Procesos de Decisión

Cursos de Actualización de Conocimientos Profesionales

Luis Carlos Chávez-Bedoya M., PhD   Luis Francisco Rosales M., PhD

Octubre, 2016

Universidad ESAN

Preámbulo

PdDs en este curso

Ejemplo 1 (Newsboy)

Un vendedor de periódicos debe seleccionar una cantidad q' *de periódicos a ordenar para luego vender en una calle ficticia. El costo de cada periódico es* c *y el precio que cobra el vendedor de periódicos a sus clientes es* p*. Asumiendo que no existen costos fijos, que* $p > c$ *y que se logra vender* $q : q \leq q'$*, siendo* $c, p \in \mathbb{R}_+$ *y* $q', q \in \mathbb{N}$ *¿cuál es el* q' *óptimo que el vendedor de periódicos debe ordenar?*

Ejemplo 2 (Art Dealer)

Un cliente quiere comprar una pintura a r *unidades monetarias. El comerciante la puede comprar hoy a* r_1*, puede esperar a mañana y comprarla a* r_2 *o pasado mañana a* r_3 *(si la pintura sigue a la venta en estos días). Al final del tercer día la pintura no estará disponible. Siendo* $p \in [0, 1]$ *la probabilidad de que la pintura sea vendida,* $r > r_1 > r_2 > r_3$ *y* $r, r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}_+$ *¿Qué debe hacer el comerciante?*

Ejemplo 3 (Slates)

En el día final de un torneo de golf los equipos compiten por el campeonato. El capitán de cada equipo debe preparar una lista con los nombres de los jugadores (slate), la cual determina el orden de los enfrentamientos. También se sabe que si ambos jugadores tienen el mismo nivel, la probabilidad de ambos equipos de ganar el enfrentamiento es de 0.5*, pero que si se enfrenta un jugador mejor rankeado con uno de menor nivel, esta probabilidad se incrementa en favor del primer jugador ¿Existe una estrategia óptima para armar la lista de jugadores?*

Evaluaciones y normas

- Nota:
  - Examen 1 (1/3): 15.10.16 (S002 8:30 / S003 14:00)
  - Examen 2 (1/3): 15.10.16 14:00
  - Trabajo grupal (1/3): 15.10.16 14:00
- Normas:
  - Exámenes: no libros / sí ayuda memoria
  - Trabajo grupal: no free riders / no copiar

Libros de texto

- G.D. Eppen, F.J. Gould, C.P. Schimdt, Jeffrey H. Moore, Larry R. Weatherford. Capítulo 10. Investigación de operaciones en la ciencia administrativa. México: Prentice Hall, 2000.
- H. A. Taha. Capítulo 14. Investigación de operaciones, una introducción. México: Prentice Hall, 2004.
- W. Winston. Capítulo 13. Investigación de operaciones. México: Cengage Learning, 2005.

Requisitos Básicos de Matemática

- Sean $f_1(t) = \exp(-\alpha t)$, $f_2(t) = \ln(t/\beta)$, $\quad f_3(t) = (f_1 \circ f_2)(t)$, calcule $\partial f_i / \partial t, i = 1, 2, 3$ y comente sobre la convexidad de cada función y los parámetros α y β.

$f_i(t)$	$f_i'(t)$	$f_i''(t)$	Convexa si
$\exp(-\alpha t)$	$-\alpha \exp(-\alpha t)$	$\alpha^2 e^{-\alpha t}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln(t/\beta)$	$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$	$\beta \in \mathbb{R}_+$
$\exp(-\alpha \log(t/\beta))$	$-\frac{\alpha}{t}\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}$	$\frac{\alpha(\alpha+1)\left(\frac{t}{\beta}\right)^{-\alpha}}{t^2}$	$\beta \in \mathbb{R}_+, \alpha \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$

- En un lanzamiento de dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea igual a 7?

Casos	Dado 1	Dado 2
Caso 1	1	6
Caso 2	2	5
Caso 3	3	4
Caso 4	4	3
Caso 5	5	2
Caso 6	6	1

La suma de dos dados en un lanzamiento es 7, en 6 de 36 casos posibles, i.e con prob. $6/36 = 1/6$

- Sea $g(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$, ¿Qué condiciones deben cumplir α, β y γ para que la función tenga un máximo? ¿cuál es el máximo de la función? ¿cuál es el argumento que maximiza la función?

  Punto crítico en $\hat{t} = \{t : g'(t) = 0\}$, i.e. $\hat{t} = -\beta/2\alpha$. $g(\hat{t})$ es máximo si $g''(\hat{t}) < 0$, i.e. si $\alpha \in \mathbb{R}_-$. En este caso $\max\{g(t)\} = g(\hat{t})$ y $\arg\max_t\{g(t)\} = \hat{t}$.

- Sea X una variable aleatoria discreta con $\mathbb{P}(X = i) = 1/6$ para $i = 1, \ldots, 6$. Encuentre $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}[X]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{6} p_i \times i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \frac{7}{2} \\
\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_{i=1}^{6} p_i \times i^2 - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

- Alicia tiene dos monedas en su bolsillo, una normal y otra con dos caras. Si elige una al azar, la lanza y obtiene cara, ¿cuál es la prob. de que haya lanzado la moneda normal?

  N: elige moneda normal
  $\bar{N}$: elige moneda con dos caras
  H: el lanzamiento es cara
  T: el lanzamiento es sello

  $$p(N|H) = \frac{p(N,H)}{p(H)} = \frac{p(H|N)p(N)}{p(H)} = \frac{(1/2) \times (1/2)}{3/4} = \frac{1}{3},$$

  donde $p(H) = p(H|N)p(N) + p(H|\bar{N})p(\bar{N}) = 1/3.$

Características de un problema de decisión

1. Existe un agente optimizador que toma decisiones
2. Existe un conjunto de alternativas de acción factibles (*cursos de acción o estrategias*
$$\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_m\}$$
3. Existen estados de la naturaleza
$$\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_n\},$$
que no están bajo el control del agente
4. Para cada combinación (a_i, s_j) existen pagos $v(a_i, s_j)$

Representación de un PdD

Ordenamos la información:

	Acción b_1	Acción b_2	$\dots$	Acción b_n
Acción a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	$\dots$	$v(a_1, s_n)$
Acción a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	$\dots$	$v(a_2, s_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Acción a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	$\dots$	$v(a_m, s_n)$

Representación de un PdD

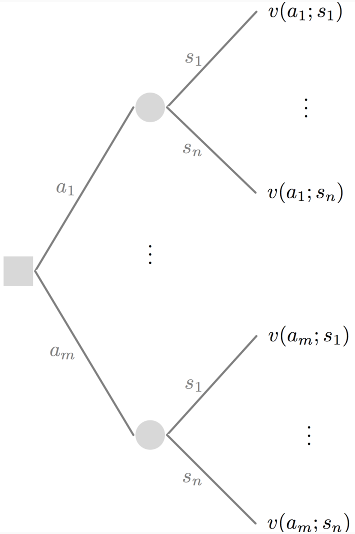
Ordenamos la información:

	Acción b_1	Acción b_2	$\dots$	Acción b_n
Acción a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	$\dots$	$v(a_1, s_n)$
Acción a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	$\dots$	$v(a_2, s_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Acción a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	$\dots$	$v(a_m, s_n)$

Los pagos son elementos $[\boldsymbol{V}]_{ij} = v(a_i, s_j)$ en una matriz de decisión

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v(a_1, s_1) & v(a_1, s_2) & \dots & v(a_1, s_n) \\ v(a_2, s_1) & v(a_2, s_2) & \dots & v(a_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v(a_m, s_1) & v(a_m, s_2) & \dots & v(a_m, s_n) \end{pmatrix}$$

Los pagos se colocan en el nodo terminal en un árbol de decisión

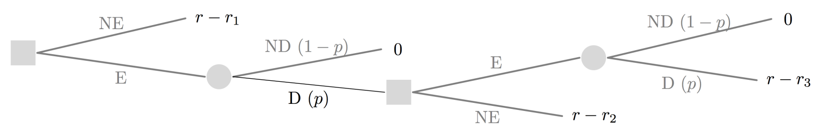


Considere el proceso de decisión del Ejemplo 1 para $q, q' \in \{6, \ldots, 10\}$, y elija una representación, e.g.

