (use o método da substituição):
    (a) $T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$
    (b) $T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2)$
    (c) $T(n) = T(n/4) + 1$
    (d) $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

Solução:

a)$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2)$

Supondo que $T(n) \in O(n^3 - n^2)$ e substituindo em $T(n)$:

$$8c(\tfrac{n^3}{8} - \tfrac{n^2}{4}) + \Theta(n^2)$$

$c.n^3 - 2.n^2 + d.n^2$

$c.n^3 - n^2(2c-d), p/c \leq \frac{d}{2} \Rightarrow T(n) = O(n^3)$

17. Use árvore de recorrência para estimar um limite superior para as seguintes recorrências. Assuma que $T(n)$ é uma constante para $n \leq 2$. Depois comprove usando o método de substituição.
    (a) $T(n/2) + T(n/4) + T(n/8) + n$
    (b) $2T(n/4) + \sqrt{n}$

Solução:

Escreva a solução aqui.

18. Utilize o método de árvore de recursão para supor um limite assintótico superior para a recorrência $T(n) = 3T(n-1) + 1$. Depois verifique pelo método de substituição que este limite está correto.

Solução:

Escreva a solução aqui.

19. Utilize o método de árvore de recursão para supor um limite assintótico superior para a recorrência $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$. Depois verifique pelo método de substituição que este limite está correto.

Solução:

Escreva a solução aqui.

20. Utilize o método de árvore de recursão para supor um limite assintótico superior para a recorrência $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + \Theta(n)$. Depois verifique pelo método de substituição que este limite está correto.

Solução:

Escreva a solução aqui.

21. A recorrência $T(n) = 7T(n/2) + n^2$ descreve o tempo de execução de um algoritmo A. Um algoritmo alternativo A' tem um tempo de execução $T'(n) = aT'(n/4) + n^2$. Qual é o maior inteiro a que faz com que A' seja assintoticamente mais rápido que A?

Solução:

Escreva a solução aqui.

22. Use o método mestre para resolver as seguintes recorrências:
    (a) $T(n) = 3T(n/2) + n \lg n$
    (b) $T(n) = 3T(n/2) + n^2$
    (c) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
    (d) $T(n) = 4T(n/2) + n^2\sqrt{n}$
    (e) $T(n) = 5T(n/5) + n$
    (f) $T(n) = 6T(n/3) + n^2$
    (g) $T(n) = 9T(n/2) + n^3$

Solução:

Escreva a solução aqui.

23. Dadas as recorrências dos algoritmos A e B, determine a complexidade de cada um deles e compare-os (informe se A é assintoticamente mais rápido que B, B é assintoticamente mais rápido que A, ou ambos possuem a mesma complexidade assintótica).
    - $T_A(n) = 27T_A(n/3) + n$
    - $T_B(n) = 4T_B(n/2) + n^3$

Solução:

Escreva a solução aqui.

24. Os três algoritmos a seguir resolvem um problema de tamanho n por meio da técnica de divisão e conquista. Analise a complexidade de cada um deles e informe qual algoritmo é assintoticamente mais eficiente.
    - Algoritmo A resolve problemas dividindo-os em cinco subproblemas de tamanho $n/2$, recursivamente resolve cada subproblema e combina suas soluções em tempo linear para obter uma solução do problema original.
    - Algoritmo B resolve problemas dividindo-os em dois subproblemas de tamanho $n - 1$, recursivamente resolve cada um dos subproblemas e combina as soluções em tempo constante para obter a solução do problema original.
    - Algoritmo C resolve problemas dividindo-os em nove subproblemas de tamanho $n/3$, recursivamente resolve cada subproblema e combina suas soluções em tempo $O(n^2)$ para obter uma solução do problema original.

Solução:
Escreva a solução aqui.

