

Introdução à Física Computacional - 7600017 - 1S/2019

Projeto 3 — Movimento realístico

Descrição:

Discutiremos como usar o método de Euler para resolver algumas equações diferenciais referentes à segunda lei de Newton para objetos reais em situações um pouco mais realísticas como, por exemplo, envolvendo a resistência do ar mas negligenciando rotações “complicadas”.

1. Efeito resistivo do ar em movimentos unidimensionais

Considere um ciclista pedalando em linha reta num terreno plano. Desconsiderando quaisquer movimentos verticais do centro de massa do sistema bicicleta+ciclista, o movimento do centro de massa é então unidimensional. A segunda lei de Newton nos diz que

$$m \frac{dv}{dt} = F = F_c + F_{\text{res}}, \quad (1)$$

onde m e v são respectivamente a massa e a velocidade (instantânea) do centro de massa do sistema ciclista+bicicleta e F é a força externa resultante (instantânea) sobre o mesmo. A força externa, por sua vez, tem uma componente positiva F_c (em virtude do atrito estático entre o terreno e os pneus da bicicleta) acelerando o sistema, e uma componente negativa F_{res} (em virtude das forças de atrito externas) de resistência ao movimento. Em nossa simplificação, vamos desconsiderar quaisquer imperfeições da bicicleta de tal modo que F_c é simplesmente igual a força imprimida pelo ciclista às custas de suas calorias. Além disso, para evitar uma modelagem do movimento de suas pernas e pedais (que não é simples), toda a informação sobre F_c será relacionada à potência P produzida pelo ciclista. A vantagem de usar essa abordagem é que sabe-se experimentalmente que atletas de alto desempenho são capazes de produzir uma potência média de 400 W para atividades que durem cerca de 1 hora ¹. Portanto, multiplicando os dois lados da Eq. (1) por v obtemos

$$\frac{dK}{dt} = P = P_c + P_{\text{res}}, \quad (2)$$

onde $K = \frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética dos sistema ciclista+bicicleta e $P = Fv$.

Finalmente, vamos assumir que a potência entregue pelo ciclista é constante no tempo. Com relação a potência resistiva $P_{\text{res}} = vF_{\text{res}}$, vamos considerar apenas a resistência de arraste do ar. Essa força resistiva é bastante complicada de modelar. Entretanto, uma boa simplificação para velocidades não muito altas (número de Reynolds $Re < 10^5$) e objetos de formato estático é a de que

$$F_{\text{res}} = -bv - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2, \quad (3)$$

que se parece muito com uma expansão em série de Taylor para a velocidade.

O primeiro termo da Eq. (3) (linear em v) é chamado de arraste viscoso ou arraste de Stokes (ou ainda arraste linear). Para objetos esféricos de raio R , Stokes mostrou que $b = 6\pi R\eta$, onde η é a viscosidade do fluido (no caso o ar). De maneira geral, $b = d\eta$ é uma constante proporcional à viscosidade, e d é um comprimento proporcional às dimensões do objeto e cujo exato valor é de difícil análise.

O segundo termo da Eq. (3) (quadrático em v) é chamado de arraste de pressão ou arraste de Newton. Nele, ρ é a densidade do fluido, A é a seção reta transversa ao movimento, e C_D é um número adimensional denominado coeficiente de arraste cujo exato valor é de difícil análise ².

Para o movimento do ciclista, as velocidades são tais que podemos desprezar o termo de arraste viscoso e ainda assim preservamos uma boa precisão. Além disso, vamos considerar que a área transversal do ciclista permanece constante. Dessa maneira, a força de resistência simplifica para

$$F_{\text{res}} = -\frac{1}{2}\rho A v^2, \quad (4)$$

¹ Vide, por exemplo, https://en.wikipedia.org/wiki/Bicycle_performance

² Vide, por exemplo, o problema 9.20 do livro de H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, Mecânica vol. 1.

onde usamos que o coeficiente de arraste $C_D = 1$ ³. Finalmente, a equação diferencial que precisamos resolver é

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P_c}{mv} - \frac{\rho A v^2}{2m}. \quad (5)$$

Para resolvê-la numericamente, usaremos o **método de Euler**, onde aproximamos a derivada exata pela derivada de dois pontos para frente. Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &\approx \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}, \text{ onde } t_i = i\Delta t, \ i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Combinando as Eqs. (5) e (6),

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P_c}{mv_i} \Delta t - \frac{\rho A v_i^2}{2m} \Delta t. \quad (7)$$

Esse é o resultado da aplicação do método de Euler para nosso problema. Para um Δt suficientemente pequeno e conhecendo-se a velocidade inicial em $t = 0$, itera-se Eq. (7) até o tempo desejado. Entretanto, note que essa formulação não nos permite usar que a velocidade inicial seja $v_0 = 0$. (Por que?)

