

Un enfoque no Gaussiano para el cálculo del Valor en Riesgo (VaR) en mercados ilíquidos



Luis Carlos Chávez-Bedoya M.

Departamento de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica del Perú

Luis Francisco Rosales M.

Departamento de Sistemas de Producción y Manejo de Recursos Naturales,
Centro Internacional de la Papa

Resumen

Los inversionistas financieros toman sus decisiones basados en el análisis estadístico de precios y retornos. Sin embargo, la validez de sus cálculos descansa en la adecuación del modelo seleccionado a los datos reales. Es por ello que el uso de modelos con saltos resulta relevante como lo indican Merton, 1976 y Eraker et al, 2003. Es en esta dirección, y tomando en consideración las características que presentan los precios de las acciones en mercados poco líquidos, que se presentan métodos para el cálculo del Valor en Riesgo (VaR¹) basados en dos modelos de retornos alternativos: un proceso de Poisson Compuesto y un camino aleatorio en tiempo discreto.

Los resultados muestran que los modelos propuestos representan una mejor alternativa para el cálculo del VaR que los modelos Gaussiano² e Histórico en mercados no líquidos. La evaluación de los modelos se lleva a cabo bajo las pruebas estadísticas usuales de verificación.

¹ Siglas de “Value at Risk”.

² Modelos que utilizan la función de probabilidad de la distribución normal.

Abstract

Financial investors make decisions based on statistical analysis of prices and returns. However, the usefulness of such computations relies on the adequacy of the selected model to real data. For this matter, as showed by Merton [6] and Eraker [3] jump processes are considered relevant in financial literature. Following this perspective and taking into account specific features of stock prices in non-liquid markets, alternative methods are presented in order to make VaR estimations based on two return models: a compound Poisson process and a discrete-time random walk.

Results show VaR computations in non-liquid markets perform better when the alternative models are considered instead of regular Gaussian or Historic approaches. Models are compared through usual statistical tests.

1. Motivación

Al observar los precios de cierre de las acciones que cotizan en mercados poco líquidos se puede apreciar que existen muchos días en los cuales el precio de la acción permanece inalterado. Por ejemplo, en un mercado típicamente ilíquido, como el de la Bolsa de Valores de Lima, no es difícil encontrar acciones cuya cotización no muestre cambios en sus precios al rededor del 20% de las veces, o que no muestre cotización alguna el 30% de las mismas. La Tabla 1 resume algunas de las características básicas de los datos utilizados y muestra que en acciones como Continental C1, el 24.90% de las veces no se registra movimiento, y el 28.75% no existe dato de cotización. Esto contrasta en gran medida con lo que ocurre en mercados en los que el nivel de negociación es mucho más elevado, como por ejemplo, el NYSE³ en donde una acción típica como Halliburton muestra cambios en sus precios el 99.96% de las veces.

Tabla 1: Descripción preliminar de los datos.

Acción	Rango de fechas	% Sin cotización	% Precio repetido
Alicorp SA C1	9/95-4/06	51.40%	11.70%
El Brocal C1	5/00-4/06	35.97%	19.57%
Continental C1	5/93-4/06	28.75%	24.90%
Crédito C1	1/92-4/06	15.82%	17.25%
IGBVL	1/86-4/06	4.43%	0.79%

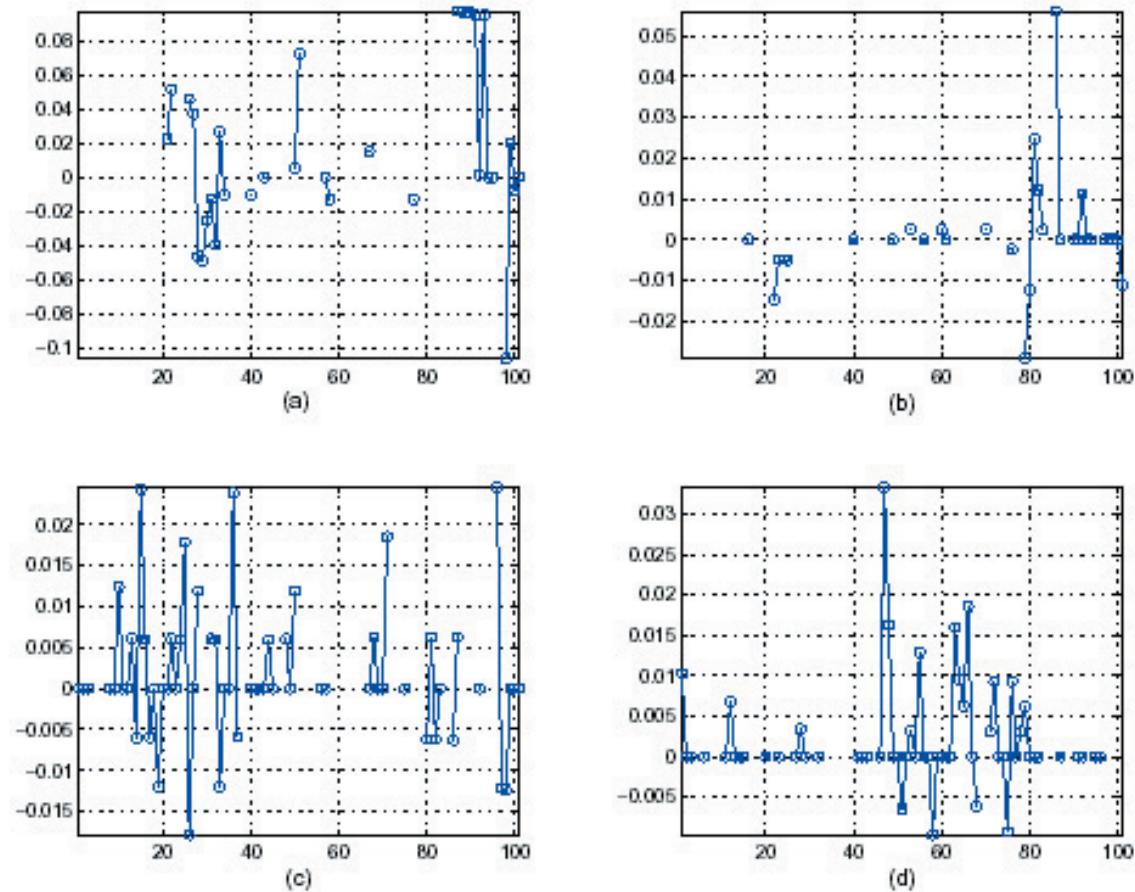
Fuente: *Económica*

A manera de ejemplo se analizan las trayectorias de los retornos de Continental C1 entre los años 1993 y 2004, las cuales revelan la ausencia de cotizaciones por doquier, lo cual hace particularmente difícil el análisis del VaR, pues genera procesos de retorno con un menor número de observaciones que el correspondiente a precios⁴, tal y como se observa en la Figura 1. Asimismo, la presencia de saltos abruptos, y la abundancia de períodos de estancamiento en los retornos (véase Figura 2) motivan la conjetura de que un proceso estocástico con saltos, o con caminos muestrales discontinuos, caracteriza la conducta de los precios en mercados ilíquidos de mejor manera que con la hipótesis Browniana.