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 6(p-c) & 6(p-c) & 6(p-c) & 6(p-c) & 6(p-c) \\ 6(p-c)-c & 7(p-c) & 7(p-c) & 7(p-c) & 7(p-c) \\ 6(p-c)-2c & 7(p-c)-c & 8(p-c) & 8(p-c) & 8(p-c) \\ 6(p-c)-3c & 7(p-c)-2c & 8(p-c)-c & 9(p-c) & 9(p-c) \\ 6(p-c)-4c & 7(p-c)-3c & 8(p-c)-2c & 9(p-c)-c & 10(p-c) \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son las estrategias y cuáles son los estados de la naturaleza que corresponden a $\boldsymbol{V}$?

Considere el proceso de decisión en el Ejemplo 2, y elija una representación, e.g.



- E = espera
- NE = no espera
- D = pintura disponible
- ND = pintura no disponible

Clasificación de los problemas de decisión

1. Toma de decisiones bajo certidumbre, en la cual se conoce el proceso de forma determinista. No en este curso
2. Toma de decisiones bajo riesgo, en la que los escenarios se describen mediante distribuciones de probabilidad
3. Toma de decisiones bajo incertidumbre, en la que no es posible asignar a los escenarios pesos relativos que representen su relevancia en el proceso de decisión

Incertidumbre

Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre

No se conoce la verosimilitud de los escenarios

1. Criterio de Wald
2. Criterio maximax/minimin
3. Criterio de Hurwicz, o del índice de optimismo-pesimismo
4. Criterio de Laplace, o de la razón insuficiente
5. Criterio de arrepentimiento de Savage

Criterio de Wald

El criterio de Wald, también llamado criterio *maximin* (caso de ganancias) y *minimax* (caso de pérdidas), es básicamente **pesimista** (la naturaleza siempre juega en nuestra contra)

$$a_{\text{Wald}} = \begin{cases} \arg\max_{a_i} \left\{ \min_{s_j} v(s_i, s_j) \right\} & \text{si } v(\cdot) \text{ es ganancia} \\ \\ \arg\min_{a_i} \left\{ \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\} & \text{si } v(\cdot) \text{ es pérdida} \end{cases}$$

Considere el Ejemplo 1 para:

$q, q' \in \{6, \ldots, 10\}$
$p = 0.25$
$c = 0.20$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 \\ 0.10 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ -0.10 & 0.15 & 0.40 & 0.40 & 0.40 \\ -0.30 & -0.05 & 0.20 & 0.45 & 0.45 \\ -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}; \quad \min_j [\boldsymbol{V}]_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.10 \\ -0.10 \\ -0.30 \\ -0.50 \end{pmatrix},$$

La cantidad de periódicos que se debe ordenar es

$$q'_{\text{Wald}} = 6$$

Criterio Maximax/Minimin

El criterio maximax/minimin (subíndice "M") es básicamente **optimista**

$$a_{\mathrm{M}} = \begin{cases} \arg\max_{a_i} \left\{ \max_{s_j} v(a_i, s_j) \right\} & \text{si } v(\cdot) \text{ es ganancia} \\ \arg\min_{a_i} \left\{ \min_{s_j} v(a_i, s_j) \right\}. & \text{si } v(\cdot) \text{ es pérdida} \end{cases}$$

Considere el Ejemplo 1 para:

$q, q' \in \{6, \ldots, 10\}$
$p = 0.25$
$c = 0.20$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 \\ 0.10 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ -0.10 & 0.15 & 0.40 & 0.40 & 0.40 \\ -0.30 & -0.05 & 0.20 & 0.45 & 0.45 \\ -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}; \quad \max_j [\boldsymbol{V}]_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.35 \\ 0.40 \\ 0.45 \\ \color{red}{0.50} \end{pmatrix},$$

La cantidad de periódicos que se debe ordenar es

$$q'_{\mathrm{M}} = 10$$

Criterio de Hurwicz o del Índice Optimismo-Pesimismo

Trata de hallar una posición **intermedia** entre las posturas extremas del pesimismo y el optimismo a ultranza. Se define el *índice de optimismo* $\alpha \in [0, 1]$ y la acción seleccionada se asocia con:

Si $v(a_i, s_j)$ representa las *ganancias*:

$$a_{\text{Hurwicz}} = \arg\max_{a_i} \left\{ \alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \min_{s_j} v(s_i, s_j) \right\}$$

Si $v(a_i, s_j)$ representa *pérdidas*:

$$a_{\text{Hurwicz}} = \arg\min_{a_i} \left\{ \alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \max_{s_j} v(s_i, s_j) \right\}$$

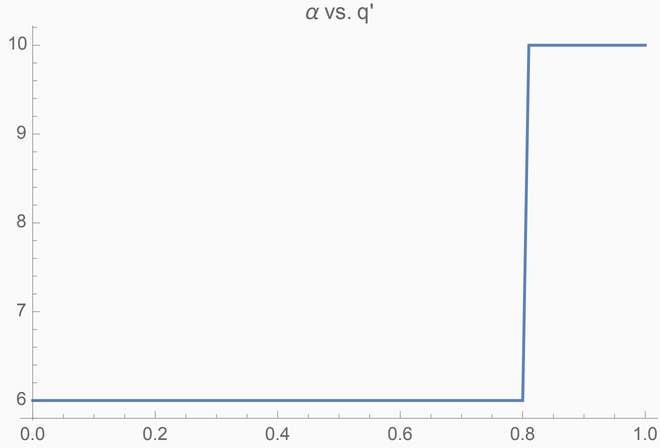
Considere el Ejemplo 1 para: $q, q' \in \{6, \ldots, 10\}$, $p = 0.25$, $c = 0.20$ y $\alpha = 0.8$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 \\ 0.10 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ -0.10 & 0.15 & 0.40 & 0.40 & 0.40 \\ -0.30 & -0.05 & 0.20 & 0.45 & 0.45 \\ -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}; \quad \text{luego}$$

$$0.8 \max_j [\boldsymbol{V}]_{i,j} + 0.2 \min_j [\boldsymbol{V}]_{i,j} = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.30 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{pmatrix},$$

La solución es igual al conjunto de acciones $q'_{\text{Hurwicz}} = \{6, \ldots, 10\}$. Si $\alpha > 0.8$, $q'_{\text{Hurwicz}} = 10$. Si $\alpha < 0.8$, $q'_{\text{Hurwicz}} = 6$

Sensibilidad de la selección c.r.a. índice de optimismo



Criterio de Laplace o de la Razón Insuficiente

Ante el desconocimiento de los estados de la naturaleza se asume

$$\mathbb{P}(s_1) = \mathbb{P}(s_2) = \cdots = \mathbb{P}(s_n) = \frac{1}{n}$$

Luego, el criterio viene dado por:

$$a_{\text{Laplace}} = \begin{cases} \arg\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j) \right\} & \text{si } v(\cdot) \text{ es ganancia} \\ \\ \arg\min_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j) \right\} & \text{si } v(\cdot) \text{ es pérdida} \end{cases}$$

Considere el Ejemplo 1 para:

$q, q' \in \{6, \ldots, 10\}$
$p = 0.25$
$c = 0.20$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.30 \\ 0.10 & 0.35 & 0.35 & 0.35 & 0.35 \\ -0.10 & 0.15 & 0.40 & 0.40 & 0.40 \\ -0.30 & -0.05 & 0.20 & 0.45 & 0.45 \\ -0.50 & -0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.50 \end{pmatrix}; \quad \sum_j [\boldsymbol{V}]_{i,j}/5 = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.25 \\ 0.15 \\ 0.00 \end{pmatrix},$$

La cantidad de periódicos que se debe ordenar es un elemento del conjunto

$$q'_{\text{Laplace}} = \{6, 7\}$$

Criterio de Arrepentimiento de Savage

Consiste en aplicar el criterio de Wald sobre una medida de arrepentimiento $r(a_i, s_j)$ definida como:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max_{a_i}\{v(a_i, s_j)\} - v(a_i, s_j) & \text{si } v(\cdot) \text{ es ganancia} \\ \\ v(a_i, s_j) - \min_{a_i}\{v(a_i, s_j)\} & \text{si } v(\cdot) \text{ es pérdida} \end{cases}$$

El criterio de Wald a ser aplicado ¿Corresponde a un minimax o a un maximin?