Uma maneira de evitar esse problema é trabalhar diretamente com a energia cinética. Aplicando o método de Euler para a Eq. (2), e usando que $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$, temos que

$$K_{i+1} = K_i + \Delta t \left(P_c - \sqrt{\frac{2}{m^3}} \rho A K_i^{\frac{3}{2}} \right). \quad (8)$$

Vamos agora explorar esse resultado numericamente. Considere que $m = 70$ Kg e que $P_c = 400$ W são constantes, e que o ciclista parte do repouso. A duração do exercício será de 5 min, e você pode empregar passos de tempo $\Delta t = 0.1$ s (e depois confrontar com uma melhor aproximação usando $\Delta t = 0.01$ s).

- Escreva um programa FORTRAN que calcule a velocidade como função do tempo para o caso sem resistência do ar. (Basta usar que $\rho = 0$.) Grafique seus resultados, comparando-os com a solução exata. (Que pode ser obtida resolvendo exatamente a Eq. (2).) Existe um limite superior para a velocidade nesse caso? Qual é a distância total percorrida pelo ciclista? Observação: para o cálculo da distância você deverá utilizar uma das rotinas de integração numérica desenvolvida no projeto anterior.
- Escreva um programa FORTRAN que calcule a velocidade como função do tempo para o caso com resistência do ar. Use $\rho = 1.3$ Kg/m³ e $A = 0.3$ m². Grafique seus resultados. Calcule a velocidade terminal nesse caso e a compare com o resultado analítico, Eq. (27). Quando essa velocidade terminal é atingida? Qual é a distância total percorrida pelo ciclista? Observação: para o cálculo da distância você deverá utilizar uma das rotinas de integração numérica desenvolvida no projeto anterior.
- Calcule agora a velocidade como função do tempo para o caso com resistência do ar variando o valor da área A (use pelo menos três valores diferentes de A). Discuta seus resultados e os correlacione com pelo menos uma das técnicas empregadas por ciclistas profissionais durante as corridas.

2. Efeito resistivo do ar em movimentos bidimensionais

O método de Euler discutido no problema anterior pode ser facilmente adaptado para problemas em duas dimensões. Como exemplo, estudaremos o lançamento de projéteis simples não girantes. Usando o mesmo modelo de força resistiva que no caso anterior, i.e.,

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = -\frac{1}{2} \rho A C_D v^2 \hat{v}, = -\frac{1}{2} \rho A C_D v \mathbf{v},$$

³ Vide https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient

onde \hat{v} é um vetor unitário paralelo ao vetor velocidade \mathbf{v} , e que a força peso é $-mg\hat{y}$, a equação de Newton é

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho AC_D}{2m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x \text{ e } \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{\rho AC_D}{2m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y, \quad (9)$$

onde $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ e a velocidade instantânea do projétil, e g é a aceleração da gravidade. Utilizando o método de Euler, temos que

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - \frac{\rho AC_D}{2m} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2} v_{x,i} \Delta t, \quad (10)$$

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - \left(g + \frac{\rho AC_D}{2m} \sqrt{v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2} v_{y,i} \right) \Delta t. \quad (11)$$

Nosso objetivo é explorar esse problema numericamente. Considere que o projétil parta da origem com $v_{x,0} = v_0 \cos \theta$, $v_{y,0} = v_0 \sin \theta$. Assuma que o projétil, de $m = 42$ kg e calibre 149.1 mm, é disparado com velocidade $v_0 = 377$ m/s (comparável com o 15 cm schwere Feldhaubitze 13 da primeira guerra mundial). Assuma $g = 9.8$ m/s², $\rho = 1.3$ Kg/m³ e $C_D = 0.295$. Use $\Delta t = 0.01$ s e 0.001 s.