³ Siglas de “New York Stock Exchange”.

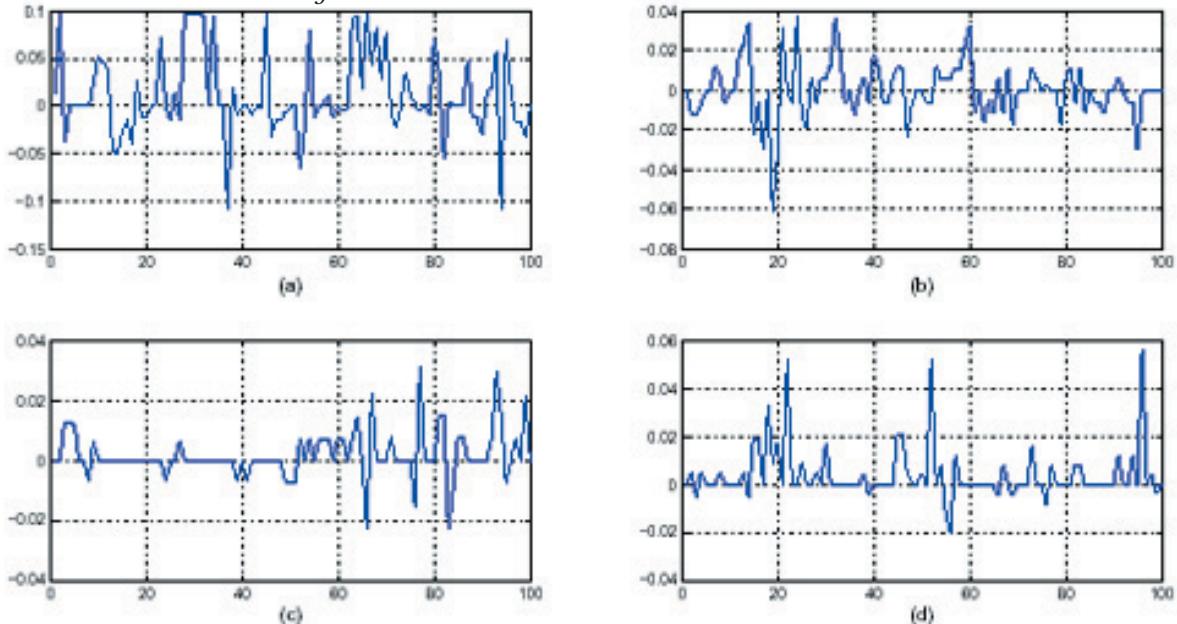
⁴ Los retornos son calculados únicamente para cotizaciones al cierre de días contiguos.

Figura 1: Retornos de Continental C1 con Valores Faltantes.



Los gráficos indican los retornos para Continental C1 cuando se toman los 4 intervalos de 100 observaciones entre 5/93 y 4/06. La ausencia de valor muestra los efectos de la falta de cotizaciones.

Figura 2: Retornos de Continental C1 sin Valores Faltantes



Los gráficos indican los retornos para Continental C1 cuando se toman 4 intervalos de 100 observaciones entre 5/93 y 4/06.

2. Modelos de retornos y cálculo del VaR

El VaR es definido como la pérdida absoluta medida en términos de la moneda del activo financiero como

$$VaR = \omega_0 - \omega^* = -\omega_0 R^* \quad (1)$$

De modo que el cálculo del VaR equivale a encontrar el valor mínimo para ω^* , o el rendimiento crítico R^* .

En su forma más general, el VaR puede derivarse de la distribución de probabilidad del valor futuro del portafolio $f(\omega)$. Para un nivel de confianza dado c , se desea encontrar la peor realización posible de ω^* tal que la probabilidad de exceder dicho valor sea c :

$$c = \int_{\omega^*}^{\infty} f(\omega) d\omega \quad (2)$$

o tal que la probabilidad de un valor inferior a ω^* , $p = P(\omega \leq \omega^*)$, sea $1-c$:

$$1-c = \int_{-\infty}^{\omega^*} f(\omega) d\omega = P(\omega \leq \omega^*) = p. \quad (3)$$

En otras palabras, el área de $-\infty$ a ω^* debe sumar $p = 1-c$. El número ω^* es denominado cuantil muestral de la distribución. Esta especificación es válida para cualquier distribución, discreta o continua, delgada o extendida. Para cuantificar el VaR de los retornos, supóngase que los retornos diarios son independientes y están idénticamente distribuidos. Entonces se puede derivar el VaR en un nivel de confianza del 95% a partir del 5% del lado izquierdo de la cola de pérdida del histograma.

Chávez Bedoya y Rosales, 2006 proponen los siguientes tres modelos para los retornos de acciones poco líquidas que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima (BVL). El primer modelo corresponde a un movimiento browniano con tendencia, el segundo modelo es un proceso de Poisson compuesto (recordar que ambos procesos se definen en tiempo continuo) y el tercer modelo es un camino aleatorio en tiempo discreto.

Para los dos primeros modelos denominaremos al proceso de retornos como $Y = (Y(t), t \geq 0)$ donde $Y(t) = \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)$ y $S = (S(t), t \geq 0)$ es el proceso del precio de la acción. El enfoque utilizado en esta sección es netamente analítico, pero también es posible utilizar un enfoque a través de simulación, el lector puede revisar Glasserman, 2004 para conceptos y algoritmos de simulación Monte Carlo.

