Aufgabe 1.

(a) Beweisen Sie folgenden Satz, der zur Abschätzung der Lage von Eigenwerten eingesetzt wird: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, also $A^T = A$, und habe die reellen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt mit $d = Ax - \lambda x$:

$$\min_{i=1}^{n} |\lambda - \lambda_i| \leq \frac{||d||_2}{||x||_2}$$

Anleitung: Benutzen Sie, dass eine Basis aus Eigenvektoren von A existiert.

(b) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte 2, 4 und 13. Wir wählen $\lambda = 12$ und $x = (0.9, 1, 1.1)^T$. Wenden Sie die Aussage aus (a) an, um eine Lageabschätzung eines Eigenwertes von A anzugeben.

Aufgabe 2. Vergleicht man das Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

mit dem Sekanten-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

so fällt auf, dass bei geschickter Implementierung beim Sekanten-Verfahren (außer im ersten Schritt) pro Schritt nur eine Funktionsauswertung $f(x_k)$ durchgeführt werden muss, wogegen beim Newton-Verfahren zwei Auswertungen $f(x_k)$ bzw. $f'(x_k)$ anfallen.

Wenden Sie beide Verfahren an, um das folgende Problem zu lösen. Die Funktion

$$b(x) = \frac{a}{1 - ce^{-dx}}, \qquad a = 9.8606, \quad c = -1.1085 \cdot 10^{25}, \quad d = 0.029$$

beschreibt näherungsweise die Weltbevölkerung (in Milliarden Menschen) im Jahr x. Bestimmen Sie den Zeitpunkt x an dem die Weltbevölkerung die 9-Milliarden-Grenze übersteigt. Benutzen Sie als Startwert für das Newton-Verfahren $x_0 = 1961$ bzw. für das Sekanten-Verfahren $x_{-1} = 1961$, $x_0 = 2000$. Vergleichen Sie die Genauigkeit der beiden Verfahren. Welches Verfahren benötigt weniger Aufwand, um Maschinengenauigkeit zu erreichen?

Aufgabe 3. Untersuchen Sie auf dem Intervall $X = [1, 2]$ die Funktion

$$f(x) = x + \ln(x) - 2$$

mit Hilfe des Newton-Verfahrens auf Nullstellen.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren auf X eine Kontraktion mit $\alpha = \frac{1}{4}$ ist.

(b) Geben Sie mit Hilfe der a-priori Abschätzung eine obere Schranke für die erforderliche Anzahl an Iterationen an, um bei $x_0 = 1$ einen absoluten Fehler von sicher kleiner als 10^{-6} zu erreichen.

(c) Führen Sie die Newton-Iteration für $x_0 = 1$ durch. Benutzen Sie die a-posteriori Fehlerabschätzung und stoppen Sie die Iteration, sobald der absolute Fehler sicher kleiner als 10^{-6} ist.