Aufgabe 1. Berechnen Sie (von Hand) die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie dann zur Approximation des betragsgrößten Eigenwerts die Vektoriteration zum Startwert $x_0 = (1, 0, 0)^T$. Bestimmen Sie die ersten 5 Näherungen für den Eigenwert bzw. Eigenvektor.

Aufgabe 2. Implementieren Sie das Jacobi-Verfahren zur gleichzeitigen Bestimmung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix. Testen Sie Ihr Programm an einfachen Beispielen. Berechnen Sie anschließend die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

für $n = 5/10/20$.

Anmerkung: Das Verhalten der Signum-Funktion `sign` in `numpy` unterscheidet sich von der Signum-Funktion im Skript, weil in `numpy` $\texttt{sign}(0) = 0$ gilt, im Skript aber von $\texttt{sign}(0) = 1$ ausgegangen wird. Implementieren Sie daher Ihre eigene Vorzeichenfunktion.

Aufgabe 3. Transformieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -50 & 25 \\ 4 & 25 & -75 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Givens-Rotationen (von Hand) auf Hessenberg-Form.

Aufgabe 4. Implementieren Sie die einfache QR-Iteration ohne Shift. Benutzen Sie die QR-Zerlegung von `numpy` (Funktion `qr` im Modul `numpy.linalg`). Wenden Sie das Verfahren auf die Systeme von Aufgabe 2 an und bestimmen Sie Approximationen für Eigenwerte und Eigenvektoren.

Aufgabe 5. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm und $\|\cdot\|_M$ die induzierte Matrixnorm ist
$$|\lambda| \leq \|A\|_M.$$

(b) Für jedes Polynom $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{n-1} x^{n-1} + x^n$, $p_i \in \mathbb{R}$, gilt
$$p(x) = \det(xI - A)$$

mit der sogenannten Begleitmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -p_0 \\ 1 & \ddots & & & -p_1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -p_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Determinante nach der letzten Spalte.

(c) Für jede Nullstelle x_k des Polynoms aus (b) gilt

$$|x_k| \leq \max\left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |p_i|, 1 \right\} \qquad \text{und} \qquad |x_k| \leq \max\{|p_0|, |p_1| + 1, \ldots, |p_{n-1}| + 1\}.$$

Hinweis: Benutzen Sie (b) sowie (a) mit den Matrizennormen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 6. Sei ✍

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie die Lage der Eigenwerte von A durch Anwendung des Satzes von Gerschgorin auf A und A^T ab. Skizzieren Sie die Gerschgorin-Kreise.