Forme normale

Descartes

27 décembre 2025

1 Théorème de l'application ouverte

Dans la preuve de la forme normale dans les espaces de Banach, nous utilisons le célèbre théorème de l'application ouverte :

Théorème 1.1 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $u : E \to F$ une application linéaire continue. Si u est **surjective**, alors u est une application **ouverte**, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de E, l'image $u(U)$ est un ouvert de F.*

Corollaire 1.1. *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $u : E \to F$ une application linéaire continue et **bijective**. Alors l'application réciproque $u^{-1} : F \to E$ est également continue. En d'autres termes, u est un isomorphisme d'espaces de Banach.*

2 Forme normale

On rappelle l'énoncé de forme normale. Soient E, F deux espaces de Banach. Soit $x_0 \in E$. Soit $f : E \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0. On suppose que $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$ et $\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$ sont fermé et facteurs directs. Soient E_1 un supplémentaire fermé de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$, et F_1 un supplémentaire fermé de $\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$. Alors :

Théorème 2.1. *Si $\mathrm{d}f(x_0)$ est **surjective**, il existe $U \subset Ker\,(\mathrm{d}f(x_0))$ un voisinage de $(0,0)$ et $\phi : U \to E$ une application qui réalise un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme sur son image tel que :*

$$\phi(0,0) = x_0 \qquad \textit{et} \qquad \forall (n,a) \in U, \quad f \circ \phi(n,a) = f(x_0) + a$$

Démonstration. Soit $P : E \to E$ le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$ parallèlement à E_1 (i.e. $P^2 = P$, $\mathrm{Im}\,(P) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$). Puisque $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$ est un facteur direct (admet un supplémentaire topologique), P est continu.

Nous définissons l'application α, qui jouera le rôle de l'inverse de ϕ, par :

$$\begin{aligned} \alpha : E &\to \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \times F \\ x &\mapsto (P(x - x_0), f(x) - f(x_0)) \end{aligned}$$

Soit $u = u_0 + u_1 \in E$, avec $u_0 \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0))$ et $u_1 \in E_1$. On a alors :

$$\mathrm{d}\alpha(x_0).u = (P.u, \mathrm{d}f(x_0).u) = (u_0, \mathrm{d}f(x_0).u_1)$$

Nous souhaitons montrer que $\mathrm{d}\alpha(x_0)$ est inversible. Pour cela, cherchons à expliciter l'inverse de $\mathrm{d}\alpha(x_0)$:

Soit $(k,h) \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \times F$ tel que $\mathrm{d}\alpha(x_0).u = (k,h)$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_0 = k \\ \mathrm{d}f(x_0).u_1 = h \end{cases}$$

Nous cherchons à exprimer linéairement u en fonction de k et h. Comme $u = u_0 + u_1$ et que $u_0 = k$, il suffit de déterminer u_1.

Nous savons que la restriction $\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1} : E_1 \to F$ est une bijection linéaire continue. D'après le théorème de l'application ouverte, son inverse $\left(\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1}\right)^{-1} : F \to E_1$ est également continu. Puisque $u_1 \in E_1$, la seconde équation s'écrit $\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1}.u_1 = h$. En appliquant $\left(\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1}\right)^{-1}$ des deux côtés, on obtient :

$$u_1 = \left(\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1}\right)^{-1}.h$$

On en déduit l'expression de u :

$$u = u_0 + u_1 = k + \left(\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1}\right)^{-1}.h$$

Ainsi, $\mathrm{d}\alpha(x_0) \in \mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \times F)$ est une bijection linéaire continue. En utilisant de nouveau le théorème de l'application ouverte, son inverse est également continu.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert W de x_0 dans E tel que $\alpha(W)$ soit un voisinage ouvert de $\alpha(x_0) = (0,0)$ dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \times F$, et que $\alpha : W \to \alpha(W)$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme. Posons $U = \alpha(W)$ et $\phi = \alpha^{-1} : U \to W$. Comme $\alpha(x_0) = (0,0)$, on a $\phi(0,0) = x_0$.

Pour tout $(n,a) \in U$, posons $x = \phi(n,a)$. Nous avons alors :

$$(n,a) = \alpha(x) = (P(x-x_0), f(x) - f(x_0)) \Rightarrow a = f(x) - f(x_0) \Rightarrow f \circ \phi(n,a) = f(x) = a + f(x_0)$$

$\square$

Théorème 2.2. *Si* $\mathrm{d}f(x_0)$ *est* ***injective****, il existe* $U \subset$ *Im*$(\mathrm{d}f(x_0))$*,* $V \subset F$ *des voisinages de (respectivement)* 0 *et* $f(x_0)$ *et* $\phi : U \to E$*,* $\psi : V \to$ *Im*$(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1$ *des applications qui réalisent des* $\mathcal{C}^1-$*difféomorphismes sur leurs images telles que :*

$$\phi(0) = x_0 \qquad \textit{et} \qquad \psi(f(x_0)) = (0,0)$$

$$\forall a \in U, \quad \psi \circ f \circ \phi(a) = (a, 0)$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{d}f(x_0) : E \to F$ est une injection linéaire continue et que $\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$ est un sous-espace fermé de F, l'application $\mathrm{d}f(x_0)$ induit une bijection linéaire continue de E sur son image $\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$. D'après le théorème de l'application ouverte, son inverse $\mathrm{d}f(x_0)^{-1}$: $\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \to E$ est également continu.