Considere el Ejemplo 1 para:

$q, q' \in \{6, \ldots, 10\}$
$p = 0.25$
$c = 0.20$

La matriz de arrepentimiento $\boldsymbol{R}$ con entradas $r(a_i, s_j)$ es dada por:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.05 & 0.10 & 0.15 & 0.20 \\ 0.20 & 0.00 & 0.05 & 0.10 & 0.15 \\ 0.40 & 0.20 & 0.00 & 0.05 & 0.10 \\ 0.60 & 0.40 & 0.20 & 0.00 & 0.05 \\ 0.80 & 0.60 & 0.40 & 0.20 & 0.00 \end{pmatrix}; \quad \max_j [\boldsymbol{R}]_{i,j} = \begin{pmatrix} \color{red}{0.20} \\ \color{red}{0.20} \\ 0.40 \\ 0.60 \\ 0.80 \end{pmatrix},$$

La cantidad de periódicos que se debe ordenar es un elemento del conjunto

$$q'_{\text{Savage}} = \{6, 7\}$$

Ejemplo 4 (Criterios)

Considere la siguiente matriz de pagos (beneficios):

	Estados de la Naturaleza				
Acción	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	15	10	0	-6	17
a_2	3	14	8	9	2
a_3	1	5	14	20	-3
a_4	7	19	10	2	0

No se conocen las probabilidades para la ocurrencia de los estados de la naturaleza. Compare las decisiones obtenidas con cada uno de los criterios.

$a_{Wald} = a_2$, $a_M = a_3$, $a_{Hurwicz} = a_4$, $a_{Laplace} = a_4$ *y* $a_{Savage} = a_2$.

Ejemplo 5 (Examen)

Rodolfo tiene un examen mañana pero sus amigos tienen una fiesta y él quiere ir. Tiene tres opciones, a_1: Quedarse toda la noche en la fiesta, a_2: Dividir la noche en partes iguales entre el estudio y la fiesta, a_3: Estudiar toda la noche. El examen puede ser fácil (s_1), moderado (s_2) o difícil (s_3). Sea la matriz de calificaciones posibles:

	Estados de la Naturaleza		
Acción	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

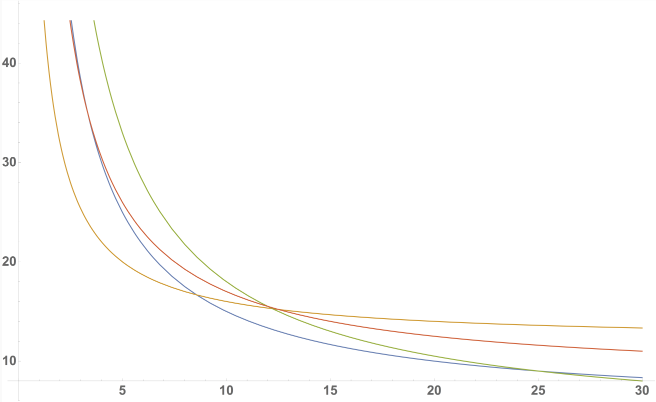
1. *Recomiende un curso de acción para Rodolfo si usted sigue el criterio de Wald.* $a_{Wald} = a_3$.
2. *Suponga que Rodolfo está más interesado en la letra de la calificación:* $A \in [90, 100]$, $B \in [80, 90)$, $C \in [70, 80)$, $D \in [60, 70)$ *y* $F \in [0, 60)$. *¿Cambia su recomendación?* $a_{Wald} = \{a_2, a_3\}$.

Ejemplo 6 (Maquinaria)

Hay que seleccionar una de 4 máquinas para fabricar Q unidades de un producto. Las demandas mínima y máxima son Q_m y Q_M resp. El costo total de producción para Q artículos de la máquina i tiene un costo fijo K_i y un costo variable por unidad c_i, i.e $TC_i(Q) = K_i + c_i Q$. Identifique los estados de la naturaleza y conciba una solución para el problema bajo cada uno de los criterios de decisión bajo incertidumbre. Además suponga que

Máquinas	K_i	c_i
Máq. 1	100	5
Máq. 2	40	12
Máq. 3	150	3
Máq. 4	90	8

Considere el costo promedio como un pago a minimizar. El gráfico muestra los intervalos relevantes para definir los estados de la naturaleza



Luego, s_1: Demanda Baja, i.e. $Q \in [1, 8]$, s_2: Demanda Media, i.e. $Q \in [9, 25]$, s_3: Demanda Alta, i.e. $Q \in [26, 40]$, donde se ha usado $Q_m = 1$ y $Q_M = 40$.

Para escribir la matriz de pagos considere valores de referencia para cada escenario, e.g. $Q = \{Q_m, 20, Q_M\}$.

Acción	s_1	s_2	s_3
a_1	105	10	7.5
a_2	52	14	13
a_3	153	10.5	6.8
a_4	98	12.5	10.3

Luego $a_{\text{Wald}} = a_2$, $a_{\text{M}} = a_3$, $a_{\text{Hurwicz},\alpha=0.5} = a_2$, $a_{\text{Laplace}} = a_1$, $a_{\text{Savage}} = a_2$. Note que para el criterio de Laplace se debe considerar $Q = q_m, \ldots, Q_M$ y que la selección optima cambia de acuerdo a los valores que se hayan seleccionado.

Ejemplo 7 (Granjero)

Para la próxima estación, un granjero tiene cuatro opciones: plantar maíz (a_1), plantar trigo (a_2), plantar soya (a_3) y usar tierra para pastoreo (a_4). Los pagos asociados con las diferentes acciones están influidos por la cantidad de lluvia, que se presenta en uno de cuatro estados: lluvia fuerte (s_1), lluvia moderada (s_2), lluvia ligera (s_3) y temporada de sequía (s_4). La matriz de resultados (en miles de dólares) se estima como:

	Estados de la Naturaleza			
Acción	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	-20	60	30	-5
a_2	40	50	35	0
a_3	-50	100	45	-10
a_4	12	15	15	10

Desarrolle un curso de acción para el granjero

Ejemplo 8 (Ingeniería)

La Sección Ingeniería Industrial (SII) prepara un campamento de verano a la Patagonia. SII debe decidir entre: 200, 250, 300 y 350 vacantes. El costo del campamento será mínimo si se construye para cumplir exactamente con la demanda. Las desviaciones por encima o por debajo generan costos adicionales. Sean a_1 a a_4 el tamaño del campamento (200, 250, 300 o 350 personas) y s_1 a s_4 los niveles de asistencia (bajo, medio, medio-alto y alto) tales que:

	Estados de la Naturaleza			
Acción	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Determinar la estrategia más adecuada según los criterios

Toma de decisiones en condiciones de riesgo

Sea $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, la toma de decisiones considera riesgo si se conocen (se pueden estimar) las probabilidades $p_j = \mathbb{P}(s_j)$, para cada estado de la naturaleza $j = 1, \ldots, m$

Se puede considerar el **criterio del valor esperado**:

$$a_{\mathrm{E}} = \begin{cases} \arg\max_{a_i} \sum_{j=1}^{m} p_j \times v(a_i, s_j) & \text{si } v(\cdot) \text{ es ganancia} \\ \\ \arg\min_{a_i} \sum_{j=1}^{m} p_j \times v(a_i, s_j) & \text{si } v(\cdot) \text{ es pérdida} \end{cases}$$

¿Es un criterio suficiente bajo riesgo?

Valor esperado de la información perfecta (VEIP)

Suponga que se conoce el estado (futuro) de la naturaleza $\bar{s} \in \{s_1, \ldots, s_m\}$, luego el VEIP viene dado por

$$
\begin{aligned}
&= \quad \text{valor con info perfecta} - \text{valor sin info perfecta} \\
&\quad\;\; \max_{a_i}\{v(a_i, \bar{s})\} - v(a_{\text{E}}, \bar{s})
\end{aligned}
$$

En general, se define

$$
VEIP = \sum_{j=1}^{m} p_j \times \underbrace{\left(\max_{a_i}\{v(a_i, s_j)\} - v(a_{\text{E}}, s_j)\right)}_{\text{arrepentimiento de usar valor esp.}}
$$

Resultado de una estrategia como variable aleatoria

Las ganancias $v(\bar{a}, s_j) = X_j$ son variables aleatorias discretas con $\mathbb{P}(X = X_j) = p_j$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[v(\bar{a}, s_j)] = \sum_{j=1}^{m} p_j \times v(\bar{a}, s_j) \\ \operatorname{Var}[X] &= \operatorname{Var}[v(\bar{a}, s_j)] = \sum_{j=1}^{m} p_j \times v(\bar{a}, s_j)^2 - \left\{ \sum_{j=1}^{m} p_j \times v(\bar{a}, s_j) \right\}^2 \end{aligned}$$

Note que $\mathbb{E}[X]$ y $\operatorname{Var}[X]$ son tomadas para una acción $\bar{a}$. En lo sucesivo se usará mayúsculas para denotar v.a.

