

# Introdução à Física Computacional

## Sistemas Aleatórios

Luiz Fernando S. E. Santos  
*Nº* USP: 10892680

Junho de 2019

# 1 Introdução

Na presente prática, trabalhamos com alguns aspectos dos sistemas aleatórios, bem como suas utilidades em áreas dês do cálculo numérico (possibilitando técnicas como o *Monte Carlo*), até na simulação de decaimento atômico e dos passeios aleatórios.

Os códigos foram feitos em *C++* em sua maior parte, com auxílio do *Python 3* com as bibliotecas *Numpy*, *Scipy* e *Matplotlib* para manipulação e visualização dos dados.

Os scripts de graficagem são executados automaticamente após a execução do programa "principal"(em *C++*)

Para a compilação, recomenda-se usar

```
g++ -O3 [nomedoprograma].cpp -o [nomedoprograma]
```

no terminal.

## 2 Métodos e Resultados

### 2.1 Números aleatórios, integrais e amostragem

#### 2.1.1 A

Foi gerado um total de  $k = 10^2$  sequências de números aleatórios, cada uma composta por um total de  $N = 10^m$  números. O comportamento de convergência da média e do desvio padrão desses conjuntos foram observados para  $m$  variando entre 1 até 9. Os resultados obtidos para cada amostra, em relação à  $N$ , podem ser observados:

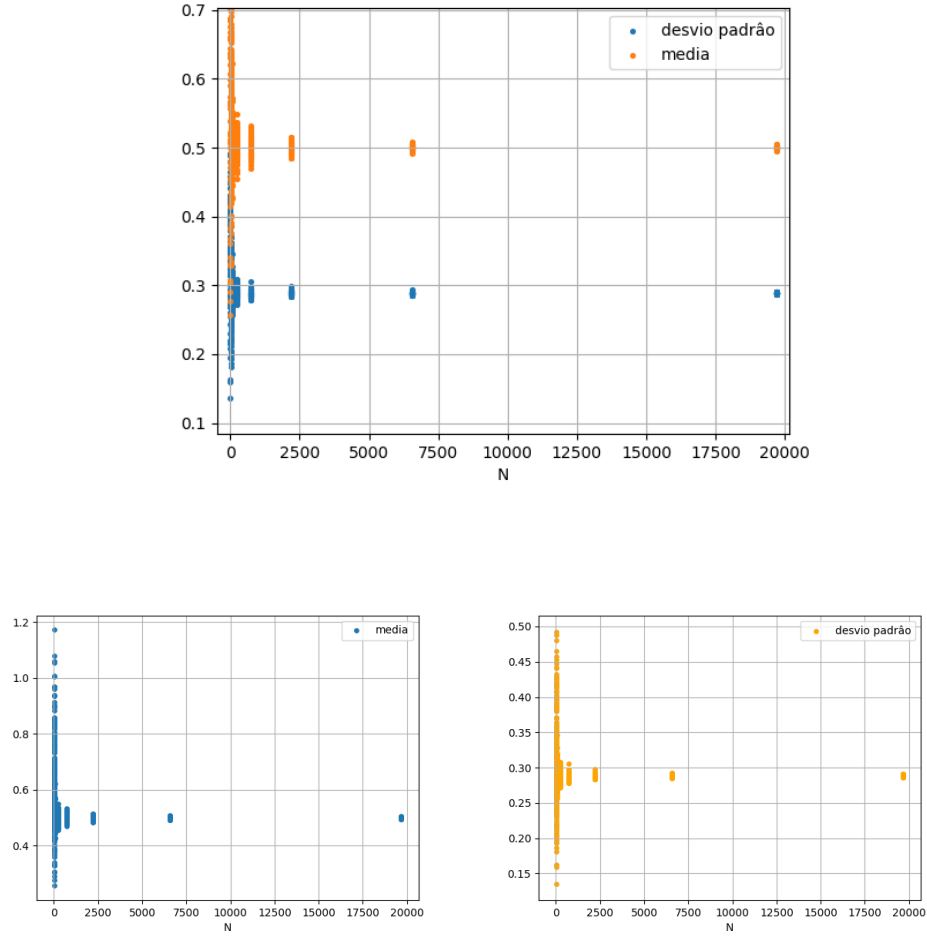


Figura 1: Convergência da média e desvio padrão.