Définissons l'application ϕ par :

$$\begin{aligned}\phi : \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) &\to E \\ a &\mapsto x_0 + \mathrm{d}f(x_0)^{-1}.a\end{aligned}$$

Il s'agit d'une bijection affine continue (composée d'une translation et d'un isomorphisme linéaire), c'est donc un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme global. De plus, $\phi(0) = x_0$.

Pour obtenir ψ, nous construisons l'application β (qui jouera le rôle de son inverse local) comme suit :

$$\begin{aligned}\beta : \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1 &\to F \\ (a,b) &\mapsto f\left(x_0 + \mathrm{d}f(x_0)^{-1}.a\right) + b\end{aligned}$$

On a $\beta(0,0) = f(x_0)$. Soit $(k,h) \in \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1$, calculons la différentielle :

$$\mathrm{d}\beta(0,0).(k,h) = \mathrm{d}f(x_0) \circ \mathrm{d}f(x_0)^{-1}.k + h = k + h$$

Puisque $F = \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \oplus F_1$, notons $Q : F \to F$ le projecteur sur $\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))$ parallèlement à F_1. Soit $v \in F$. L'équation $\mathrm{d}\beta(0,0).(k,h) = v$ s'écrit $k + h = v$. En appliquant le projecteur, on trouve $k = Q(v)$, et donc $h = v - Q(v)$. Ainsi, l'application linéaire $\mathrm{d}\beta(0,0)$ est bijective (c'est l'isomorphisme canonique associé à la somme directe).

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert W de $(0,0)$ dans $\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1$ et un voisinage ouvert V de $\beta(0,0) = f(x_0)$ dans F tels que $\beta : W \to V$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme. Posons $\psi = \beta^{-1} : V \to \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1$. On a bien $\psi(f(x_0)) = \psi(\beta(0,0)) = (0,0)$.

Soit U un voisinage de 0 dans $\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))$ suffisamment petit pour que $U \times \{0\} \subset W$. Pour tout $a \in U$, considérons $\psi(f(\phi(a)))$. Par définition de β, on remarque que :

$$\beta(a,0) = f(x_0 + \mathrm{d}f(x_0)^{-1}.a) + 0 = f(\phi(a))$$

En appliquant ψ des deux côtés, on obtient :

$$(a,0) = \psi(f(\phi(a)))$$

Ce qui est le résultat attendu. $\square$

Théorème 2.3. *Si $\mathrm{d}f(x_0)$ est de* ***rang (ou corang)*** [1] ***fini est constant au voisinage de*** *x_0, il existe $U \subset Ker(\mathrm{d}f(x_0)) \times Im(\mathrm{d}f(x_0))$ un voisinage de $(0,0)$, $V \subset F$ un voisinage de $\mathrm{d}f(x_0)$ et $\phi : U \to E$, $\psi : V \to Im(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1$ des applications qui réalisent des $\mathcal{C}^1-$difféomorphismes sur leurs images telles que :*

$$\phi(0,0) = x_0 \qquad \textit{et} \qquad \psi(f(x_0)) = (0,0)$$

$$f \circ \phi(U) \subset V$$

$$\forall (n,a) \in U, \quad \psi \circ f \circ \phi(n,a) = (a,0)$$

1. $\operatorname{rg}(\mathrm{d}f(x_0)) := \dim\left(\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))\right)$, $\operatorname{corg}(\mathrm{d}f(x_0)) := \dim\left(F/\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))\right) = \dim F_1$

$$\operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0)) \times \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))) \xleftarrow{\alpha} E \xrightarrow{f} F \qquad \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1$$

$$U \xrightarrow{\phi} \phi(U) \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} \psi(V)$$

$$(0,0) \xmapsto{\phi} x_0 \xmapsto{f} f(x_0) \xmapsto{\psi} (0,0)$$

$$(n,a) \xmapsto{\psi\circ f\circ\phi} (a,0)$$

Démonstration. Soit $P : E \to E$ le projecteur continu sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0))$ parallèlement à E_1, et $Q : F \to F$ le projecteur continu sur $\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))$ parallèlement à F_1. Définissons l'application α par :

$$\begin{aligned} \alpha : E &\to \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0)) \times \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \\ x &\mapsto \big(P(x-x_0), Q(f(x)-f(x_0))\big) \end{aligned}$$

La restriction $\mathrm{d}f(x_0)|_{E_1} : E_1 \to \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))$ est un isomorphisme (bijection linéaire continue). En utilisant son inverse, on peut montrer de manière analogue que $\mathrm{d}\alpha(x_0)$ est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert W de x_0 tel que $\alpha : W \to \alpha(W)$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme. Posons $\phi = \alpha^{-1} : \alpha(W) \to W$.