Ejemplo 9 (Auto)

Una persona tiene 3 opciones para comprar un auto: nuevo (N), de segunda en el Perú (SP) o de segunda directamente del Japón (SJ). La persona planea usar el auto durante un año y luego venderlo. Lo venderá a \$8,500 (N), \$5,000 (SP) y \$4500 (SJ), salvo resulte malo en cuyo caso lo rematará a \$2,500. El auto cuesta \$10,800 (N), \$7000 (SP) y \$4,200 (SJ). Si SJ resulta bueno, gastará en cambio de timón y otros \$1,000 durante el año. Este precio es el mismo que gastará con SP. Si SJ resulta regular, gastará \$1,500 durante el año y si resulta malo \$4,500 durante el año. La persona estima probs. de 0.4, 0.35 *y* 0.25 *de que SJ le resulte respectivamente bueno, regular o malo.*

1. *Construya la matriz de arrepentimiento.*
2. *Bajo el criterio de Savage ¿qué auto conviene comprar?*
3. *¿Cuál es el VEIP?*

Conclusiones paradójicas del criterio del valor esperado

Paradoja de San Petersburgo (Bernoulli, s. XVIII):
¿Cuál es la cantidad que una persona razonable está dispuesta a pagar por participar en un juego en el que la persona lanza una moneda hasta que salga la primera cara y recibe el pago de 2^{j-1} *unidades monetarias?*

Sea X una v.a. que representa el pago, el criterio del valor esperado sugiere que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} p_j \times 2^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \times 2^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Sin embargo, en la práctica las personas no están dispuestas en hacer un pago muy grande por jugar

Solución:

Considere que el jugador de la paradoja tiene una función de utilidad $u(X) \neq X$, en particular considere la función $u(X) = b\ln(X/a)$ con $a > 0$ y $b > 0$

El valor esperado de la utilidad viene dado por (ver demostración en documento):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(X)] &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j \times u(2^{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \times u(2^{j-1}) \\ &= b\ln(2/a) \end{aligned}$$

Es decir, una persona razonable está dispuesta a pagar sólo 2 u.m.

Teoría moderna de la utilidad

La utilidad esperada como criterio de decisión

El decisor asigna valor a los pagos de sus decisiones de acuerdo a una función $U(x)$, e.g. $U(x) : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Luego, la decisión óptima cuando $v(\cdot)$ es ganancia viene dada por la maximización de la utilidad esperada:

$$a_{\text{UE}} = \arg\max_{a_i} \sum_{j=1}^{m} p_j \times \underbrace{u \circ v(a_i, s_j)}_{u(v(a_i, s_j))}$$

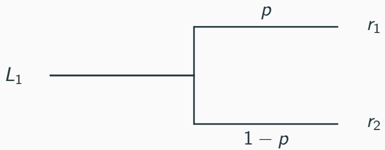
La función de utilidad otorga un valor subjetivo a las u.m. y caracteriza la actitud c.r.a riesgo del decisor

Lotería:

Sean $n \in \mathbb{N}$, $p_j \in [0,1]$ y $r_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, \ldots, n$. El listado de pares

$$L := (p_1, r_1; \ldots; p_n, r_n),$$

con prob. p_j y pagos r_j, $j = 1, \ldots, n$, se denomina Lotería. Es claro que L es v.a.d: $\mathbb{P}(L = r_j) = p_j$. Considere e.g., $L_1 = (p, r_1; 1-p, r_2)$



Notación:

$L_1 \succ L_2$: L_1 es preferida a L_2

$L_1 \sim L_2$: L_1 y L_2 son loterías equivalentes

La función de utilidad

Axiomas Von Neumann - Morgenstern:

1. **Orden Completo:** dos pagos cualesquiera, e.g. r_1, r_2 son comparables, i.e. el individuo prefiere uno al otro, o es indiferente entre ambos. Es más si $r_1 > r_2$ luego $u(r_1) > u(r_2)$.
2. **Continuidad:** si el decisor prefiere r_1 a r_2 y r_2 a r_3, siempre es posible encontrar $p \in [0, 1]$ tal que $L_A \sim L_B$ donde $L_A = (1, r_2)$ y $L_B = (p, r_1; 1 - p, r_3)$.
3. **Independencia**: si el decisor es indiferente entre los pagos r_1 y r_2, siempre es posible encontrar $p \in [0, 1]$ para un tercer pago r_3 tal que $L_A \sim L_B$ donde $L_A = (p, r_1; 1 - p, r_3)$ y $L_B = (p, r_2; 1 - p, r_3)$.
4. **Probabilidad desigual:** si el decisor prefiere r_1 a r_2 y existen loterías $L_A = (p, r_1; 1 - p, r_2)$, $L_B = (q, r_1; 1 - q, r_2)$, se cumple que $p > q \Leftrightarrow L_A \succ L_B$.
5. **Lotería compuesta:** una lotería compuesta $L_A = (p, r_1; 1 - p, L_C)$ con $L_C = (s, r_1; 1 - s, r_2)$, i.e., con pagos redundantes, tiene una lotería simple equivalente $L_B = (p + (1 - p)s, r_1; (1 - p)(1 - s), r_2)$ i.e., $L_A \sim L_B$.

Ejemplo 10 (Ranking)

Considere el problema de un decisor que, de acuerdo a sus preferencias, debe ordenar las loterías:

$$\begin{aligned} L_1 &= (1, \mathit{10\ 000}), \quad L_2 = (0.5, \mathit{30\ 000}; 0.5, 0), \\ L_3 &= (1, \mathit{0}), \quad L_4 = (0.02, \mathit{-10\ 000}; 0.98, \mathit{500}), \end{aligned}$$

si además el decisor revela que $L_1 \sim L_1'$, $L_3 \sim L_3'$ y $L_5 \sim L_6$ donde

$$\begin{aligned} L_1' &= (0.9, \mathit{30\ 000}; 0.1, \mathit{-10\ 000}), \quad L_3' = (0.6, \mathit{30\ 000}; 0.4, \mathit{-10\ 000}), \\ L_5 &= (1, \mathit{500}), \quad L_6 = (0.62, \mathit{30\ 000}; 0.38, \mathit{-10\ 000}). \end{aligned}$$

$L1 \succ L2 \succ L4 \succ L3.$

Teorema 1 (von Newmann - Morgenstern)

Si los axiomas Von Neumann - Morgenstern se cumplen para un decisor, su elección óptima maximiza su utilidad esperada.

Prueba

- Sean $L_1 = (p_1, r_1; p_2, r_2; \dots; p_n, r_n)$ y $L_2 = (q_1, r_1; q_2, r_2; \dots; q_n, r_n)$ dos loterías bien definidas, i.e. $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1$, donde $p_i > 0$, $q_i > 0$, para $i = 1, \dots, n$.
- Sin pérdida de generalidad considere que los pagos satisfacen $r_1 \succ r_2 \succ \cdots > r_n$ y que la utilidad de dichos pagos se puede re-escalar en $[0, 1]$, i.e.

$$\begin{aligned} u(r_1) &= u_1 = 1 \\ u(r_i) &= u_i, \quad 0 < u_i < 1, i = 2, \dots, n-1 \\ u(r_n) &= u_n = 0. \end{aligned}$$

Por el axioma 1, $u(r_1) > u(r_2) > \cdots > u(r_n)$.

- Por el axioma 2, cada pago r_i se puede expresar como una lotería $\ell_i := (u_i, r_1; 1-u_i, r_n)$ bajo cierta probabilidad u_i tal que $r_i \sim \ell_i$.
- Por el axioma 3 se puede sustituir r_i por ℓ_i en L_1 y L_2, con lo cual $L_1' = (p_1, \ell_1; p_2, \ell_2; \ldots; p_n, \ell_n)$ y $L_2' = (q_1, \ell_1; q_2, \ell_2; \ldots; q_n, \ell_n)$.
- Por el axioma 5 las loterías compuestas se pueden colapsar c.r.a. los pagos más y menos deseados, i.e.

$$\begin{aligned} L_1'' &= (p_1, (u_1, r_1; 1-u_1, r_n); \ldots; p_n, (u_n, r_1; 1-u_n, r_n)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} p_i u_i, r_1; 1 - \sum_{i=1}^{n} p_i u_i, r_n \right) \\ &= (\bar{p}, r_1; 1-\bar{p}, r_n) \end{aligned}$$

Similarmente $L_2'' = (\bar{q}, r_1; 1-\bar{q}, r_n)$ para $\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$.

