Aufgabe 1. Programmieren Sie in `Python` die LU-Zerlegung für beliebige reguläre Matrizen. Implementieren Sie dazu Funktionen

`lu,p=zerlegung(a)`	:	$p \cdot a = l \cdot u$
`y=permutation(p,x)`	:	$y = p \cdot x$
`y=vorwaerts(l,x)`	:	$y = l^{-1} \cdot x$
`y=rueckwaerts(u,x)`	:	$y = u^{-1} \cdot x$

zur Zerlegung der Matrix a, der Permutation eines Vektors x anhand der Permutationsmatrix die im Vektor p kodiert ist bzw. zum vorwärts und rückwärts Einsetzen (lu ist dabei *eine* Matrix, die L und U wie in der Vorlesung erklärt enthält). Zur Permutation während der Zerlegung benutzen Sie jeweils die erste Zeile unterhalb der Diagonalen, die ein entsprechendes Element ungleich 0 enthält.

Testen Sie ihren Algorithmus mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad b' = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie Ihre Routine anschließend auf das System $Ax = b$ mit

$$A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1,\dots,n}}, \quad a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \qquad b = \left(b_i\right)_{i=1,\dots,n}, \quad b_i = \frac{1}{i+1}$$

an, wobei für die Dimension n die Werte $5, 10, 15, 20$ benutzt werden soll. Vergleichen Sie die numerischen Resultate mit der exakten Lösung $x = (0, 1, 0, \dots, 0)^T$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix ✍

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -5 & 5 \\ 1 & -5 & 14 & -14 \\ -1 & 5 & -14 & 30 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für $f(x) = \tan(x)$ und $x = 0.1$, $\delta = 10^{-2}$ bzw. $x = 1.5$, $\delta = 10^{-2}$ obere Schranken für die absolute bzw. relative Kondition. ✍

Aufgabe 4. Bestimmen Sie mit Hilfe der differentiellen Fehleranalyse eine Näherung von $\varkappa_a$ und $\varkappa_r$ für ✍

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}, \qquad x_1 = 1,\ x_2 = 10^{-4}.$$

Wählen Sie dazu die l_∞-Norm auf $X = \mathbb{R}^2$ und als Norm auf $Y = \mathbb{R}$ den Absolutbetrag. Wie lauten die entsprechenden Näherungen an die Konditionszahlen, wenn man stattdessen auf X die euklidische Norm verwendet?

Hinweis: Für die von der euklidischen Norm induzierte Matrixnorm einer Matrix A gilt $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, auch wenn A rechteckig ist.

Aufgabe 5. Für $\beta > 1$ sind die folgenden Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben: ✍

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ -\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = -\frac{1}{\beta^n} \begin{pmatrix} 0 & \beta^{n-1} & \beta^{n-2} & \cdots & \beta^2 & \beta \\ 0 & 0 & \beta^{n-1} & \cdots & \beta^3 & \beta^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \beta^{n-1} & \beta^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta^{n-1} \\ -\beta^{n-1} & -\beta^{n-2} & -\beta^{n-3} & \cdots & -\beta & -\beta^0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie $B = A^{-1}$. Hinweis: Berechnen Sie AB und folgern daraus die Behauptung.
Berechnen Sie die Kondition $\varkappa_\infty(A)$. Ist die Kondition unabhängig von der Dimension n beschränkt?