Aufgabe 1. Betrachten Sie folgende quadratische Gleichung:

$$x^2 + 2px - q = 0, \qquad p, q > 0.$$

Ihre Lösungen lassen sich mithilfe der pq-Formel $x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 + q}$ berechnen. Ist man an der größeren der beiden Nullstellen interessiert, erhält man aus der pq-Formel sofort den Algorithmus

$$x_2 = -p + \sqrt{p^2 + q}.$$

Alternativ dazu hat man

$$0 = x^2 + 2px - q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

und damit

$$x_1 x_2 = -q$$

bzw.

$$x_2 = \frac{-q}{x_1}, \qquad x_1 = -p - \sqrt{p^2 + q}.$$

Man erhält also den alternativen Algorithmus

- gebe p, q ein
- berechne $x_1 = -p - \sqrt{p^2 + q}$
- berechne $x_2 = \dfrac{-q}{x_1}$

Implementieren Sie beide Algorithmen zur Berechnung der größeren Nullstelle in `Python`. Schreiben Sie dazu zwei Funktionen, die p, q als Eingabe- bzw. x als Ausgabeparameter besitzen. Vergleichen Sie beide Verfahren für $p = 10^2/10^4/10^6/10^7/10^8$ und $q = 1$. Welches Verfahren ist für große p genauer?

Aufgabe 2. Implementieren Sie in `Python` zwei Funktionen zur Berechnung der abgebrochenen Exponentialreihe $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ wie folgt:

$$x, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{bzw.} \qquad x, n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Übergeben Sie n, x als Parameter. Vergleichen Sie e^x mit den beiden Prozeduren für verschiedene Wertepaare von n und x.

Aufgabe 3. Zur Approximation von $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ für stetiges f können als Ersatzprobleme eine der Rechteck-Summen

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih), \qquad \text{bzw.} \qquad h\sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$$

oder die Trapezregel

$$\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)+f(b)\right)$$

benutzt werden, wobei $h=\frac{b-a}{n}$ ist. Die Anzahl n der Unterteilungen des Integrationsbereichs bestimmt dabei den Aufwand des jeweiligen Ersatzproblems und dessen Genauigkeit.

Implementieren Sie linksseitige und rechtsseitige Rechteckregel sowie die Trapezregel als Funktionen in `Python` mit Parametern f, a, b, n. Wenden Sie die Verfahren auf

$$\int_{\frac{1}{10}}^{10} \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_1^2 \ln(x)\,dx$$

an und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4. Vektoroperationen werden in `Python` in der Regel sehr viel schneller abgearbeitet als Schleifen über Skalaroperationen. Schreiben Sie die Trapezregel in Vektornotation um, indem Sie

- einen Vektor mit sämtlichen Stützstellen $a+ih$ erzeugen
- den Integranden f auf diesen Vektor anwenden
- den Vektor der Ergebnisse mit der Funktion `sum` geeignet aufsummieren.

Aufgabe 5. Um das asymptotische Wachstumsverhalten zweier Funktionen zu vergleichen, bedient man sich der sog. $\mathcal{O}$-Notation. Gegeben seien zwei reellwertige Funktionen f, g. Dann definiert man

$$f(x)=o(g(x)) \text{ für } x\to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=0$$

(f wächst langsamer als g). Man sagt, "f ist klein o von g". Weiter setzt man

$$f(x)=\mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x\to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, C:\limsup_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<C$$

(f wächst asymptotisch höchstens so schnell wie g); "f ist groß $\mathcal{O}$ von g".
Man zeige:

(a) $f(x)=o(g(x)),\ x\to x_0 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\mathcal{O}(g(x)),\ x\to x_0$

(b) $(1+x)^3=1+3x+\mathcal{O}(x^2), \quad x\to 0$

(c) $\sin x = x+\mathcal{O}(x^3), \quad x\to 0$

(d) Die Umkehrung der Aussage (a) gilt nicht. Man finde ein Gegenbeispiel.

(e) Seien $f_1(x)=\mathcal{O}(g(x)),\ x\to x_0$ und $f_2(x)=\mathcal{O}(g(x)),\ x\to x_0$ gegeben.
Dann gilt
$$(f_1+f_2)(x)=\mathcal{O}(g(x)), x\to x_0.$$

(f) Sei $f(x)=\mathcal{O}(g(x)),\ x\to x_0$ gegeben und $c\in\mathbb{R}$. Dann gilt $(cf)(x)=\mathcal{O}(g(x)),\ x\to x_0$.

(g) Sei $f(x)=x^3+3x$. Man gebe das maximale $k\in\mathbb{N}$ an, so dass gilt:
$$f(x)=\mathcal{O}(x^k), \quad x\to 0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(x)=\mathcal{O}(x^k), \quad x\to\infty.$$