25. Os três algoritmos a seguir computam corretamente x^n para $x > 0$ e $n \geq 0$. Mostre que os três algoritmos estão corretos e analise a complexidade assintótica de cada um deles (em função de n) e informe qual deles é mais eficiente.

```
Power1(x, n)
resp ← 1
i ← 0
while i < n do
    resp ← resp * x
    i ← i + 1
return resp
```

```
Power2(x, n)
if n = 0 then
    return 1
else
    return Power2(x, n − 1) * x
```

```
Power3(x, n)
if n = 0 then
    return 1
else if (n mod 2) = 0 then
    aux ← Power3(x, n/2)
    return aux * aux
else
    return Power3(x, n − 1) * x
```

Solução:
Escreva a solução aqui.

26. Considere o algoritmo Heapsort descrito a seguir. Mostre que o algoritmo está correto usando o seguinte invariante de laço: "No começo de cada iteração do laço **for** das linhas 2–5, o subvetor $A[1 \ldots i]$ contém os i menores elementos de $A[1 \ldots n]$, e o subvetor $A[i{+}1 \ldots n]$ contém os $n - i$ maiores elementos de $A[1 \ldots n]$ em ordem.

```
Heapsort(A)
1 Build-Max-Heap(A)
2 for i ← A.length to 2 do
3     swap(A[1], A[i])
4     A.heap-size ← A.heap-size − 1
5     Max-Heapify(A, 1)
```

Solução:
Escreva a solução aqui.

27. Analise a complexidade dos seguintes algoritmos:

(a)

```
f(n)
if n = 1 then
    return 1
else
    return f(n − 1) + f(n − 1)
```

Solução:
Escreva a solução aqui.

(b)

```
Busca(A[], key, min, max)
if max < min then
    return-1
mid ← min + ((max − min)/2)
if A[mid] > key then
    return Busca(A, key, min, mid − 1)
else if A[mid] < key then
    return Busca(A, key, mid + 1, max)
else
    return mid
```

Solução:
Escreva a solução aqui.

(c)
```
RECURSIVE(n)
if n > 1 then
    for i ← 1 to n^3 do
        Faz algo (custo Θ(1))
    RECURSIVE(n/3)
```

Solução:
Escreva a solução aqui.

28. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F). **Justifique**

(a) ■ **V** ☐ F O limite assintótico inferior para algoritmos de ordenação baseados em comparação é $\Omega(n \lg n)$. Um algoritmo de ordenação por comparação que faz $2T(n/2) + \Theta(1)$ comparações no pior caso com certeza não efetua corretamente a ordenação para algumas instâncias.

(b) ☐ V ■ **F** Suponha que iremos gerar n números aleatórios no intervalo $[0 \dots n^2]$. Considerando base decimal (isto é, um número x possui $\lfloor \log_{10} x \rfloor + 1$ dígitos na base 10), é correto afirmar que o algoritmo RADIX SORT faz a ordenação destes n números em tempo $O(n)$.

(c) ☐ V ■ **F** Visto que o limite assintótico inferior para algoritmos de ordenação baseados em comparação é $\Omega(n \lg n)$, não seria possível o desenvolvimento de um algoritmo de ordenação correto com complexidade de tempo $O(n\sqrt{n})$ no pior caso.

(d) ☐ V ■ **F** Suponha que iremos gerar n números aleatórios no intervalo $[0 \dots n^2]$. É correto afirmar que o algoritmo COUNTING SORT faz a ordenação destes n números em tempo $O(n)$.

(e) ■ **V** ☐ F Suponha que iremos gerar n números aleatórios no intervalo $[0 \dots n^2]$. É correto afirmar que o algoritmo MERGESORT faz a ordenação destes n números em tempo $O(n \lg n)$.

(f) ☐ V ■ **F** Não é possível construir um heap máximo com n elementos em tempo $O(n)$. Pois para inserir um elemento no heap temos custo $O(\lg n)$ e, como temos n elementos a serem inseridos, o custo total seria pelo menos $O(n \lg n)$.

(g) ■ **V** ☐ F Em um heap binário, metade dos elementos do vetor são folhas. Se aplicarmos o procedimento MAXHEAPFY para cada elemento da metade até o primeiro, então ao fim teremos um Heap Máximo.