- Escreva um programa FORTRAN que calcule a trajetória do projétil. Grafique, no mesmo gráfico, a trajetória para os ângulos $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$ considerando e desconsiderando a resistência do ar.
- Escreva um programa FORTRAN que calcule a alcance ΔX do projétil. Faça um gráfico de ΔX como função de θ e determine o ângulo θ_{\max} que maximiza o alcance.
- Os itens anteriores mostraram que a resistência do ar é um importante ingrediente para uma abordagem realística do problema de lançamento de projéteis. Contudo, há dois outros aspectos importantes da física do problema que não levamos em consideração que são as variações (i) da densidade do ar com a altitude e (ii) do coeficiente de arraste com a velocidade do projétil (principalmente perto da velocidade do som). A observação (i) é importante principalmente quando o projétil alcança alturas consideráveis, nas quais sabemos que a densidade do ar é menor em comparação àquela no nível do mar. A observação (ii) nos diz que a Eq. (3) é apenas uma aproximação, e nos lembra que o problema é bastante complicado. Em relação à (i), vamos usar um modelo simples para a densidade baseado em dados experimentais ⁴:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\beta}{T_0} y \right)^\alpha, \quad (12)$$

onde $\beta = 6.49 \times 10^{-3}$ K/m é a taxa de variação da temperatura com a altitude, T_0 é a temperatura ao nível do mar (que tomaremos como 300 K) e o expoente $\alpha = 4.256$ para o ar. Em relação à (ii), vamos adotar uma simplificação: $C_D = 0.295$ para velocidades menores que a do som (343 m/s) e $C_D = 0.5$, caso contrário. Refaça os itens anteriores usando essas novas aproximações. Note que a posição do projétil é necessária para o cálculo das velocidades via (12). Para isso, aplica-se o método de Euler para $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ (equivalente ao método do retângulo visto no projeto anterior). Ou seja,

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i} \Delta t \text{ e } y_{i+1} = y_i + v_{y,i} \Delta t. \quad (13)$$

O problema é então resolvido iterando as Eqs. (10), (11) e (13).

- Considerando $\theta = \theta_{\max}$, como determinado no item anterior, varie a velocidade de lançamento em $\pm 1\%$ e obtenha os novos alcances A . Baseado nesses resultados, você diria que é fácil aterrissar (acertar) em um ponto (alvo) específico?
- Finalmente, para os dois lançamentos do item anterior, grafique a magnitude da velocidade como função do tempo.

3. Pêndulo simples

⁴ Vide, por exemplo, <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/atmosmet.html>

Estudaremos agora o movimento do pêndulo simples como mostrado na figura ao lado. A equação diferencial para o movimento do pêndulo é

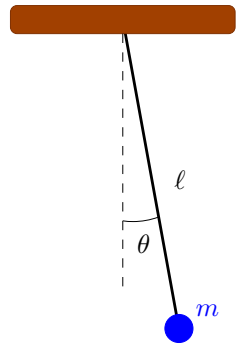
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta, \quad (14)$$

e sua energia mecânica (cinética + potencial) é dada por

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\omega^2 + mg\ell(1 - \cos\theta), \quad (15)$$

onde

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \quad (16)$$



é a velocidade angular.

No limite de pequenas oscilações (em que $\theta_{\max} \ll 1$), a Eq. (14) se torna $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta$ e portanto, o movimento é harmônico com período $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Nosso objetivo é estudar o período T no caso geral. Para usar o método de Euler, devemos transformar a equação diferencial de segunda ordem Eq. (14) em duas de primeira ordem, ou seja,

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta \rightarrow \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{\ell} \sin\theta_i \Delta t, \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i \Delta t. \quad (18)$$

Considere agora $m = 1$ Kg, $\ell = 1$ m e $g = 9.8$ m/s². O período do movimento harmônico correspondente é $T_0 = 2.00709$ s.

- Escreva um código FORTRAN que implemente as Eqs. (17) e (18). Se soltarmos o pêndulo a partir do repouso para $\theta_{\max} = 90^\circ$, calcule o ângulo e a energia mecânica do sistema como função do tempo para $0 \leq t \leq 40$ s considerando $\Delta t = 0.005$ s. Grafique e discuta seus resultados.
- Novamente para $\theta_0 = \theta_{\max} = 90^\circ$ e $\omega_0 = 0$, determine o espaço de fase, i.e., grafique no plano $\theta \times \omega$ os valores correspondentes obtidos ao longo da trajetória, e compare com o resultado analítico exato.
- Como vimos nos itens anteriores, o método de Euler falha espetacularmente para movimentos periódicos. Para sanar esse problema, podemos fazer uma pequena modificação no método, que nos leva ao chamado método de Euler-Cromer

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{\ell} \sin\theta_i \Delta t, \quad (19)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \omega_{i+1} \Delta t. \quad (20)$$

Repita os itens anteriores agora implementando as Eqs. (19) e (20).