- Por el axioma 4, dado que $r_1 > r_n$, si

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i u_i}_{\bar{p}=\mathbb{E}_p u} > \underbrace{\sum_{i=1}^{n} q_i u_i}_{\bar{q}=\mathbb{E}_q u},$$

luego $L_1 \succ L_2$, que implica la max. de la utilidad esperada. $\square$

Lema 1 (Re-escalar la utilidad)

Dada una función de utilidad $\mu(x)$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, y $\beta \in \mathbb{R}_+$ defínase la función $\nu(x) = \alpha + \beta\mu(x)$. Dadas dos loterías cualesquiera L_1 y L_2 se debe cumplir que:

1. *El decisor concluye $L_1 \succ L_2$ usando $\mu(x)$ si y sólo si el decisor concluye $L_1 \succ L_2$ usando $\nu(x)$.*
2. *El decisor concluye $L_1 \sim L_2$ usando $\mu(x)$ si y sólo si el decisor concluye $L_1 \sim L_2$ usando $\nu(x)$.*

Prueba

- Sean $L_1 = (p_1, r_1; p_2, r_2; \ldots; p_n, r_n)$ y $L_2 = (q_1, v_1; q_2, v_2; \ldots; q_n, v_n)$ dos loterías bien definidas, i.e. $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, donde $p_i > 0$, $q_i > 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

- ($\Rightarrow$) Suponga que $L_1 \succ L_2$ usando $\mu(\cdot)$. Por el Teorema 1 esto implica que $\mathbb{E}[\mu(L_1)] > \mathbb{E}[\mu(L_2)]$, es decir

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mu(r_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i \mu(v_i)$$

- Es inmediato que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} p_i \mu(r_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i \mu(v_i) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha + \sum_{i=1}^{n} p_i \beta \mu(r_i) > \alpha + \sum_{i=1}^{n} q_i \beta \mu(v_i) \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \nu(r_i) > \sum_{i=1}^{n} q_i \nu(v_i), \end{aligned}$$

  i.e. $\mathbb{E}[\nu(L_1)] > \mathbb{E}[\nu(L_2)]$.

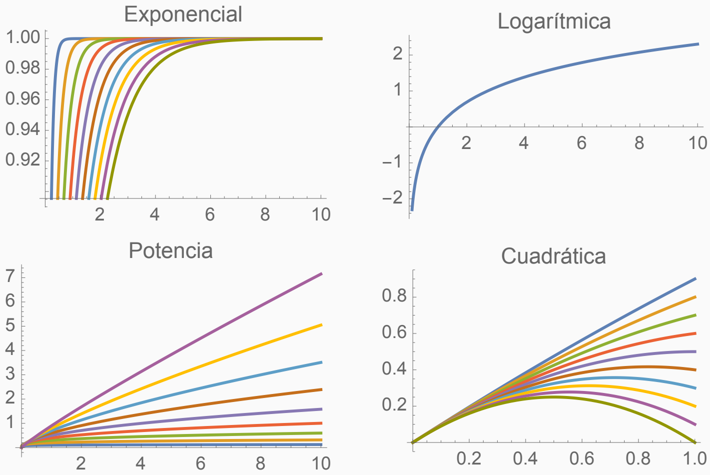
- ($\Leftarrow$) es análogo asumiendo $\nu(\cdot)$ en el primer paso. El argumento para $L_1 \sim L_2$ es el mismo. $\square$

Tabla 1: Funciones de Utilidad

Nombre	Definición	Detalles
Exponencial	$u(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$	$\beta \in \mathbb{R}_+$
Logarítmica	$u(x) = \ln(x)$	$x \in (0, \infty)$
Potencia	$u(x) = \beta x^\beta$	$\beta \in (0, 1]$
Cuadrática	$u(x) = x - \beta x^2$	$\beta \in \mathbb{R}_+$

Tabla 2: Concavidad de la Función de Utilidad

Condición	Definición	Implicancia
Aversión al Riesgo	Rechaza un juego justo	$u''(x) < 0$
Indiferencia al Riesgo	Indiferente a un juego justo	$u''(x) = 0$
Preferencia al Riesgo	Acepta un juego justo	$u''(x) > 0$


Exponencial
1.00
0.98
0.96
0.94
0.92
2
4
6
8
10
Logarítmica
2
1
−1
−2
2
4
6
8
10
Potencia
7
6
5
4
3
2
1
2
4
6
8
10
Cuadrática
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

La actitud c.r.a riesgo para cada función de utilidad se puede observar mediante los *coeficientes absoluto y relativo de aversión al riesgo*, $A(x)$ y $R(x)$ resp.

$$\begin{aligned} A(x) &:= -\frac{u''(x)}{u'(x)} \\ R(x) &:= -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = -\frac{u''(x)}{u'(x)/x} = xA(x). \end{aligned}$$

La prima por riesgo (PR) para una lotería L depende de la función de utilidad a través de el valor (utilidad) cierto equivalente (CE),

$$PR(L) := \mathbb{E}[L] - CE[L],$$

donde $CE(L)$ es el valor $r : L' = (1, r) \sim L = (p, v; 1-p, w)$. Es claro que la persona es adversa, neutral o amante al riesgo, si $PR(L) > 0$, $PR(L) = 0$ y $PR(L) < 0$ resp.

Ejemplo 11 (Coeficientes $A(x)$ y $R(x)$)

Calcule los coeficientes absoluto y relativo para las funciones de utilidad en la Tabla 1.

Nombre	$A(x)$	$R(x)$
Exponencial	$\frac{1}{\beta}$	$\frac{x}{\beta}$
Logarítmica	$\frac{1}{x}$	1
Potencia	$\frac{1-\beta}{x}$	$1-\beta$
Cuadrática	$\frac{2\beta}{1-2\beta x}$	$\frac{2\beta x}{1-2\beta x}$

Tabla 3: Coeficiente Absoluto de Aversión al Riesgo

Condición	Definición	Implicancia	Ejemplo
Aversión al riesgo absoluta aumenta	Invierte menos u.m. en activos riesgosos a medida que la riqueza aumenta	$A'(x) > 0$	$x^{-\beta x^2}$
Aversión al riesgo absoluta constante	Invierte lo mismo en u.m. en activos riesgosos a medida que la riqueza aumenta	$A'(x) = 0$	$1 - e^{-\beta x}$
Aversión al riesgo absoluta disminuye	Invierte más u.m. en activos riesgosos a medida que la riqueza aumenta	$A'(x) < 0$	$\ln(x)$

En la tabla anterior $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Tabla 4: Coeficiente Relativo de Aversión al Riesgo

Condición	Definición	Implicancia	Ejemplo
Aversión al riesgo relativo aumenta	Invierte menos % en activos riesgosos a medida que la riqueza aumenta	$R'(x) > 0$	$x - \beta x^2$
Aversión al riesgo relativa constante	Invierte el mismo % en activos riesgosos a medida que la riqueza aumenta	$R'(x) = 0$	$\ln(x)$
Aversión al riesgo relativa disminuye	Invierte más % en activos riesgosos a medida que la riqueza aumenta	$R'(x) < 0$	$-e^{2x^{-\frac{1}{2}}}$

En la tabla anterior $\beta \in \mathbb{R}_+$.

Ejemplo 12 (Ranking con Utilidad)

Use la información del ejemplo 10 para hacer un ranking de loterías si la persona en cuestión tiene una función de utilidad exponencial con coeficiente de propensión al riesgo de 5,000 y 10,000.

Para $\rho = 5,000$, $L1 \succ L_2 \succ L_3 \succ L_4$; *y para* $\rho = 10,000$, $L1 \succ L_2 \succ L_4 \succ L_3$.

Probabilidad de indiferencia

La probabilidad de indiferencia entre un pago sin riesgo r, i.e. $L_1 = (1, r)$, y una lotería $L_2 = (p, v; 1-p, w)$ donde $w < r < v$, es la prob. $q : L_1 \sim L_2(q)$, es decir

$$q = \frac{u(r) - u(w)}{u(v) - u(w)}.$$

¿Qué ocurre si $u(\cdot)$ es la función potencia con $\beta = 1$?

En el ejemplo 10 se sabe que los ordenamientos $L_1 \succ L_2 \succ L_4 \succ L_3$ y $L_1' \succ L_2'' \succ L_4'' \succ L_3'$ son perfectamente equivalentes. Si en el segundo se re-escala la función de utilidad de modo que $\tilde{u}(v) = 1$ y $\tilde{u}(w) = 0$,

$$q = \frac{\tilde{u}(r) - \tilde{u}(w)}{\tilde{u}(v) - \tilde{u}(w)} = \tilde{u}(r),$$

con esto las probabilidades de indiferencia para L_1, L_2, L_3 y L_4 son 0.9, 0.8, 0.6 y 0.6076 respectivamente.