2.1 Movimiento browniano

Para modelar el proceso de retornos Y asumimos un movimiento browniano⁵ con tendencia μ y coeficiente de difusión σ^2 . Es decir que $Y(t)$ resuelve la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dB(t) \quad (4)$$

donde B es un movimiento browniano unidimensional. Es inmediato inferir que la solución de (4) está dada por

$$Y(t) = \mu t + \sigma B(t). \quad (5)$$

Es importante mencionar que el precio de la acción $S(t)$, que presenta un proceso de retornos como el de (5), satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) S(t) dt + \sigma S(t) dB(t). \quad (6)$$

No es difícil deducir a partir de (5) que $Y(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ con lo cual el esperado $E[Y(t)] = \mu t$ y la varianza $\text{Var}(Y(t)) = \sigma^2 t$.

Para el cálculo del VaR a un $100p\%$ y un horizonte $t > 0$ es necesario calcular x tal que $F_t^N = P(Y(t) \leq x) = p$, donde $Y(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Se verifica inmediatamente que x satisface la siguiente ecuación

$$\Phi\left(\frac{x - \mu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) = p,$$

donde Φ es la función acumulada de una variable aleatoria normal estándar.

2.2 Proceso de Poisson compuesto

Se asume que el retorno de una acción sigue un proceso de Poisson compuesto⁶, el cual es un proceso en tiempo continuo pero tiene caminos muestrales discontinuos cadlag⁷. Es decir que

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \ln \xi_i \quad (7)$$

⁵ Es importante mencionar que el movimiento browniano debe ser interpretado como el proceso de retornos acumulados. Cuando se haga referencia al proceso Gaussiano, este indicará el proceso de retornos puntuales.

⁶ La definición y propiedades de un proceso de Poisson compuesto se encuentran en Applebaum [1], pp. 46-47.

donde N es un proceso de Poisson compuesto con parámetro λ y la sucesión $\xi = (\xi_i, i \in \mathbf{N})$ está formada por variables aleatorias i.i.d.⁸ e independientes de N , tales que $\xi_i > 0$, $E[\xi_i] = \mu_{\xi_i} < \infty$, $E[\xi_i^2] < \infty$ para todo $i \in \mathbf{N}$, finalmente se asume que $\sum_{i=1}^0 \ln \xi_i = 0$. Si $E[\ln \xi_i] = \mu_{\xi_i}$ y $\text{Var}(\ln \xi_i) = \sigma_{\xi_i}^2$, se verifica inmediatamente que $E[Y(t)] = \lambda t \mu_{\xi_i}$ y $\text{Var}(Y(t)) = \lambda t \sigma_{\xi_i}^2$.

El proceso de precios S que induce (7) es tal que

$$S(t) = S(0) \prod_{i=1}^{M(t)} \xi_i, \quad (8)$$

donde se asume que $\prod_{i=1}^0 \xi_i = 1$. Luego, se verifica que

$$E[S(t)] = e^{\lambda t(\mu_{\xi_i} - 1)} \quad (9)$$

Asumiremos a partir de este momento que $\ln \xi_i \sim N(\mu_{\xi_i}, \sigma_{\xi_i}^2)$, con lo cual $\sum_{i=1}^n \ln \xi_i \sim N(n\mu_{\xi_i}, n\sigma_{\xi_i}^2)$, debido a que las variables aleatorias ξ_i son i.i.d. Asimismo, es necesario caracterizar la distribución acumulada de $Y(t)$ bajo este modelo, es decir que se necesita conocer la función F_t^P tal $F_t^P(x) = P(Y(t) \leq x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Aplicando propiedades básicas de esperanza condicional, las propiedades del modelo y la suposición de normalidad sobre $\ln \xi_i$ se tiene

$$\begin{aligned} F_t^P(x) &= P(Y(t) \leq x) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{M(t)} \ln \xi_i \leq x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{M(t)} \ln \xi_i \leq x \mid N(t) = n\right) P(N(t) = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n \ln \xi_i \leq x\right) P(N(t) = n). \end{aligned}$$

Debido a que existe una discontinuidad en cero de la función de distribución tenemos

$$F_t^P(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - n\mu_{\xi_i}}{\sqrt{n}\sigma_{\xi_i}}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda t} + \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - n\mu_{\xi_i}}{\sqrt{n}\sigma_{\xi_i}}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Es importante notar que la función F_t^P presenta en su definición una suma infinita, con lo cual su valor exacto solo podría conocerse cuando $n \rightarrow \infty$, es por ello que definimos

⁷ Función continua por la derecha pero que tiene límites por la izquierda.

⁸Abreviación de independientes e idénticamente distribuidas.

$$F_t^{P,k}(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^k \Phi\left(\frac{x-n\mu_t}{\sqrt{n}\sigma_t}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda t} + \sum_{n=0}^k \Phi\left(\frac{x-n\mu_t}{\sqrt{n}\sigma_t}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

con lo cual es claro que $\lim_{k \rightarrow \infty} F_t^{P,k}(x) = F_t^P(x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$. La Figura 3 muestra que se puede tener un muy buen estimado de F_t^P utilizando $F_t^{P,k}$ cuando $k > 10$. En el presente artículo se ha utilizado $k = 100$.

para todo $x \in \mathbf{R}$. La Figura 3 muestra que se puede tener un muy buen estimado de F_t^P utilizando $F_t^{P,k}$ cuando $k > 10$. En el presente artículo se ha utilizado $k = 100$.

Para el cálculo del VaR a un $100p\%$ y un horizonte $t > 0$ es necesario calcular x tal que $F_t^P(x) = p$. El cálculo de x no es inmediato, razón por la cual definimos la función

$$z_{t,p}^P(y) = |F_t^P(y) - p|$$

con $y \in \mathbf{R}$ y donde $|\cdot|$ representa la función valor absoluto. No es difícil deducir que la función $z_{t,p}^P$ es estrictamente unimodal⁹, y alcanza su mínimo en el valor x si este satisface $F_t^P(x) = p$, con lo cual encontrar el argumento minimizador de $z_{t,p}^P$ es equivalente a calcular el VaR. En la Figura 4 se muestra una gráfica en la cual se comparan $z_{t,p}^P$ y F_t^P y en la cual se observa claramente que el mínimo de $z_{t,p}^P$ ocurre en el punto en el cual F_t^P es igual a p . Asimismo, para encontrar el óptimo de la función $z_{t,p}^P$ es posible utilizar cualquier método de eliminación de regiones ya que la función es estrictamente unimodal. Para efectos de este artículo se ha utilizado el método conocido como *Interval-Halving*¹⁰ con un error de 0.00001. Para mayor información el lector puede referirse a Reklaitis et al, 1983, pp. 37-45.

