Aufgabe 1.

(a) Für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wissen wir, dass die Koeffizienten von A und b gestört sind mit

$$|\Delta A| \leq \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |\Delta b| \leq \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch ein numerisches Verfahren haben wir als Näherungslösung $\tilde{x} = (0.9, 1.1)^T$ erhalten. Testen Sie mit Hilfe des Resultats von Prager und Oettli, ob $\tilde{x}$ als Lösung akzeptiert werden kann.

(b) Wiederholen Sie die Betrachtungen von (a) für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1.001 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\Delta A| \leq 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad |\Delta b| \leq 5 \cdot 10^{-4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{x} = (501, 500)^T$.

Aufgabe 2. Implementieren Sie die LU-Zerlegung mit Spalten-Pivot-Suche. Testen Sie die Routinen mit einfachen Beispielsystemen.

Lösen Sie dann das lineare Gleichungssystem mit Matrix A aus Aufgabe 5 auf Blatt 3 und der rechten Seite

$$b = \big(1 + \beta, \underbrace{1 - \beta, \ldots, 1 - \beta}_{n-2 \text{ mal}}, -\beta\big)^T,$$

für $\beta = 10$ und $n = 10, 15, 20$ jeweils mit/ohne Spalten-Pivot-Suche. Vergleichen Sie die Resultate mit der exakten Lösung

$$x = (1, \ldots, 1)^T.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Householder-QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -20 \\ -4 & 11 & -1 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für den ersten Schritt (und damit analog für alle weiteren Schritte) der Householder-Zerlegung der folgende Zusammenhang gilt:

$$d = -\text{sign}(a_{11})\|a_1\|, \qquad v_1 = a_{11} - d, \qquad \|v\|_2^2 = -2v_1 d.$$

Dabei ist d das separat zu speichernde neue Diagonalelement und v_1 die erste Komponente des Vektors v. Damit kann $\|v\|_2$ also aus d und v_1 berechnet werden, was die Implementierung des Schritts $x = Q^T y$ vereinfacht.

Aufgabe 5. Implementieren Sie das Householder-Verfahren. Benutzen Sie das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe. Testen Sie das Verfahren zunächst anhand einfacher Beispielsysteme. Wenden Sie es dann auf das von Wilkinson 1961 gegebene Beispielsystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ -1 & \ddots & & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & & & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 4-n \\ 2-n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

d.h.

$$b = \big(b_i\big)_{i=1,\ldots,n}, \qquad b_i = \begin{cases} 3-i, & i = 1, \ldots, n-1 \\ 2-n, & i = n \end{cases},$$

für $n = 40, 50, 60$ an. Die exakte Lösung ist jeweils $x = (1, \ldots, 1)^T$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem der LU-Zerlegung mit Spalten-Pivot.