Las probabilidades de indiferencia equivalen al valor de la utilidad re-escalada consistente con el ranking.

Probabilidad Distorcionada

Paradoja de Tversky y Kahneman (1981):

Se pide a una persona que escoja entre las loterías 1 y 2 y luego entre las loterías 3 y 4.

$$L_1 = (1, 30) \quad vs. \qquad L_2 = (0.8, 45; 0.2, 0)$$
$$L_3 = (0.2, 45; 0.8, 0) \quad vs. \qquad L_4 = (0.25, 30; 0.75, 0)$$

con el resultado: $L_1 \succ L_2$ *y* $L_3 \succ L_4$*, el cual no es consistente con el criterio de la utilidad esperada. En particular si* $u(0) = 0$ *y* $u(45) = 1$*,* $L_1 \succ L_2$ *ssi.* $u(30) > 0.8$ *y* $L_3 \succ L_4$ *ssi.* $u(30) < 0.8$*.*

Solución:

considere que el tomador de decisiones considera probabilidades subjetivas $\Pi(p) : [0, 1] \to [0, 1], \Pi(0) = 0, \Pi(1) = 1$, luego

$$L_1 \succ L_2 \quad \Leftrightarrow \quad u(30) > \Pi(0.8)$$
$$L_3 \succ L_4 \quad \Leftrightarrow \quad u(30) < \frac{\Pi(0.2)}{\Pi(0.25)}$$

Árboles de decisión

Representación de un PdD

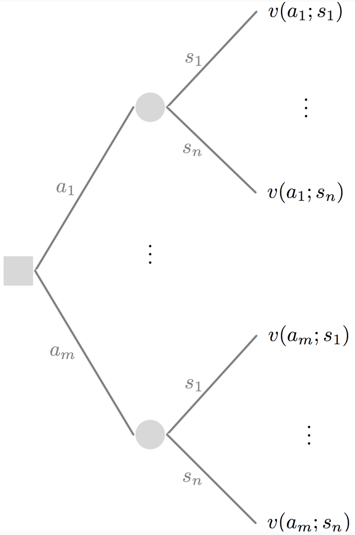
Ordenamos la información:

	Estado s_1	Estado s_2	$\dots$	Estado s_n
Acción a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	$\dots$	$v(a_1, s_n)$
Acción a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	$\dots$	$v(a_2, s_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Acción a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	$\dots$	$v(a_m, s_n)$

Los pagos son elementos $[\boldsymbol{V}]_{ij} = v(a_i, s_j)$ en una matriz de decisión

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v(a_1, s_1) & v(a_1, s_2) & \dots & v(a_1, s_n) \\ v(a_2, s_1) & v(a_2, s_2) & \dots & v(a_2, s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v(a_m, s_1) & v(a_m, s_2) & \dots & v(a_m, s_n) \end{pmatrix}$$

Los pagos se colocan en el nodo terminal en un árbol de decisión



Ejemplo 13 (PROTRAC)

PROTRAC vende tractores y debe decidir la estrategia de mercadotecnia óptima entre tres alternativas principales: estrategia agresiva (A), estrategia básica (B), y estrategia cautelosa (C). La administración decide clasificar el estado del mercado (la demanda) como fuerte (F) con prob. p o débil (D) con prob. $1 - p$. Si la matriz de decisión viene dada por

	F	D
A	30	-8
B	20	7
C	5	15

Escriba el árbol de decisión de PROTRAC e indique la estrategía óptima si se tiene un conocimiento impreciso sobre $p \in [0.45, 0.55]$ y PROTRAC es neutral al riesgo.

Ejemplo 14 (Colaco)

Colaco tiene en la actualidad activos de 150,000 dólares y desea decidir si vende o no un refresco con sabor a chocolate, la Chocola. Colaco tiene tres opciones:

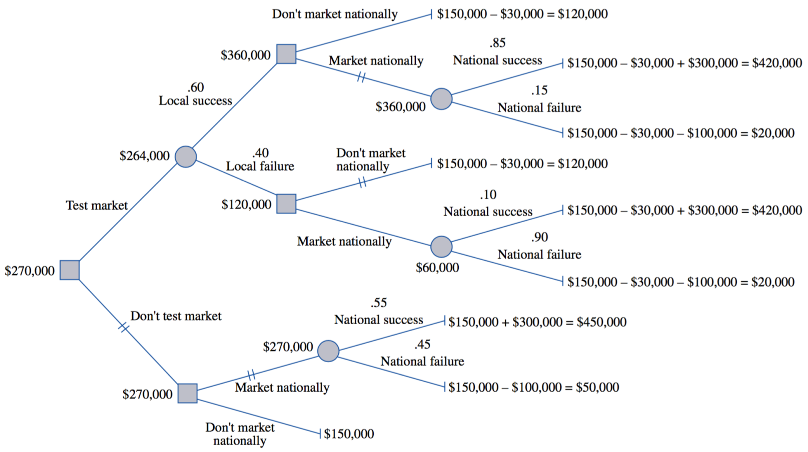
1. *Probar en forma local el mercado de Chocola y, a continuación, usar los resultados del estudio de mercado para determinar si vende la Chocola a nivel nacional o no.*
2. *Decidir de inmediato, sin prueba de mercado, vender la Chocola a nivel nacional.*
3. *Decidir de inmediato, sin prueba de mercado, no vender Chocola a nivel nacional.*

Además considere que:

- Sin EdM Chocola tiene 55% prob. de ser éxito nacional (EN), y 45% prob. de ser fracaso nacional (FN).
- Si EN el estado de los activos de Colaco aumentará en $300,000.
- Si FN el estado de los activos diminuirá en $100,000.
- El estudio de mercado cuesta $30,000.
- Hay 60% prob. que EdM sea favorable, i.e. éxito local (EL).
- Hay 40% prob. que EdM sea desfavorable, i.e. fracaso local (FL).
- Si EL, hay 85% prob. de EN.
- Si FL, hay 10% prob. de EN.

Asuma neutralidad al riesgo. ¿Qué estrategia debe seguir Colaco?

Colaco's Decision Tree (Risk-Neutral)



Winston sugiere calcular el valor esperado de la información muestral VEIM como la diferencia entre "el valor esperado con info disponible gratuita" y el "valor esperado sin información disponible".

Ejemplo 15 (VEIM en Colaco)

Use la información del ejemplo 14 y calcule el VEIM.

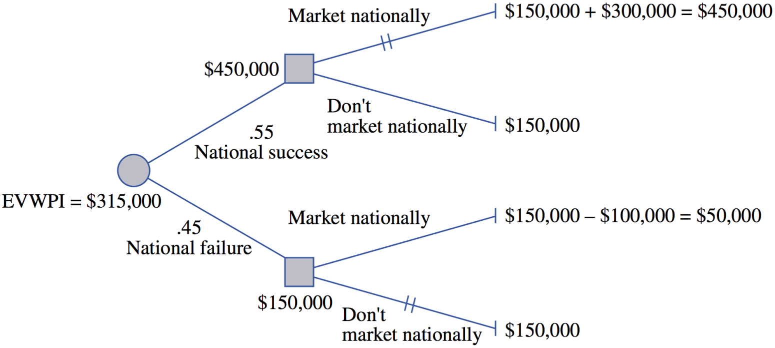
Note que en el ejemplo 15 es posible hallar VEIM resolviendo c.r.a. costo de la prueba de mercado en la paridad entre las dos opciones de acción disponibles.

En general el conocimiento (gratuito) de la información muestral mejora el valor del resultado bajo la elección óptima, i.e. $VEIM > 0$. Se espera que el acceso a la información perfecta (VEIP) mejore este resultado, i.e. $VEIP > VEIM > 0$.

Note que la información perfecta para un decisor se refiere (únicamente) a que éste tiene conocimiento del estado de la naturaleza antes de tomar la decisión.