Pode-se observar, conforme o esperado, a convergência da média para  $\langle r \rangle = 0.5$  e do desvio para  $\sigma \approx 0.288675$ . Isso fica mais claro aproximando dos resultados para  $N = 3^9$ :



Figura 2: Valores de convergência da média e do desvio padrão.

### 2.1.2 B

Agora, com o gerador de números aleatórios introduzido em **A**, fazemos os histogramas para os valores médios  $\langle r \rangle$ , para os tamanhos  $N = 3^2, 3^3$  e  $3^4$ :

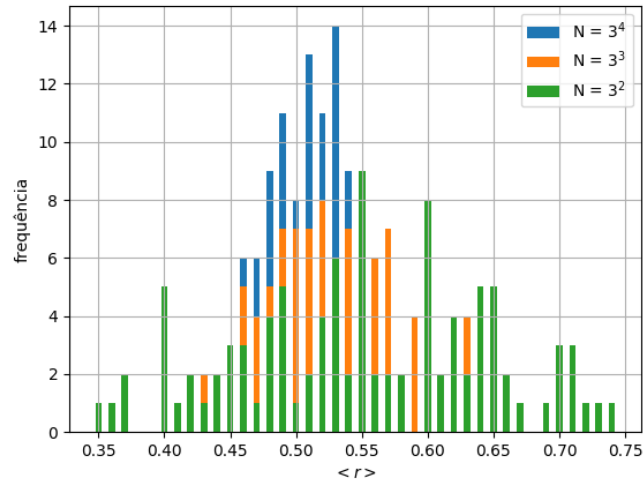


Figura 3: Histogramas de  $\langle r \rangle$  para os diferentes valores de  $N$ .

De acordo com o esperado, conforme  $N$  aumenta, o histograma adquire um pico mais acentuado, bem diferente por exemplo do caso  $N = 3^2$ , em que

a distribuição é mais "espalhada" ao longo do eixo.

Aqui também podemos observar algo interessante: de acordo com o teorema central do limite, espera-se que o desvio das médias seja proporcional ao inverso da raiz quadrada do número  $N$  de valores, isso é  $\delta < r > \propto 1/\sqrt{N}$ . Podemos verificar isso no nosso algoritmo simplesmente variando  $N$  e calculando o erro relacionado à média final de cada um.

Fazendo isso e plotando em um gráfico em escala logarítmica, obtemos:

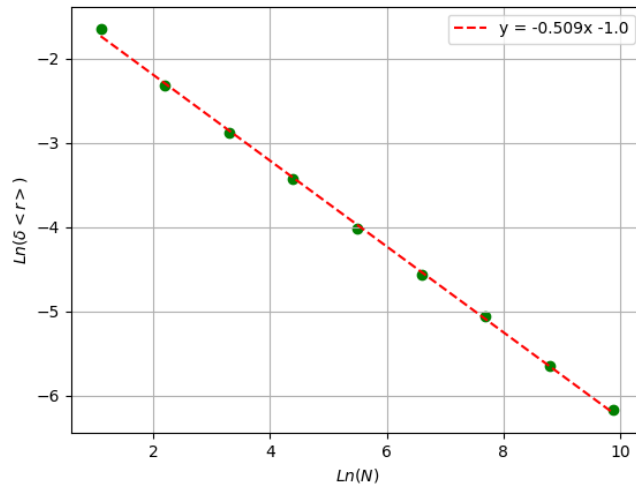


Figura 4: Plot em escala log-log de  $\delta < r >$  em relação à  $N$ .

Podemos verificar que o coef. angular da reta ajustada para os pontos está razoavelmente próximo ao valor de 0.5 esperado para essa situação.