- Calcule o período do pêndulo simples pelo método de Euler-Cromer como função de θ_{\max} (sempre assumindo que ele parta do repouso). Faça um gráfico de seus resultados e discuta cuidadosamente a escolha de Δt nesse caso. Compare seus resultados com o valor obtido por meio da integral elíptica

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \text{ onde } k = \sin \frac{\theta_{\max}}{2}. \quad (21)$$

- Um terceiro método é o de Verlet que usa a ideia de derivadas para frente e para trás como no projeto anterior. Sejam as série de Taylor para frente e para trás

$$\theta(t + \Delta t) = \theta(t) + \omega(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}(t) (\Delta t)^2 + \frac{1}{6} \dddot{\theta}(t) (\Delta t)^3 + \dots, \quad (22)$$

$$\theta(t - \Delta t) = \theta(t) - \omega(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\theta}(t) (\Delta t)^2 - \frac{1}{6} \dddot{\theta}(t) (\Delta t)^3 + \dots \quad (23)$$

Somando as duas equações, temos que $\theta(t + \Delta t) + \theta(t - \Delta t) = 2\theta(t) + \ddot{\theta}(t)(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t)^4$. (Note a ordem do erro.) Discretizando essa equação e notando que $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular, temos que

$$\theta_{i+1} = 2\theta_i - \theta_{i-1} - \frac{g}{\ell} \sin \theta_i (\Delta t)^2. \quad (24)$$

Note que o método independe da velocidade angular. Além disso, note que ele requer θ_{i-1} para fazer a atualização. Sendo assim, não podemos iniciar o processo de iteração partindo apenas das condições iniciais θ_0 e ω_0 . Logo, precisamos de outro método para determinar θ_1 . Usando o de Euler, por exemplo, então $\theta_1 = \theta_0 + \omega_0 \Delta t = \theta_0$. Usando o método de Verlet, refaça os itens 3b e 3d. Qual método aqui discutido é mais acurado?

4. Estabilização dinâmica

Considere novamente o pêndulo simples do problema anterior. Entretanto, considere agora que o pêndulo esteja imerso num fluido viscoso (e que as velocidades são tais que podemos desprezar o arraste de pressão). Além disso, considere ainda que o pêndulo esteja preso a um ponto que se move na vertical e cuja a função horária é $y(t) = y_{\max} \sin(\Omega t)$. Neste caso, a equação de Newton para o ângulo do pêndulo é

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{6\pi R\eta}{m} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{\ell} \left(1 - \frac{y_{\max}\Omega^2}{g} \sin(\Omega t)\right) \sin \theta,$$

onde R é o raio da esfera presa ao pêndulo e η é a viscosidade do fluido. Por simplicidade, é conveniente simplificar essa equação considerando tempos (ou frequências) e comprimentos e viscosidade em unidades convenientes. Por exemplo, vamos considerar que a nossa unidade de tempo (que vamos chamar de T) é igual ao inverso da frequência angular do pêndulo simples no limite de pequenas oscilações, ou seja, $T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Sendo assim, definimos nosso tempo adimensional $\tau \equiv t/T$. Dessa forma, a equação de Newton se torna

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - (1 - \alpha\nu^2 \sin(\nu\tau)) \sin \theta, \quad (25)$$

onde $\nu = \Omega T$ é a frequência da força externa adimensional, $\alpha = \frac{y_{\max}}{\ell}$ é a amplitude adimensional do movimento do ponto de apoio, ou seja, α é o a amplitude desse movimento em unidades de ℓ , e $b = \frac{6\pi R\eta}{m} T$ é o coeficiente de Stokes adimensional.

Para as perguntas abaixo, considere que $\alpha = 0.1$ e que $b = 0.05$. Dessa forma, só nos resta um parâmetro no problema que é a frequência ν . Considere ainda que o pêndulo é solto do repouso $\omega_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ de um ângulo inicial θ_0 (diferente de 0 e π).

- (a) Para $\nu = 0$ (ou seja, sem força externa) e $\theta_0 = 0.9999\pi$, grafique $\theta(\tau)$ usando os métodos de Euler, Euler-Cromer e Verlet para $\Delta\tau = 10^{-2}$ e 10^{-4} e tempos $0 \leq \tau \leq 30 \times 2\pi$. O movimento é sub-armortecido, super-amortecido, ou criticamente amortecido? Faça um ajuste de seus dados e obtenha a taxa de decaimento para tempos longos. Ela é compatível com o valor $\frac{b}{2}$? (Visualize seu ajuste em um gráfico log-linear de $|\theta(\tau)|$.)

Para o método de Verlet, use que $\dot{\theta}_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta\tau}$ quando for iterar $\theta_{i+1} = 2\theta_i - \theta_{i-1} + (\Delta\tau)^2 \ddot{\theta}_i$.

Para as próximas perguntas, utilize apenas o método de Verlet e $\Delta t = 10^{-4}$.