Ejemplo 16 (VEIP en Colaco)

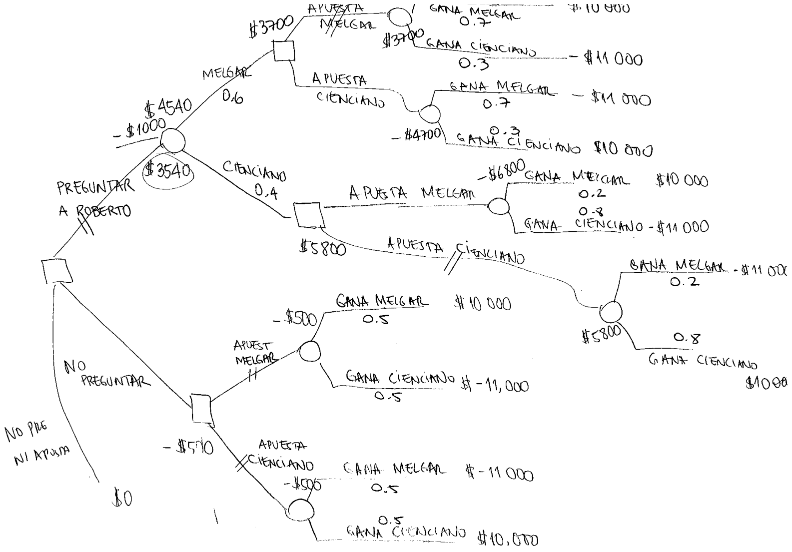
Use la información del ejemplo 14 y calcule el VEIP.


Market nationally
$150,000 + $300,000 = $450,000
$450,000
Don't
market nationally
$150,000
.55
National success
EVWPI = $315,000
Market nationally
$150,000 – $100,000 = $50,000
.45
National failure
$150,000
Don't
market nationally
$150,000

Ejemplo 17 (Melgar)

Pedro piensa apostar en el juego Melgar-Cienciano, en finales de campeonato. Sin tener más información, cree que ambos equipos tienen iguales probabilidades de ganar, Si gana la apuesta, ganará 10,000 dólares; si pierde, perderá 11,000 dólares. Antes de apostar puede pagar 1,000 dólares a Roberto por su pronóstico. Roberto predice, el 60% de las veces, que Melgar gana, y 40% de las veces que gana Cienciano. Cuando Roberto dice que Melgar va a ganar, Melgar tiene 70% de probabilidades de ganar, y cuando Roberto dice que Cienciano va a ganar, Melgar sólo tiene el 20% de probabilidades de ganar.

Determinar cómo puede Pedro aumentar sus ganancias totales esperadas al máximo. Además, calcular el VEIM y VEIP.


PREGUNTAR A ROBERTO
NO PREGUNTAR
NO PRE NI APUSTA
$0
- $1000
$4540
$3540
MELGAR 0.6
CIENCIANO 0.4
$3700
APUESTA MELGAR
GANA MELGAR 0.7
$10 000
$3700
GANA CIENCIANO 0.3
- $11 000
APUESTA CIENCIANO
GANA MELGAR 0.7
- $11 000
- $4700
GANA CIENCIANO 0.3
$10 000
APUESTA MELGAR
-$6800
GANA MELGAR 0.2
$10 000
GANA CIENCIANO 0.8
- $11 000
$5800
APUESTA CIENCIANO
GANA MELGAR 0.2
- $11 000
$5800
GANA CIENCIANO 0.8
$1000
APUEST MELGAR
- $500
GANA MELGAR 0.5
$10 000
GANA CIENCIANO 0.5
$ -11,000
- $500
APUESTA CIENCIANO
- $500
GANA MELGAR 0.5
$ - 11 000
GANA CIENCIANO 0.5
$10,000

Teorema de Bayes

Considere dos eventos A y B. En términos laxos, el teorema establece que

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)}, p(B) \neq 0.$$

También es popular la versión extendida

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(B|A_i)p(A_i)}, p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B|A_i)p(A_i) \neq 0$$

donde $p(B) \neq 0$, y se ha usado $A = \cup_{i=1}^{n} A_i : p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$. Es decir A es un conjunto de n eventos disjuntos A_i.

Prueba: Use fórmula de prob. condicional para $p(A|B) = p(A,B)/p(B)$ y $p(B|A) = p(A,B)/p(A)$. Reemplaze $P(A,B)$ en la fórmula de prob. conditional para $p(A|B)$. $\square$

Ejemplo 18

Alicia tiene dos monedas en su bolsillo, una normal y otra con dos caras. Si elige una al azar, la lanza y obtiene cara, ¿cuál es la prob. de que haya lanzado la moneda normal?

N: elige moneda normal
$\bar{N}$: elige moneda con dos caras
H: el lanzamiento es cara
T: el lanzamiento es sello

$$p(N|H) = \frac{p(N,H)}{p(H)} = \frac{p(H|N)p(N)}{p(H)} = \frac{(1/2) \times (1/2)}{3/4} = \frac{1}{3},$$

donde $p(H) = p(H|N)p(N) + p(H|\bar{N})p(\bar{N}) = 1/3$.

Ejemplo 19 (Trading)

Suponga que quiere invertir 10,000 en acciones de A ó B. A es riesgosa pero ofrece un retorno de 50% sobre la inversión en el transcurso del año. Si las condiciones del mercado no son favorables (bear) la acción pierde 20% de su valor. La compañía B provee una inversión segura con 20% de retorno en bull y 5% en bear. Basado en la información disponible, el mercado es bull con prob. 0.6 *y bear con prob.* 0.4.

1. *Si usted es neutral al riesgo, ¿dónde le conviene invertir su dinero?*
2. *Suponga que usted tiene un amigo que tiene experiencia invirtiendo en el mercado de valores. En general él se limita a darle el ok a la decisión. Es decir, si el mercado es bull dá el ok con prob. 0.9, si es bear dá el ok con prob. 0.5. Si su amigo le dá el ok, ¿le conviene invertir en A ó en B?*

Teoría de Juegos

Definiciones

Definición 1 (Juego)
Un juego entre jugadores A y B, está caracterizado completamente por sus conjuntos de estrategias (finitas) disponibles $\{a_1, \ldots, a_m\}$ *y* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *resp. y sus pagos* $v_A(a_i, b_j)$ *y* $v_B(a_i, b_j)$, $i = 1, \ldots, m$ *y* $j = 1, \ldots, n$ *respectivamente*

$$\begin{array}{c|ccc}
 & b_1 & \ldots & b_n \\
\hline
a_1 & \big(v_A(a_1, b_1), v_B(a_1, b_1)\big) & \ldots & \big(v_A(a_1, b_n), v_B(a_1, b_n)\big) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_m & \big(v_A(a_m, b_1), v_B(a_m, b_1)\big) & \ldots & \big(v_A(a_m, b_n), v_B(a_m, b_n)\big)
\end{array}$$

Definiciones

Definición 1 (Juego)

Un juego entre jugadores A y B, está caracterizado completamente por sus conjuntos de estrategias (finitas) disponibles $\{a_1, \ldots, a_m\}$ y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ resp. y sus pagos $v_A(a_i, b_j)$ y $v_B(a_i, b_j)$, $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$ respectivamente

$$\begin{array}{c|ccc} & b_1 & \ldots & b_n \\ \hline a_1 & \big(v_A(a_1, b_1), v_B(a_1, b_1)\big) & \ldots & \big(v_A(a_1, b_n), v_B(a_1, b_n)\big) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & \big(v_A(a_m, b_1), v_B(a_m, b_1)\big) & \ldots & \big(v_A(a_m, b_n), v_B(a_m, b_n)\big) \end{array}$$

Alternativamente A será referido como el jugador de las filas y B como el jugador de las columnas

Ejemplo 20 (Dilema del prisionero)
Un policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a cinco años. Si ambos lo niegan, ambos serán condenados por un cargo menor a un año de cárcel

Escriba la tabla de pagos

- **Juego de suma constante:** $v_A(a_i, b_j) + v_B(a_i, b_j) = k$, para k constante, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
- **Juego de suma cero:** juego de suma constante cuando $k = 0$

- **Juego de suma constante:** $v_A(a_i, b_j) + v_B(a_i, b_j) = k$, para k constante, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$
- **Juego de suma cero:** juego de suma constante cuando $k = 0$

Estos son juegos no cooperativos

En los juegos de suma cero $v_B(a_i, b_j) = -v_A(a_i, b_j)$, y se puede usar

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\
\hline
a_1 & v_A(a_1, b_1) & v_A(a_1, b_2) & \dots & v_A(a_1, b_n) \\
a_2 & v_A(a_2, b_1) & v_A(a_2, b_2) & \dots & v_A(a_2, b_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_m & v_A(a_m, b_1) & v_A(a_m, b_2) & \dots & v_A(a_m, b_n)
\end{array}
$$