2.3 Proceso de Poisson compuesto

Ahora se presenta un modelo en tiempo discreto para modelar el proceso de retornos. El proceso de retornos $Y = (Y(n), n \in \mathbf{N})$ es tal que

$$Y(n) = \ln(S(n)/S(0)) = \ln \beta_1 X_1 + \dots + \ln \beta_n X_n \quad (10)$$

donde $X = (X_i, i \in \mathbf{N})$ es una sucesión de variables i.i.d. tal que

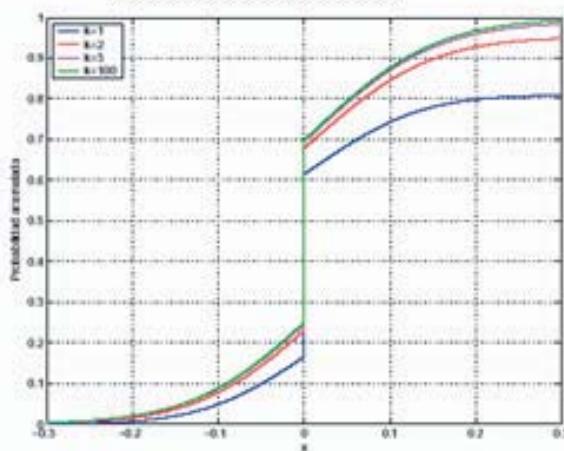
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } q \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-q \end{cases}$$

⁹ Que posee un único máximo local.

¹⁰ Es un método eficiente para resolver ecuaciones.

Figura 3

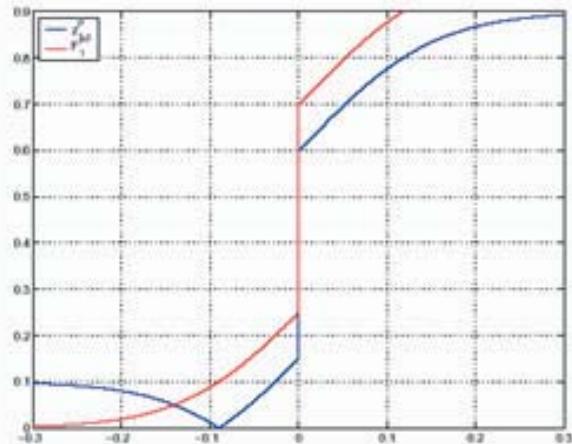
Gráfica de $F_1^{p,k}$ para $k=1$,
 $k=2$, $k=3$, $k=100$.



Se ha utilizado $\lambda = 0.8$, $\mu_{\beta^*} = 0.01$ y $\sigma_{\beta^*} = 0.1$.

Figura 4

Gráficas de F_1^p (rojo) y $z_{1,p}$ (azul).



Se ha utilizado $\lambda = 0.8$, $\mu_{\beta^*} = 0.01$, $\sigma_{\beta^*} = 0.1$ y $p = 0.1$.

y la sucesión $\beta = (\beta_i, i \in \mathbb{N})$ está formada por variables aleatorias i.i.d. e independientes de X , tales que $\beta_i > 0$, $E[\beta_i] = \mu_{\beta^*} < \infty$, $E[\beta_i^2] < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Podemos escribir (10) de una manera más simple al notar que $V(n) = \sum_{i=0}^n X_i \sim \text{Binomial}(n, q)$ con lo cual

$$Y(n) = \sum_{i=1}^{V(n)} \ln \beta_i \quad (11)$$

donde asumimos, al igual que en el proceso de Poisson compensado, que $\sum_{i=1}^0 \beta_i = 0$. Asimismo, es obvio que $V(n)$ va a ser independiente de β . Si $E[\ln \beta_i] = \mu_{\beta^*}$ y $\text{Var}(\ln \beta_i) = \sigma_{\beta^*}^2$, se verifica inmediatamente que $E[Y(n)] = nq \mu_{\beta^*}$ y $\text{Var}(Y(n)) = nq(1-q) \sigma_{\beta^*}^2$.

El proceso de precios S que induce tanto (10) como (11) es tal que

$$S(n) = S(0) \prod_{i=1}^{V(n)} \beta_i \quad (12)$$

donde se asume que $\prod_{i=1}^0 \beta_i = 1$. No es difícil verificar que

$$E[S(n)] = (1-q)^n \left(1 + \frac{\mu_{\beta^*} q}{1-q}\right)^n. \quad (13)$$

Si hacemos $\lambda t = nq$, $\xi = \beta$, tomamos n grande y hacemos q tender a cero, (13) toma la forma de (9). Lo anterior se justifica debido a la aproximación de la distribución binomial a la de Poisson.

Asumiremos al igual que el caso anterior que $\ln \beta_i \sim N(\mu_{\beta_i}, \sigma_{\beta_i}^2)$, con lo cual $\sum_{i=1}^n \ln \beta_i \sim N(n\mu_{\beta_i}, n\sigma_{\beta_i}^2)$, debido a que las variables aleatorias β_i son i.i.d. Asimismo, es necesario caracterizar la distribución acumulada de $Y(n)$ bajo este modelo, es decir que se necesita conocer la función F_n^B tal que $F_n^B(x) = P(Y(n) \leq x)$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Aplicando propiedades básicas de esperanza condicional, las propiedades del modelo y la suposición de normalidad sobre $\ln \beta_i$ se tiene

$$\begin{aligned} F_n^B(x) &= P(Y(n) \leq x) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{V(n)} \ln \beta_i \leq x\right) \\ &= \sum_{k=0}^n P\left(\sum_{i=1}^{V(n)} \ln \beta_i \leq x \mid V(n) = k\right) P(V(n) = k) \\ &= \sum_{k=0}^n P\left(\sum_{i=1}^k \ln \beta_i \leq x\right) P(V(n) = k). \end{aligned}$$

Debido a que existe una discontinuidad en cero de la función de distribución tenemos