### 2.1.3 C

Aqui, implementarmos pela primeira vez o famoso método de Monte-Carlo! Isso será feito gerando um par de números aleatórios  $(x, y)$  entre  $-1$  e  $1$  e tomando-os como coordenadas do  $R^2$ . Sua probabilidade de estar dentro do círculo unitário será usada para fazermos uma aproximação da área deste círculo.

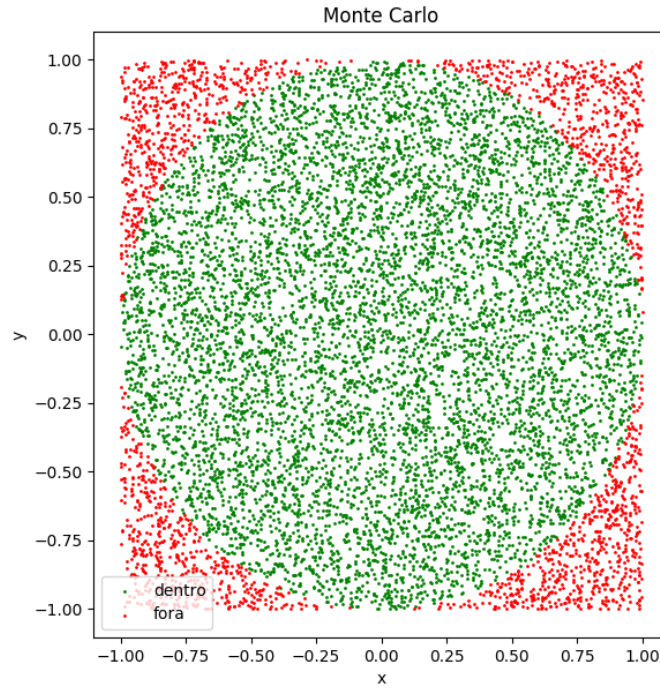


Figura 5: Representação gráfica do algoritmo usado.

Vamos repetir esse processo, variando o tamanho do nosso conjunto de pontos e tendo como objetivo obter, através dos dados, uma aproximação para a constante  $\pi$  com uma precisão da ordem de  $10^{-4}$ .

Executando o algoritmo, obtemos que o valor de  $N$  para que nos seja possível obter essa precisão é de, aproximadamente,  $N = 268435456$  iterações. Realmente um grande número!

#### 2.1.4 D

Ainda com o método de Monte-Carlo, agora este será usado como uma forma de aproximar o valor da integral de duas funções, sendo elas:

$$f_1(x) = \frac{4}{x^2 + 1} \quad (1)$$

e

$$f_2(x) = \frac{1}{x} \quad (2)$$

A primeira no intervalo  $[0, 1]$  e a segunda em  $[1, 10]$ .  
Aplicando o método para ambas funções, vamos novamente variar nossa amostra  $N$  e observar o comportamento de convergência em ambas:

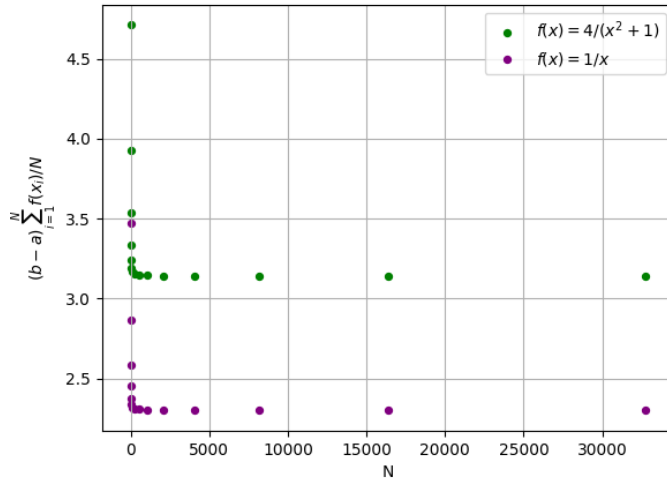


Figura 6: Convergência da média das amostras para a integral de cada função.