- (b) Para $\theta_0 = 0.9999\pi$ e variando ν de 0 até 20, encontre $|\theta(\tau)|_{\min}$ e grafique-o como função ν . Aqui $|\theta(\tau)|_{\min}$ é o menor valor, em módulo, atingido pelo ângulo $\theta(\tau)$ durante o intervalo de tempo $0 \leq \tau \leq 30 \times 2\pi$. Quando $|\theta(\tau)|_{\min} \neq 0$, dizemos que ocorreu uma estabilização dinâmica. Acima de que frequência ν^* ocorreu essa estabilização dinâmica?
- (c) Explore a dependência de ν^* como função do ângulo inicial θ_0 . Para isso, faça um gráfico de ν^* como função de θ_0 . (Por simplicidade, use $b = 0$.) Verifique se seus dados são ajustados pela expressão $\alpha^2 \nu^{*2} \cos \theta_0 = 2$.
- (d) Para $\theta_0 = 0.9999\pi$, $b = 0.05$ e $\nu = 40$, faça um gráfico de $\theta(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq 30 \times 2\pi$ e verifique que

$$\theta(\tau) \approx \pi + \theta_0 \sin(\omega_s \tau + \phi_s) [1 + \delta \sin(\omega_f \tau + \phi_f)] e^{-\gamma \tau}, \quad (26)$$

onde $\gamma \approx -\frac{b}{2}$, $\omega_s \approx \sqrt{\frac{(\alpha\nu)^2 - 2}{2}}$ e $\omega_f \approx \nu$. Ou seja, $\theta(\tau) - \pi = \theta_s(\tau) + \theta_f(\tau)$ tem uma componente lenta θ_s e uma componente rápida θ_f que descrevem oscilações amortecidas em torno de π . Verifique ainda que $\delta \ll 1$. Isso quer dizer que as oscilações rápidas tem baixa amplitude (por causa da inércia do pêndulo)

e são governadas unicamente pela força externa de frequência ν . As oscilações lentas são harmônicas e equivalentes a uma partícula se movendo num potencial efetivo

$$U_{\text{eff}}(\theta) \approx -\cos \theta - \frac{1}{8}(\alpha\nu)^2 \cos(2\theta).$$

Finalmente, note que a amplitude da componente rápida é modulada pelas oscilações da componente lenta. Explique detalhadamente como você mediu (obteve de seus dados) os parâmetros γ , ω_s e ω_f , bem como as amplitudes θ_0 e δ , e as fases ϕ_s e ϕ_f .

Breve discussão sobre a execução dos problemas

Velocidade terminal

Definimos que quando um objeto atinge sua velocidade terminal \mathbf{v}^* , então o módulo da velocidade do seu centro de massa não mais se altera. Com essa definição, conclui-se necessariamente que a força resultante sobre o centro de massa ou (i) é nula (que configura o movimento uniforme), ou (ii) é perpendicular ao vetor velocidade (que configura o movimento circular uniforme) para todo instante de tempo subsequente.

No caso do ciclista analisado no problema 1, temos a condição (i) de que $\frac{dv}{dt} = 0$. Pela Eq. (5) obtemos então

$$\frac{P_c}{v^*} = \frac{\rho A v^{*2}}{2},$$

donde vem que

$$v^* = \left(\frac{2P_c}{\rho A} \right)^{1/3}. \quad (27)$$

Lançamento de projéteis

Para o caso do movimento dos projéteis, podemos resolver facilmente as Eqs. (9) para encontrarmos

$$x = 0 + v_{x,0}t = (v_0 \cos \theta) t. \quad (28)$$

$$y = 0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (29)$$

As equações do movimento para as duas componentes são independentes. O tempo t^* no qual o projétil atinge o solo, conhecido como tempo de voo, pode ser obtido fazendo-se $y = 0$, donde

$$t^* = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}. \quad (30)$$

O alcance é então dado por

$$\Delta X = (v_0 \cos \theta) t^* = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}, \quad (31)$$

Para determinarmos a equação da trajetória podemos eliminar o tempo das Eqs. (28) e (29) para escrevermos

$$\begin{aligned} y &= v_0 \sin \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \\ &= (\tan \theta) x - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} \right) x^2, \end{aligned} \quad (32)$$

que nada mais é do que uma parábola com a concavidade para baixo.

Atmosfera adiabática

Modelar a atmosfera é extremamente complicado. Há uma variedade enorme de processos acontecendo ao mesmo tempo. Mas isso não nos impede de considerar modelos simplificados. Por exemplo, quando uma corrente de ar úmido do oceano sobe a encosta de uma montanha rapidamente, não há tempo de trocar calor (o ar é um bom isolante térmico). O ar então se expande (em virtude da menor pressão) adiabaticamente resfriando-se. Esse modelo descreve razoavelmente o ponto de formação de nuvens e precipitação. Por sua simplicidade, vamos analisá-lo e depois comparamos com o modelo experimental dado pela Eq. (12) (mais adequado para a atmosfera em uma planície onde não há uma corrente de ar rapidamente em ascensão).