En los juegos de suma cero $v_B(a_i, b_j) = -v_A(a_i, b_j)$, y se puede usar

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\
\hline
a_1 & v_A(a_1, b_1) & v_A(a_1, b_2) & \dots & v_A(a_1, b_n) \\
a_2 & v_A(a_2, b_1) & v_A(a_2, b_2) & \dots & v_A(a_2, b_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_m & v_A(a_m, b_1) & v_A(a_m, b_2) & \dots & v_A(a_m, b_n)
\end{array}
$$

En adelante usaremos esta representación

Ejemplo 21 (Yan-Ken-Po)

Suponga un juego de Yan-Ken-Po donde el jugador que pierde otorga 1 u.m. al que gana. ¿Qué tipo de juego es éste?. Escriba la matriz de pagos

Equilibrio del Juego

Cada jugador elige la acción que optimiza su pago dado que

1. Conoce la acción que su rival sigue
   $\rightarrow$ **estrategias puras**
2. Conoce las probabilidades con las que su rival elige la acción a seguir
   $\rightarrow$ **estrategias mixtas**

Equilibrio de Nash en Estrategias Puras

Para un juego con **suma cero**:

- Si la solución existe, se debe cumplir que

$$[\boldsymbol{V}]_{i^*,j^*} \geq [\boldsymbol{V}]_{i,j^*}, \text{ (para A)}$$

$$-[\boldsymbol{V}]_{i^*,j^*} \geq -[\boldsymbol{V}]_{i^*,j}, \text{ (para B)},$$

  para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$.

- Equivalentemente, la solución $\{a_{i^*}, b_{j^*}\}$ es tal que

$$\max_{i^* \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \min_j [\boldsymbol{V}]_{i,j} \right\} = \min_{j^* \in \{1,\ldots,n\}} \left\{ \max_i [\boldsymbol{V}]_{i,j} \right\}$$

  i.e. es un punto de ensilladura y se denomina también equilibrio

Ejemplo 22 (Ensilladura)

Suponga que el juego entre A y B se puede representar por la matriz de pagos

	b_1	b_2	b_3
a_1	4	4	10
a_2	2	3	1
a_3	6	5	7

¿Tiene este juego un punto de ensilladura? ¿Tiene el ejemplo 21 un punto de ensilladura?

Estrategias Mixtas

- Los jugadores A y B seleccionan $\boldsymbol{x} : x_i = \mathbb{P}(a_i)$ e $\boldsymbol{y} : y_j = \mathbb{P}(b_j)$ resp., donde

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$
$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad y_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

- Una estrategia pura es un caso particular (degenerado) de una estrategia mixta. E.g., a_k es una estrategia pura para A si $x_k = 1$ para a_k

Jugador A (filas):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\} &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(b_j) \times \left(\sum_{i=1}^{m} v_A(a_i, b_j)\mathbb{P}(a_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j \times \left(\sum_{i=1}^{m} v_A(a_i, b_j)x_i \right)\end{aligned}$$

Jugador B (columnas):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\} &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(a_i) \times \left(\sum_{j=1}^{n} v_B(a_i, b_j)\mathbb{P}(b_j) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i \times \left(\sum_{j=1}^{n} v_B(a_i, b_j)y_j \right)\end{aligned}$$

Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas

- El teorema de Nash (omitido) garantiza que la solución o equilibrio de un juego (finito en jugadores y estrategias) siempre existe
- Para un **juego con suma cero**, la solución o punto de equilibrio del juego, $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$, es tal que:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\} \geq \mathbb{E}_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\}, \text{ (para A)}$$

$$-\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\} \geq -\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\}, \text{ (para B)}$$

  para todo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ tales que $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, con $x_i, y_j \geq 0$ en $i = 1, \ldots, m$, $j = 1 \ldots, n$.
- La solución no es necesariamente única

Valor del juego

Dado un punto de equilibrio $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*\}$,

$$\text{Valor del Juego} = \begin{cases} \mathbb{E}_{\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\} & \text{para A} \\ \\ -\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\} & \text{para B} \end{cases}$$

Se dice que el juego es justo si el valor del juego es cero para ambos jugadores

Ejemplo 23 (Pares y nones)

A y B juegan pares y nones. Si la suma es impar, B le paga a A 1 u.m. Si la suma es par, A le paga a B 1 u.m. Escriba la matriz de pagos. ¿Tiene este juego un punto de ensilladura con estrategias puras? ¿y con estrategias mixtas?

Jugador A (filas): expresado en ganancias para A

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v_A(a_i, b_j)|b_j = b_1] &= x_1 \times (-1) + (1 - x_1) \times (+1) = -2x_1 + 1 \\ \mathbb{E}[v_A(a_i, b_j)|b_j = b_2] &= x_1 \times (+1) + (1 - x_1) \times (-1) = +2x_1 - 1\end{aligned}$$

Jugador B (columnas): expresado en pérdidas para B

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v_A(a_i, b_j)|a_j = a_1] &= y_1 \times (-1) + (1 - y_1) \times (+1) = -2y_1 + 1 \\ \mathbb{E}[v_A(a_i, b_j)|a_i = a_2] &= y_1 \times (+1) + (1 - y_1) \times (-1) = +2y_1 - 1\end{aligned}$$

- El jugador A puede asegurar una ganancia mínima de 0 con la estrategia $(x_1, x_2) = (1/2, 1/2)$
- El jugador B puede asegurar una pérdida máxima de 0 con la estrategia $(y_1, y_2) = (1/2, 1/2)$
- El valor del juego es 0

Ejemplo 24 (Lanzamiento de moneda con tiro de farol)

El jugador A lanza una moneda y observa el resultado sin que B lo pueda ver. A decide si apostar o pasar. Si A decide pasar debe pagar 1 u.m. a B. Si decide apostar, B tiene la posibilidad de pasar o pedir ver. Si B decide pasar debe pagar 1 a A, y si B pide ver, pueden ocurrir dos cosas. O la moneda ha salido cara o ha salido sello. Si ha salido cara, B debe pagar a A 2 u.m. Pero si ha salido sello, A debe pagar a B 2 u.m.

Encuentre el equilibrio de Nash en un juego con estrategias mixtas

Ejemplo 25 (Yan-Ken-Po Revisitado)

Considere el ejemplo del Yan-Ken-Po

	Piedra	*Papel*	*Tijera*
Piedra	0	-1	$+1$
Papel	$+1$	0	-1
Tijera	-1	$+1$	0

Escriba el problema de programación lineal

A resuelve **PLA**:

$$\max \ \{z = \nu : \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{x} \geq \nu, \ \boldsymbol{x}^T \mathbf{1} = 1, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}, \nu \text{ irrestricto}\}$$

B resuelve **PLB**:

$$\min \ \{z = \omega : \boldsymbol{V} \boldsymbol{y} \leq \omega, \ \boldsymbol{y}^T \mathbf{1} = 1, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}, \omega \text{ irrestricto}\}$$

Por construcción, **PLB** es el problema dual de **PLA**

PLA:

$$\max_{\boldsymbol{x}} z = \nu :$$
$$-x_2 + x_3 + \nu \leq 0$$
$$x_1 - x_3 + \nu \leq 0$$
$$-x_1 + x_2 + \nu \leq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \nu \text{ irrestricto}$$

PLB:

$$\min_{\boldsymbol{y}} z = \omega :$$
$$-y_2 + y_3 - \omega \leq 0$$
$$y_1 - y_3 - \omega \leq 0$$
$$-y_1 + y_2 - \omega \leq 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, \omega \text{ irrestricto}$$

Relación entre PLA y PLB

En los juegos de suma cero con dos jugadores, el jugador B (de las columnas) resuelve el problema dual del jugador de las filas

Teorema 2 (Dual Fuerte)
El valor de la función objetivo evaluada en el punto óptimo para el problema primal (ν^*) *corresponde al valor de la función objetivo evaluada en el punto óptimo para el problema dual* (ω^*)

Prueba:
Winston, Capítulo 6. □

Solución del juego con PL

- La solución del juego se puede encontrar resolviendo **PLA**
- Es fácil ver que el primal para $\boldsymbol{V}$ y ν es equivalente al primal con $\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V} + c$ y $\tilde{\nu} = \nu + c$ para $c = \min_{i,j}\{[\boldsymbol{V}]_{i,j}\}$, donde $\tilde{\nu} \geq 0$, y la condición "irrestricto" ha sido removida

Ejemplo 26

Encuentre la solución en estrategias mixtas del problema del Yan-Ken-Po asumiendo que:

1. *Se trata de un juego justo*
2. *La solución es única*

Fin.