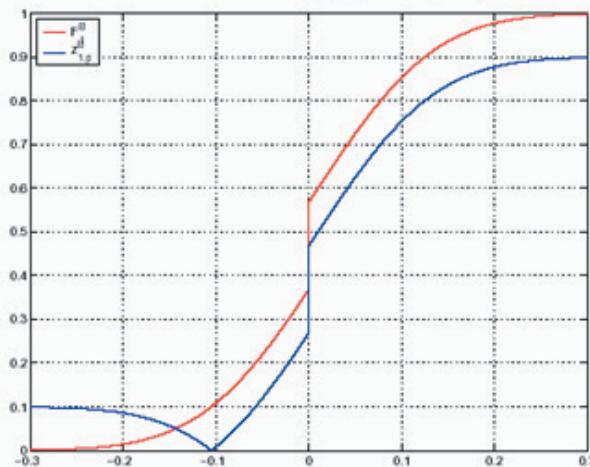
$$F_n^B(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \Phi\left(\frac{x-k\mu_{\beta_i}}{\sqrt{k}\sigma_{\beta_i}}\right) \frac{n!q^k(1-q)^{n-k}}{(n-k)!k!} & \text{si } x < 0 \\ (1-q)^n + \sum_{k=0}^n \Phi\left(\frac{x-k\mu_{\beta_i}}{\sqrt{k}\sigma_{\beta_i}}\right) \frac{n!q^k(1-q)^{n-k}}{(n-k)!k!} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Para el cálculo del VaR a un $100p\%$ y un horizonte $n > 0$ (aquí n es entero) es muy similar al caso anterior, pues es necesario calcular x tal que $F_n^B(x) = p$. El cálculo de x no es inmediato, razón por la cual definimos la función

$$z_{n,p}^B(y) = |F_n^B(y) - p|$$

con $y \in \mathbf{R}$. Tal como en el modelo anterior la función $z_{n,p}^B$ es estrictamente unimodal, y alcanza su mínimo en el valor x si este satisface $F_n^B(x) = p$, con lo cual encontrar el argumento minimizador de $z_{n,p}^B$ es equivalente a calcular el VaR. En la Figura 5 se muestra una gráfica en la cual se comparan $z_{n,p}^B$ y F_n^B y en la cual se observa claramente que el mínimo de $z_{n,p}^B$ ocurre en el punto en el cual F_n^B es igual a p . Para encontrar el óptimo de la función $z_{n,p}^B$ utilizaremos el métodos del *Interval-Halving* con un error de 0.00001.

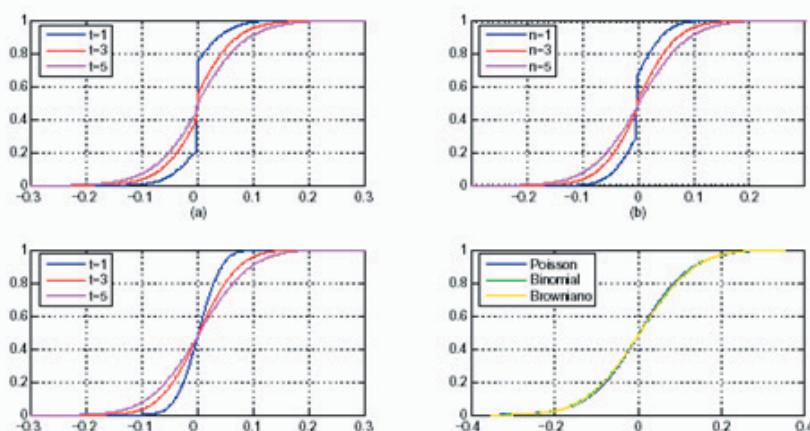
Figura 5
Gráficas de F_1^B (rojo) y $Z_{1,p}^B$ (azul).



Se ha utilizado $q = 0.8$, $\mu_{\beta^*} = 0.01$, $\sigma_{\beta^*} = 0.1$ y $p = 0.1$.

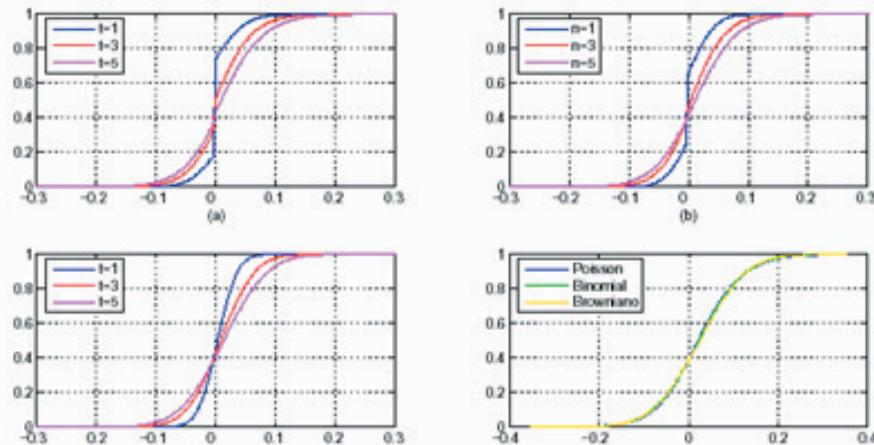
Para finalizar esta sección, es importante analizar la influencia de t y n en F_t^N , F_t^P y F_n^B , respectivamente. Para tal fin hemos considerado los retornos de las acciones utilizadas y hemos construido las funciones de distribución de los modelos anteriores para diversos valores de t y n . Intuitivamente, el modelo Poisson compuesto y el modelo binomial van a tender a la distribución de una variable normal cuando n y t sean lo suficientemente grandes. En las Figuras 6-10 se muestra el efecto del horizonte de tiempo en el retorno de las acciones seleccionadas para cada una de las distribuciones tratadas. También muestran los parámetros estimados para cada acción según cada modelo.

