Aufgabe 1. Die Funktion $f(x) = \arctan(x) - x$ hat $x = 0$ als einzige Nullstelle.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren nur linear konvergiert.

(b) Wenden Sie dann die in der Vorlesung besprochenen Modifikationen an, um ein quadratisch konvergentes Verfahren zu erhalten. Bestimmen Sie zu $x_0 = 1$ die Iterierten $x_1, \dots, x_4$ des Standard-Newton-Verfahrens sowie die Iterierten der beiden Modifikationen.

Aufgabe 2. Suchen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens Nullstellen von

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(x) - y \\ e^{-y} - x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Gilt $f(x) = 0,\ f'(x) \neq 0$, aber $f''(x) = 0$, dann konvergiert das Newton-Verfahren sogar *kubisch* gegen x, wenn der Startwert x_0 hinreichend nahe an x liegt.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu den folgenden Wertepaaren

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	3
y_i	-2	4	6	22

(a) mit Hilfe von Lagrange-Polynomen

(b) über die Newton-Darstellung

Aufgabe 5. Das Interpolationspolynom in Newton-Darstellung lautet

$$p_n(x) = d_{00} + d_{10}(x - x_0) + \ldots + d_{n0}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}),$$

wobei d_{k0} dividierte Differenzen sind:

$$d_{ii} = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots \qquad\qquad d_{nm} = \frac{d_{n\,m+1} - d_{n-1\,m}}{x_n - x_m} \qquad n > m.$$

Zur Auswertung schreiben wir $p_n(x)$ als

$$p_n(x) = d_{00} + (x - x_0)\big(d_{10} + (x - x_1)(d_{20} + \ldots (x - x_{n-1})d_{n0}) \ldots\big)$$

und erhalten analog zum Horner-Schema

$$q_0 = d_{n0}, \qquad q_k = d_{n-k\,0} + (x - x_{n-k})q_{k-1} \qquad k = 1, \ldots, n$$

und $p_n(x) = q_n$.

(a) Implementieren Sie je eine Funktion zur Berechnung der dividierten Differenzen und der Auswertung des Interpolationspolynoms nach dem Horner-ähnlichen Schema.

Testen Sie Ihre Implementierung anhand des Beispiels aus der Vorlesung, in dem die 3 Punkte $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(3, 6)$ interpoliert werden und das Interpolationspolynom für $x = 2$ ausgewertet wird.

(b) Interpolationspolynome höheren Grades können zu sehr starken Oszillationen neigen (Runge-Phänomen). Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [-5, 5],$$

sowie die m äquidistant in $[-5, 5]$ verteilten Stützstellen

$$x_i = -5 + \frac{10}{m-1} i, \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

Zur Interpolation verwenden wir die m Punkte

$$(x_i, y_i), \qquad y_i = f(x_i), \qquad i = 0, \ldots, m-1.$$

Berechnen Sie für $m = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ das Interpolationspolynom. Vergleichen Sie den Graphen von f mit dem des Interpolationspolynoms.

(c) Berechnen Sie analog für die folgenden nicht äquidistanten Stützstellen $\tilde{x}_i$ das zugehörige Interpolationspolynom durch die Punkte

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i), \quad \tilde{x}_i = -5 \cos\left(\pi \frac{2i+1}{2m}\right), \quad \tilde{y}_i = f(\tilde{x}_i) = \frac{1}{1+\tilde{x}_i^2}, \quad i = 0, \ldots, m-1$$

und vergleichen Sie es mit dem äquidistanten Fall für $m = 9, 11, 13$.