Usando a lei dos gases ideais, relacionamos a densidade com a pressão e temperatura:

$$\rho \equiv \frac{m}{V} = \frac{nM}{nRT/P} = \frac{MP}{RT}. \quad (33)$$

Em um processo adiabático para um gás ideal, tem-se que

$$PV^\gamma = \text{constante, ou que } \frac{P}{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \text{constante,} \quad (34)$$

com $\gamma = 1.4$ para o ar. Combinando essas duas equações, temos que

$$\rho = \frac{MP_0}{RT_0} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{MP_0}{RT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (35)$$

onde P_0 e T_0 são, respectivamente, uma pressão e temperatura de referência como, por exemplo, a pressão e temperatura na base de lançamento onde a altura y é conhecida e igual a y_0 (que vamos tomar como $y_0 = 0$).

Para relacionar ρ com a altura y , precisamos de mais informações. Para isso, vamos fazer mais uma hipótese e assumir que a atmosfera está em equilíbrio hidrostático, ou seja, a pressão em um determinado ponto é devida à força peso da coluna de ar acima daquele ponto. Logo, a variação de pressão dP se deve à variação da densidade de energia potencial gravitacional correspondente, ou seja,

$$dP = -\rho g dy. \quad (36)$$

Substituindo (35) em (36), temos

$$dP = -g \frac{MP_0}{RT_0} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} dy. \quad (37)$$

Integrando a pressão de P_0 a P e a altura de y_0 a y , temos que

$$P = P_0 \left(1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{gM}{RT_0} y \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (38)$$

Usando o processo adiabático (34), encontramos a dependência da temperatura com a altura

$$T = T_0 \left(1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{gM}{RT_0} y \right), \quad (39)$$

que diz que a temperatura decresce linearmente com o aumento da altura. Finalmente, a densidade como função da temperatura pode ser obtida usando (35):

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \rho_0 \left(1 - \beta \frac{y}{T_0} \right)^\alpha, \quad (40)$$

onde $\rho_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$, $\beta = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{gM}{R} = \left(\frac{0.4}{1.4} \right) 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 28.9647 \frac{\text{g}}{\text{mol}} / \left(8.31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \right) \approx 9.76 \times 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$ é a taxa de variação da temperatura com a altitude, e $\alpha = \frac{1}{\gamma-1} = 2.5$. A Eq. (40) deve ser comparada com o modelo baseado nos dados experimentais Eq. (12). A taxa de variação da temperatura com a altitude β é bastante compatível. Entretanto, o expoente α é bastante distinto.

Período do pêndulo

O nosso objetivo é obtermos a expressão para o período do pêndulo simples para qualquer amplitude de movimento. Sendo θ_{\max} a amplitude do movimento oscilatório, a energia mecânica total é $E = mg\ell (1 - \cos\theta_{\max})$. A relação entre a velocidade angular $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ e o ângulo θ é obtida da conservação de energia:

$$mg\ell (1 - \cos\theta_{\max}) = \frac{1}{2} m\ell^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mg\ell (1 - \cos\theta),$$

donde obtemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell} (\cos\theta - \cos\theta_{\max})}, \quad (41)$$

com o sinal \pm se referindo aos instantes em que θ é positivo e negativo. Por simetria do movimento, $\frac{1}{4}T$ é o tempo necessário para θ ir de 0 até θ_{\max} . Portanto, integrando a Eq. (41) sobre esse intervalo, temos que

$$\int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{\max}}} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} - 2\sin^2 \frac{\theta}{2}}}. \quad (42)$$

Usando a seguinte mudança de variáveis

$$\text{sen} u = \frac{\text{sen} \frac{\theta}{2}}{k}, \quad (43)$$

onde $k = \text{sen} \frac{\theta_{\max}}{2}$, e, conseqüentemente

$$d\theta = \frac{2k \cos u}{\cos \frac{\theta}{2}} du = \frac{2k \cos u}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} du, \quad (44)$$

temos então que

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}}, \quad (45)$$

que corresponde à expressão em (21). Note que T não depende de m .

