Aufgabe 1. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Iterationsmatrizen B_J und B_{GS} des Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Verfahrens und deren Spektralradien.

(b) Berechnen Sie (mit dem Taschenrechner) die Iterierten $x_1, \dots, x_5$ für das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren zum Startwert $x_0 = (0, 0, 0)^T$. Benutzen Sie dazu jeweils die komponentenweise Darstellung der Verfahren.

Aufgabe 2. Implementieren Sie (so einfach wie möglich) das Gauß-Seidel-Verfahren für die Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1.16 & & \\ 0.16 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1.16 \\ & & 0.16 & 1 \end{pmatrix}$$

und die rechte Seite $b = (-0.16, 0, \dots, 0, 1.16)^T$, d.h. die exakte Lösung ist $x = (1, \dots, 1)^T$. Wenden Sie es für $n = 30$ an und berechnen Sie zum Startvektor $x_0 = (0, \dots, 0)^T$ die ersten 120 Iterierten. Geben Sie in jedem Schritt den Fehler $\|x_k - x\|_2$ aus.

Aufgabe 3. Implementieren Sie die Nachiteration für die LU-Zerlegung mit Spalten-Pivot-Suche. Wenden Sie das Verfahren auf folgende Gleichungssysteme $Ax = b$ an.

(a) Für $n = 40, 50, 60$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ \vdots & & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 4-n \\ 2-n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

d.h. die exakte Lösung ist jeweils $x = (1, \dots, 1)^T$.

(b) Für $n = 10, \dots, 15$ sei

$$A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 1 & j = i \\ i+j & j < i \end{cases}, \qquad b = \left(1, 0, \dots, 0\right)^T,$$

d.h. die exakte Lösung ist immer ganzzahlig und $x_1 = 1$.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gauß-Seidel-Verfahrens. Berechnen Sie die ersten 4 Iterierten zu

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \tilde{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dann die Eigenwerte und Eigenvektoren der Iterationsmatrix B_{GS}.