Figura 6
Diferentes distribuciones acumuladas del retorno de la acción Alicorp S.A C1



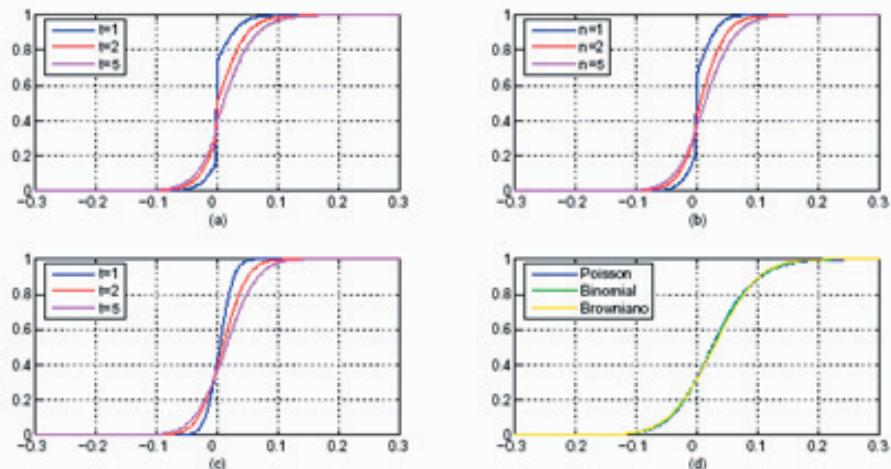
La figura (a) muestra la función F_t^P para $t=1,3,5$ con $\lambda = 0.64371$, $\mu_{\beta^*} = 0.000727$ y $\sigma_{\beta^*} = 0.040644$. La figura (b) muestra la función F_n^B para $n=1,3,5$ con $q = 0.64371$, $\mu_{\beta^*} = 0.000727$ y $\sigma_{\beta^*} = 0.040644$. La figura (c) muestra la función F_t^N para $t=1,3,5$ con $\mu = 0.0004677$ y $\sigma = 0.032605$. La figura (d) muestra F_{10}^N , F_{10}^P y F_{10}^B para los mismos parámetros.

Figura 7
Diferentes distribuciones acumuladas del retorno de la acción El Brocal C1



La figura (a) muestra la función F_t^P para $t=1,3,5$ con $\lambda = 0.61862$, $\mu_f = 0.003941$ y $\sigma_f = 0.03338$. La figura (b) muestra la función F_n^B para $n=1,3,5$ con $q = 0.61862$, $\mu_f = 0.003941$ y $\sigma_f = 0.03338$. La figura (c) muestra la función F_t^W para $t=1,3,5$ con $\mu = 0.002438$ y $\sigma = 0.02631$. La figura (d) muestra F_{10}^W , F_{10}^P y F_{10}^B para los mismos parámetros.

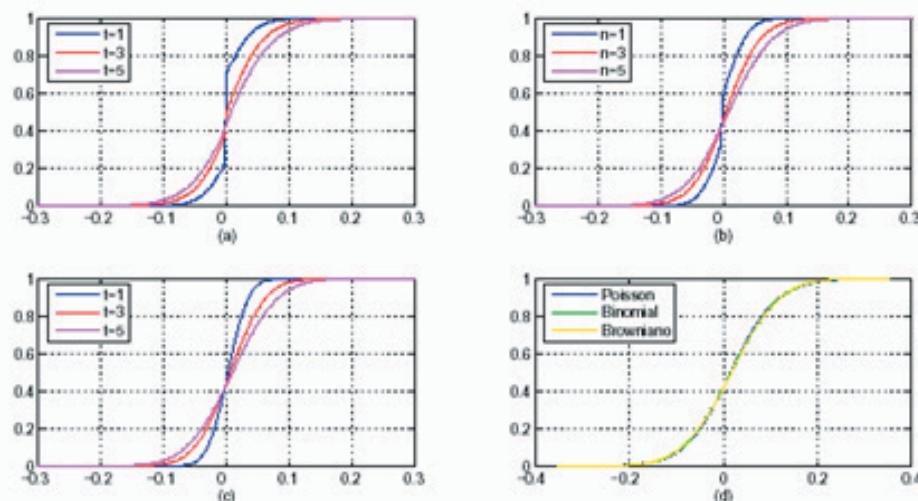
Figura 8
Diferentes distribuciones acumuladas del retorno de la acción Continental C1.



La figura (a) muestra la función F_t^P para $t=1,3,5$ con $\lambda = 0.5578$, $\mu_f = 0.00471$ y $\sigma_f = 0.02472$. La figura (b) muestra la función F_n^B para $n=1,3,5$ con $q = 0.5578$, $\mu_f = 0.00471$ y $\sigma_f = 0.02472$. La figura (c) muestra la función F_t^W para $t=1,3,5$ con $\mu = 0.002626$ y $\sigma = 0.0186$. La figura (d) muestra F_{10}^W , F_{10}^P y F_{10}^B para los mismos parámetros.

Figura 9

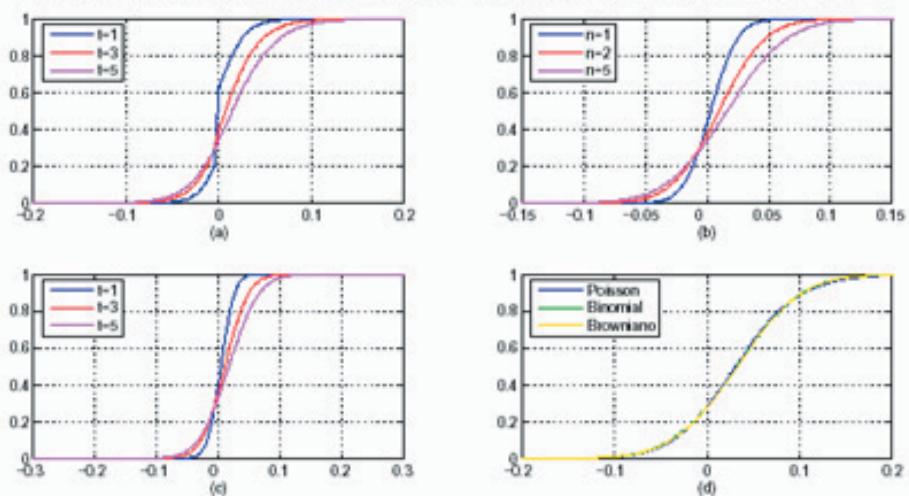
Diferentes distribuciones acumuladas del retorno de la acción Crédito C1.



La figura (a) muestra la función F_t^P para $t=1,3,5$ con $\lambda = 0.7666$, $\mu_f = 0.0021$ y $\sigma_f = 0.02969$. La figura (b) muestra la función F_n^B para $n=1,3,5$ con $q = 0.7666$, $\mu_f = 0.0021$ y $\sigma_f = 0.02969$. La figura (c) muestra la función F_t^W para $t=1,3,5$ con $\mu = 0.001686$ y $\sigma = 0.02601$. La figura (d) muestra F_t^W , F_t^P y F_t^B para los mismos parámetros.