É interessante expandir essa integral para $k \ll 1$ (que corresponde limite harmônico de pequenas amplitudes $\theta_{\max} \ll 1$). Logo,

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 u}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{\text{sen}^2 u}{2} k^2 + \frac{3\text{sen}^4 u}{8} k^4 + \frac{5\text{sen}^6 u}{16} k^6 + \dots \right) du \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \frac{25}{256} k^6 + \dots \right) \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_{\max}^2 + \frac{1}{3072} \theta_{\max}^4 + \frac{173}{737280} \theta_{\max}^6 + \dots \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Vemos que, de fato, as primeiras correções do período com a amplitude são quadráticas e que no limite de pequenas oscilações recuperamos o resultado harmônico.

O método de Euler e de Euler-Cromer

No método de Euler Eqs. (17) e (18), a energia mecânica total é iterada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} E_{i+1} &= \frac{1}{2} m \ell^2 \omega_{i+1}^2 + mg\ell (1 - \cos\theta_{i+1}) \\ &= E_i + \frac{1}{2} gm (\ell \omega_i^2 \cos\theta_i + g \sin^2 \theta_i) (\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t)^3. \end{aligned} \quad (47)$$

Dessa maneira, o ganho de energia em um período

$$\Delta E_T = E(t + T) - E(t) = \sum_i \Delta E_i, \quad (48)$$

onde $\Delta E_i = E_{i+1} - E_i$, é sempre positivo porque $\cos\theta_i$ é, na maioria das vezes, positivo num período. No caso em que $\theta_{\max} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta_i$ é sempre positivo. Em suma, a energia cresce em média no método de Euler.

Usando as Eqs. (19) e (20) do método de Euler-Cromer, a variação de energia de uma iteração para outra muda para

$$E_{i+1} = E_i + \frac{1}{2} gm (\ell \omega_i^2 \cos\theta_i - g \sin^2 \theta_i) (\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta t)^3. \quad (49)$$

Em contraste com (47), ΔE_i não é necessariamente positivo. Na verdade, em um ciclo $\Delta E_T = 0$ até ordem quadrática em Δt . Esse resultado é fácil de ser mostrado no limite de pequenas oscilações onde podemos usar a aproximação harmônica de que $\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t)$ e $\omega(t) = -\theta_{\max} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sin(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t)$. Logo,

$$\Delta E_T \rightarrow \sum_i \frac{1}{2} g m (\ell \omega_i^2 - g \theta_i^2) (\Delta t)^2 \propto \int_t^{t+T} \left(\omega^2 - \frac{g}{\ell} \theta^2 \right) dt = 0, \quad (50)$$

dado que $\int_t^{t+T} \sin^2(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t) dt = \int_t^{t+T} \cos^2(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t) dt$. Em suma, no método de Euler-Cromer, a energia é conservada em média desde de que Δt seja suficientemente pequeno.

Pêndulo simples forçado verticalmente

Considere o caso de um pêndulo simples forçado dado pela Eq. (25). Por simplicidade, vamos considerar o caso não-amortecido $b = 0$. Logo,

$$\ddot{\theta} = - (1 - \alpha \nu^2 \sin(\nu\tau)) \sin \theta = - \frac{dU}{d\theta} + \alpha \nu^2 \sin(\nu\tau) \sin \theta = - \frac{dU}{d\theta} + F_f(\tau, \theta), \quad (51)$$

onde $U = -\cos \theta$ é o potencial externo estático gravitacional (nas unidades convencionais definidas no problema 4), e $F_f(\tau, \theta) = \alpha \nu^2 \sin(\nu\tau) \sin \theta$ é a força (torque) externa rapidamente oscilante.

O intuito é usar o fato de que $\nu \gg 1$ para entender o movimento de $\theta(\tau)$. Partimos da hipótese de que $\theta(\tau) \approx \theta_s(\tau) + \theta_f(\tau)$, onde θ_s representa um movimento lento e θ_f representa um movimentos oscilatório rápido e de pequena amplitude, ou seja, na maior parte do tempo, temos que $\theta_f \ll \theta_s$. Logo, expandindo, $U(\theta_s + \theta_f) \approx U(\theta_s) + \theta_f \frac{dU}{d\theta_s}$ e $F_f(\theta_s + \theta_f) \approx F_f(\theta_s) + \theta_f \frac{\partial F_f}{\partial \theta_s}$, temos que

$$\ddot{\theta}_s + \ddot{\theta}_f \approx - \frac{dU}{d\theta_s} - \theta_f \frac{d^2U}{d\theta_s^2} + F_f(\tau, \theta_s) + \theta_f \frac{\partial F_f}{\partial \theta_s}. \quad (52)$$