(h) ■ **V** ☐ F É correto afirmar que: no melhor caso, o algoritmo INSERTION SORT é mais eficiente que os algoritmos MERGESORT e HEAPSORT.

Solução:
Escreva a solução aqui.

29. Use o modelo de árvore de decisão para representar as comparações efetuadas pelo algoritmo INSERTION-SORT para uma instância de entrada com quatro elementos.

Solução:
Escreva a solução aqui.

30. Use o modelo de árvore de decisão para representar as comparações efetuadas pelo algoritmo MERGESORT para uma instância de entrada com três elementos.

Solução:
Escreva a solução aqui.

31. Use o modelo de árvore de decisão para representar as comparações efetuadas pelo algoritmo QUICKSORT para uma instância de entrada com três elementos.

Solução:
Escreva a solução aqui.

32. Dado um vetor de inteiros distintos e ordenados em ordem crescente $A = \{a_1, \dots, a_n\}$:

(a) Descreva um algoritmo que determina se existe um índice i tal que $a_i = i$ em tempo $O(\lg n)$. Por exemplo, em $\{-10, -3, 3, 5, 7\}$, $a_3 = 3$. Em $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ não existe tal i. Argumente que seu algoritmo está correto.

Solução:
Escreva a solução aqui.

(b) Explique por que sua solução leva tempo $O(\lg n)$.

Solução:
Escreva a solução aqui.

33. Descreva um algoritmo baseado no paradigma de Divisão e Conquista que encontra o mínimo de um conjunto de n números. Assuma que os elementos estão em um vetor $A = [1 \ldots n]$. Mostre que o algoritmo está correto e analise sua complexidade.

Solução:
Escreva a solução aqui.

34. Descreva um algoritmo baseado no paradigma de Divisão e Conquista que encontra o segundo maior elemento de um conjunto de n números. Assuma que os elementos estão em um vetor $A = [1 \ldots n]$. Mostre que o algoritmo está correto e analise sua complexidade.

Solução:
Escreva a solução aqui.

35. Descreva um algoritmo que faz uso do procedimento PARTITION para encontrar o k-ésimo menor elemento. Isto é, o algoritmo recebe como entrada um vetor $A[1 \ldots n]$ e um um valor $1 \leq k \leq n$ e devolve qual seria este k-ésimo menor elemento. Por exemplo, se $k = 1$ o algoritmo deveria devolver o mínimo do vetor; se $k = n$ o algoritmo deveria devolver o máximo; para um $k = 3$ devolveria o terceiro menor elemento. Analise seu algoritmo no pior e no melhor caso.

Solução:
Escreva a solução aqui.

36. Assuma que você possui k vetores ordenados, cada um com n elementos, e você precisa combiná-los em um único vetor ordenado com kn elementos.

(a) Usando o procedimento MERGE, faça a intercalação do primeiro vetor com o segundo, então intercale o terceiro, depois o quarto e assim por diante. Qual a complexidade de tempo deste algoritmo, em função de k e n?

Solução:
Escreva a solução aqui.

(b) Apresente uma solução mais eficiente para este problema, por meio da técnica de Divisão e Conquista. Qual a complexidade de tempo de sua solução, em função de k e n?

Solução:
Escreva a solução aqui.

37. Dado um vetor de números inteiros $A[1 \ldots n]$, determine quais elementos do vetor são únicos. Apresente um algoritmo eficiente. Faça uma análise de complexidade.

Solução:
Escreva a solução aqui.

38. Descreva um algoritmo de tempo $\Theta(n \lg n)$ que, dado um conjunto S de n números inteiros e outro número x, determine se existe dois elementos em S cuja soma é exatamente x.

Solução:
Escreva a solução aqui.

39. Problema da moeda falsa. Dado um conjunto de n moedas, $n-1$ delas verdadeiras (com mesmo peso) e uma falsa (mais leve), descreva um algoritmo eficiente (com tempo $o(n)$) para encontrar a moeda falsa.

Solução:

Escreva a solução aqui.