Aufgabe 1. (Bernstein-Polynome) Wir betrachten auf einem Intervall $[a,b]$ den Vektorraum $\mathcal{P}_n[a,b]$ der reellwertigen Polynome mit Höchstgrad n, also $\mathcal{P}_n[a,b] = \{p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}, x \in [a,b]\}$. Für den Spezialfall $a = 0, b = 1$ (der allgemeine Fall lässt sich durch eine affine Transformation $\varphi : [a,b] \to [0,1]$ auf diesen Fall zurückführen) sind die *Bernsteinpolynome* vom Grad n definiert durch

$$B_i^n(x) = \binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Man beweise:

(a) $x = 0$ ist i-fache Nullstelle von B_i^n, $0 \leq i \leq n$.

(b) $x = 1$ ist $n - i$-fache Nullstelle von B_i^n, $0 \leq i \leq n$.

(c) Symmetrieeigenschaft: $B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x)$, $0 \leq i \leq n$.

(d) $(1-x)B_0^n(x) = B_0^{n+1}(x)$ und $xB_n^n(x) = B_{n+1}^{n+1}(x)$.

(e) $B_i^n \geq 0 \; \forall x \in [0,1]$.

(f) Rekursionsformel: $B_i^n(x) = xB_{i-1}^{n-1}(x) + (1-x)B_i^{n-1}(x)$.

(g) Teilung der Eins: $1 = \sum_{i=0}^{n} B_i^n$. Anleitung: Verwenden Sie die allgemeine binomische Formel oder führen Sie einen Induktionsbeweis über n mit den schon gezeigten Rekursionsformeln.

(h) $\{B_0^n, \ldots, B_n^n\}$ bildet eine Basis von $\mathcal{P}_n[0,1]$. Anleitung: Zeigen Sie lineare Unabhängigkeit (warum genügt dies?). Setzen Sie dazu mit $0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i B_i^n(x)$ an und zeigen Sie per Induktion über i, dass dann $\alpha_i = 0$ gelten muss. Betrachten Sie insbesondere die Stelle $x = 0$, für die ja obige Gleichung auch gelten muss.

Berechnen und skizzieren Sie B_0^1 und B_1^1 sowie B_0^2, B_1^2, B_2^2.

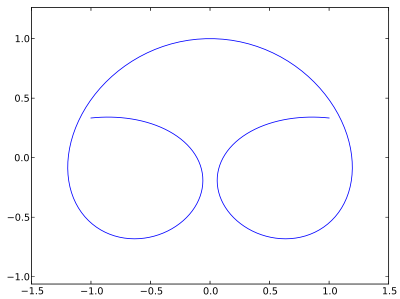
Aufgabe 2. Implementieren Sie die Berechnung eines natürlichen kubischen Splines sowie dessen Auswertung (Horner-Schema).

Bestimmen Sie damit den interpolierenden Spline zu äquidistanten Stützstellen in $[-5,5]$, wobei die Stützwerte mit der Funktion des Beispiels von Runge (vgl. Übungsblatt 8, Aufgabe 5) gewonnen werden sollen. Stellen Sie ihn für $m = 5, 7, 9, 11, 17$ graphisch dar.

Aufgabe 3. Die Abbildung $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{\sin(2\pi t)}{t^2+1} \\ \frac{\cos(2\pi t)}{2t^2+1} \end{pmatrix}$$

definiert folgende parametrische Kurve in $\mathbb{R}^2$:



Die Kurve kann man durch natürliche kubische Splines annähern:

- betrachte m Stützstellen $t_i = \frac{2}{m-1} i - 1$, $i = 0, \ldots, m-1$
- berechne
$$\gamma(t_i) = \begin{pmatrix} x(t_i) \\ y(t_i) \end{pmatrix} \qquad i = 0, \ldots, m-1$$
- interpoliere einen Spline s_x durch $(t_i, x(t_i))$ und einen zweiten Spline s_y durch $(t_i, y(t_i))$
- benutze
$$t \mapsto \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix}$$
als Approximation von γ.

Implementieren Sie diese Approximation und visualisieren Sie die Ergebnisse für $m = 5, 7, 9, 11, 17$.

Aufgabe 4. Die Punkte (x_i, y_i),

$$x_i = 10^{i-7}, \qquad y_i = 1 + x_i, \qquad i = 1, \ldots, 7$$

liegen alle auf dem Graphen des Polynoms $p(x) = 1 + x$.

Benutzen Sie diese Punkte als Eingabe zur Berechnung eines approximierenden Polynoms vom Grad 5 mit Hilfe eines linearen Ausgleichsproblems. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit

(a) der Normalgleichung und dem in `NumPy` vorhandenen Standardlöser für lineare Gleichungssysteme (`solve(A,b)`)

(b) dem Householder-Verfahren

(c) dem CGLS Verfahren

und vergleichen Sie die damit ermittelten Polynomkoeffizienten mit denen des interpolierenden Polynoms $p(x) = 1 + x$.