Figura 10

Diferentes distribuciones acumuladas del retorno del IGBVL



La figura (a) muestra la función F_t^P para $t=1,3,5$ con $\lambda = 0.9914$, $\mu_f = 0.003258$ y $\sigma_f = 0.017624$. La figura (b) muestra la función F_n^B para $n=1,3,5$ con $q = 0.9914$, $\mu_f = 0.003258$ y $\sigma_f = 0.017624$. La figura (c) muestra la función F_t^W para $t=1,3,5$ con $\mu = 0.0032302$ y $\sigma = 0.01755$. La figura (d) muestra F_t^W , F_t^P y F_t^B para los mismos parámetros.

3 Resultados empíricos

Se proponen dos métodos para verificar la precisión en la medición del riesgo con los modelos propuestos. El primer método consiste en calcular las veces en las que el VaR fue mayor al retorno (recordar que el VaR que se ha calculado tiene signo negativo). Para ello se ha hecho un backtesting sobre los datos históricos calculando el VaR con 300 datos. Es decir, que se calcula el VaR del retorno con los primeros 300 datos y dicho valor se compara con el retorno número 301, luego se vuelve a calcular el VaR utilizando los retornos del 2 hasta el 301 (300 observaciones) y se compara con el retorno número 302. Este procedimiento se realiza hasta comparar el último valor disponible de los retornos con su respectivo VaR y se calcula la proporción de veces en las cuales el VaR falla, a la cual denominamos como \hat{P} . Es importante mencionar que por consideraciones de la normativa de Basilea la proporción \hat{P} de errores debe ser menor o igual al valor P fijado. El valor considerado en el presente artículo es de 0.05 y los resultados empíricos se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Proporción de fallas al 5%

Modelo	Alicorp C1	Brocal C1	Conti C1	Crédito C1	IGBVL
Gaussiano	3.57%	4.75%	3.57%	3.76%	4.20%
Binomial	2.99%	4.54%	3.70%	3.76%	4.20%
Poisson	3.67%	4.75%	4.08%	3.76%	4.52%
Histórico	3.01%	5.99%	5.20%	5.18%	5.31%

El segundo método de verificación es el propuesto por Kupiec [5], pp. 79-80, denominado *Cociente de Fallas (CF)*. En dicho método se asume que las veces en las que el modelo seleccionado para el cálculo del VaR (a un nivel P) falla en n observaciones sigue una distribución binomial con parámetros n y P . El estadístico utilizado en dicho test es el siguiente

$$LR = -2\ln[(1-p^*)^{n-x}(p^*)^x] + 2\ln\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}\left(\frac{x}{n}\right)^x\right]$$

donde p^* es la probabilidad de falla bajo la hipótesis nula, n es el tamaño de la muestra y x es el número de fallas en la muestra. Bajo la hipótesis nula, $p = p^*$ el test tiene una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad. Kupiec, 1995, estima a un nivel de significancia de 5% y utilizando un tamaño de muestra de 255 que no se puede rechazar la hipótesis nula cuando el número de fallas x se encuentra en el intervalo $6 < x < 21$. En el presente artículo el test *CF* se ha aplicado muchas veces para cada acción. Por ejemplo, si se cuentan con N observaciones de una acción y se ha calculado el VaR utilizando 300 observaciones, el número de valores del VaR calculados es de $N - 301$, con lo cual a cada observación histórica a partir de la 301 se le asocia el valor del VaR calculado con las 300 observaciones anteriores.

Posteriormente, se van seleccionando 255 observaciones del VaR y sus retornos históricos asociados, con lo cual se calcula el número de veces en las que el VaR falla, generando así un nuevo dato el cual toma valor 1 si se rechaza la hipótesis nula y 0 si no se puede rechazar. Finalmente, se encuentra la proporción de veces en las cuales se ha rechazado la hipótesis nula. Se llevó a cabo el test *CF* para la hipótesis nula $p = 0.05$ (pues el VaR se ha calculado a ese nivel) y para dar mayor información se muestra también la proporción de veces en las cuales se cumple que $x \leq 6$ con la finalidad de saber cuando $p < 0.05$ y también se muestra la proporción de veces en las cuales $x \geq 21$ para saber cuando $p > 0.05$, con lo cual es posible tener una idea si el modelo sobreestima el VaR o lo subestima. En las Tablas 3-7 se muestran los resultados de este test para las acciones seleccionadas.

Tabla 3
Prueba Kupiec para Alicorp al 5%

Modelo	p< 0.05 (a)	p> 0.05 (b)	(a) \cup (b)
Gaussiano	36.06%	0.00%	36.06%
Binomial	45.14%	0.00%	45.14%
Poisson	40.03%	4.35%	44.38%
Histórico	68.65%	0.51%	69.18%

Tabla 7
Prueba Kupiec para IGBVL al 5%

Modelo	p< 0.05 (a)	p> 0.05 (b)	(a) \cup (b)
Gaussiano	23.64%	0.46%	24.10%
Binomial	23.64%	0.46%	24.10%
Poisson	22.02%	1.87%	23.90%
Histórico	11.08%	9.64%	20.73%

Para finalizar esta sección, en las Figuras 11-15 se muestra el VaR de cada modelo y su comparación con el retorno de cada acción.

Tabla 4
Prueba Kupiec para Brocal al 5%

Modelo	p< 0.05 (a)	p> 0.05 (b)	(a) \cup (b)
Gaussiano	4.35%	0.00%	4.35%
Binomial	12.17%	0.00%	12.17%
Poisson	4.35%	0.00%	4.35%
Histórico	0.00%	0.00%	0.00%

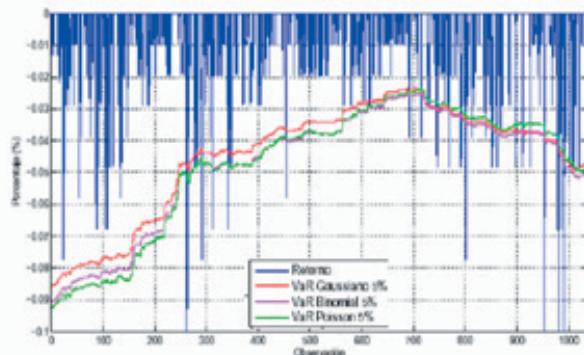
Tabla 5
Prueba Kupiec para Continental al 5%