Agora precisamos comparar magnitudes. Como a aceleração do termo rápido é alta e oscila com alta frequência, vamos assumir que $\ddot{\theta}_f \approx F_f(\tau, \theta_s)$, de onde concluímos que

$$\theta_f \approx - \frac{1}{\nu^2} F_f(\tau, \theta_s) = - \alpha \sin \theta_s \times \sin(\nu\tau),$$

Note que a amplitude do movimento oscilatório rápido é proporcional a $\sin \theta_s$. Para $\alpha \ll 1$, então a condição $\theta_f \ll \theta_s$ é garantida para todos os instantes de tempo. Resta-nos resolver a equação de movimento para θ_s dada por $\ddot{\theta}_s \approx - \frac{dU}{d\theta_s} - \theta_f \frac{d^2U}{d\theta_s^2} + \theta_f \frac{\partial F_f}{\partial \theta_s}$. De maneira geral, ela é complicada. Entretanto, sabemos que θ_s varia muito pouco em um ciclo de θ_f . Por esse motivo, vamos fazer a média temporal em um ciclo de θ_f . Sendo assim,

$$\begin{aligned} \overline{\ddot{\theta}_s} \approx \ddot{\theta}_s &\approx - \overline{\frac{dU}{d\theta_s}} - \overline{\theta_f \frac{d^2U}{d\theta_s^2}} + \overline{\theta_f \frac{\partial F_f}{\partial \theta_s}} = - \frac{dU}{d\theta_s} - \overline{\theta_f \frac{d^2U}{d\theta_s^2}} + \overline{\theta_f \frac{\partial F_f}{\partial \theta_s}} \\ &\approx - \frac{dU}{d\theta_s} + \overline{\theta_f \frac{\partial F_f}{\partial \theta_s}} = - \frac{dU}{d\theta_s} - \alpha^2 \nu^2 \frac{\sin 2\theta_s}{2} \overline{\sin^2(\nu\tau)} \\ &= - \frac{d}{d\theta_s} \left(- \cos \theta_s - \frac{\alpha^2 \nu^2}{8} \cos 2\theta_s \right) = - \frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta_s}, \end{aligned} \quad (53)$$

onde usamos o resultado de que $\overline{\sin^2(\nu\tau)} = \frac{1}{2}$ e usamos a aproximação de que $\overline{\theta_s} \approx \theta_s$ que implica em $\overline{\theta_f} \approx -\alpha \sin \theta_s \overline{\sin(\nu\tau)} = 0$. Da Eq. (53) nota-se um potencial efetivo para o movimento lento θ_s igual a

$$U_{\text{eff}} = - \cos \theta_s - \frac{\alpha^2 \nu^2}{8} \cos 2\theta_s. \quad (54)$$

O primeiro termo é o potencial externo estático que diz que $\theta_s = 0$ é um ponto de equilíbrio estável enquanto $\theta_s = \pi$ é um ponto de equilíbrio instável. O segundo termo vem da força externa de rápida oscilação. Em média, seu efeito é como de fosse uma força conservativa cujo potencial associado é $-\frac{\alpha^2 \nu^2}{8} \cos 2\theta_s$. Este potencial, entretanto, admite que tanto $\theta_s = 0$ quanto $\theta_s = \pi$ são ângulos de equilíbrio estáveis. Combinando os dois termos, temos que $\theta_s = 0$

é sempre um ponto de equilíbrio estável. Mas $\theta_s = \pi$ só é ponto de equilíbrio estável quando $\frac{d^2}{d\theta_s^2}U_{\text{eff}} > 0$, ou seja, quando $\cos \pi + \frac{\alpha^2 \nu^2}{2} \cos 2\pi > 0$. Com isso, finalmente encontramos a condição de estabilidade dinâmica para o ponto $\theta_s = \pi$:

$$\alpha\nu > \sqrt{2}. \quad (55)$$

Para o caso em que a desigualdade (55) é satisfeita, há um novo ponto de equilíbrio instável θ_s^* entre 0 e π . Este é tal que

$$\frac{d}{d\theta_s}U_{\text{eff}} = 0, \Rightarrow \theta_s^* = \arccos\left(\frac{-2}{(\alpha\nu)^2}\right).$$

Finalmente, dado que o potencial efetivo para o movimento lento é U_{eff} , a frequência de pequenas oscilações ω_s em torno do ponto de equilíbrio dinâmico π pode ser obtida:

$$\ddot{\theta}_s \approx -\sin \theta_s - \frac{(\alpha\nu)^2}{4} \sin 2\theta_s \approx -\left(\frac{(\alpha\nu)^2}{2} - 1\right)(\theta_s - \pi), \Rightarrow \omega_s = \sqrt{\frac{(\alpha\nu)^2 - 2}{2}}.$$