O valor final (para o maior  $N$ ) calculado de cada integral sendo 3.142 para  $f_1$  e 2.303 para  $f_2$ . Podemos notar que há uma boa convergência, tendo em vista que:

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2 + 1} dx = \pi \approx 3.14159 \quad (3)$$

$$\int_1^{10} \frac{1}{x} dx \approx 2.30259 \quad (4)$$

Também podemos ver a evolução do erro destas ao aumentarmos  $N$ :

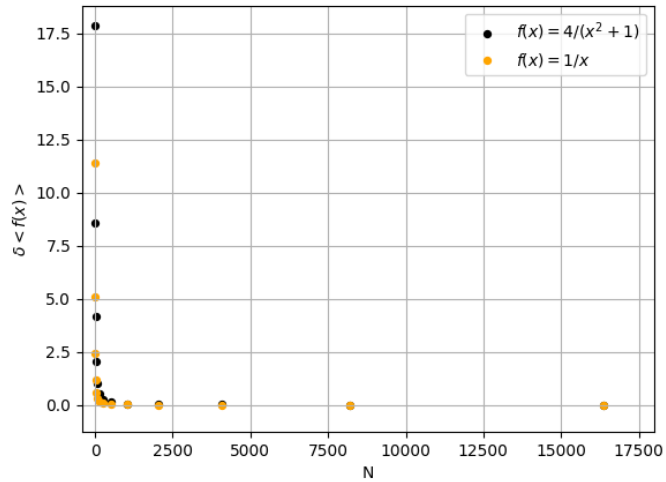


Figura 7: Convergência do desvio padrão das amostras para a integral de cada função.

Em ambos os casos, ele parece estar convergindo para zero.

## 2.2 Decaimento radioativo

### 2.2.1 A e B

Aqui, começamos por aproximar o comportamento de decaimento radioativo de um conjunto  $N_0$  de núcleos que decaem de acordo com a probabilidade:

$$dP = \lambda dt \quad (5)$$

Isso é feito gerando  $k$  amostras, que são respectivamente iteradas ao longo de um tempo  $t$  discreto (com  $dt = 0.005$ ). Em cada iteração, é checada a probabilidade de cada núcleo decair. Caso isso ocorra, o número de núcleos é atualizado e a iteração continua.

Foi escolhido um  $dt$  suficientemente pequeno, ao mesmo tempo que um  $t = 10$ , o que garante que ao final provavelmente não haverão mais núcleos em nenhuma das amostras.

Executando o algoritmo para  $k = N_0 = 1000$ , obtemos:



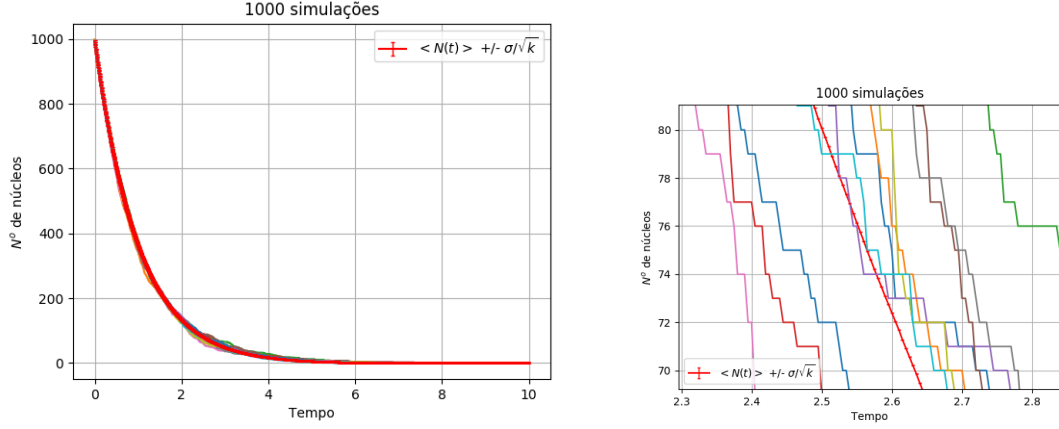


Figura 8: No gráfico, representação de 10 das amostras, junto com a média das 1000.

