Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики»

Лабораторная работа №3

Численное интегрирование

Вариант: метод трапеций

Выполнил:
Курносова Ирина
Р3231

Преподаватель:
Перл Ольга Вячеславовна

Санкт-Петербург, 2022

Цель работы

Реализовать численный метод для вычисления значения интеграла методом трапеций.

Описание метода

Метод трапеций – метод численного интегрирования функции одной переменной, заключающийся в замене на каждом элементарном отрезке подынтегральной функции на многочлен 1й степени, т.е. на линейную функцию. Площадь под графиком аппроксимируется прямоугольными трапециями, и таким образом интеграл вычисляется путём нахождения суммы площадей полученных трапеций.

Порядок вычислений:

1. Вычисляется количество отрезков, на которые разбивается исходный интервал [a, b]. Количество разбиений зависит от требуемой точности результата.
$$n \geq \sqrt{\frac{|\max\limits_{a \leq x \leq b} f''(x)| * (b-a)^3}{12 * |e|}}$$
e – требуемая точность результата
n – количество разбиений отрезка [a, b] (чем больше n, тем больше потребуется времени для расчётов, поэтому выбираем минимальное допустимое целое значение)

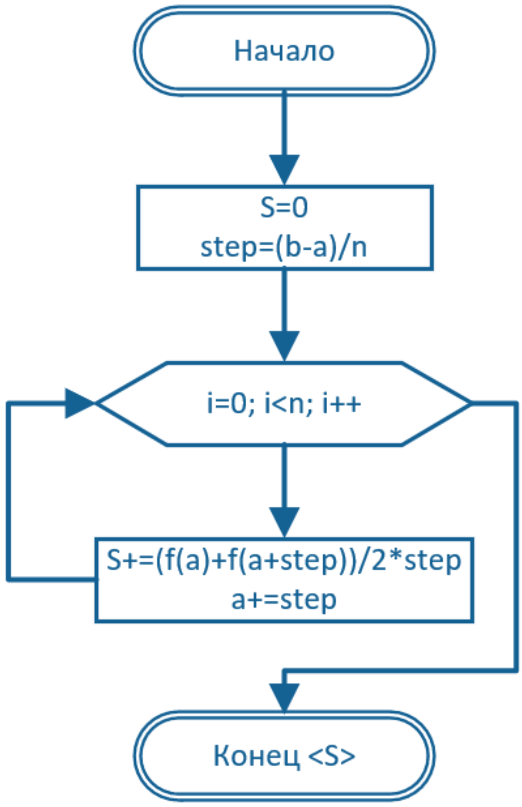
2. Вычисляется шаг интервала, с которым мы будем передвигаться от a до b
$$h = \frac{b-a}{n}$$

3. Вычисляется площадь трапеции на каждом из n отрезках в промежутке [a, b]
$$S = \frac{h}{2} * (f(a) + f(b))$$

4. Для получения значения интеграла находится сумма площадей трапеций (п. 3)
$$\int_a^b f(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Также следует отметить, что данный метод применим только в случае существования интеграла на отрезке [a, b].
Необходимое условие существования интеграла на отрезке: функция должна быть определена и непрерывна на отрезке [a, b]. В данном случае, если функция имеет устранимый разрыв 1го рода в какой-либо точке интервала, то такой разрыв устраняется путём доопределения функции в данной точке.

Блок-схема метода



Листинги методов

Метод трапеций (основной метод для расчёта интеграла)

```
private static Double trapeziodalRun(Equation eq, int n, double a, double b) {
    double s=0;
    double step = (b-a)/n;
    for (int i=0; i<n; i++) {
        s+=((eq.getEquation(a)+eq.getEquation(a+step))/2*step);
        a+=step;
    }
    return s;
}
```

Вспомогательные методы для расчёта необходимого количества разбиений отрезка [a, b]

```
private static int getN(Equation eq, double e, double a, double b) {
    double maxDivision = getMaxDivision(eq, a, b);
    return (int)sqrt(maxDivision*pow((b-a), 3)/(12*e)) + 1;
}

private static double getMaxDivision(Equation eq, double a, double b) {
    double max = 0;
    double x = a;
    while (x<=b) {
        if (abs(eq.secondDerivative(x))>max)
            max = abs(eq.secondDerivative(x));
        x+=0.01;
    }
    return max;
}
```

Результаты работы программы

```
Доступные интегралы:
1)  0.5*x^3 + 2*x^2 - 2
2)  sin(x)/x
3)  1/x

Введите номер интеграла (0 - завершить программу):
1
Введите необходимую точность результата:
0.1
Введите левую границу:
1
Введите правую границу:
2

Полученное значение интеграла: 4.6203703703703685
При n = 3
Значение интеграла методом Ньютона-Лейбница: 4.541666666666666
Разница методов: 0.07870370370370239
```

```
Доступные интегралы:
1)  0.5*x^3 + 2*x^2 - 2
2)  sin(x)/x
3)  1/x

Введите номер интеграла (0 - завершить программу):
1
Введите необходимую точность результата:
0.0000001
Введите левую границу:
1
Введите правую границу:
2

Полученное значение интеграла: 4.5416667518876706
При n = 2883
Значение интеграла методом Ньютона-Лейбница: 4.541666666666666
Разница методов: 8.522100447549974E-8
```

```
Доступные интегралы:
1)  0.5*x^3 + 2*x^2 - 2
2)  sin(x)/x
3)  1/x

Введите номер интеграла (0 - завершить программу):
2
Введите необходимую точность результата:
0.001
Введите левую границу:
-1
Введите правую границу:
1

Существует устранимый разрыв функции в точке 0
Разрыв устранён путём доопределения функции в данной точке

Полученное значение интеграла: 1.8912736335690796
При n = 15
Невозможно посчитать интеграл по формуле Ньютона-Лейбница (первообразная функции не элементарная)
```

```
Доступные интегралы:
1)  0.5*x^3 + 2*x^2 - 2
2)  sin(x)/x
3)  1/x

Введите номер интеграла (0 - завершить программу):
3
Введите необходимую точность результата:
0.001
Введите левую границу:
-1
Введите правую границу:
1

На данном участке функции существует неустранимый разрыв
Вычислить интеграл невозможно
```

Вывод

В ходе данной лабораторной работы был реализован численный метод трапеций для вычисления определённого интеграла. Также для проверки точности результата был реализован метод для нахождения точного значения интеграла при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

Исходя из проделанных тестов можно сделать вывод, что метод трапеций для расчёта интегралов достаточно эффективен и даёт относительно небольшую погрешность даже при малых разбиениях интервала интегрирования. Конечно, для повышения точности значительно повышается количество разбиений интервала и, как следствие, возрастает время вычислений, но это не так критично, если нам необходима точность в пределах 5-ти знаков после запятой.

Также хочу отметить, что метод трапеций имеет преимущество над методом точного расчёта с помощью формулы Ньютона-Лейбница: формула Ньютона Лейбница применима только в условиях непрерывности функции на интервале интегрирования, в то время как метод трапеций так же может быть применён и для функции, имеющую точки разрыва 1-го рода (в том числе «скачок») – можно рассчитать значение интегралов до и после точки разрыва и полученное значение интеграла будет иметь не сильно большую погрешность.