Modelo	p< 0.05 (a)	p> 0.05 (b)	(a) \cup (b)
Gaussiano	43.25%	0.00%	43.25%
Binomial	36.10%	0.00%	36.10%
Poisson	26.23%	1.19%	27.37%
Histórico	9.40%	8.35%	17.75%

Tabla 6
Prueba Kupiec para Crédito al 5%

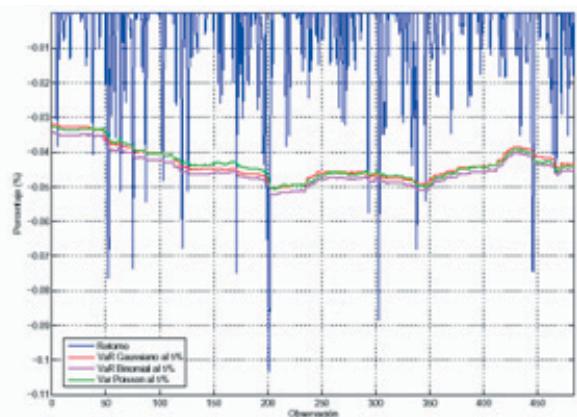
Modelo	p< 0.05 (a)	p> 0.05 (b)	(a) \cup (b)
Gaussiano	43.26%	9.15%	52.41%
Binomial	42.21%	9.15%	51.36%
Poisson	39.12%	1.23%	40.35%
Histórico	20.86%	19.81%	40.66%

Figura 11
VaR para la acción Alicorp C1



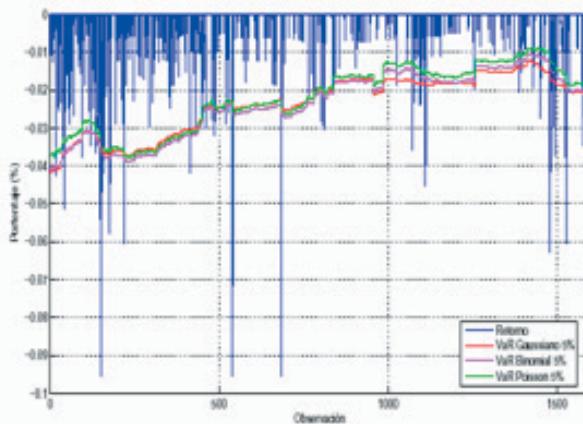
Se grafica el VaR para cada modelo y solo se muestran los retornos menores o iguales a cero.

Figura 12
VaR para la acción El Brocal C1



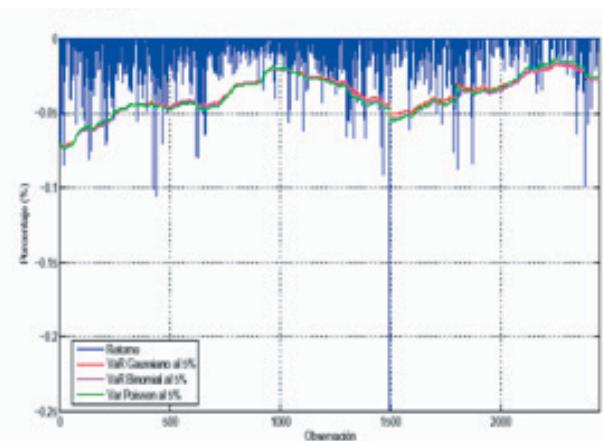
Se grafica el VaR para cada modelo y solo se muestran los retornos menores o iguales a cero.

Figura 13
VaR para la acción Continental C1



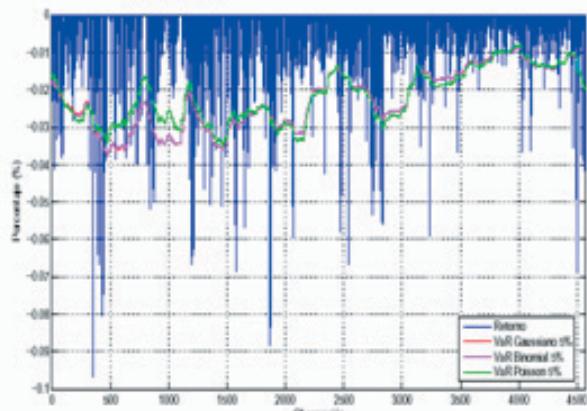
Se grafica el VaR para cada modelo y solo se muestran los retornos menores o iguales a cero.

Figura 14
VaR para la acción Crédito C1.



Se grafica el VaR para cada modelo y solo se muestran los retornos menores o iguales a cero.

Figura 15
VaR para el IGBVL



Se grafica el VaR para cada modelo y solo se muestran los retornos menores o iguales a cero.

4 Conclusiones

A partir del análisis de VaR desarrollado en el presente artículo sobre la base de las cuatro metodologías expuestas, se puede inferir que: i) el modelo Histórico no cumple con los requisitos básicos exigidos por el Consejo de Basilea; y ii) dentro de los modelos restantes (Gaussiano, Binomial y Poisson), los que se adecuan mejor a las acciones consideradas como prototipo de un mercado ilíquido son los Poisson y Binomial, este último seguido muy de cerca por el modelo Gaussiano. Con lo cual los modelos Poisson y Binomial constituyen una herramienta importante y de fácil aplicación para realizar el cálculo del VaR para acciones con retornos que presentan alta acumulación en cero.

5 Referencias

- D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2004.
- L. Chávez Bedoya and F. Rosales. Notes on the Adequacy of the Brownian Motion Hypothesis in Non-liquid Markets: Are Jump Processes or Discrete Time Ones a Better Alternative?. *Artículo aceptado en el Encuentro Internacional de Finanzas organizado por la Universidad de Chile*, 2006.
- B. Eraker, M. Johannes, and N. Polson. The impact of jumps in volatility and returns. *Journal of Finance*, 58:1269, 2003.
- P. Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag, 2004.
- P. Kupiec. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. *Journal of Derivatives*, 2:73, 1995.
- R. Merton. Option pricing when the underlying returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3:323, 1976.
- G. Reklaitis, A. Ravindran and K. Ragsdell. *Engineering Optimization*. Wiley, 1983.