### 2.2.2 C

Tomando a interpretação do decaimento radioativo:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (6)$$

Pelo teorema central do limite, obtemos que:

$$\langle p(x) \rangle = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{b-a}$$

O que, se  $a = 0$ :

$$\langle p(x) \rangle = \frac{1 - e^{-\lambda b}}{b} \quad (7)$$

Para simular uma distribuição de números aleatórios que siga esta equação, usaremos:

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-r) \quad (8)$$

Onde  $r$  é um número aleatório no intervalo  $(0, 1)$ .

Fazendo isso e para um certo número de amostras realizando o histograma de  $x$ , obtemos:

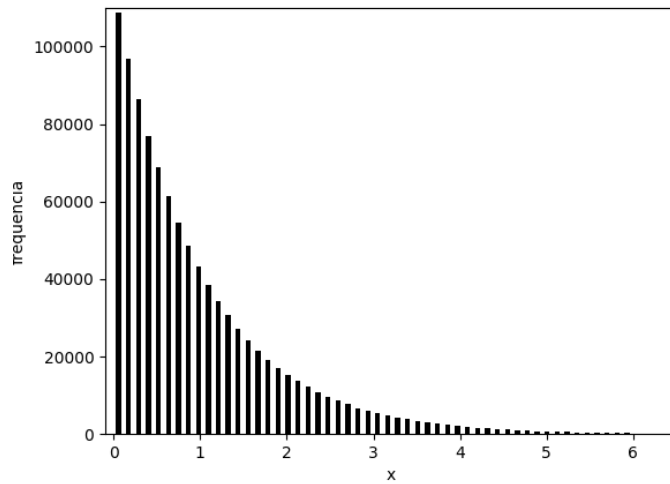


Figura 9: Representação gráfica da distribuição descrita pela equação [6].

Podemos checar que de fato há o comportamento exponencial representando esse histograma em escala logarítmica:

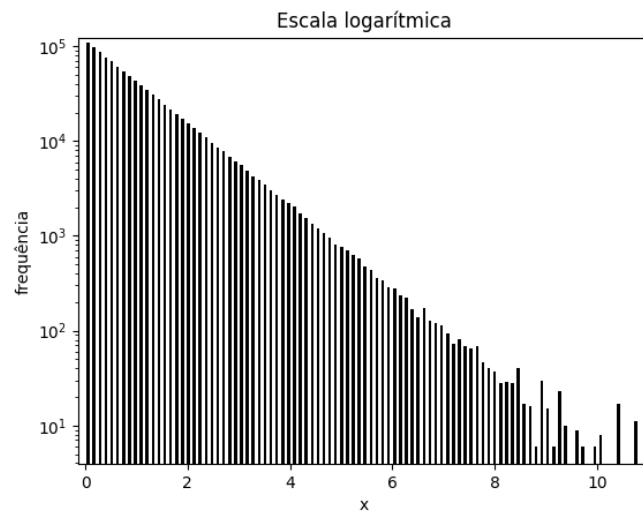


Figura 10: Histograma em escala log.

## 2.3 Passeio aleatório

### 2.3.1 A

Para primeiramente ilustrar o passeio aleatório, faremos sua representação em uma única dimensão.

Tomemos um número  $k$  de amostras, tendo como ponto de partida a origem, iteramos o "caminho" de cada uma sorteando um número no intervalo  $[-1, 1]$ , para os tempos  $t = 50, 100$  e  $200$ . Os histogramas do ponto final de cada caminho, em relação o intervalo de tempo, são:

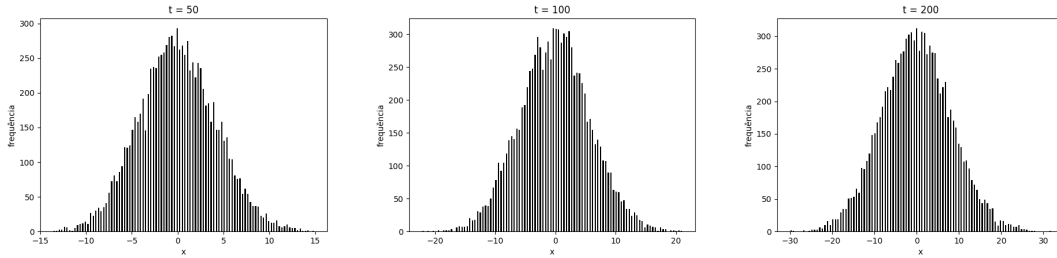


Figura 11: Histogramas do final do passeio aleatório para diferentes tempos.

É possível reparar que, embora mais espaço seja abrangido em um tempo maior, o histograma ainda aponta um grande pico na origem.

Vamos analisar um pouco melhor este comportamento agora repetindo o passeio aleatório para um tempo  $t < 200$ , para um número de amostras de tamanho variável que tem como única condição atingir a precisão de 10% tanto para o deslocamento médio total ( $\langle x \rangle$ ) quanto para o deslocamento quadrático médio ( $\langle x^2 \rangle$ ).

Fazendo isso, obtemos:

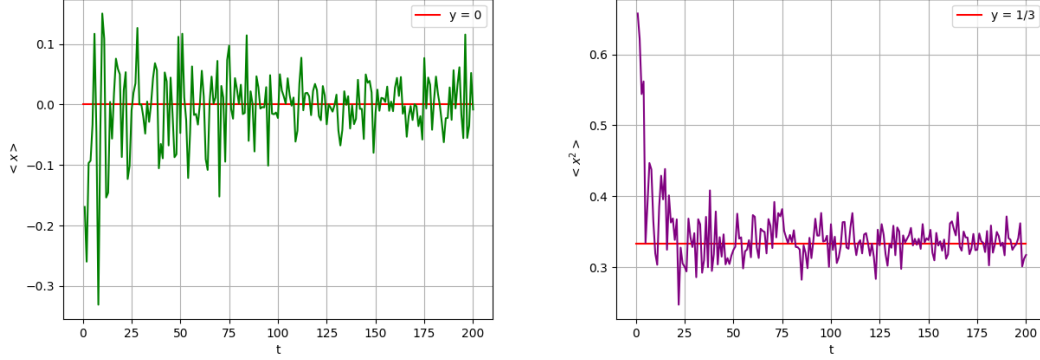


Figura 12: Evolução de  $\langle x \rangle$  e  $\langle x^2 \rangle$  ao longo do tempo.

Assim como se é esperado, bem como o deslocamento médio oscila sempre em torno da origem (como foi visto nos histogramas), o deslocamento quadrático médio tem um comportamento interessante que pode ser explicado fazendo:

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

### 2.3.2 B

Agora fazemos um algoritmo muito similar ao de **A**, porém com a diferença de ser *bidimensional*, tendo seu deslocamento em  $x$  e em  $y$ . Consideremos o deslocamento quadrático médio  $\langle r^2 \rangle$  como sendo:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle \quad (9)$$

Novamente iterando o deslocamento ao longo do tempo, para  $t < 200$ , e mantendo a condição de parada para o aumento do tamanho das amostras como o alcance da precisão desejada, obtemos:

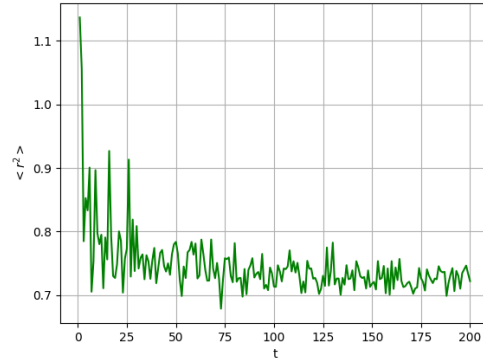


Figura 13: Evolução de  $\langle r^2 \rangle$  ao longo do tempo.

Vemos que, desta vez, a oscilação se dá em torno de aproximadamente 0.75.