Soit $(n,a) \in \alpha(W) \subset \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0)) \times \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))$. On a :

$$(n,a) = \alpha(\phi(n,a)) = \big(P(\phi(n,a)-x_0), Q(f(\phi(n,a)) - f(x_0))\big)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = P(\phi(n,a) - x_0) & (1) \\ a = Q(f(\phi(n,a)) - f(x_0)) & (2) \end{cases}$$

Posons $H = f \circ \phi$. L'équation (2) devient $a = Q(H(n,a) - f(x_0))$. En différentiant cette égalité par rapport aux deux variables, on obtient :

$$0 = Q \circ \nabla_1 H(n,a).k, \quad \text{pour } k \in \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0)) \tag{3}$$

$$h = Q \circ \nabla_2 H(n,a).h, \quad \text{pour } h \in \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) \tag{4}$$

Affirmation : Au voisinage de $(0,0)$, $\nabla_1 H(n,a) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0)), \ \nabla_1 H(n,a).k = 0$$

Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert $O_1 \times O_2 \subset \alpha(W)$ de $(0,0)$ dans $\operatorname{Ker}(\mathrm{d}f(x_0)) \times \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))$, tel que le rang (ou le corang) de $\mathrm{d}f$ soit une constante finie sur $\phi(O_1 \times O_2)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \phi(O_1 \times O_2), \ \dim \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x)) = \dim \operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0)) < \infty$$

ou respectivement :

$$\dim\big(F/\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x))\big) = \dim\big(F/\operatorname{Im}(\mathrm{d}f(x_0))\big) < \infty$$

Puisque ϕ est un difféomorphisme local, le rang (ou corang) de $\mathrm{d}H$ sur $O_1 \times O_2$ est égal à cette même constante.

D'après (4), on a $\mathrm{Im}\,(Q \circ \nabla_2 H(n,a)) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$. De plus, comme

$$\mathrm{d}H(n,a).(k,h) = \nabla_1 H(n,a).k + \nabla_2 H(n,a).h,$$

on a l'inclusion :

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}H(n,a)) \supset \mathrm{Im}\,(\nabla_2 H(n,a)) \supset \mathrm{Im}\,(Q \circ \nabla_2 H(n,a)) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$$

En comparant les dimensions (ou codimensions) des deux côtés, on obtient $\mathrm{Im}\,(\mathrm{d}H(n,a)) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$. Ainsi :

$$\nabla_1 H(n,a).k \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \Rightarrow \nabla_1 H(n,a).k = Q(\nabla_1 H(n,a).k) = 0$$

Cela prouve l'Affirmation, ce qui signifie que localement $H(n,a)$ ne dépend pas de n. On peut donc poser :

$$(\mathrm{Id}_F - Q)(H(n,a) - f(x_0)) = S(a),$$

d'où

$$H(n,a) = Q(H(n,a)) + (\mathrm{Id}_F - Q)(H(n,a)) = f(x_0) + a + S(a)$$

Il est aisé de voir que $S : O_2 \to F_1$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que $S(0) = 0$, $\mathrm{d}S(0) = 0$.

Définissons l'application ψ par :

$$\begin{aligned}\psi : O_2 \oplus F_1 \subset F &\to \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \times F_1 \\ y &\mapsto \big(Q(y - f(x_0)), (\mathrm{Id}_F - Q)(y - f(x_0)) - S(Q(y - f(x_0)))\big)\end{aligned}$$

Alors $\psi(f(x_0)) = (0,0)$, et pour tout $v \in F$:

$$\mathrm{d}\psi(f(x_0)).v = (Q.v, (\mathrm{Id}_F - Q).v - \mathrm{d}S(0).Q.v) = (Q.v, (\mathrm{Id}_F - Q).v)$$

Ceci est l'isomorphisme naturel de la somme directe interne vers le produit direct. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $V \subset O_2 \oplus F_1$ de $f(x_0)$ dans F, tel que $\psi : V \to \psi(V)$ soit un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme.

Prenons $U = H^{-1}(V) \cap (O_1 \times O_2)$ comme voisinage ouvert de $(0,0)$ dans $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f(x_0)) \times \mathrm{Im}\,(\mathrm{d}f(x_0))$. Alors $f(\phi(U)) \subset V$. Pour tout $(n,a) \in U$, posons $x = \phi(n,a)$, alors :

$$(n,a) = \alpha(x) = \big(P(x - x_0), Q(f(x) - f(x_0))\big) \Rightarrow a = Q(f(x) - f(x_0))$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned}\psi(f(x)) &= \big(Q(f(x) - f(x_0)), (\mathrm{Id}_F - Q)(f(x) - f(x_0)) - S(Q(f(x) - f(x_0)))\big) \\ &= \big(a, (\mathrm{Id}_F - Q)(H(n,a) - f(x_0)) - S(a)\big) \\ &= (a, 0)\end{aligned}$$

$\square$